LOGICAL FOUNDATINS OF PROGRAMMING – Class 1

QUIZ – 11, 12

Name: Student ID:

1. 다음 문장을 Tarski's World에서 사용할 때, 오류가 발생하는 문장을 모두 고르시오.
   (a) ∀x Small(x)
   (b) ∀y Cube(x)
   (c) ∀x Small(x) → Cube(x)
   (d) ∀x Cube(x) ∧ Small(x)
   (e) ∃a Cube(a)

   ➔ (b), (c), (d), (e) .

   (b) : 한정사와 변수가 다르다.

   (c), (d) : 한정사에 하나의 술어만 포함되고 있다. 괄호를 통해서 함께 묶어주어야 한다.

   (e) : a 는 변수가 아니므로 오류가 발생한다.

2. 주어진 7가지 전제를 이용하여, 다음을 증명하여라. (Hint: Proof by contradiction)

① If P is a wff, so is ¬P

② If P1, … ,Pn are wffs, so is (P1 ∧ … ∧ Pn)

③ If P1, … ,Pn are wffs, os is (P1 ∨ … ∨ Pn)

④ If P and Q are wffs, so is (P → Q)

⑤ If P and Q are wffs, so is (P ↔ Q)

⑥ If P is a wff and ν is a variable (i.e., one of t, u, v, w, x, …), then ∀νP is a wff

⑦ If P is a wff and ν is a variable (i.e., one of t, u, v, w, x, …), then ∃νP is a wff

---

8. ∀x (Student(x) → Smart(x)) is not a wff

---

9. Student(x) → Smart(x) is not a wff or x is not a variable

Modus Tollens with 6 and 8

10. Student(x) → Smart(x) is not a wff

11. Student(x) is not a wff or Smart(x) is not a wff

Modus Tellens with 4 and 10

12. Student(x) is not a wff

---

13. ⊥

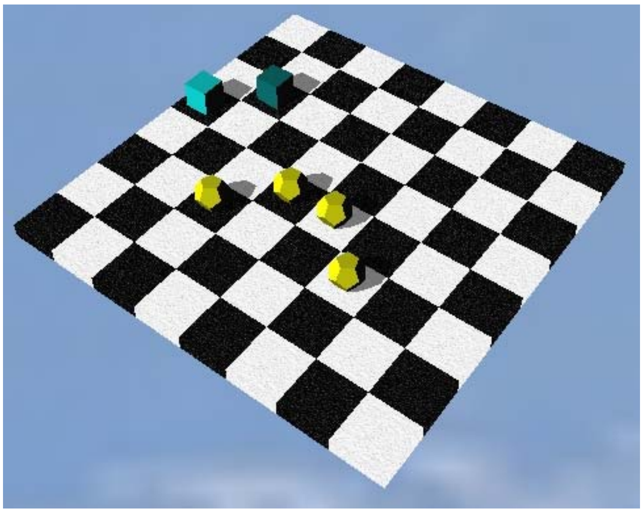
14. Smart(x) is not a wff

15. ⊥

16. ⊥

17. ∀x (Student(x) → Smart(x)) is a wff

3. 주어진 Tarski's World에서 아래 항목의 참/거짓을 판단하시오. (전제: ∀x Small(x))



(ㄱ) ∃x Cube(x)

(ㄴ) ∃x Tet(x)

(ㄷ) ∀x Large(x)

(ㄹ) ∃x Cube(x) ∧ ∃x Dodec(x)

(ㅁ) ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

(ㅂ) ∃y (Dodec(y) ∧ Large(y))

(ㅅ) ∃y (Dodec(y) ∨ Large(y))

(ㅇ) ∀z (Dodec(z) ∧ Cube(z))

(ㅈ) ∀z (Dodec(z) ∨ Cube(z))

→ (ㄱ) True , 정육면체 존재함

(ㄴ) False , 정사면제 존재 안함

(ㄷ) False,

(ㄹ) True, Cube도 존재하고 Dodec도 존재하니 참이다.

(ㅁ) False, Cube이며 Dodec인 것은 없다.

(ㅂ) False, Large인 Dodec은 존재하지 않는다.

(ㅅ) True, Dodec이 존재한다.

(ㅇ) False, Dodec이면서 Cube인 것은 없다.

(ㅈ) True, 모든 사물이 Dodec이거나 Cube이다.

4. 다음 각각의 문제에 대해 아래 (a), (b), (c)중 해당하는 것을 고르시오.
((a)tautology이다. (b)logical truth이지만, tautology는 아니다. (c)logical truth가 아니다.)

(1) $\forall x\ (x = x)$

➔ (b) logical truth이지만, tautology는 아니다.

문장 자체를 A라는 atomic sentence로 생각했을 때, A는 T와 F를 가지므로 tautology는 아니지만 x=x가 논리적으로는 맞으므로 logical truth는 성립한다.

(2) $\forall x(\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Small}(x)) \rightarrow \forall x(\mathrm{Small}(x) \wedge \mathrm{Cube}(x))$

➔ (b) logical truth이지만, tautology는 아니다.

→를 기준으로 앞을 A라하고, 뒤를 B라고 했을 때, A → B가 된다. 이 경우 F를 가지는 경우가 발생하므로 tautology는 아니지만 논리적으로 모든 x가 cube이고 작을 경우 모든 x가 작고 cube이다는 성립하므로 logical truth이다.

(3) $[\forall z\ (\mathrm{Cube}(z) \rightarrow \mathrm{Large}(z)) \wedge \mathrm{Cube}(b)] \rightarrow \mathrm{Large}(b)$

➔ (b) logical truth이지만, tautology는 아니다.

$\forall z\ (\mathrm{Cube}(z) \rightarrow \mathrm{Large}(z))$ 이 부분을 A, Cube(b) 이 부분을 B, Large(b) 이 부분을 C라고 했을 때, $[A \wedge B] \rightarrow C$가 된다. F를 가지는 경우가 발생하므로 tautology가 아니다. 하지만 논리적으로는 성립하기 때문에 logical truth이다.

(4) $[(\forall u\ \mathrm{Cube}(u) \rightarrow \forall u\ \mathrm{Small}(u)) \wedge \neg\forall u\ \mathrm{Small}(u)] \rightarrow \neg\forall u\ \mathrm{Cube}(u)$

➔ (a) tautology 이다.

$\forall u\ \mathrm{Cube}(u)$ 이 부분을 A, $\forall u\ \mathrm{Small}(u)$ 이 부분을 B라고 할 때, $[(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$ 이렇게 표현 할 수 있고, 모두 참이 나오므로 tautology가 된다.

Tautology; TT-Possible

=1= A	=2= B	[(A → B)	∧	¬B]	→ (1)	¬A
T	T	T	F	F	T	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

5. 다음 각각의 문제를 atomic sentence로 바꾸어 truth table을 그리고, tautology인지 아닌지 작성하시오. (tautology일 경우 tautology라고 정확히 명시해 주시기 바랍니다.)

(1) (∃y Tet(y) ∧ ∀z Small(z)) →∀z Small(z)

➔ tautology이다. ∃y Tet(y)을 A라 하고, ∀z Small(z)을 B라고 할 경우 (A∧B) →B 이므로 truth table을 그리면 다음과 같이 되고 tautology 인 것을 확인 할 수 있다.

Tautology; TT-Possible

=1= A	=2= B	(A ∧ B)	→ (1)	B
T	T	T	T	
T	F	F	T	
F	T	F	T	
F	F	F	T	

(2) ¬(Tet(d) ∧ ∀x Small(x)) → (¬Tet(d) ∨ ¬∀y Small(y))

➔ tautology가 아니다. Tet(d)를 A라하고 ∀x Small(x)를 B라고 하고, ∀y Small(y)를 C라고 했을 때, ¬(A ∧ B) → (¬A ∨ ¬C)가 된다. Truth table을 그리면 다음과 같이 되고, tautology가 아닌 것을 알 수 있다.

Not Tautology; TT-Possible

=1= A	=2= B	=3= C	¬	(A ∧ B)	→ (1)	(¬A	∨	¬C)
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T	F
F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	T	T	T	T

(3) $\forall x(\mathrm{Cube}(x) \to \mathrm{Small}(x)) \vee \exists x\ \mathrm{Dodec}(x)$

➔ tautology가 아니다. $\forall x(\mathrm{Cube}(x) \to \mathrm{Small}(x))$를 A라하고 $\exists x\ \mathrm{Dodec}(x)$를 B라고 했을 때, $A \vee B$가 된다. Truth table을 그리면 다음과 같이 되고, tautology가 아닌 것을 알 수 있다.

6. 다음 각각의 문제에 대해 FO-validity 인지 아닌지를 말하고, 이유를 말하시오.

(1) $\forall x\ \mathrm{Cube}(x) \to \mathrm{Cube}(b)$

➔ FO-validity이다.

"모든 존재하는 사물이 Cube면, b는 Cube이다"라는 문장을 어느 모양으로 고치더라도 b는 그 모양을 만족하기 때문에 항상 참이 되는 문장이기 때문에 FO-validity라고 할 수 있다.

(2) $(\mathrm{Small}(b) \wedge \mathrm{SameSize}(b,c)) \to \mathrm{Small}(c)$

➔ FO-validity가 아니다.

SameSize라는 의미를 해석하지 않으면 b의 size가 Small이라하더라도 c를 Small이라고 할 수 없다. SameSize 대신 different를 넣으면 성립하지 않는 것을 확인할 수 있다.

(3) $(\mathrm{Cube}(b) \wedge b = c) \to \mathrm{Cube}(c)$

➔ FO-validity이다.

Cube라는 모양을 생각하지 않더라도 b와 c가 같기 때문에 어느 모양을 넣어도 b=c이기 때문에 항상 참이 되는 FO-validity이다.

(4)

$$\begin{array}{|l}
\forall x\ (\mathrm{Tet}(x) \to \mathrm{Large}(x)) \\
\neg \mathrm{Large}(b) \\
\hline
\neg \mathrm{Tet}(b)
\end{array}$$

➔ FO-consequence이다.

Tet과 Large대신에 어떤 문장을 넣더라도 valid하다. 예를 들어, Tet 대신 A를 넣고 Large 대신에 B를 넣으면 $\forall x\ (A(x) \to B(x))$가 된다. 이때 $\neg B(b)$라면 $A(b)$가 될 수 없다. 따라서 FO-valid하다.

7. 주어진 문장과 FO-equivalence한 문장을 보기에서 고르시오.

<보기>

(a) $\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$ (b) $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$ (c) $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$

(d) $\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$ (e) $P \vee \forall x\ Q(x)$ (f) $P \wedge \exists x\ Q(x)$ (g) $P \vee \exists x\ Q(x)$ (h) 없음

(1) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

➔(h)

(2) $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$

➔(a)

(3) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

➔(h)

(4) $\exists x(P(x) \vee Q(x))$

➔(d)

(5) $\exists x(P \wedge Q(x))$

➔(f)

(6) $\forall x(P \vee Q(x))$

➔(e)

LOGICAL FOUNDATINS OF PROGRAMMING – Class 1

QUIZ – 13, 14

Name: Student ID:

1. 주어진 문장을 FOL로 옳게 고치시오.

   1) For every dodecahedron, if a cube is back of it, the cube is smaller than it.
      ➔ ∀y (Dodec(y) → ∀x ((Cube(x)∧BackOF(x, y)) → Smaller(x, y)))

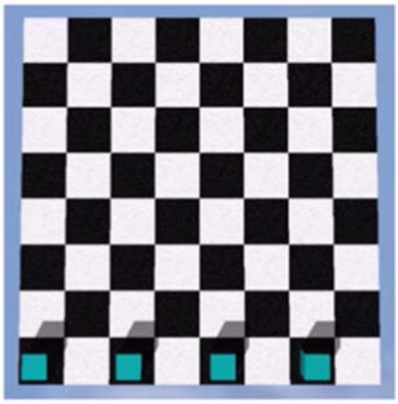
   2) For every two objects, if a tetrahedron is between them, they are small.
      ➔ ∀y∀z∀x((Tet(x)∧Between(x,y,z)) → (Small(y)∧Small(z))))

   3) Each cube is to the left of a tetrahedron.
      ➔ ∀x (Cube(x) → ∃y (Tet(y) ∧ LeftOf(x, y))

2. 오른쪽 World에 대해 주어진 문장이 참인지 거짓인지를 밝히고 그 이유를 말하시오.

   ∀x ∀y [(Cube(x) ∧ Cube(y)) → (LeftOf(x, y) ∨ RightOf(x, y))]

   ➔ 거짓
   x하고 y가 동일한 cube를 가리킬 때에 위 문장은 성립하지 않기 때문에 거짓이다.



3. 아래의 내용은 주어진 문장을 FOL로 잘못 옮긴 결과이다. 물음에 답하시오.

   If a freshman takes a logic class, then he or she must be smart.

   ➔ ∃x (Freshman(x) ∧ ∃y (LogicClass(y) ∧ Takes(x, y))) → Smart(x)

   1) 잘못된 부분을 찾고 틀린 이유를 서술하시오.
      ➔ Smart(x) 부분의 범위가 지정되어 있지 않다. 만약 Smart(x)까지 포함하여 ∃x로 묶으면 주어진 문장의 의미와 맞지 않게 된다.

   2) 주어진 문장을 FOL로 변환한 결과와 변환하는 과정을 보이시오.
      ➔ If a freshman takes a logic class, then he or she must be smart.

위 문장을 Every freshman who takes a logic class must be smart. 로 바꿀 수 있다. 이를 FOL로 바꾸면 $\forall x\ [(Freshman(x) \wedge \exists y\ (LogicClass(y) \wedge Takes(x, y))) \rightarrow Smart(x)]$로 나타낼 수 있다.

4. 비정형 증명(Informal Proof)을 하시오. (단, 어떠한 규칙이 사용되었는지 언급하시오.)
(Hint)사용된 규칙: Modus Ponens, Universal Instantiation, Conjunction Introduction

$\forall x\ [\ Cube(x) \rightarrow Large(x)\ ]$	
$\forall x\ [\ Large(x) \rightarrow LeftOf(x, b)\ ]$	
$Cube(d)$	
$Cube(d) \rightarrow Large(d)$	Universal Instantiation
$Large(d)$	Modus Ponens
$Large(d) \rightarrow LeftOf(d, b)$	Universal Instantiation
$Left(d, b)$	Modus Ponens
$Large(d) \wedge LeftOf(d, b)$	Conjunction Introduction
$\exists x\ [\ Large(x) \wedge LeftOf(x, b)\ ]$	Existential Generalization

5. 다음 각각의 문제가 valid 인지 아닌 지 말하고, valid한 경우 비정형 증명(Informal Proof)을, 아닌 경우 이유를 말하시오.

(1)

$\forall x\ [\ Cube(x) \rightarrow Large(x)\ ]$
$\forall x\ [\ Large(x) \rightarrow LeftOf(x, b)\ ]$

$\exists x\ [\ Large(x) \wedge LeftOf(x, b)\ ]$

➔ Not Valid

만약 모든 x가 Cube도 아니고 Large도 아니라면, 전제만 만족시킨다.

(2)

$\forall x\ [\ Cube(x) \rightarrow Large(x)\ ]$
$\forall x\ [\ Large(x) \rightarrow LeftOf(x, b)\ ]$
$\exists x\ Cube(x)$

$\exists x\ [\ Large(x) \wedge LeftOf(x, b)\ ]$

➔ Valid

Existential Instantiation으로 $\exists x\ Cube(x)$을 $Cube(d)$으로 바꿀 수 있으며, 이는 4.번 문제와 동일하다.

(3)

$$\begin{array}{|l} \forall x\ [\ Cube(x)\ \lor\ Dodec(x)\ ] \\ \forall x\ [\ \neg Small(x) \to Tet(x)\ ] \\ \hline \neg \exists x\ Small(x) \end{array}$$

➔ Not Valid

Cube이면서 Small 한 경우, 전제를 모두 만족한다.

(4)

$$\begin{array}{|l} \forall y\ [\ Cube(y)\ )\ \lor\ Dodec(y)\ ] \\ \forall x\ [\ Cube(x) \to Large(x)\ ] \\ \exists x\ Large(x) \\ \hline \exists x\ Dodec(x) \end{array}$$

➔ Not Valid

결과를 도출하려면 ∃x Large(x)가 아닌, ∃x ¬Large(x)가 필요하다.

만약, ∃x ¬Large(x)이라면, ¬Large(c)가 존재한다고 하여, 증명할 수 있다.

6. 다음 비정형 증명(Informal Proof)의 빈 칸을 채우시오.

∃y [Girl(y) ∧ ∀x(Boy(x) → Likes(x, y))]	
Girl(c) ∧ ∀x(Boy(x) → Likes(x, c))	Existential Instantiation
∀x(Boy(x) → Likes(x, c))	Conjunction Elimination
Boy(d) → Likes(d, c)	Universal Instantiation
Boy(d)	
Likes(d, c)	Conditional Elimination
Girl(c)	Conjunction Elimination
Girl(c) ∧ Likes(d, c)	Conjunction Introduction
∃y (Girl(y) ∧ Likes(d, y))	Existential Generalization
Boy(d) → ∃y (Girl(y) ∧ Likes(d, y))	Conditional Introduction
∀x(Boy(x) → ∃y (Girl(y) ∧ Likes(x, y))	Universal Generalization

7. 다음은 아래의 Donkey Sentence를 세 사람이 FOL로 고친 것이다.

Every farmer who owns a donkey beats it.

Amy : ∀x (Farmer(x) ∧ ∃y (Donkey(y) ∧ Owns(x, y)) → Beats(x, y))

Brian : $\forall x\ (Donkey(x) \rightarrow \forall y\ ((Farmer(y) \wedge Owns(y, x)) \rightarrow Beats\ (y, x)))$

Carl : $\forall x\ (Farmer(x) \rightarrow \exists y\ (Donkey(y) \wedge Owns(x, y) \wedge Beats(x, y)))$

세 사람이 쓴 FOL 중에서 올바르게 고친 문장을 찾고, 틀린 문장은 어디가 잘못되었는지 서술하시오.

➔ Brian의 문장이 맞다. Amy의 문장은 Beats(x, y)의 y의 범위가 제대로 지정되어 있지 않으며, Carl의 문장은 원래 Donkey Sentence와는 뜻이 맞지 않는다.

LOGICAL FOUNDATINS OF PROGRAMMING – Class 1

QUIZ – 15

Name: Student ID:

1. 다음 System F 를 보고 Existential Elimination 을 만족하기 위한 3 가지 조건을 작성하시오.

∃x S(x)

⋮

$\boxed{c}$ S(c)

⋮

Q

Q

➔
1. 어떤 x에 대해 S(x)가 존재하는 Existential 요소가 있어야 함.
2. 앞에서 절대 사용하지 않은 c 상수를 사용해야함.
3. Q의 결론은 상수 c에 무관해야 한다.

2. 주어진 문장을 System F 를 이용해 증명하시오.

(라인에 맞게 작성해 주시기 바랍니다. 또한, 참조 rule도 함께 모두 작성해주시기 바랍니다.)

1)

1. ∀x[Cube(x) → Large(x)]
2. ∀x[Large(x) → LeftOf(x,b)]
3. ∃xCube(x)

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11. ∃x(Large(x) ∧ LeftOf(x,b)) ∃ Elim: 3, 4-10

➔

1.	∀x[Cube(x) → Large(x)]	
2.	∀x [Large(x) → LeftOf(x, b)]	
3.	∃x Cube(x)	
4.	[e] Cube(e)	
5.	Cube(e) → Large(e)	∀ Elim 1
6.	Large(e)	→ Elim 5,4
7.	Large(e) → LeftOf(e, b)	∀ Elim 2
8.	LeftOf(e, b)	→ Elim 7,6
9.	Large(e) ∧ LeftOf(e, b)	∧ Intro 6,8
10.	∃x (Large(x) ∧ LeftOf(x, b))	∃ Intro 9
11.	∃x (Large(x) ∧ LeftOf(x, b))	∃ Elim 3,4–10

2)

1. ∀x [(Brillig(x) ∨ Tove(x)) → (Mimsy(x) ∧ Gyre(x))]
2. ∀y [(Slithy(y) ∨ Mimsy(y)) → Tove(y)]
3. ∃x Slithy(x)

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

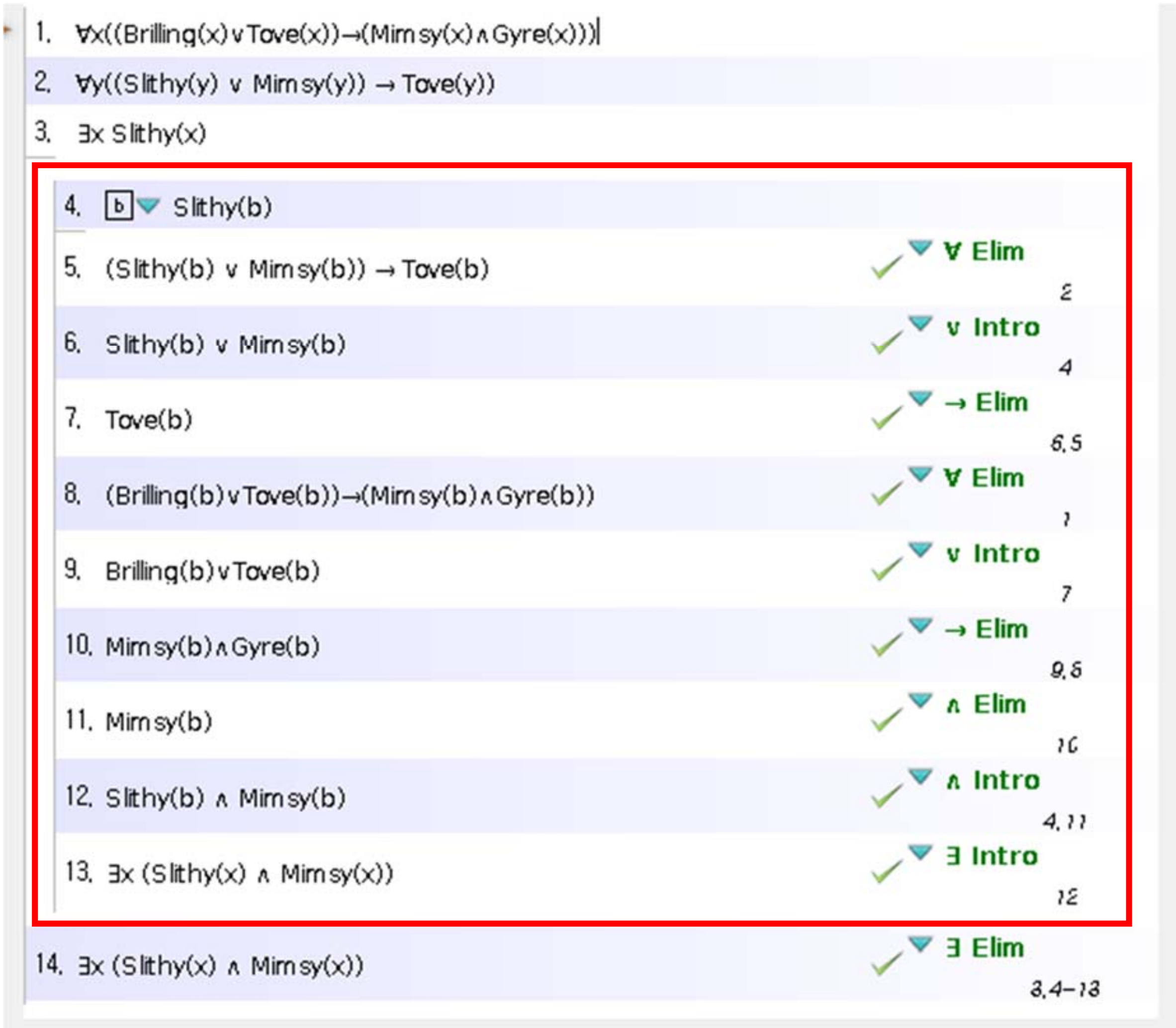
11.

12.

13.

14. ∃x[Slithy(x) ∧ Mimsy(x)]　　∃Elim : 3, 4-13

➔



1. ∀x((Brilling(x) ∨ Tove(x)) → (Mimsy(x) ∧ Gyre(x)))
2. ∀y((Slithy(y) ∨ Mimsy(y)) → Tove(y))
3. ∃x Slithy(x)
4. [b] Slithy(b)
5. (Slithy(b) ∨ Mimsy(b)) → Tove(b)　　∀ Elim 2
6. Slithy(b) ∨ Mimsy(b)　　∨ Intro 4
7. Tove(b)　　→ Elim 6,5
8. (Brilling(b) ∨ Tove(b)) → (Mimsy(b) ∧ Gyre(b))　　∀ Elim 1
9. Brilling(b) ∨ Tove(b)　　∨ Intro 7
10. Mimsy(b) ∧ Gyre(b)　　→ Elim 9,8
11. Mimsy(b)　　∧ Elim 10
12. Slithy(b) ∧ Mimsy(b)　　∧ Intro 4,11
13. ∃x (Slithy(x) ∧ Mimsy(x))　　∃ Intro 12
14. ∃x (Slithy(x) ∧ Mimsy(x))　　∃ Elim 3,4–13

3)

1. ¬∀x Cube(x)

2.

3.

4.

5.
6.
7.
8.
9.
10. ∃x ¬Cube(x)

➔

3. 다음 증명에서 틀린 부분의 라인을 말하고, 틀린 이유를 말하시오.

1. ∀x∃y SameCol(x,y)	
2. $\boxed{c}$	
3. ∃ySameCol(c,y)	∀Elim : 1
4. $\boxed{d}$SameCol(c,d)	
5. SameCol(c,d)	Reit : 4
6.SameCol(c,d)	∃Elim : 3, 4-5
7. ∀xSameCol(x,d)	∀Intro : 2-6
8. ∃y∀x SameCol(x,y)	∃Intro : 7

➔ 6번 라인이 틀림. Existential Elimination을 만족하기 위한 조건 3가지 중 결론은 상수에 무관해야 한다는 조건을 만족하지 않는다. 즉, 6번 라인은 subproof 마지막 결론에서 가정한 상수와 전혀 상관없는 문장이 나와야 subproof 밖에서도 그대로 인용할 수 있다.
첫번째 조건 – 3번 라인, 두번째 조건 – 상수 d

4. 다음 주어진 문장을 System F 로 증명하시오. (System F 작성시 참조 rule 도 함께 작성하시기 바랍니다. 또한, 10 라인 이하로 작성하시기 바랍니다.)

1)

1. ∃x (S(x) ∧ L(x))
2. ∀x (S(x) → P(x))

---

3. ∃x (P(x) ∧ L(x))

➔

1.	∃x (S(x) ∧ L(x))	
2.	∀x (S(x) → P(x))	
3.	$\boxed{a}$ S(a) ∧ L(a)	
4.	S(a)	∧ Elim 3
5.	S(a) → P(a)	∀ Elim 2
6.	P(a)	→ Elim 4, 5
7.	L(a)	∧ Elim 3
8.	P(a) ∧ L(a)	∧ Intro 6, 7
9.	∃x (P(x) ∧ L(x))	∃ Intro 8
10.	∃x (P(x) ∧ L(x))	∃ Elim 1, 3–9

2)

1. ∀x (P(x) → ¬H(x))

---

3. ¬∃x (P(x) ∧ H(x))

➔

1.	∀x (P(x) → ¬H(x))	
2.	∃x (P(x) ∧ H(x))	
3.	$\boxed{a}$ P(a) ∧ H(a)	
4.	P(a) → ¬H(a)	∀ Elim 1
5.	P(a)	∧ Elim 3
6.	¬H(a)	→ Elim 4, 5
7.	H(a)	∧ Elim 3
8.	⊥	⊥ Intro 6, 7
9.	⊥	∃ Elim 2, 3–8
10.	¬∃x (P(x) ∧ H(x))	¬ Intro 2–9

5. DeMorgan's law 에 대해 아래 내용을 System F 을 이용해 증명하시오.

(라인에 맞게 작성해 주시기 바랍니다. 또한, 참조 rule도 함께 모두 작성해주시기 바랍니다.)

1. ¬∀x P(x)
2.
3.
4. ¬P(c)
5. ∃x ¬P(x)
6.
7.
8.
9.

10.		
11.		
12.	∃x ¬P(x)	¬Elim : 11

➔

1.	⊢¬∀x P(x)		
2.	¬∃x ¬P(x)		
3.	$\boxed{c}$		
4.	¬P(c)		
5.	∃x ¬P(x)	∃ Intro	4
6.	⊥	⊥ Intro	5, 2
7.	¬¬P(c)	¬ Intro	4–6
8.	P(c)	¬ Elim	7
9.	∀x P(x)	∀ Intro	3–8
10.	⊥	⊥ Intro	9, 1
11.	¬¬∃x ¬P(x)	¬ Intro	2–10
12.	∃x ¬P(x)	¬ Elim	11