1. Global Optimality of $p_g = p_{data}$

- proposition 1) G가 고정된경우, 최적의 discriminator D,

$$\boxed{D^*_G(x) = \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_g(x)}}$$

(proof) → G가 주어지면 D는 V(G,D)를 최대화 하려함

$$V(G,D) = \int_x p_{data}(x) \log(D(x))dx + \int_z p_z(z) \log(1-D(G(z)))dz$$

$$= \int_x [\underbrace{p_{data}(x)}_{=a} \log(\underbrace{D(x)}_{=y})dx + \underbrace{p_g(x)}_{=b} \log(1-D(x))]dx$$

→ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\{0,0\}$이 아닌 실수 순서쌍 (a,b)에 대해

$$y \to a\log(y) + b\log(1-y)$$

↑ 상수항으로 처리 ↳ 최대일때 y값을 찾아야 하므로

미분하면, $\frac{a}{y} - \frac{b}{1-y} = 0 \Rightarrow a(1-y) = by$

$a - ay = by$

$a = (a+b)y$

$\therefore y = \frac{a}{a+b}$

$y = \frac{a}{a+b}$ 일때 최대이므로

$$\Rightarrow \boxed{D^*_G(x) = \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_g(x)}}$$

V(G,D)를 다시 써보면

$$C(G) = \max_D V(G,D)$$

$$= E_{x \sim p_{data}}[\log D^*_G(x)] + E_{z \sim p_z}[\log(1-D^*_G(G(z)))]$$

$$= E_{x \sim p_{data}}[\log D^*_G(x)] + E_{x \sim p_g}[\log(1-D^*_G(x))]$$

$$= E_{x \sim p_{data}}\left[\log \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + E_{x \sim p_g}\left[\log \frac{p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right]$$

- theorem 1) The global minimum of the virtual training criterion C(G) is achieved if and only if $p_g = p_{data}$. At that point, C(G) achieves the value $-\log 4$.

(proof) $P_g = P_{data}$ 인 P_g에 대해서 $D^*_G(x) = \frac{1}{2}$이므로, $C(G)$에 대입하면 $\log\frac{1}{2} + \log\frac{1}{2} = -\log 4$

→ 이 값이 $C(G)$의 최솟값 → G 입장에서 가장 이상적임!

$$E_{x\sim p_{data}}[-\log 2] + E_{x\sim p_g}[-\log 2] = -\log 4$$

$$\Rightarrow C(G) = C(G) \underline{+\log 4 - \log 4} \quad (0)$$

$$= -\log 4 + E_{x\sim p_{data}}\left[\log\frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + E_{x\sim p_g}\left[\log\frac{p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + \log 2 + \log 2$$

↳ Kullback-Leibler divergence

$$= -\log 4 + KL\left(p_{data} \,\middle\|\, \frac{p_{data}+p_g}{2}\right) + KL\left(p_g \,\middle\|\, \frac{p_{data}+p_g}{2}\right)$$

$D_{KL}(P\|Q) = \sum_i P(i)\log\frac{P(i)}{Q(i)}$

⇒ P라는 분포있을때 Q와 P가 얼마나 다른지 측정하는 값

$$= -\log 4 + 2\cdot JSD(p_{data}\|p_g)$$

↳ Jenson-Shannon divergence

$JSD(P\|Q) = \frac{1}{2}D_{KL}(P\|M) + \frac{1}{2}D_{KL}(Q\|M)$

+ 두 분포가 완전히 일치할 때는 0

∴ $C(G)$의 global minimum은 $-\log 4$ 이며 그 유일한 해는 $p_{data} = p_g$

2. Convergence of Algorithm 1

- 이 알고리즘이 문제를 얼마나 잘 풀어주는지 증명

- proposition 2) G, D가 충분한 용량을 가지고 있고, Algorithm의 각 step에서 discriminator가 주어진 G에 대해 optimum에 도달하도록 허용하고, p_g가 업데이트되어 기준을 개선한다면, $E_{x\sim p_{data}}[\log D^*_G(x)] + E_{x\sim p_g}[\log(1-D^*_G(x))]$

= p_g는 p_{data}로 수렴

(proof) $V(G,D) = U(p_g, D)$를 p_g의 함수로 생각

↳ $V(p_g, D)$는 p_g에서 convex → 최대값에 도달한 지점에서의 도함수 포함

if $f(p_g) = \sup_{D\in\mathcal{D}} f_D(p_g)$ and $f_D(p_g)$ is convex in p_g every D,

then $\partial f_{D^*}(p_g) \in \partial f$ if $D^* = \arg\sup_{D\in\mathcal{D}} f_D(p_g)$

⊜ 대응하는 G가 주어진 최적의 D에서 p_g에 대한 gradient-descent update와 동일

→ p_g에 대한 적은 update 만으로 $p_g \to p_{data}$ 수렴함