TD Modélisation de problèmes d'optimisation

Exercice 1 *Composition d'aliments pour le bétail*

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, sésame.

L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22 % de protéines et 3,6 % de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts.

— Orge : 12% protéïnes, 2% graisses, 25 coût/tonne,
— Arachides : 52% protéïnes, 2% graisses, 41 coût/tonne,
— Sésame : 42% protéïnes, 10% graisses, 39 coût/tonne,

1. On notera x_j (j=1,2,3) la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème algébriquement.
2. Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème en passant de 3 inconnues à 2 inconnues. Formuler le nouveau programme linéaire (PL).
3. Tracer graphiquement les droites correspondant aux contraintes du PL (inégalités) et identifier la zone des solutions. Résoudre géométriquement le problème.

Exercice 2 *Problème de transport*

On dispose de 2 dépôts D1 et D2 de disponibilité 8 et 9 en marchandises. Trois clients C1, C2 et C3 doivent être servis suivant les quantités : 4, 5 et 8. L'objectif est de trouver les quantités optimales de marchandises à transporter depuis les dépôts vers les clients de façon à minimiser le coût global de transport. Les coûts de déplacement unitaires des marchandises (c_{ij} = coût unitaire de transport du dépôt i vers le client j) sont donnés par les coefficients suivants :

	C1	C2	C3
D1	5	3	4
D2	6	7	2

1. Mettre ce problème sous forme de programme linéaire. Peut-on éliminer la contrainte associée au client C3 ? Pourquoi ?
2. Mettre le problème général du transport sous forme de programme linéaire. De manière générale, le problème de transport est constitué de m entrepôts avec des disponibilités p_i de marchandises et n clients avec des demandes q_j. Le coût de transport de l'entrepôt i au client j est c_{ij} par quantité transportée. Il s'agit de trouver les quantités optimales x_{ij} entre les entrepôts i et les clients j de façon à minimiser le coût total de transport. On suppose que la somme des demandes est égale à la somme des disponibilités.
3. Donner le programme GMPL de ce problème dans sa forme générale.

Exercice 3 *Choix de sites pour des entrepôts*

Une entreprise de distribution envisage l'implantation de m nouveaux entrepôts. n sites ($n > m$) ont été envisagés pour leur implantation et, pour chaque site si, on a estimé la capacité de stockage c_i de l'entrepôt que l'on pourrait construire sur ce site.

L'entreprise cherche à déterminer les m sites sur lesquels elle doit construire ses nouveaux entrepôts de façon à maximiser la capacité totale de stockage. Mais elle désire éviter à tout prix d'avoir 2 entrepôts situés à plus de 30 kms l'un de l'autre car elle effectue de très nombreux transports entre tous ses entrepôts. (Les m sites qui ont été envisagés sont toujours situés à moins de 30 kms de tous les entrepôts déjà construits).

1. Définir les variables du problème.

2. Formuler par un programme linéaire en variables binaires le problème du choix des sites. On pourra introduire un paramètre binaire $\boldsymbol{\delta_{ij}}$ qui vaut 1 si les sites $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ sont distants de plus de 30 kms, 0 sinon.
3. Donner le programme GMPL correspondant

Exercice 4 *Problème du voyageur de commerce (PVC)*

Le PVC (*Traveling Salesman Problem, TSP*) est l'un des plus célèbres problèmes de RO : comment ce « voyageur » va-t-il organiser sa tournée de façon à visiter chacun de ses clients une et une seule fois, tout en parcourant un nombre de kilomètres qui soit minimal ? Autrement dit, comment déterminer un circuit hamiltonien de valeur minimale dans un graphe valué ?

Malgré des algorithmes de plus en plus efficaces et des ordinateurs de plus en plus rapides, ce problème, classé parmi les problèmes NP complets, reste difficile à résoudre exactement, du moins quand le nombre de villes dépasse quelques centaines.

Une formulation mathématique du PVC dans un graphe orienté $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{n}$ nombre de sommets de $\boldsymbol{X}$, U ensemble des arcs, peut être donnée en variables binaires par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{min\ \Sigma_{ij}\ c_{ij}.x_{ij}} & \\ \boldsymbol{\Sigma_{j=1..n}\ x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, ..., n} & \textbf{(1)} \\ \boldsymbol{\Sigma_{i=1..n}\ x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, ..., n} & \textbf{(2)} \\ \boldsymbol{\{\ (i, j)\ /\ x_{ij} = 1\ \}\ forme\ un\ seul\ circuit} & \textbf{(3)} \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{x_{ij} = 1}$ si le voyageur se déplace de la ville $\boldsymbol{i}$ à la ville $\boldsymbol{j}$, 0 sinon.

La contrainte (3) permet de s'assurer que l'on a bien un circuit hamiltonien pour l'ensemble des arcs sélectionnés. Elle équivaut à éliminer la création de sous-tours.

1. Montrer que l'on peut remplacer (3) par une contrainte d'élimination des sous-tours (*Subtour Elimination Constraint SEC*) qui stipule que pour tout ensemble S de sommets (S différent du vide et S différent de X), le nombre d'arcs $\boldsymbol{(i, j)}$ entrants et sortants de S tels que $\boldsymbol{x_{i,j} = 1}$ doit être supérieure ou égale à 2.
2. Montrer que (3) peut également être exprimée par le fait que pour tout ensemble S de sommets (S différent du vide et S différent de X), le nombre d'arcs $\boldsymbol{(i, j)}$ contenus dans S tels que $\boldsymbol{x_{i,j} = 1}$ doit être strictement inférieur au nombre de sommets de S.
3. Montrer que (3) peut se ramener à trouver des entiers $\boldsymbol{u_i \geq 0}$ qui vérifient :
   $\boldsymbol{u_1 = 1}$
   $\boldsymbol{2 \leq u_i \leq n, \forall i \neq 1}$
   $\boldsymbol{u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1}$ pour $\boldsymbol{i \geq 1, j \geq 2, i \neq j}$
   Cette contrainte a été proposée par Miller-Tucker-Zemlin, d'où son nom contrainte MTZ. $\boldsymbol{u_i}$ représente l'ordre de visite de la ville $\boldsymbol{i}$.
4. Donner la modélisation du PVC en GMPL.