Séries numériques

Préambule

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à des sommes ayant une infinité de termes. Par exemple que peut bien valoir la somme infinie suivante :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \;=\; ? \qquad \text{ou} \qquad 1-1+1-1+1-1+\cdots \;=\; ?$$

Nous allons voir que la somme d'une infinité de termes peut être une valeur finie ou infinie.

1 Définitions

Définition 1 : *Série numérique*

Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On construit une nouvelle suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ en posant

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ s'appelle la **série** de terme général u_k.
Cette série est notée par la somme infinie $\sum_{k\geqslant 0} u_k$. La suite (S_n) s'appelle aussi la **suite des sommes partielles**.

Remarque 1 :

Remarquons que la donnée de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ permet de reconstruire la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ puisque

$$u_n = S_n - S_{n-1} \text{ si } n \neq 0, \quad \text{et} \quad u_0 = S_0$$

Exemple 1 :

Fixons $q \in \mathbb{R}$. Définissons la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ par $u_k = q^k$; c'est une suite géométrique. La **série géométrique** $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ est la suite des sommes partielles :

$$S_0 = 1 \qquad S_1 = 1+q \qquad S_2 = 1+q+q^2 \qquad \ldots \qquad S_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n \;=\; \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Définition 2 :

Si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$, on note

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

On appelle alors $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la **somme** de la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$, et on dit que la série est **convergente**.
Sinon, on dit qu'elle est **divergente**.

Notations. On peut noter une série de différentes façons, et bien sûr avec différents symboles pour l'indice :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \qquad \sum_{k\geqslant 0} u_k \qquad \sum u_k.$$

Pour notre part, on fera la distinction entre une série quelconque $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ ou $\sum u_k$.

Proposition 1 :

Soit $q \in \mathbb{R}$. La série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. On a alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}}$$

Exemple 2 :

1. Série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$
2. Série géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, avec premier terme $\frac{1}{3^3}$. On se ramène à la série géométrique commençant à $k = 0$ en ajoutant et retranchant les premiers termes : $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{13}{9} = \frac{3}{2} - \frac{13}{9} = \frac{1}{18}.$
3. Le fait de calculer la somme d'une série à partir de $k = 0$ est purement conventionnel. On peut toujours effectuer un changement d'indice pour se ramener à une somme à partir de 0. Une autre façon pour calculer la même série $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$ que précédemment est de faire le changement d'indice $n = k - 3$ (et donc $k = n + 3$):

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+3}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^3}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{27}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$$

2 Conséquences des séries convergentes

Remarque 2 :
La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : changer un nombre fini de termes d'une série ne change pas sa nature, convergente ou divergente. Par contre, si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée.

Proposition 2 :
Une **somme télescopique** est une série de la forme

$$\sum_{k\geqslant 0}(a_{k+1}-a_k).$$

Cette série est convergente si et seulement si $\ell = \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} a_k$ existe et dans ce cas on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k+1}-a_k) = \ell - a_0.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)\\
&= (a_1-a_0)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)\\
&= -a_0+a_1-a_1+a_2-a_2+\cdots+a_n-a_n+a_{n+1}\\
&= a_{n+1}-a_0
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_{n+1}-a_0 = \ell - a_0$

Exemple 3 :
La série

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

est convergente et a la valeur 1. En effet, elle peut être écrite comme somme télescopique, et plus précisément la somme partielle vérifie :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = 1-\frac{1}{n+2} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n\longrightarrow+\infty$$

Théorème 1 :
Si la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge, alors la suite des termes généraux $(u_k)_{k\geqslant 0}$ tend vers 0.

Le point clé est que l'on retrouve le terme général à partir des sommes partielles par la formule

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Ainsi, si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n - \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Remarque 3 :
La contraposée de ce résultat est souvent utilisée :

$$\boxed{\text{Une série dont le terme général ne tend pas vers } 0 \text{ ne peut pas converger.}}$$

Par exemple les séries $\sum_{k\geqslant 1}(1+\frac{1}{k})$ et $\sum_{k\geqslant 1} k^2$ sont divergentes.

Proposition 3 : ***Linéarité***
Soient $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ deux séries convergentes de sommes respectives A et B, et soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k+\mu b_k)$ est convergente et de somme $\lambda A+\mu B$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \mu\sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Par exemple :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{5}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} + 5\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 5\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2+5\frac{3}{2} = \frac{19}{2}\,.$$

3 Séries à termes positifs

Les séries à termes positifs ou nuls se comportent comme les suites croissantes et sont donc plus faciles à étudier.

Définition 3 : ***Séries de Riemann***

Les **séries de Riemann** sont les séries de type $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$, pour $\alpha > 0$ un réel.

Proposition 4 : ***Convergence des séries de Riemann***

$$\boxed{\text{Si} \quad \alpha > 1 \quad \text{alors} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{converge}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad 0 < \alpha \leqslant 1 \quad \text{alors} \quad \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{diverge}}$$

3.1 Théorème de comparaison

Quelle est la méthode générale pour trouver la nature d'une série à termes positifs ? On la compare avec des séries classiques simples au moyen du théorème de comparaison suivant.

Théorème 2 : ***Théorème de comparaison***

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $k_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, $u_k \leqslant v_k$.

- Si $\sum v_k$ converge alors $\sum u_k$ converge.
- Si $\sum u_k$ diverge alors $\sum v_k$ diverge.

Exemple 4 :

1. Considérons la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k^k}$. A partir du rang 2 nous avons $\dfrac{1}{k^k}\leqslant\dfrac{1}{2^k}$. Comme la série géométrique $\sum\dfrac{1}{2^k}$ de raison $\frac{1}{2}$ est convergente, il en est de même de la série $\sum\dfrac{1}{k^k}$
2. Considérons la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Comme $\dfrac{1}{k}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ et que la série harmonique de Riemann $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k}$ est divergente, il en est de même de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$
3. Considérons la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{\ln(k)}{k}$. Comme $\dfrac{1}{k}\leqslant\dfrac{\ln(k)}{k}$; $\forall k\geqslant 3$ (car $\ln(x)$ est une fonction croissante) et que la série harmonique de Riemann $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k}$ est divergente, il en est de même de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{\ln(k)}{k}$

3.2 Théorème des équivalents

Nous allons améliorer le théorème de comparaison avec la notion de suites équivalentes.
Soient (u_k) et (v_k) deux suites **strictement positives**. Alors les suites (u_k) et (v_k) sont **équivalentes** si

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\frac{u_k}{v_k}=1.$$

On note alors

$$u_k\sim v_k.$$

Théorème 3 : ***Théorème des équivalents***
Soient (u_k) et (v_k) deux suites à termes strictement positifs. Si $u_k\sim v_k$ alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

Autrement dit, si les suites sont équivalentes alors elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes. Bien sûr, en cas de convergence, il n'y a aucune raison que les sommes soient égales. Enfin, si les suites sont toutes les deux strictement négatives, la conclusion reste valable.

Quelques équivalences utiles si $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} v_k = 0$

$$e^{v_k} \sim 1+v_k \qquad \ln(1\pm v_k) \sim \pm v_k$$

$$\sin(v_k) \sim v_k \qquad \cos(v_k) \sim 1-\frac{{v_k}^2}{2}$$

$$\frac{1}{1\pm v_k} \sim 1\pm v_k \qquad (1\pm v_k)^\alpha \sim 1\pm \alpha v_k$$

- **Attention : La relation d'équivalence n'est pas compatible ni avec l'addition ni avec la composition.**
- **En $\pm\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.**
- **En $\pm\infty$, une fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.**

Exemple 5 :

1. Considérons la série $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Puisque $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.
De là on tire que
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$
Comme la série harmonique de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente, il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

2. Considérons la série $n^{-(1+\frac{1}{n})}$. Montrons que $n^{-(1+\frac{1}{n})} \sim n^{-1}$. On a : $\frac{n^{-(1+\frac{1}{n})}}{n^{-1}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$. Par équivalence, la série de terme général $n^{-(1+\frac{1}{n})}$ est donc divergente car la série harmonique de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

3. La série $\sum \frac{k^2+3k+1}{k^4+2k^3+4}$ est équivalent à $\frac{1}{k^2}$, et nous savons que la série de Riemann $\sum\frac{1}{k^2}$ converge. Donc La série $\sum\frac{k^2+3k+1}{k^4+2k^3+4}$ converge.

4 Critères de convergence des séries

Théorème 4 : ***Critère de Cauchy***

Une série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \geqslant n \geqslant n_0 \qquad \left|u_n + \cdots + u_m\right| < \epsilon \, .$$

On le formule aussi de la façon suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \geqslant n \geqslant n_0 \qquad \left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| < \epsilon$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \left|u_n + \cdots + u_{n+p}\right| < \epsilon$$

4.1 Séries absolument convergentes

Définition 4 :

On dit qu'une série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ de nombres réels est **absolument convergente** si la série $\sum_{k\geqslant 0} |u_k|$ est convergente.

Être absolument convergent est plus fort qu'être convergent :

Théorème 5 :

Toute série absolument convergente est convergente.

Exemple 6 :

1. Par exemple la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos k}{k^2}$ est absolument convergente. Car pour $u_k = \frac{\cos k}{k^2}$ on a $|u_k| \leqslant \frac{1}{k^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge alors $\sum_{k\geqslant 1} |u_k|$ converge aussi. Par conséquent la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos k}{k^2}$ est convergente.
2. La série harmonique alternée $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$ n'est pas absolument convergente. Car pour $v_k = \frac{(-1)^k}{k}$, la série $\sum_{k\geqslant 1} |v_k| = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique de Riemann divergente).

4.2 Règle du quotient de d'Alembert

La règle du quotient de d'Alembert est un moyen efficace de montrer si une série de nombres réels converge ou pas.

Théorème 6 : ***Règle du quotient de d'Alembert***

Soit $\sum u_k$ une série dont les termes généraux sont des nombres réels non nuls telle que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \ell$$

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_k$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_k$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure en général.

Exemple 7 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la **série**

   $$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} \quad \text{converge.}$$

   En effet pour $u_k = \frac{x^k}{k!}$ on a

   $$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \frac{|x|}{k+1} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \longrightarrow +\infty.$$

   La limite étant $\ell = 0 < 1$ alors par la règle d'Alembert, la série est absolument convergente, donc convergente.

2. $\sum_{k\geqslant 0}\frac{k!}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}$ converge, car $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+1}{2k+1}$ tend vers $\frac{1}{2} < 1$.

3. $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(2k)!}{(k!)^2}$ diverge, car $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$ tend vers $4 > 1$.

Remarque :

- Le théorème ne peut s'appliquer si certains u_k sont nuls,
- Notez bien que le théorème ne permet pas de conclure lorsque $\frac{u_{k+1}}{u_k} \longrightarrow 1$. Par exemple pour les séries $\sum u_k = \sum \frac{1}{k}$ et $\sum v_k = \sum \frac{1}{k^2}$ nous avons $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k}{k+1} \longrightarrow 1$, de même que $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \longrightarrow 1$. Cependant la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge alors que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

4.3 Règle des racines de Cauchy

Théorème 7 : *Règle des racines de Cauchy*

Soit $\sum u_k$ une série de nombres réels telle que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \sqrt[k]{|u_k|} = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \left|u_k\right|^{\frac{1}{k}} = \ell$$

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_k$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_k$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure en général.

Remarque 4 :

Dans la pratique, il faut savoir bien manipuler les racines k-ème :

$$\sqrt[k]{|u_k|} = \left|u_k\right|^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\tfrac{1}{k}\ln|u_k|\right)$$

.

Exemple 8 :

1. La série
$$\sum \left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^k \qquad \text{converge,}$$
car $\sqrt[k]{u_k} = \frac{2k+1}{3k+4}$ tend vers $\frac{2}{3} < 1$.

2. Par contre
$$\sum \frac{2^k}{k^\alpha} \qquad \text{diverge,}$$
quel que soit $\alpha > 0$. En effet,
$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(k^{\frac{1}{k}}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(\exp(\frac{1}{k}\ln k)\right)^\alpha} \longrightarrow 2 > 1.$$

5 Séries alternées

Il existe un autre type de série facile à étudier : les séries alternées. Ce sont celles où le signe du terme général change à chaque rang.

Définition 5 :

Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite qui vérifie $u_k \geqslant 0$. La série $\sum\limits_{k\geqslant 0}(-1)^k u_k$ s'appelle une **série alternée**.

On a le critère de convergence suivant, extrêmement facile à vérifier :

Théorème 8 : ***Critère de Leibniz pour les séries alternées***

Supposons que $(u_k)_{k\geqslant 0}$ soit une suite qui vérifie :

1. $u_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 0$,
2. la suite (u_k) est une suite décroissante,
3. et $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} u_k = 0$.

Alors la série alternée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ converge. En plus, si $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est le reste d'ordre n, alors on a

$$\left|R_n\right| \leqslant u_{n+1}.$$

Exemple 9 :

La **série harmonique alternée**

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge. En effet, en posant $u_k = \frac{1}{k+1}$, alors

1. $u_k \geqslant 0$,
2. (u_k) est une suite décroissante,
3. la suite (u_k) tend vers 0.

Par le critère de Leibniz (théorème 8), la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}$ converge.

notons S sa somme. Nous avons alors une majoration de l'erreur commise, en utilisant l'inégalité $|R_n| \leqslant u_{n+1}$. On trouve que l'erreur commise en approchant S par S_{200} est : $|S - S_{200}| = |R_{200}| \leqslant u_{201} = \frac{1}{202} < 5\cdot 10^{-3}$.

Remarque 5 :

1. On ne peut pas laisser tomber la condition de décroissance de la suite (u_k) dans le critère de Leibniz.
2. Il n'est pas possible de remplacer u_k par un équivalent à l'infini dans le théorème 8, car la décroissance n'est pas conservée par équivalence.

Exemple 10 : Pour la remarque 5

Voici deux séries alternées :

$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \quad \text{converge,} \qquad\qquad \sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k} \quad \text{diverge.}$$

Le critère de Leibniz (théorème 8) s'applique à la première : la suite $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0. Conséquence, la série alternée $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
Par contre le critère de Leibniz ne s'applique pas à la seconde, car si la suite $v_k = \frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ est bien positive (pour $k \geqslant 2$) et tend vers 0, elle n'est pas décroissante.
Cependant, on a bien :

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} = u_k$$

Pour montrer que $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ diverge, calculons la différence :

$$(-1)^k u_k - (-1)^k v_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k} = (-1)^k \frac{\sqrt{k}+(-1)^k-\sqrt{k}}{k+(-1)^k\sqrt{k}} = \frac{1}{k+(-1)^k\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$$

Ainsi la série de terme général $w_k = (-1)^k u_k - (-1)^k v_k$ diverge, car son terme général est équivalent à celui de la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ qui diverge.
Supposons maintenant par l'absurde que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} (-1)^k v_k$ soit convergente. On sait aussi que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} (-1)^k u_k$ est convergente. Donc par linéarité la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} w_k = \sum\limits_{k\geqslant 2} (-1)^k u_k - \sum\limits_{k\geqslant 2} (-1)^k v_k$ serait convergente. Ce qui est une contradiction.

Conclusion : la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ diverge.

TD Séries numérique

Exercice 1: Convergence de séries par la définition

1. On considère la série $\left(\sum u_n\right)$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$

   (a) Écrire $u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$ sous la forme $\dfrac{a}{n+1} - \dfrac{b}{n+3}$ avec a, b des réels à déterminer, indépendants de n.

   (b) En déduire l'écriture explicite de $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. En utilisant la définition de la convergence d'une série, conclure quant à la convergence de la série $\left(\sum u_n\right)$

2. Autre exemple

   (a) Etudier la convergence de $\left(\sum u_n\right)$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

Correction :

1. (a) On récrit la fraction $\dfrac{a}{n+1} - \dfrac{b}{n+3}$ au même dénominateur et on l'identifie avec $\dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$

$$\frac{a}{n+1} - \frac{b}{n+3} = \frac{(a-b)n + 3a - b}{(n+1)(n+3)}$$

   qui doit être égale à

$$\frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

   On en déduit $a - b = 0$ et $3a + -b = 2$. Cela conduit à l'unique solution $a = 1$ et $b = 1$. Donc

$$\frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

   (b) En effectuant une somme télescopique on obtient

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

   La limite est $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{5}{6}$

2. Comme la question précédente $a = b = 1$ et $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ qui converge vers 1

Exercice 2 : Convergence de séries par utilisation des critère Etudier la convergence des séries $\left(\sum u_n\right)$ suivantes données par:

$$u_n = \frac{n}{2n^3+1} \qquad u_n = e^{-n} \qquad u_n = \frac{1}{5^n} \qquad u_n = \frac{5^n+1}{2^n-1} \qquad u_n = \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad u_n = n^2 e^{-n^2}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3^n} \qquad u_n = \frac{1}{(n^2+5n)} \qquad u_n = \frac{n!}{n^n} \qquad u_n = \left(\ln(n)\right)^{-n}$$

Correction :

1. $\sum \frac{n}{2n^3+1}$: On a $\frac{n}{2n^3+1} \sim \frac{1}{2n^2}$ qui est une série de Riemann convergente et donc $\sum \frac{n}{2n^3+1}$ converge.

2. $\sum e^{-n} = \sum \frac{1}{e^n}$: Série géométrique de raison $\frac{1}{e} < 1$, donc convergente et sa limite est $\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$

3. $\sum \frac{1}{5^n}$: Série géométrique de raison $\frac{1}{5} < 1$, donc convergente et sa limite est $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$

4. $\sum \frac{5^n+1}{2^n-1}$: On a $\frac{5^n+1}{2^n-1} \sim \left(\frac{5}{2}\right)^n$ qui est une série géométrique de raison $\frac{5}{2} > 1$ divergente et donc la série $\sum \frac{5^n+1}{2^n-1}$ diverge.

5. $\sum \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$: On a $\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ qui est une série de Riemann convergente et donc $\sum \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

6. $\sum n^2 e^{-n^2}$: critère d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times e^{-2n-1}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{-2n-1} = 0$, il s'ensuit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$$

D'où, la $\sum n^2 e^{-n^2}$ converge.

7. $\sum \frac{(-1)^n}{3^n}$: Le critère de Leibniz (théorème 8) s'applique à cette série alternée. En effet, la suite $u_k = \frac{1}{3^n}$ est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0. Conséquence, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{3^n}$ converge.

8. $\sum \frac{n!}{n^n}$: Critère d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (\frac{n}{n+1})^n = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})^n} == \frac{1n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}$$

Or, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. Il s'ensuit $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 1$. Ainsi;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{1}{e} < 1$$

Par conséquent, la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

9. $\sum \boldsymbol{u_n} = \left(\mathbf{ln}(\boldsymbol{n})\right)^{-\boldsymbol{n}}$: Critère de Cauchy : Remarquons d'abord que $\mathbf{ln}(\boldsymbol{n}) \geqslant \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{n} \geqslant \mathbf{1}$. Ainsi,

$$\left(\boldsymbol{u_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\mathbf{ln}(\boldsymbol{n})\right)^{-\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ln}(\boldsymbol{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$$

Par conséquent, la série $\sum \left(\mathbf{ln}(\boldsymbol{n})\right)^{-\boldsymbol{n}}$ converge.