IT45 - TD 2
Algorithme du simplexe

1 Exercice : méthode algébrique et solution non bornée

Soit le PL :

$$\begin{array}{rr} \text{Max } \boldsymbol{z} = & \boldsymbol{x_1 + 2x_2} \\ & \boldsymbol{-2x_1 + x_2 \leq 2} \text{ (1)} \\ & \boldsymbol{-x_1 + 2x_2 \leq 5} \text{ (2)} \\ & \boldsymbol{x_1 - 4x_2 \leq 4} \text{ (3)} \\ & \boldsymbol{x_1 \geq 0; x_2 \leq 0} \end{array}$$

1. Transformer ce PL de façon à ce qu'on puisse le résoudre par le simplexe. Appliquer alors le simplexe pour trouver la solution optimale.
2. Que donne le simplexe si on remplace $\boldsymbol{x_2 \leq 0}$ par $\boldsymbol{x_2 \geq 0}$?
3. Faire une résolution graphique dans ce cas.

2 Exercice : méthode des tableaux

3 tailles $\boldsymbol{t_1}$, $\boldsymbol{t_2}$, $\boldsymbol{t_3}$ sont susceptibles de fournir une extraction maximale journalière de respectivement $\boldsymbol{e_1 = 200}$, $\boldsymbol{e_2 = 500}$ et $\boldsymbol{e_3 = 300}$ tonnes. La production journalière est stockée dans un local d'une contenance de 1800 m$^{\boldsymbol{3}}$. Les volumes respectifs des 3 catégories de produits sont : $\boldsymbol{1,8}$; $\boldsymbol{2}$ et $\boldsymbol{2,2}$ m$^{\boldsymbol{3}}$/t.

Le lendemain de l'extraction, les minerais sont lavés à la laverie qui débite respectivement **80**, **90** et **100** tonnes à l'heure pour les produits des tailles $\boldsymbol{t_1}$, $\boldsymbol{t_2}$ et $\boldsymbol{t_3}$. De plus, la laverie ne fonctionne que 10 heures par jour.

Les profits unitaires sont $\boldsymbol{p_1 = 4}$, $\boldsymbol{p_2 = 5}$, $\boldsymbol{p_3 = 6}$ par tonne de produit.

1. Formuler algébriquement ce problème.
2. Trouver la meilleure répartition des quantités à extraire en utilisant la méthode des tableaux.

3 Exercice : optimalité

Soit le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lccccc} \boldsymbol{Max\, z =} & \boldsymbol{2x_1} & \boldsymbol{+x_2+} & \boldsymbol{x_3} & & \\ & \boldsymbol{x_1} & & \boldsymbol{+x_3} & \boldsymbol{\leq 1} \\ & & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{+x_3} & \boldsymbol{\leq 2} \\ & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{+x_2} & & \boldsymbol{\leq 3} \\ & \boldsymbol{x_1,} & \boldsymbol{x_2,} & \boldsymbol{x_3 \geq 0} & \end{array} \right.$$

Pour la solution de base $\boldsymbol{x^B = (x_1, x_2, x_3)}$, l'inverse de B donne la matrice :

$$\boldsymbol{B^{-1}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \boldsymbol{0,5} & \boldsymbol{-0,5} & \boldsymbol{0,5} \\ \boldsymbol{-0,5} & \boldsymbol{0,5} & \boldsymbol{0,5} \\ \boldsymbol{0,5} & \boldsymbol{0,5} & \boldsymbol{-0,5} \end{array} \right.$$

1. Montrez que cette solution est optimale et déterminer directement le tableau du simplexe (sans faire de changement de base).
2. A quel cas particulier correspond ce programme linéaire ?

4 Exercice : production dans un atelier

Un atelier peut fabriquer trois types d'articles en utilisant une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois. Cette machine-outil a les cadences de fabrication suivantes :

- 35 articles A par heure
- 45 articles B par heure
- 20 articles C par heure

Le bénéfice unitaire pour l'article A est de 60 €, pour B de 40 € et pour C de 80 €. Ces objets sont vendus à des grossistes et on a observé qu'on ne pouvait écouler, par mois, plus de 4900 objets A, ni plus de 5400 objets B, ni plus de 2000 objets C.

D'autre part, chaque objet doit être vérifié avant sa commercialisation par une équipe de trois techniciens. Chaque technicien travaille 170 heures par mois, et la vérification d'un objet A prend 4 minutes, celle d'un objet B prend 3 minutes et celle d'un objet C, 2 minutes.

1. Modéliser le problème décrit par un programme linéaire en définissant tout d'abord les variables du problème.
2. Montrer ensuite que la contrainte liée à la vérification des objets est redondante et qu'elle est satisfaite si la contrainte liée à la cadence de production de la machine-outil est satisfaite également.
3. Classer les produits A, B, C par bénéfices horaires décroissants.
4. Appliquer l'algorithme du simplexe (méthode des tableaux) en ignorant la contrainte liée à la vérification des objets et en faisant entrer dans la base les produits dans l'ordre des bénéfices horaires décroissants. Donner le tableau simplexe de chaque itération et la solution optimale du problème