Formule de Taylor: Application aux calculs approchés

1 Un exemple introductif

Souvenez-vous : lorsque vous avez étudié les limites on avait remarqué que $\sin(x) \approx x$ quand x est « proche de 0 ». On peut le vérifier facilement avec une calculatrice, ou mieux encore en superposant les graphes des deux fonctions :

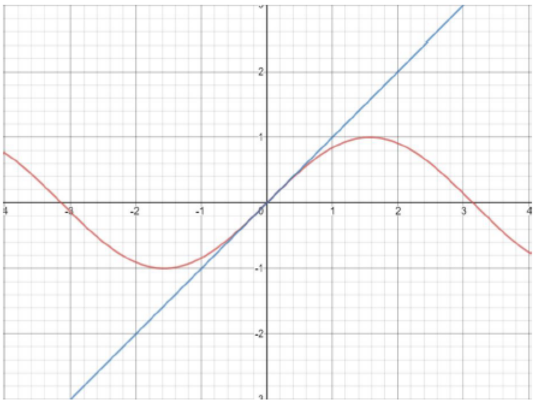

Figure 1: Approximation de $\sin(x)$ en $x = 0$ par le polynôme $p(x) = x$.

On voit bien qu'au voisinage de 0, les courbes sont presque indiscernables et que plus on s'éloigne, plus l'approximation devient mauvaise. On peut trouver un polynôme (on verra comment plus loin), qui épouse mieux les formes de la fonction sinus.

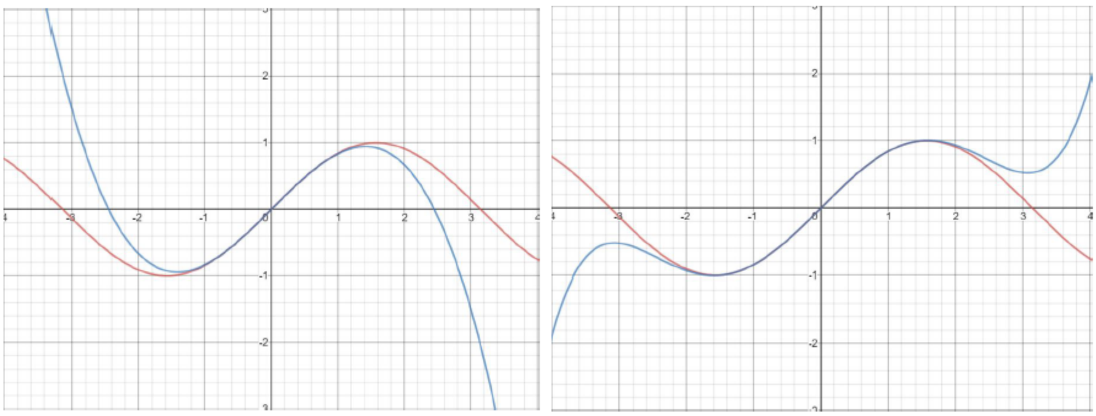

Figure 2: Approximation de $\sin(x)$ en $x = 0$ par: Gauche, $p(x) = x - \frac{x^3}{6}$. Droite, $p(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

2 Formule de Taylor

Notation : $f^{(n)}$ signifie la dérivée n^{ieme} de f.

Théorème 1 : ***Théorème de Taylor-Lagrange***

Si une fonction $f(x)$ est définie et continue sur $[a,b]$, ainsi que ses n premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $]a,b[$ une dérivée d'ordre $n+1$, alors il existe une valeur $c\in]a,b[$ pour laquelle

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + f^{(2)}(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}}_{\text{Partie principale}} + \underbrace{f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Reste d'ordre } n+1} \quad (1)$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + f'(a)h + f^{(2)}(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}}_{\text{Partie principale}} + \underbrace{f^{(n+1)}(c)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Reste d'ordre } n+1} \quad (2)$$

Définition 1 : ***Polynôme de Taylor***

Si on pose $b = x$ dans le théorème 1 on retrouve le polynôme de Taylor qui approxime la fonction f au voisinage de a à l'ordre n :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + f^{(2)}(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}_{\text{Polynôme de Taylor d'ordre } n \text{ en } x} + \underbrace{f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Reste d'ordre } n+1} \quad (3)$$

2.1 Approximation par le polynôme de Taylor

Posons :

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f^{(2)}(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$R_n = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Il vient alors à partir de l'équation (3)

$$f(x) = p(x) + R_n$$

de sorte que

$$f(x) - p(x) = R_n$$

Donc, en approchant la fonction f par le polynôme $p(x)$ on commet une erreur $R_n(x)$. Ainsi, pour avoir une idée sur la qualité de l'approximation, on a besoin d'une estimation de l'erreur $R_n(x)$.

Définition 2 : ***Approximation à ϵ près***

On dit que le polynôme $p(x)$ est une approximation de $f(x)$ à ϵ près si

$$\left|f(x) - p(x)\right| = \left|R_n\right| \leq \epsilon$$

2.2 Application aux calculs approchés

Remarque 1 : ***Importante***
Si on désire approcher une fonction f en un point fixe x par le polynôme de Taylor on doit choisir une valeur de a voisin de x de telle sorte que les $f^{(k)}(a)$ soient faciles à calculer.

Exemple 1: Calcul d'une valeur approchée à $\epsilon = 10^{-5}$ près de $\sin 47°$.

Notons d'abord que $f(x) = \sin(x)$. En outre, $47 = 45+2$, ce qui se traduit en radian par $\frac{47\pi}{180} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}$. Ainsi, si on pose $x = \frac{47\pi}{180}$ et $a = \frac{\pi}{4}$ de sorte que $x - a = \frac{\pi}{90}$, alors il existe un $c \in]45, 47[$ tel que l'équation (3) se traduit par :

$$f(\frac{47\pi}{180}) = \underbrace{f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})\frac{\pi}{90} + f^{(2)}(\frac{\pi}{4})\frac{(\frac{\pi}{90})^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(\frac{\pi}{4})\frac{(\frac{\pi}{90})^n}{n!}}_{\text{Polynôme de Taylor d'ordre } n \text{ en } 47°} + \underbrace{f^{(n+1)}(c)\frac{(\frac{\pi}{90})^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Reste d'ordre } n+1}$$

Le but ici est de trouver la plus petite valeur de n telle que le polynôme de Taylor d'ordre n en $\frac{47\pi}{180}$ soit une valeur approchée à $\epsilon = 10^{-5}$ près de $\sin 47°$. En effet, d'après la Définition 2, il suffit de poser

$$\left|R_n\right| = \left|f^{(n+1)}(c)\frac{(\frac{\pi}{90})^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq 10^{-5}$$

et de résoudre cette inégalité par rapport à n.

Problème : La non-connaissance de la valeur de c rend la résolution de l'inégalité infaisable.

Solution : Il faut majorer $\left|f^{(n+1)}(c)\right|$

En effet, remarquons d'abord que

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad \left|f^{(n+1)}(c)\frac{(\frac{\pi}{90})^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|f^{(n+1)}(c)\right|\frac{(\frac{\pi}{90})^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or, on sait que

$$\left|f^{(n+1)}(c)\right| = \left|\sin(c + (n+1)\frac{\pi}{2})\right| \leq 1$$

Il s'ensuit

$$\left|R_n\right| \leq \frac{(\frac{\pi}{90})^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi, on cherche alors n tel que

$$\left|R_n\right| \leq \frac{(\frac{\pi}{90})^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

- Pour $n = 1$ on a $\frac{(\frac{\pi}{90})^{1+1}}{(1+1)!} \approxeq 6 \times 10^{-4} > 10^{-5}$
- Pour $n = 2$ on a $\frac{(\frac{\pi}{90})^{2+1}}{(2+1)!} \approxeq 7 \times 10^{-6} < 10^{-5}$

On en déduit que le polynôme de Taylor d'ordre 2 en $\frac{47\pi}{180}$ est une valeur approchée à $\epsilon = 10^{-5}$ près.

$$\sin(47°) = \sin(\frac{47\pi}{180}) = \sin(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{90}\cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{90})^2\sin(\frac{\pi}{4}) = 0.731360 \quad \text{à} \quad 10^{-5} \text{ près}$$

Autres exemples

1. En appliquant la formule de Taylor pour e^x à l'ordre 5 au voisinage de 0, donner une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.

2. Soit x un réel strictement positif. Démontrer que :

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

   En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Correction

1. La fonction e^x est continue et indéfiniment dérivable. Donc, en appliquant la formule de Taylor pour e^x à l'ordre 5 au voisinage de 0 sur $[0,x]$ on trouve : Il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}e^c$$

   On applique cette formule à $x = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!4} + \frac{1}{3!8} + \frac{1}{4!16} + \frac{1}{5!32} + \frac{1}{6!64}e^c$$

   D?autre part, puisque $c \in]0,1/2[$ alors nous avons $e^c < e < 3$. Il vient

$$\frac{1}{6!64}e^c < \frac{3}{6!64} \simeq 7,2 \times 10^{-5} < 10^{-4}$$

   Ceci montre que la somme des 6 premiers termes dans la formule ci-dessus constitue une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.

2. Notons $f(x) = \ln(1+x)$. On a

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

   La formule de Taylor à l'ordre 2 sur $[0,x]$ donne donc : Il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{(1+c)^3}\frac{x^3}{6}$$

   Puisque $c > 0$, on en déduit :

$$\left|\frac{2}{(1+c)^3}\right| \leq 2,$$

   Il vient alors :

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| = \left|\frac{2}{(1+c)^3}\right|\frac{x^3}{6} \leq \frac{x^3}{3}.$$

   Remarquons que $\ln(1,003) = \ln(1+0,003)$. Donc pour $x = 0,003$ on a $(0,003)^3/3 = 9 \times 10^{-9} \leq 10^{-8}$. Une valeur approchée à 10^{-8} près de $\ln(1,003)$ est donc : $0,003 - (0,003)^2/2 = 0,0029955$.

Développements limités

Définition 3 : ***Développement limité***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f admet un *développement limité* (DL) à l'ordre n en a ($DL_n(a)$) Ssi il existe un polynôme $P(x)$ de degré n et $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \epsilon(x)$$

et

$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$$

$P(x-a)$ est appelée **partie régulière** du DL, et $(x-a)^n\epsilon(x)$ est appelé **reste** d'ordre n.
On peut également écrire :

$$f(x) = P(x-a) + \mathrm{O}(x-a)^n$$

Un développement limité est donc l'approximation **locale** d'une fonction par un polynôme. L'approximation est d'autant plus précise que l'ordre du DL est élevé.

3 Propriétés des développements limités

1. **Unicité**

   Une fonction ne peut admettre qu?un seul développement limité d?ordre n donné.

2. **Somme**

   Si $f(x)$ et $g(x)$ admettent des développements limités d'ordre n, $f(x)+g(x)$ admet un développement limité dont la partie régulière est la somme des parties régulières des développements limités de $f(x)$ et $g(x)$.

3. **Produit**

   La partie régulière du développement limité d'ordre n de $f(x).g(x)$ se compose des termes de degré au plus égal à n du produit des parties régulières des développements limités de $f(x)$ et $g(x)$.

4 Formulation du développement limité

Voici maintenant un théorème qui assure l'existence de DLs pour une grande classe de fonctions, et permet de plus de les calculer simplement.

Théorème 2 : ***Taylor-Young***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, a dans l'intérieur de I. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, n fois dérivable dans I.
Alors, f admet un $DL_n(a)$, donné par :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

$f^{(k)}$ signifie la dérivée k^{ieme} de f.

5 Développements limités au voisinage de 0 à l'ordre n usuels à connaître

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots\dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + + x^3 + \dots\dots\dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\dots\dots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots\dots\dots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

TD

Exercice 1 : Somme et produit de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0

2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0

4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0

6. $\left(\ln(1+x)\right)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 2 : Composition de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0

2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0

3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0

Exercice 3 : DLs pas en 0

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en **2**

2. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en **2**

Exercice 4 : Application des DLs: Limites de fonctions

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ en **0;**

2. $\dfrac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$ en **0;**

3. $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ en **0;**

Correction

Exercice 1

1. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+o(x^3)\\ e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x}-e^x=\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$

2. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\\ \sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\end{aligned}$$

et de faire la somme :

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+o(x^4).$$

3. On écrit

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\\ \cos(2x) &= 1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{4x^6}{45}+o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour $\cos(2x)$ car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par x, et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit

$$\sin(x)\cos(2x)=x-\frac{13x^3}{6}+\frac{121x^5}{120}+o(x^6).$$

4. On écrit les développements limités

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\end{aligned}$$

et on effectue le produit pour trouver

$$(\cos x)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).$$

5. C'est la même méthode, encore plus facile car $1+x^3=1+x^3+o(x^3)$. Puisque d'autre part

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)$$

on trouve en effectuant le produit

$$(1+x^3)\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{15x^3}{16}+o(x^3).$$

6. Puisque $\ln(1+x)\sim_0 x$, il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

on trouve

$$\big(\ln(1+x)\big)^2=x^2-x^3+\frac{11x^4}{12}+o(x^4).$$

Exercice 2

1. Puisque l'on divise par x, on part d'un DL de $\sin(x)$ à l'ordre 5. Il vient

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

On peut donc écrire

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) \text{ avec } u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

De plus, on sait que

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

On calcule les puissances de u, et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,

$$u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

$$u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{-x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2\times 36}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= \frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4). \end{aligned}$$

2. On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut bien écrire que

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

On calcule les puissances de u, et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\ u^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\ u^3 &= x^3 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

En remplaçant, on trouve

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$(\cos x)^{\sin x} = \exp\left(\sin x \ln(\cos x)\right).$$

On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit! Soit d'abord $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et posons $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. On a alors

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\ u^2 &= \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ u^3 &= o(x^5) \quad \text{car l'ordre du polynême de } u^3 \text{ dépasse 5} \\ u^4 &= o(x^5) \quad \text{Idem} \\ u^5 &= o(x^5) \quad \text{Idem} \end{aligned}$$

Il vient
$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$
On en déduit
$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(\cos x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right)\\ &= -\frac{x^3}{2} + o(x^5)\end{aligned}$$
Finalement, on pose $v = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$, et on voit que $v^2 = o(x^5)$. On obtient donc
$$\exp\big(\sin x \ln(\cos x)\big) = \exp(v) = 1 + v + O(v^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5).$$
Il y avait finalement moins de calculs que l'on ne pouvait le craindre!

Exercice 3

1. On pose $x = 2 + h$, d'où
$$\begin{aligned}\frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + o(h^3).\end{aligned}$$
En revenant à x, on obtient
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o\big(x-2)^3\big).$$
2. On pose $x = 2 + h$, on factorise par 2 et on utilise les propriétés de la fonction logarithme :
$$\begin{aligned}\ln(2+h) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)\\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3).\end{aligned}$$
Revenant à x, cela s'écrit encore
$$\ln(x) = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o\big((x-2)^3\big).$$

Exercice 4

1. Effectuons un développement limité du numérateur à l'ordre 3. On a
$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$
La limite recherchée est $-1/6$.
2. Effectuons un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 2. On a
$$\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -2 + o(1).$$
La limite recherchée est donc égale à -2.
3. On a
$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{x\ln a} + e^{x\ln b}\right)\right)\right)$$

0n effectue un développement limité au premier ordre de $e^{x\ln a}$ et $e^{x\ln b}$. On trouve :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{x\ln a}+e^{x\ln b}\right)\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2}\left(\ln a+\ln b\right)+o(x)\right)\sim_0\frac{1}{x}\frac{x}{2}\ln(ab)=\frac{1}{2}\ln(ab).$$

Repassant par l'exponentielle, on trouve que la limite recherchée est

$$\exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)\right)=\exp\left(\ln((ab)^{\frac{1}{2}})\right)=(ab)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}.$$