Diagonalisation des matrices carrées

La diagonalisation est un procédé utilisé dans de nombreux domaines et qui simplifie considérablement les applications des matrices. En particulier, cela nous permet de calculer les puissances A^n d'une matrice carré et l'exponentielle e^{At} d'une matrice .

Définition 1 : ***Valeur propre, Vecteur propre, Sous-espace propre, Base propre***

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que :

$$\boxed{Au = \lambda u} \text{ ou d'une manière équivalente } \boxed{\left(A - \lambda I_n\right)u = 0}$$

- u est dit **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.

- Une valeur propre possède une infinité de vecteurs propres. Tous ces vecteurs propres sont rassemblés dans un ensemble appelé **sous-espace propre** relatif à la valeur propre λ et est noté E_λ. On a donc par définition :

$$E_\lambda = \left\{u \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \left(A - \lambda I_n\right)u = 0\right\}$$

- Une famille de vecteurs propres $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ est une **base propre** de E_λ si tout vecteur $u \in E_\lambda$ est une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \cdots, e_k$, c-à-d il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_p e_k$$

  Dans ce cas la dimension de E_λ est

$$\boxed{\dim E_\lambda = k = \text{le nombre d'éléments de la base}}$$

Définition 2 : ***Polynôme caractéristique et valeurs propres***

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ de la matrice A est le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$, c'est-à-dire :

$$\boxed{p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right)}$$

Les racines de ce polynôme (i.e, les solutions de $p(\lambda) = 0$) sont les valeurs propres de A.

Rappelons qu'une matrice est triangulaire, supérieur ou inférieur, s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(a) Triangulaire **inférieure** (b) Triangulaire **supérieure**

Théorème 1 :
Pour les matrices triangulaires, les valeurs propres sont données par les éléments diagonaux

$$\boxed{\lambda_1 = a_{1,1}, \quad \lambda_2 = a_{2,2}, \cdots\cdots, \quad \lambda_n = a_{n,n}}$$

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 1$

Définition 3 : ***Matrice diagonalisable***
Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que :

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

Où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A, c-à-d

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dans ce cas nous avons aussi :

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

La matrice P est appelée la matrice de **passage de la base canonique à la base propre**.

Propriété 1 :
Toute matrice A symétrique ($A^T = A$) est diagonalisable.

1 Comment diagonaliser une matrice

Il faut tout d'abord remarquer que toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. Nous allons donc voir à quelles conditions une matrice est diagonalisable. Le raisonnement va se baser sur des exemples de matrices d'ordre **2** et **3**.

1.1 Diagonalisation des matrices d'ordre 2

Principe :
On cherche les racines du polynôme caractéristique λ_1 et λ_2. On regarde comment sont-elles?

- Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées, alors A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$;
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réelles, alors A est diagonalisable, et sa forme diagonale est
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
- Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors A diagonalisable si et seulement si A est déjà diagonale (au départ) : il n'y a rien à ajouter.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Etape 1 : Calcul des valeurs propres : Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left(A - \lambda I_2\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 \end{aligned}$$

Ainsi
$$p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$$

Donc, les valeurs propres sont $\lambda_1 = -1 \neq \lambda_2 = 3$. La matrice A est donc diagonalisable et sa forme diagonale est
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Calcul des sous-espaces propres E_λ : On cherche la forme des vecteurs propres $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ relatifs à chaque λ_i solutions non nulles du système :

$$\left(A - \lambda_i I_2\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Calcul du sous-espace propre E_{-1} relatif à $\lambda_1 = -1$</u>

$$\left(A-(-1)I_2\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1-(-1) & 2\\ 2 & 1-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\2x+2y=0\end{cases}\Longrightarrow y=-x$$

Donc, la forme des vecteurs propres est $u=\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ (On factorise par x). Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_1=-1$ est donné par :

$$E_{-1}=\left\{u\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } u=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_{-1} la famille $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Il s'ensuit $\dim E_{-1}=1$, (1 seul élément).

Calcul du sous-espace propre E_3 relatif à $\lambda_2=3$

$$\left(A-3I_2\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1-3 & 2\\ 2 & 1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}-2x+2y=0\\2x-2y=0\end{cases}\Longrightarrow x=y$$

Donc la forme des vecteurs propres est $u=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (On factorise par x). Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_2=3$ est donné par :

$$E_3=\left\{u\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } u=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_3 la famille $\left\{e_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Il s'ensuit $\dim E_3=1$.

Etape 3 : Calcul de la matrice de passage P : La matrice P est simplement la matrice qui a (dans l'ordre) e_1 et e_2 en colonne : ici

$$P=\begin{pmatrix}e_1 & e_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

Remarque 1 :

On aurait pu choisir aussi la matrice P comme

$$P=\begin{pmatrix}e_2 & e_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

Cependant, la forme diagonale de A serait dans ce cas :

$$D=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Conclusion :

Si les calculs ont bien été faits, nous avons alors

$$\boxed{A=PDP^{-1} \quad \text{et} \quad D=P^{-1}AP}$$

Vérification : On a

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}\Big(Com(P)\Big)^{T}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Il vient

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=A$$

1.2 Diagonalisation des matrices d'ordre 3

1.2.1 Cas des valeurs propres distinctes

Théorème 2 :
Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable

Exemple : $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Etape 1 : Calcul des valeurs propres : On cherche les racines du polynôme caractéristique. En effet :

$$p(\lambda)=\det\Big(A-\lambda I_3\Big)=\det\left(\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & -1\\ 3 & -2-\lambda & 0\\ -2 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

Le développement du déterminant par rapport à la troisième colonne donne

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=(-1)\det\begin{pmatrix}3 & -2-\lambda\\ -2 & 2\end{pmatrix}+(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ 3 & -2-\lambda\end{pmatrix}=-6+4+2\lambda+(1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-6)\\ &=-2+2\lambda+(1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-6)=-2(1-\lambda)+(1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-6),\ \text{On factorise par}(1-\lambda)\\ &=(1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8)=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4)\end{aligned}$$

Ainsi

$$p(\lambda)=0\Longrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-4$$

Donc les valeurs propres sont $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-4$. La matrice A est d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes, A est donc diagonalisable et sa forme diagonale est

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

Etape 2 : Calcul des sous-espace propres E_λ : On cherche la forme des vecteurs propres $v=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ relatifs à chaque λ_i solutions non nulles du système :

$$\Big(A-\lambda_i I_3\Big)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Calcul de E_1 relatif à $\lambda_1=1$

$$\left(A-1I_3\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}-1&2&-1\\3&-3&0\\-2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}-x+2y-z=0\\3x-3y=0\\-2x+2y=0\end{cases}\Longrightarrow x=y=z$$

Donc la forme des vecteurs propres est $u=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$. Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_1=1$ est donné par :

$$E_1=\left\{u\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } u=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_1 la famille $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Il s'ensuit $\dim E_1=1$.

<u>Calcul de E_2 relatif à $\lambda_2=2$</u>

$$\left(A-2I_3\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}-2&2&-1\\3&-4&0\\-2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}-2x+2y-z=0\\3x-4y=0\\-2x+2y-z=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}z=-\frac{1}{2}x\\y=\frac{3}{4}x\end{cases}$$

Donc la forme des vecteurs propres est $u=\begin{pmatrix}x\\\frac{3}{4}x\\-\frac{1}{2}x\end{pmatrix}$.

Pour avoir un vecteur propre qui forme la base propre avec des composantes entiers relatifs, on factorise par $\frac{1}{4}x$. Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_2=2$ est donné par :

$$E_2=\left\{u\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } u=\frac{1}{4}x\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_2 la famille $\left\{e_2=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$. Il s'ensuit $\dim E_2=1$.

<u>Calcul de E_{-4} relatif à $\lambda_3=-4$</u>

$$\left(A-(-4)I_3\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}4&2&-1\\3&2&0\\-2&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}4x+2y-z=0\\3x+2y=0\\-2x+2y-5z=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}z=x\\y=-\frac{3}{2}x\end{cases}$$

Donc la forme des vecteurs propres est $u=\begin{pmatrix}x\\-\frac{3}{2}x\\x\end{pmatrix}$. Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_3=-4$ est donné par :

$$E_{-4}=\left\{u\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } u=\frac{1}{2}x\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_{-4} la famille $\left\{ e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Il s'ensuit $\dim E_{-4} = 1$.

Etape 3 : Calcul de la matrice de passage P : La matrice P est simplement la matrice qui a (dans l'ordre) e_1, e_2 et e_3 en colonne : ici

$$P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les valeurs propres λ_i apparaissent sur la forme diagonale D dans le même ordre que nous avons placé les colonnes propres pour former P.

Conclusion :

On a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$A = PDP^{-1}$$

1.2.2 Cas des valeurs propres multiples

Définition 4 : *Multiplicité d'une racine*

Si a est racine du polynôme p, sa multiplicité est le plus grand entier m pour lequel on peut écrire $p(x) = (x-a)^m g(x)$, avec g polynôme non nul.

Théorème 3 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n. La matrice n'est diagonalisable que si la dimension de chaque sous-espace propre E_{λ_i} est égale à la multiplicité m_i de la valeur propre λ_i.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Etape 1 : Calcul des valeurs propres : On cherche les racines du polynôme caractéristique. En effet :

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_3\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2-\lambda)^2(3+\lambda), \quad \text{On développe le déterminant par rapport à la 3ième ligne} \end{aligned}$$

Ainsi

$$p(\lambda)=0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \text{ de multiplicité } m_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3, \text{ de multiplicité } m_2 = 1 \end{cases}$$

Remarque 2 :
A ce stade, on ne peut pas conclure quant à la diagonalisation de la matrice. Il faut calculer les dimensions de chaque sous-espace propre.

Etape 2 : Calcul des sous-espace propres E_λ : Comme plus haut, on cherche la forme des vecteurs propres $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ relatifs à chaque λ_i solutions non nulles du système :

$$\left(A - \lambda_i I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de E_2 relatif à $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -2x+3y-z=0 \Longrightarrow z=-2x+3y$$

Donc la forme des vecteurs propres est (On factorise par x et y)

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x+3y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est donné par :

$$E_2 = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } u = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_2 la famille $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, $\dim E_2 = 2$, (2 éléments dans la base)

Calcul de E_{-3} relatif à $\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc la forme des vecteurs propres est (On factorise par x)

$$u = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_2 = -3$ est donné par :

$$E_{-3} = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } u = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_{-3} la famille $\left\{ e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, $\dim E_{-3} = 1$.

Conclusion :
Puisque $\dim E_2 = 2 =$ à la multiplicité $m_1 = 2$ de la valeur propre $\lambda_1 = 2$ et $\dim E_{-3} = 1 =$ à la multiplicité $m_2 = 1$ de la valeur propre $\lambda_2 = -3$, alors A est diagonalisable et on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A = PDP^{-1}$$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Etape 1 : Calcul des valeurs propres : On cherche les racines du polynôme caractéristique. En effet :

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_3\right) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, & \text{de multiplicité } m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1, & \text{de multiplicité } m_2 = 1 \end{cases}$$

Etape 2 : Calcul de E_2 relatif à $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -x + y + z = 0 \Longrightarrow x = y + z$$

Donc la forme des vecteurs propres est (On factorise par y et z)

$$u = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est donné par :

$$E_2 = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_2 la famille $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, $\dim E_2 = 2$, (2 éléments dans la base)

Calcul de E_1 relatif à $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = y \end{cases}$$

Donc la forme des vecteurs propres est (On factorise par y)

$$u = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_2 = -3$ est donné par :

$$E_{-3} = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_{-3} la famille $\left\{ e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, $\dim E_{-3} = 1$.

conclusion : Puisque $\dim E_2 = 2 =$ à la multiplicité $m_1 = 2$ de la valeur propre $\lambda_1 = 2$ et $\dim E_1 = 1 =$ à la multiplicité $m_2 = 1$ de la valeur propre $\lambda_2 = 1$, alors A est diagonalisable et on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = PDP^{-1}$$

2 Application au calcul des puissances d'une matrice

Le théorème suivant donne une formule liant les puissances d'une matrice A diagonalisable et sa forme diagonale D.

Théorème 4 :
Soit A une matrice diagonalisable et D sa forme diagonale D, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible P telle que.

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

Alors on a

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

On démontre cette formule par récurrence sur n en remarquant que :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$$

Or, $P^{-1} \times P = I_n$. Il s'ensuit

$$A^{n+1} = PD^n \times DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Exemple 1 : Reprenons le premier exemple où

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

On a alors

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-1)^n+3^n&(-1)^{n+1}+3^n\\(-1)^{n+1}+3^n&(-1)^n+3^n\end{pmatrix}$$

Exemple 2 : Médian 2021 Considérons le système de suites récurrentes suivant :

$$\begin{cases}U_{n+1}&=2U_n+V_n\\V_{n+1}&=-3U_n-2V_n\end{cases}$$

avec les conditions initiales $U_0=0$ et $V_0=1$. Pour n entier naturel, on définit le vecteur $X_n=\begin{pmatrix}U_n\\V_n\end{pmatrix}$

L'objectif de l'exercice est de trouver l'expression de U_n et V_n en fonction de n.

1. Montrer que $X_{n+1}=A\,X_n$, où A est une matrice que l'on déterminera.
2. Démontrer par récurrence la relation $X_n=A^nX_0$.
3. Calculer le polynôme caractéristique $p(\lambda)=det(A-\lambda I)$ et déterminer les valeurs propres $\lambda_1<\lambda_2$ de A.
4. La matrice A est-elle diagonalisable?
5. Déterminer les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} associés aux valeurs propres ainsi que leurs bases propres e_1 et e_2. On veillera à ce que les composantes de e_1 et e_2 soient des entiers relatifs.
6. Dans la suite on prendra $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$. Fournir la matrice de passage P de la base canonique à la base propre.
7. Calculer P^{-1}.
8. Quelles sont les valeurs propres de A^n.
9. Calculer A^n en fonction de n.
10. En déduire U_n et V_n en fonction de n.

Solution :

1.
$$X_{n+1}=\begin{pmatrix}U_{n+1}\\V_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}U_n\\V_n\end{pmatrix}}_{X_n}$$

2. $X_n=A^nX_0$.

   Initialisation : Pour $n=0$, on a $A^0X_O=I_2X_0=X_0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

   Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie au rang n. Montrons qu'il en est de même au rang $n+1$. En effet, on an

   $$X_{n+1}=A\,X_n=A\,A^nX_0=A^{n+1}X_0$$

   La propriété est donc vraie au rang $n+1$

   Conclusion : Par récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

3. Le polynôme caractéristique $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

4. <u>Calcul du sous-espace propre E_{-1} relatif à $\lambda_1 = -1$</u>

$$\left(A - (-1)I_2\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = -3x$$

Donc, la forme des vecteurs propres est $u = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (On factorise par x). Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est donné par :

$$E_{-1} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } u = x\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_{-1} la famille $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

<u>Calcul du sous-espace propre E_1 relatif à $\lambda_1 = 1$</u>

$$\left(A - (-1)I_2\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = -x$$

Donc, la forme des vecteurs propres est $u = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (On factorise par x). Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est donné par :

$$E_{-1} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } u = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_{-1} la famille $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

5. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

6. $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

7. Les valeurs propres de A^n sont $(-1)^n$ et 1.

8. $$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 - (-1)^n & 1 - (-1)^n \\ 3(-1)^n - 3 & 3(-1)^n - 1 \end{pmatrix}$$

9. En déduire U_n et V_n en fonction de n.

$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A^n X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 - (-1)^n & 1 - (-1)^n \\ 3(-1)^n - 3 & 3(-1)^n - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(3(-1)^n - 1\right) \end{pmatrix}$$

TD : DIAGONALISATION DE MATRICES

Exercice 1: Les matrices suivantes sont-elle diagonalisable? Effectuer explicitement les étapes de calcul de la matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction : Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Etape 1 : Calcul des valeurs propres : On cherche les racines du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Donc

$$p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \text{ de multiplicité } m_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1, \text{ de multiplicité } m_2 = 1 \end{cases}$$

Remarque : Nous sommes dans la situation où la matrice A admet une valeur propre multiple. Donc, à ce stade, on ne peut pas conclure quant à la diagonalisation de la matrice. Il faut calculer les dimensions de chaque sous-espace propre et vérifier si leurs dimensions sont égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes.

Etape 2 Calcul de E_2 relatif à $\lambda_1 = 2$: On cherche la forme des vecteurs propres $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ relatifs à $\lambda_1 = 2$ solutions non nulles du système :

$$\left(A - 2I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -y \end{cases}$$

Donc la forme des vecteurs propres est (On factorise par y)

$$u = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_1 = 2$ est donné par :

$$E_2 = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } u = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; y \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_2 la famille $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, $\dim E_2 = 1$

Conclusion : Puisque $\mathbf{dim}\,E_2 = 1 \neq$ la multiplicité de $\lambda_1 = 2$. La matrice est donc non diagonalisable.

Pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Inutile de calculer le polynôme caractéristique de B car la matrice est triangulaire et ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, & \text{de multiplicité } m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2, & \text{de multiplicité } m_2 = 1 \end{cases}$$

Etape 2 Calcul de E_1 relatif à $\lambda_1 = 1$: On cherche la forme des vecteurs propres $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ relatifs à $\lambda_1 = 1$ solutions non nulles du système :

$$\left(A - 1 \times I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x - y + z = 0 \Longrightarrow y = x + z$$

Donc la forme des vecteurs propres est (On factorise par x et z)

$$u = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est donné par :

$$E_1 = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } u = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_1 la famille $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, $\mathbf{dim}\,E_1 = 2$

Remarque : Puisque $\mathbf{dim}\,E_1 = 2 =$ la multiplicité de $\lambda_1 = 1$, on continue les calculs.

Calcul de E_2 relatif à $\lambda_2 = 2$: On cherche la forme des vecteurs propres $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ relatifs à $\lambda_2 = 2$ solutions non nulles du système :

$$\left(A - 2I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ quelconque dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc la forme des vecteurs propres est (On factorise par z)

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le sous-espace propre relatif à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est donné par :

$$E_2 = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } u = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \, z \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut donc prendre comme base propre de E_2 la famille $\left\{ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, $\dim E_2 = 1$

Conclusion : Puisque $\dim E_1 = 2 =$ la multiplicité de $\lambda_1 = 1$ et $\dim E_2 = 1 =$ la multiplicité de $\lambda_2 = 2$ alors La matrice B est donc diagonalisable et on peut écrire :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}$$

Exercice 2: Déterminer les valeurs propres de matrice suivante. Est-elle diagonalisables?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction : A est triangulaire inférieure donc ses valeurs sont ses coefficients diagonaux : 1, 2 et 3. A a trois valeurs propres distinctes donc d'après le théorème 2 du cours, A est diagonalisable.

Exercice 3: Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Démontrons que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction : Le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ est égal à

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - c^2 = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - c^2,$$

Déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - c^2) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 \\ &= (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a - d = 0$ et $c = 0$, mais, si $c = 0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice de taille $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{k}\geq\boldsymbol{2}$. Montrer que si $\boldsymbol{\lambda}$ est une valeur propre de $\boldsymbol{A}$ avec pour vecteur propre $\boldsymbol{v}$, alors $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$ est une valeur propre de $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$ avec pour vecteur propre $\boldsymbol{v}$.

Correction : Par définition, on a $\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{\lambda v}$. Par récurrence sur $\boldsymbol{k}$, on montre $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}$. Supposons le résultat vrai au rang $\boldsymbol{k}$, c-à-d $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}$. On a alors:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k+1}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k+1}}\boldsymbol{v}$$

Ceci montre que le vecteur $\boldsymbol{v}$, non nul, est un vecteur propre de la matrice $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$ associé à la valeur propre $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}$.

exercice 5: Montrer qu'une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ est inversible si et seulement si elle n'admet pas $\boldsymbol{0}$ comme valeur propre.

Correction : Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ est inversible si et seulement si il n'existe aucun vecteur colonne $\boldsymbol{v}$ non nul tel que $\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{0}$. Ce qui revient au fait que $\boldsymbol{0}$ n'est pas valeur propre de $\boldsymbol{A}$.

exercice 6: Montrer que si $\boldsymbol{\lambda}$ est une valeur propre d'une matrice inversible $\boldsymbol{A}$, alors $\boldsymbol{\lambda}^{-\boldsymbol{1}}$ est une valeur propre de $\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}$. Trouver un vecteur propre correspondant.

Correction : Si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{A}$ associé à la valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$, on a

$$\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{\lambda v}$$

La valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$ est non nulle car la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible (voir exercice 5). On multiplie à gauche par $\boldsymbol{\lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}$, et on obtient

$$\boldsymbol{\lambda}^{-\boldsymbol{1}}\underbrace{\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{A}}_{=\boldsymbol{I_n}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{\lambda v}=\boldsymbol{\lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{v}$$

Il vient

$$\boldsymbol{\lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{v}$$

d'où le résultat.