Suites numériques

1 Définitions

1.1 Définition d'une suite

Définition 1 :

- Une **suite** est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème **terme** ou **terme général** de la suite.

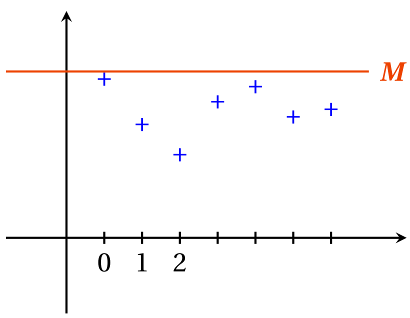
Remarque 1 :
La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

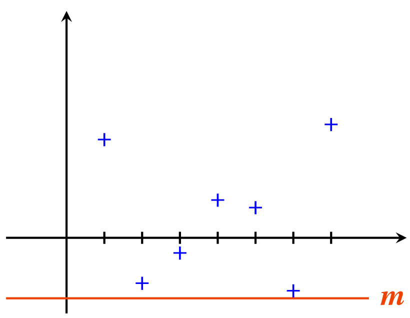
1.2 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M.$$





1.3 Suite croissante, décroissante

Définition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

2 Limites

2.1 Limite finie, limite infinie

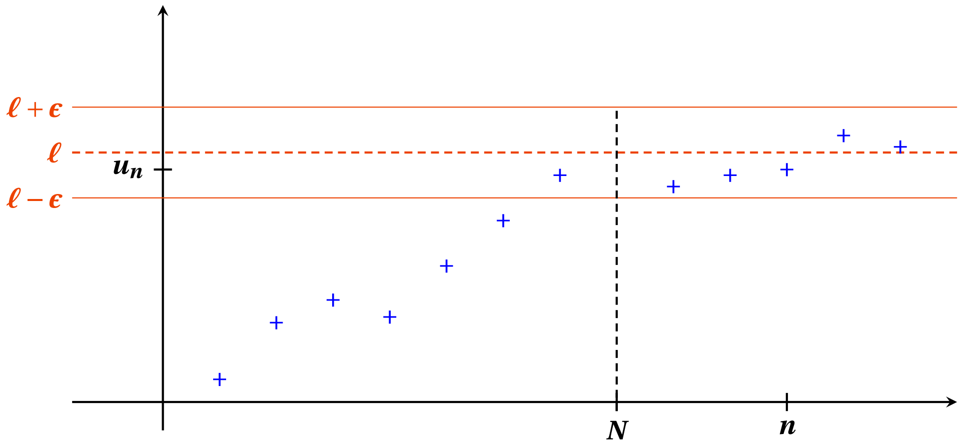
Définition 4 :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \epsilon)}$$

Dans ce cas on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** ℓ. Autrement dit : u_n est proche d'aussi près que l'on veut de ℓ, à partir d'un certain rang.



Exemple 1 :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 2 + \frac{1000}{n^2}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 2$$

2. A partir de quel entier naturel n_0 a-t-on:

   $|u_{n_0} - 2| < 10^{-2}$?

   On utilise la définition $|u_n - 2| < 10^{-2}$ ce qui donne $|\frac{1000}{n^2}| < 10^{-2}$ et on prendra alors $n_0 = E(\sqrt{\frac{10^3}{10^{-2}}}) + 1$

Proposition 1 :

Toute suite convergente est bornée.

Définition 5 :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n \geqslant A)$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n \leqslant -A)$$

Remarque 2 :

1. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou parfois $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et de même pour une limite $\pm\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ ou u_n n'admet pas de limite, alors on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.

2.2 Suite géométrique

Proposition 2 : ***Suite géométrique***

On fixe un réel a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = a^n$.

1. Si $a = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1$.
2. Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Si $a \leqslant -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2.3 Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites, et L et L' sont deux réels. Le point d'interrogation correspond à une forme indéterminée.

– Limite de la somme $u_n + v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

– Limite du produit $u_n \times v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	**?**

– Limite de l'inverse $\dfrac{1}{u_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$L\neq 0$	$\mathbf{0}$ par valeurs positives	$\mathbf{0}$ par valeurs négatives	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} =$	$\dfrac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	$\mathbf{0}$

– Limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$+\infty$ ou $-\infty$	$L\neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$	$\mathbf{0}$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L'\neq 0$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\dfrac{L}{L'}$	$\mathbf{0}$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	**?**	**?**

2.4 Autres théorèmes de convergence

2.4.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 1 : ***Théorème des gendarmes pour les suites***

1. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que,

$$\text{pour tout entier } n,\quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n\ .$$

   Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout entier n, $u_n \geqslant v_n$.
   - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exemple 2 :

1. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

   On sait que $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, il vient en multipliant ces inégalités par 1

$$\frac{-1}{n+1} \leqslant u_n = \frac{\cos(n)}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   Or $\dfrac{-1}{n+1} \longrightarrow 0$ et $\dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$$

2. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

   On a $(-1)^n = 1$ lorsque n est pair, et $(-1)^n = -1$ lorsque n est impair. Ainsi, pour tout entier n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, soit aussi $n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1$, puis, multipliant par $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on obtient $\dfrac{n-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$. Or $\dfrac{n-1}{n+1} \longrightarrow 0$ et $\dfrac{n+1}{n+1} \longrightarrow 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$$

Définition 6 : ***Relations d'équivalence***

On dit que la suite u_n est équivalente à la suite v_n si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

On note alors

$$u_n \sim v_n$$

Théorème 2 :

Si deux suites sont équivalentes, alors l'une converge si et seulement si l'autre converge. Dans ce cas, leurs limites sont égales, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n$$

Théorème 3 : ***Règles de calcul pour les équivalents***

Soient u_n, v_n, x_n et y_n quatre suites. Alors on a :

- Si $u_n \sim v_n$ et $x_n \sim y_n$ alors $\quad u_n x_n \sim v_n y_n \quad$ et $\quad \dfrac{u_n}{x_n} \sim \dfrac{v_n}{y_n}$,
- Si $u_n \sim v_n$ et $p \in \mathbb{Z}$ alors $\quad u_n^p \sim v_n^p$.
- **Attention :** La relation d'équivalence n'est pas compatible ni avec l'addition ni avec la composition.
- En $\pm\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, une fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Remarque 3 : ***Quelques équivalents usuels***

Si $v_n \longrightarrow 0$ alors

$$\sin v_n \sim v_n \qquad \ln(1+v_n) \sim v_n$$

$$\cos v_n \sim 1 - \frac{v_n^2}{2} \qquad e^{v_n} \sim 1 + v_n$$

$$(1+v_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, v_n \qquad \frac{1}{1 \pm v_k} \sim 1 \pm v_k$$

Exemple 3 :

La suite $u_n = \sin\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right) \sim \dfrac{n}{n^2+1}$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

Théorème 4 :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Exemple 4 :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante : en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.
- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
  - Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 \leqslant 1 = 2 - \frac{1}{1}$.
  - Fixons $n \geqslant 1$ pour lequel on suppose $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. Alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Or $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc $u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$, ce qui achève la récurrence.
- Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par 2 : elle converge.

Théorème 5 : ***Point fixe***

Soit une suite (u_n) définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) converge vers un réel l, alors, la limite l vérifie la relation $f(l) = l$.

l s'appelle un point fixe pour la fonction f.

Exemple 5 :

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année **2020**, cette population comptait **600** individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à **20** individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et dresser son tableau de variations.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
4. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

Correction

1. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\ ;\ 1]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 0,75 - 0,225x$$

Or, sur $0 \leqslant x \leqslant 1$ on a

$$0,225x \leqslant 0,225 \Longrightarrow -0,225 \leqslant -0,225x \leqslant 0 \Longrightarrow 0,75-0,225 \leqslant 0,75-0,225x \leqslant 0,75$$

Ainsi, $0,525 \leqslant f'(x) \leqslant 0,75$. Donc, sur $[0\ ;\ 1]$, $f'(x) > 0$, par conséquent f est strictement croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,6375$. D'où le tableau de variation

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow$ $\mathbf{0.6375}$

2. Sur $[0\,;\,1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) - x = 0 \iff x[0,75(1-0,15x)-1] = 0 \iff x(0,75-0,1125x-1) = 0 \iff x(-0,25-0,1125x) = 0 \iff$

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 0 \\ -0,25-0,1125x & = 0 & \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \iff \left\{\begin{array}{lll} x & = & 0 \\ -\frac{0,25}{0,1125} & = & x \end{array}\right.$$

Or $-\frac{0,25}{0,1125} < 0$ donc dans $[0\,;\,1]$, $S = \{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. (a) *Initialisation* : on a vu que $0 \leqslant 0,4095 \leqslant 0,6 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, on a donc :

$$f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$$

soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1-0,15) = 0,6375 \leqslant 1$:

$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

La relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

(b) La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0 ; elle est donc est convergente.

(c) Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell \geqslant 0$ et ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question **2.** qu'elle n'avait que **0** comme solution.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0$.

4. L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

TD Suites

Exercice 1 : Intérêt des suites

Pour un trajet au prix normal de 20 euros on achète une carte d'abonnement de train à **50** euros et on obtient chaque billet à **10** euros. La publicité affirme **50%** de réduction. Qu'en pensez-vous ?

Correction : Pour modéliser la situation en termes de suites, on pose pour un entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = 20n$$
$$v_n = 10n + 50$$

u_n est le prix payé au bout de n achats au tarif plein, et v_n celui au tarif réduit, y compris le prix de l'abonnement. La réduction est donc, en pourcentage :

$$1 - \frac{v_n}{u_n} = \frac{u_n - v_n}{u_n} = \frac{10n - 50}{20n} = 0,5 - \frac{5}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,5$$

Il faut donc une infinité de trajets pour arriver à **50%** de réduction !!!!!

Exercice 2 : Convergence et calcul de limites par théorèmes sur les limites et techniques connexes

Quelques équivalents usuels Si $v_n \longrightarrow 0$ alors

$$\sin v_n \sim v_n \qquad \ln(1+v_n) \sim v_n$$

$$\cos v_n \sim 1 - \tfrac{v_n^2}{2} \qquad e^{v_n} \sim 1 + v_n$$

$$(1+v_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, v_n.$$

Établir la convergence des suites :

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^3+2n+6} \qquad u_n = \frac{\sin(n)}{n} \qquad u_n = \frac{n^2 - \cos(n)}{2(n^2-1)} \qquad u_n = \frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{2n-1}$$

$$u_n = \ln(1+\frac{a}{n}),\ a \in \mathbb{R}^* \qquad u_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Exercice 3 : Suites arithmético-géométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et u_n la suite définie par

$$u_{n+1} = a u_n + b$$

1. Quelle est la seule limite possible ℓ de la suite u_n ?

2. Soit $v_n = u_n - \ell$. Montrer que v_n est une suite géométrique, et en déduire la nature de la suite u_n

Correction :

1. Si u_n converge vers ℓ, alors ℓ est solution de $a\ell + b = \ell$, et donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

2. On a
$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(\underbrace{u_n - \frac{b}{1-a}}_{=v_n}\right) = av_n$$
La suite v_n est donc une suite géométrique de raison a. Ainsi :
$$u_n = v_n + \ell = v_0 a^n + \ell$$
Si $|a| > 1$, $|v_n| \longrightarrow +\infty$ et il en est de même de $|u_n|$ (sauf si $u_0 = \ell$ car auquel cas on aura $v_0 = 0$ et par donc la suite u_n est constante égale à ℓ). Si $|a| < 1$, alors v_n converge vers 0 et u_n converge vers ℓ. Enfin, si $a = -1$, v_n oscille entre deux valeurs suivant que n est pair ou impair, et u_n aussi.

Exercice 4: Suite homographique

Soit la suite réelle (u_n) définie par
$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$
Pour $x \neq -1$, on pose $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$.

2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n > 1$.

3. On définit une suite (v_n) à partir de (u_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, et donner l'expression de son terme général.

4. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

5. Justifier enfin que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

1. Sur $[1,+\infty[$ on a $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. Pour $n \geqslant 0$, on note $P(n)$ la propriété suivante : "$u_n > 1$". On va prouver par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

   Initialisation : on a $u_0 = 3$, $P(0)$ est donc vraie.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie; on va prouver que $P(n+1)$ est vraie. On sait que $u_n > 1$. Puisque la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$, on en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) > f(1) = 1$. la propriété est vraie au rang $n+1$. Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

3. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1} \\ &= \frac{4u_n-2-2u_n-2}{4u_n-2-u_n-1} \\ &= \frac{2u_n-4}{3u_n-3} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{u_n-2}{u_n-1}\right) \\ &= \frac{2}{3}v_n. \end{aligned}$$

   v_n est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$. On en déduit que, pour tout n

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{u_n-2}{u_n-1} = v_n &\iff u_n - 2 = u_n v_n - v_n \\ &\iff u_n(1-v_n) = 2 - v_n \\ &\iff u_n = \frac{2-v_n}{1-v_n} \end{aligned}$$

   </script> ce qui nous donne

$$u_n = \frac{2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

5. Puisque $(2/3)^n$ tend vers 0, on conclut que u_n converge vers 2.

Exercice 5 : Suites monotones et bornées

Soit u_n la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x+3}$.

1. Étudier les variations de f sur $[-2, +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que la suite u_n est croissante, minorée par -1 et majorée par 6
3. Justifier que u_n converge vers un réel ℓ, puis déterminer ℓ.

Correction :

1. La fonction f est dérivable sur $[-2, +\infty[$ et sur cet intervalle, on a $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$. Ainsi, $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $[-2, +\infty[$.
2. Pour $n \geqslant 0$, on note $P(n)$ la propriété suivante : "$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$". On va prouver par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

   Initialisation : on a $u_0 = -1$ et $u_1 = 2\sqrt{2}$ donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6$: $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie; on va prouver que $P(n+1)$ est vraie. On sait que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$. Puisque la fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2, 6]$, on en déduit que $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6)$. Ceci donne encore $2\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6$. Puisque $-1 < 2$, la propriété est vraie au rang $n+1$. Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n
3. La suite u_n est croissante et majorée par 6. Elle converge donc vers un réel ℓ. Remarquons que l'on sait déjà que $\ell \in [-1, 6]$. De plus, puisque f est continue sur $[-1, 6]$, ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$, soit $2\sqrt{\ell+3} = \ell$. Mettant au carré, ceci implique que ℓ est solution de $4(\ell+3) = \ell^2$, donc les solutions sont $\ell = -2$ et $\ell = 6$. Puisque l'on savait déjà que $\ell \in [-1, 6]$, on en déduit que $\ell = 6$: la suite u_n converge donc vers 6.