기초과제 1 모범답안

통계적 사고

작성자 : 10기 신재우

1 Central Limit Theorem

1.1 중심극한정리의 정의를 서술하시오.

중심극한정리는 동일한 (Identical) 확률분포를 가진 독립적인 (Independent) 확률변수 'n' 개의 평균의 분포는 'n' 값이 적당히 크다면 정규분포에 근사하다는 정리입니다. 이러한 것을 줄여서 i.i.d 라고 불리기도 합니다. 'n' 값이 무한대로 보낸다면 정규분포를 따른다는, 즉 Convergence in Distribution to a Normal Distribution, 의미이며 이 값이 30 이상이면 근사하다고 보통 가정합니다.

수식어로 표현하면 다음과 같습니다.

$$X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} f(\mu, \sigma^2)$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = \bar{X} \overset{D}{\to} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

첫번째 식은 $X_1, \cdots, X_n$ 들이 i.i.d 하게 평균 μ, 분산 σ^2 를 따르는 아무 분포를 의미합니다.

다르게 말하자면 어떤 분포이던 간에 i.i.d 조건만 만족한다면 표본평균은 정규분포로 근사하게 된다는 뜻입니다.

1.2 중심극한정리가 통계적 추론 중 "구간추정" 에서 어떻게 유용한지 서술하시오.

정규분포의 특징을 이용해서 1-1 에서의 Central Limit Theorem 을 다음과 같이 표현이 가능합니다.

$$\bar{X} \overset{D}{\to} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$
$$\leftrightarrow$$
$$\bar{X} - \mu \overset{D}{\to} N(0, \frac{\sigma^2}{n})$$
$$\leftrightarrow$$
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z \overset{D}{\to} N(0, 1)$$

위의 점을 이용해서 모평균인 μ 의 신뢰구간을 추정할 수 있게 됩니다. 즉 저희는 표본평균인 $\bar{X}$ 를 이용해서 모평균인 μ 의 구간을 추정할 수 있다는 뜻입니다. 유의수준이 α 로 주어졌을 때 다음과 같이 추정이 가능합니다.

$$1-\alpha \approx P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$1-\alpha \approx P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$1-\alpha \approx P\left(-\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

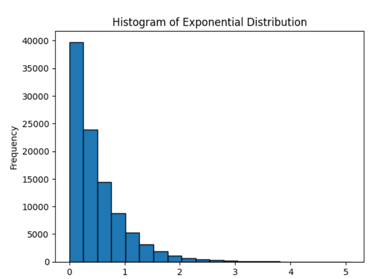
$$1-\alpha \approx P\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

1.3 .ipynb 파일에서 $\mathrm{Unif}(0,1)$ 의 분포에 대해서 중심극한정리가 적용되는 예시가 있습니다. 코드를 참조하면서 지수분포인 $\mathrm{Exp}(2)$ 분포에 대해서 중심극한정리가 적용되는 모습을 보이시오.

Listing 1: 1.3 정답 (1)

```
samples = np.random.exponential(scale = 1/2, size=100000)

plt.hist(samples, bins=20, edgecolor = 'black')
plt.xlabel('Samples')
plt.ylabel('Frequency')
plt.title('Histogram of Exponential Distribution')
plt.show()
```

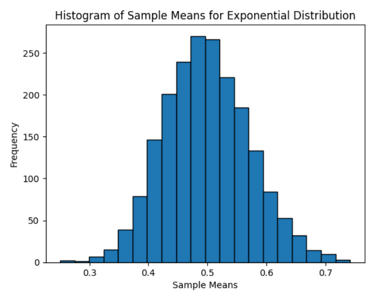


Listing 2: 1.3 정답 (2)

```
samples = np.random.exponential(scale = 1/2, size=100000)
samples = samples.reshape(50, -1)

samples_mean = np.mean(samples, axis = 0)

plt.hist(samples_mean, bins=20, edgecolor = 'black')
plt.xlabel('Sample Means')
plt.ylabel('Frequency')
plt.title('Histogram of Sample Means for Exponential Distribution')
```



위와 같이 지수분포에 비해서 정규분포로 근사한 히스토그램을 띄우고 있습니다. 이를 통해서 CLT 가 적용이 되는 모습을 볼 수가 있습니다.

2 Linear Algebra

2.1 다음과 같은 정방행렬에 Diagonalization 을 적용시켜서 나오게 되는 대각행렬을 쓰시오.

a.) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Let A $= \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (6-\lambda)\cdot(3-\lambda)-(-1)\cdot 2$$

$$= 18-6\lambda-3\lambda+\lambda^2+2 = \lambda^2-9\lambda+20$$

$$= (\lambda-4)\cdot(\lambda-5)=0, \quad \lambda = 4 \text{ or } 5$$

Solve for $(A-\lambda I)\cdot x = 0$,

If $\lambda = 5$,

$$\begin{bmatrix} 6-5 & -1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{-2\cdot r_1+r_2=r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvector : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

If $\lambda = 4$,

$$\begin{bmatrix} 6-4 & -1 \\ 2 & 3-4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{-r_1+r_2=r_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvector : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eigenvectors : $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Using $\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, we can find the Inverse Matrix P^{-1}

$$P^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 2 - 1 \cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues are 5 and 4, hence $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b.) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Let A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda I - A$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right) = (\lambda-2)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-1) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right)\cdot(\lambda - 1) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 4\lambda - 4 = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

$$= (\lambda-1)\cdot(\lambda-2)^2 = 0, \quad \lambda = 2 \text{ or } 1$$

Solve for $(\lambda I - A)\cdot x = 0$

If $\lambda = 2$,

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ -1 & 2-2 & -1 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{r_2+r_3=r_2 \\ r_2 \to r_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvectors : $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

If $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -1 & 1-2 & -1 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{r_1+r_3=r_3 \\ r_1-r_2=r_2 \\ r_1\cdot -1=r_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvectors : $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues are 2 and 1, hence

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c.) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda I - A$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 3, 2, 1$$

Solve for $(\lambda I - A) \cdot x = 0$

If $\lambda = 3$,

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ 0.5 \cdot r_1 = r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvectors : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

If $\lambda = 2$,

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{r_1 \cdot -1 = r_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvectors : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

If $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{r_1\cdot -0.5=r_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3 \\ r_2\cdot -1=r_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvectors : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues are 3, 2, 1, hence

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 다음과 같은 행렬에 SVD 를 적용시켜서 나오게 되는 Σ 행렬을 구하시오.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

우선은 A^TA 를 구하겠습니다.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda I - A$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-1)-(-1)\cdot(-1)\cdot(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\cdot(\lambda^2-2\lambda+1-1) = (\lambda-1)\cdot(\lambda\cdot(\lambda-2)) = 0$$

$$\lambda = 2, 1, 0$$

Solve for $(\lambda I - A) \cdot x = 0$
If $\lambda = 2$,

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvector : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
If $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 0 \\ -1 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvector : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
If $\lambda = 0$,

$$\begin{bmatrix} 0-1 & -1 & 0 \\ -1 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eigenvector : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

해당 벡테들에 대해서 정규직교화를 진행하게 된다면 다음과 같이 나오게 됩니다.

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, \quad v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \quad v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{0+0+1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$ and 1 이라서 V 에 대한 D Matrix 는 특이값들이기 때문에 다음과 같이 나오게 됩니다.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σ 는 0 이 아닌 특이값들에 루트를 씌워준 것입니다. 추가적으로 A 가 2×3 행렬이기에 Σ 역시 2×3 행렬입니다. 이는 다음과 같이 나오게 됩니다.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이제는 U 에 대해서 찾을 것이며, 이는 AA^T 를 구하면서 진행할 수 있지만 다음과 같이 더욱 더 간단한 방법으로 풀겠습니다.

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} \cdot A \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} \cdot A \cdot v_2 = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그럼 다음과 같이 마무리 지을 수 있게 됩니다.

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 .ipynb 파일에서 는 SVD (Singular Value Decomposition, 특이값특이값-분해분해) 를 실제로 이미지 압축을 위해서 활용하는 예시를 보여주고 있습니다있습니다. 해당 코드를 본 뒤에 새로운 사진에 대해서 원본에 비해서 적은 용량을 차지하면서도 원본에 대한 정보를 유지해 주는 차원 수가 무엇인지 알아냅시오알아냅시오.

해당 부분은 직접하셔서 이해하는게 가장 효과적이기 때문에 넘기겠습니다.

3 Student's Theorem

3.1 스튜던트 정리 3 에 있는 내용을 증명하시오.

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \text{ 는 } \chi^2(n-1) \text{ 분포를 따른다.}$$

$X_1, \cdots, X_n \sim^{iid} N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 이라고 가정한다면 카이제곱분포를 다음과 같이 사용할 수 있습니다.

$$V = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{D} \chi^2(n)$$

이 식에서 $X_i - \mu$ 부분을 표본분산을 나타내는 식으로 바꿔야 되며 수식으로는 다음과 같이 표현했습니다.

$$V = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left({X_i}^2 - \mu^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left({X_i}^2 - \bar{X}^2\right) + \left(\bar{X}^2 - \mu^2\right)\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + (\bar{X} - \mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{n-1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + \frac{n}{\sigma^2}(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \frac{n-1}{\sigma^2}\cdot S^2 + \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2 \xrightarrow{D} \chi^2(n)$$

여기에서 좌측과 우측을 각각 $\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot S^2$ 와 $\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2$ 으로 두겠습니다. 우측과 좌측은 독립이며, 우측의 경우 다음과 같이 해석이 가능합니다.

$$\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2 = (Z_n)^2 \xrightarrow{D} \chi^2(1) = (Z_n)^2 \xrightarrow{D} \chi^2(1)$$

카이제곱분포의 특성상 $\chi^2(n) + \chi^2(m) = \chi^2(n+m)$ 의 관계를 가지며, 좌측과 우측이 $\chi^2(n)$ 을 이루기 때문에 좌측은 $\chi^2(n-1)$ 이라는 것을 알 수가 있습니다. 이것을 더욱 더 증명하기 위해서 mgf 으로 살피겠습니다.

카이제곱분포의 mgf 공식은 $(1-2t)^{-n/2}$ 이며 이것을 우측의 식에 활용하면 $(1-2t)^{-1/2}$ 이 됩니다. 이것을 우측과 좌측의 식에 적용시킨다면 다음과 같이 수식으로 표현이 가능합니다.

$$(1-2t)^{-\frac{n}{2}} = E\left[e^{t\cdot\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot s^2 + t\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2}\right] = E\left[e^{t\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot s^2}\right]\cdot(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1-2t)^{-\frac{n}{2}}\cdot(1-2t)^{\frac{1}{2}} = E\left[e^{t\cdot\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot s^2}\right] = (1-2t)^{-\frac{(n-1)}{2}}$$

마지막 식의 우측 부분이 $\chi^2(n-1)$ 의 mgf 형태를 띄우고 있기 때문에 $\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot S^2$ 은 $\chi^2(n-1)$ 의 분포를 따라간다고 마무리 할 수가 있습니다.

3.2 스튜던트 정리 4 에 있는 내용을 증명하시오.

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

우선은 t-분포와 카이제곱분포 그리고 표준정규분포의 관계를 식으로 보여줘야 합니다. 해당 식의 카이제곱분포 부분에 3.1 문제의 식을 대입시키면서 식을 풀게 된다면 3.2 문제의 증명은 마무리된다. 수식으로는 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}} \sim t(k)$$

$$T = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot S^2/(n-1)}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

4 통계적 방법론

4.1 DSL 에 소속된 학회원과 DSL 에 소속되지 않은 사람의 키 평균 차이

a.) 귀무가설과 대립가설을 설정하시오.

H_0 : DSL 학회원의 평균키는 DSL 학회원이 아닌 사람의 평균 키와 같다,

$$\mu_{DSL} = \mu_{NotDSL}, \mu_{DSL} - \mu NotDSL = \mu D = 0$$

H_α : DSL 학회원의 평균키는 DSL 학회원이 아닌 사람의 평균 키보다 크다,

$$\mu_{DSL} > \mu_{NotDSL}, \mu_{DSL} - \mu NotDSL$$

b.) 유의수준 5% 에서의 가설검정을 수행하고 결론을 도출하시오도출하시오.
기초 통계량 :
X 를 DSL, Y 를 Not DSL 으로 설정하겠습니다.
$n_X = 105, \bar{X} = 173.5, \sigma_X = 7.05$
$n_Y = 105, \bar{Y} = 171.4, \sigma_Y = 7.05$
표준편차 (σ) 가 주어졌으며 둘이 똑같기 때문에 등분산이라는 가정을 걸고 풀겠습니다.

$$\mu_X - \mu_Y \text{ 의 검정 통계량 } : \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{7.05^2/(2/105)}} = T \overset{\text{CLT}}{\sim} \text{N}(0, 1),$$

$$= \frac{173.5 - 171.4 - 0}{7.05 \cdot \sqrt{2/105}} = \frac{2.1}{7.05} \cdot \sqrt{\frac{105}{2}} = 2.15829$$

$Z_{0.05} = 1.645$, Since $1.645 < 2.15829$, 귀무가설을 기각한다!
결론 : 유의수준 5% 에서 DSL 학회원의 평균키는 DSL 학회원이 아닌 사람의 평균 키보다 크다고 말할 수가 없다!

4.2 ESC 에 소속된 학회원들과의 비교

a.) 귀무가설과 대립가설을 설정하시오.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_\alpha : H_0 \text{ is not True}$$

b.) 파이썬의 `scipy.stats` 을 활용해서 유의수준 5%에서의 가설검정을 수행하고 결론을 도출하시오. 결론은 `.ipynb` 파일에 쓰셔도 괜찮습니다.

Listing 3: 4.2 정답

```
F, p_value = stats.f_oneway(DSL['heights'], ESC['heights'], Else['heights'])

print(f'F-statistic: {F}')
print(f'P-value: {p_value}')

alpha = 0.05

if p_value < alpha:
    print("At 5% Significance Level, we reject the Null Hypothesis.")
else:
    print("At 5% Significance Level, we cannot reject the Null Hypothesis.")
```

```
F-statistic: 6.82185346949053
P-value: 0.0013059664602332191
At 5% Significance Level, we reject the Null Hypothesis.
```

과제 하시느라 너무 고생하셨습니다!