Chapitre 3
Description statistique de la turbulence

Chapitre 3 : Description statistique de la turbulence

- III.1 Outils d’analyse - Opérateur moyenne
- III.2 Equations de Navier-Stokes moyennées
- III.3 Transport moléculaire – transport turbulent
- III.4 Equations des tensions de Reynolds
- III.5 Bilans Énergétiques

III.1 Outils d'analyse statistique

Rappels

Les outils statistiques sont essentiels aussi bien pour le traitement des données expérimentales que pour les calculs théoriques

<u>Densité de probabilité P</u>

La probabilité pour qu'une variable aléatoire G soit comprise entre

g et g+dg est : $P(g)dg$

La normalisation est telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} P(g)dg = 1$

<u>Probabilité jointe</u>

La probabilité pour que deux variables aléatoires G_1 et G_2 soient

comprises resp. entre g_1 et g_1+dg_1 et g_2+dg_2 est: $P(g_1, g_2)dg_1dg_2$

La normalisation est telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} P(g_1, g_2)dg_1dg_2 = 1$

On peut généraliser à n variables aléatoires

III.1 Outils d'analyse statistique

Rappels

Deux variables aléatoires G_1 et G_2 sont statistiquement indépendantes si : $$P(g_1, g_2) = P(g_1)P(g_2)$$

On alors : $$\int_{-\infty}^{+\infty} P(g_1, g_2)dg_2 = P(g_1)$$

<u>Fonction de répartition F</u>

La probabilité pour qu'une variable aléatoire G soit inférieure à g1 est: $$F(g_1) = \int_{-\infty}^{g_1} P(g)dg$$

La probabilité pour qu'une variable aléatoire G soit supérieure à g1 est : $$\int_{g_1}^{+\infty} P(g)dg = 1 - F(g_1)$$

III.1 Outils d'analyse statistique

Moyennes

Moyenne statistique

La moyenne statistique est par définition : $\bar{g} = \int_{-\infty}^{+\infty} g\, P(g)dg$

Moyenne d'ensemble

La moyenne d'ensemble d'une quantité f est définie comme la moyenne statistique sur des réalisations indépendantes $f^{(i)}$:

- On réalise N expériences indépendantes portant sur le même écoulement
- On enregistre à la i^{ème} expérience la valeur d'une même quantité à la même position en au bout du même temps soit: $f^{(i)}(\vec{x},t)$

La moyenne d'ensemble de la quantité f la position x à l'instant t est définie par : $\overline{f(\vec{x},t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(\vec{x},t)$

III.1 Outils d'analyse statistique

Moyennes

Moyenne statistique

$$\overline{f(\vec{x},t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(\vec{x},t)$$

Si on fait tendre N vers l'infini, la moyenne d'ensemble tend vers la moyenne statistique.

La moyenne d'ensemble est encore appelée moyenne de Reynolds.
Il s'agit d'un opérateur linéaire, qui commute avec les opérateurs de dérivation spatiale et temporelle.
Les moyennes d'ensemble vérifient les règles de Reynolds:

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{\alpha f} = \alpha \overline{f}, \quad \alpha = \text{Cste}$$

$$\overline{\overline{f}g} = \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{fg} \neq \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial \zeta}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \zeta}, \quad \zeta \text{ espace ou temps}$$

III.1 Outils d'analyse statistique

Moyennes

<u>Moyenne statistique</u>

Conséquences des règles de Reynolds:

En décomposant les grandeurs en valeur moyenne et fluctuation

$$f = \overline{f} + f^{'}$$

On a:

$$\overline{f^{'}} = 0 \quad (f^{'} = f - \overline{f} \quad \text{et} \quad \overline{f^{'}} = \overline{f} - \overline{f} = 0)$$

Il vient:

$$f\,g = (\overline{f} + f^{'})(\overline{g} + g^{'}) = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f}g^{'} + f^{'}\overline{g} + f^{'}g^{'}$$

$$\overline{f\,g} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f}\,\overline{g^{'}} + \overline{f^{'}}\,\overline{g} + \overline{f^{'}g^{'}} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f^{'}g^{'}}$$ Apparition d'une corrélation

III.1 Outils d'analyse statistique

Moyennes

Moyenne Temporelle

La moyenne temporelle est définie pour une seule expérience à une position fixée:

$$< f(\vec{x}) >= \lim_{T\to\infty} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\vec{x},t)dt$$

Cette définition est directement accessible à l'expérience

Moyenne spatiale

La moyenne spatiale est définie par : $< f(t) >= \lim_{V\to\infty} = \frac{1}{V}\iiint_V f(\vec{x},t)dv$

III.1 Outils d'analyse statistique

Quelques propriétés de l'opérateur de moyenne

Stationnarité statistique

Un écoulement turbulent est dit statistiquement stationnaire si toutes les moyennes d'ensemble sont invariantes vis-à-vis d'une translation dans le temps.

$$\overline{f_1(\vec{x}_1,t_1)f_2(\vec{x}_2,t_1)\ldots f_n(\vec{x}_n,t_n)} = \overline{f_1(\vec{x}_1,t_1+\tau)f_2(\vec{x}_2,t_2+\tau)\ldots f_n(\vec{x}_n,t_n+\tau)} \;\forall n\, \tau$$

On a dans ce cas l'égalité entre la moyenne d'ensemble et la moyenne temporelle (Ergodicité).

III.1 Outils d'analyse statistique

Quelques propriétés de l'opérateur de moyenne

<u>Homogénéité statistique</u>

Un écoulement turbulent est dit statistiquement homogène selon une direction $\vec{e}$ si toutes les moyennes d'ensemble associées à son état sont invariantes vis-à-vis d'une translation dans cette direction soit .

$$\overline{f_1(\vec{x}_1,t_1)f_2(\vec{x}_2,t_1)...f_n(\vec{x}_n,t_n)} = \overline{f_1(\vec{x}_1+\vec{y},t_1)f_2(\vec{x}_2+\vec{y},t_2)...f_n(\vec{x}_n+\vec{y},t_n)} \; \forall\, \vec{y} // \vec{e} \; \forall n$$

On a dans ce cas l'égalité entre la moyenne d'ensemble et la moyenne spatiale. Si cette propriété est vérifiée dans toutes les direction, la turbulence est dite homogène

<u>Isotropie statistique</u>

Un écoulement turbulent est dit statistiquement isotrope si toutes les moyennes d'ensemble associées à son état sont invariantes vis-à-vis d'une rotation quelconque

III.2 Equations du mouvement moyen

La décomposition de Reynolds

Les grandeurs turbulentes sont décomposées en valeur moyenne et fluctuation

$$f = \overline{f} + f'$$

$\overline{f}$ est la partie moyenne (d'ensemble)

f' est la partie fluctuante

On a : $\overline{f'} = 0$ et $\overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'g'}$

L'écart quadratique moyen ou amplitude (Root Mean Square: RMS) est défini par :

$$\sigma = \sqrt{\overline{f'^2}}$$

Les écoulements turbulents peuvent être décris par quelques grandeurs caractéristiques liées aux différentes échelles des tourbillons ainsi qu'aux fluctuations moyennes du champ.

III.2 Equations du mouvement moyen

Energie Cinétique Turbulente

- L'Energie Cinétique Turbulente est définie par:

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

- On appelle intensité turbulente en x (resp. y et z)

$$I_u = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$$

$\bar{u}$ Vitesse moyenne supposée non nulle du vecteur vitesse suivant x

- On appelle intensité en énergie turbulente

$$I_t = \frac{\sqrt{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}}$$

On distingue ainsi:
Les champs de turbulence faibles (I~1%), moyens (I~10%) et forts I~20%

Exercice

Intensité turbulente en agitation gaussienne

En un point d'un écoulement d'une soufflerie, on mesure une vitesse moyenne de 20 m/s et une intensité turbulente I_u de 0,2 %. Les fluctuations de vitesse sont réparties avec une approximation satisfaisante selon une loi normale, donner l'expression de cette loi.

Exercice

Intensité turbulente en agitation gaussienne

En un point d'un écoulement d'une soufflerie, on mesure une vitesse moyenne de 20 m/s et une intensité turbulente I_u de 0,2 %. Les fluctuations de vitesse sont réparties avec une approximation satisfaisante selon une loi normale, donner l'expression de cette loi.
Selon la loi normale l'expression de la densité de probabilité des fluctuations ne dépend que de l'écart type des fluctuations.

$$f(u') = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u'^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\overline{u'^2}} = 0{,}04 \; m/s$$

$$f(u') \approx 9{,}97 e^{-\frac{10^4 u'^2}{32}}$$

III.2 Equations du mouvement moyen

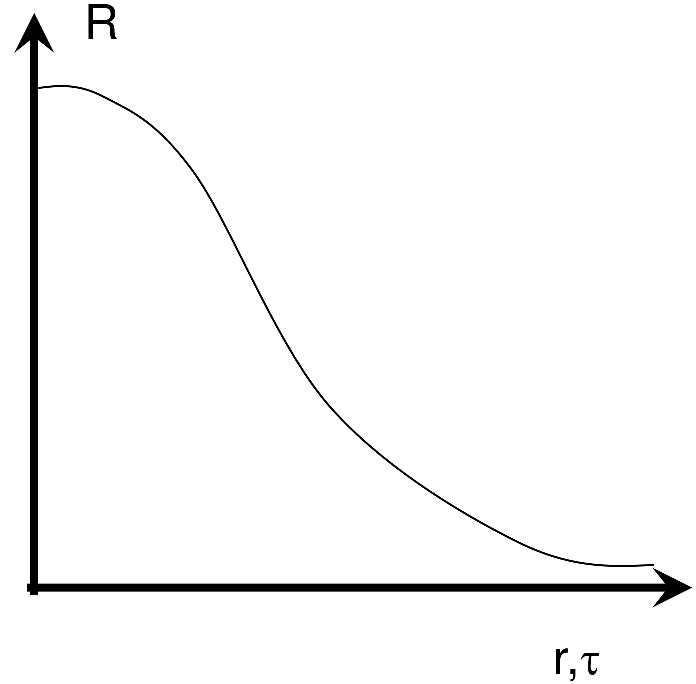
Auto-corrélations spatio-temporelle

Fonction d'auto-corrélation spatio-temporelle générale:

$$R(x,x';t,t') = \frac{\overline{u'(x,t)u'(x',t')}}{\overline{u'(x,t)u'(x,t)}}$$

Fonction d'autocorrélation spatiale $t=t_0$

$$R(r,t_0) = \frac{\overline{u'(x,t_0)u'(x+r,t_0)}}{\overline{u'(x,t_0)u'(x,t_0)}}$$



Fonction d'autocorrélation temporelle $x=x_0$

$$R(x_0,\tau) = \frac{\overline{u'(x_0,t)u'(x_0,t+\tau)}}{\overline{u'(x_0,t)u'(x_0,t)}}$$

III.2 Equations du mouvement moyen

Equations moyennées

Les équations des bilans instantanés de masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial u_i'}{\partial t}\right) + \rho\left(\overline{u_j} + u_j'\right)\frac{\partial(\overline{u_i} + u_i')}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\overline{p} + p')}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2(\overline{u_i} + u_i')}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i$$

Rappelons que le terme visqueux peut s'écrire comme la divergence du tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} dont l'expression est simplifiée en utilisant la condition d'incompressibilité, soit:

$$\tau_{ij} = 2\mu s_{ij} \qquad s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

III.2 Equations du mouvement moyen

Equations moyennées

Après décomposition en valeurs moyennes et fluctuations, les bilans instantanés de masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial u_i'}{\partial t}\right) + \rho\left(\overline{u_j} + u_j'\right)\frac{\partial(\overline{u_i} + u_i')}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\overline{p} + p')}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2(\overline{u_i} + u_i')}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i$$

En appliquant l'opérateur de moyenne on obtient :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \rho\overline{u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i$$

III.2 Equations du mouvement moyen

Tenseur de Reynolds

L'équation fait apparaître le un terme supplémentaire qui peut être interprété comme un terme d'advection par le mouvement fluctuant de la quantité de mouvement fluctuante. Ce terme de couplage peut s'écrire également :

$$\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

Le bilan moyen de quantité de mouvement peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$\rho \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\tau_{ij}} + \overline{\tau^t_{ij}}) + \rho g_i$$

$$\overline{\tau_{ij}} = 2\mu \overline{s_{ij}} \qquad \overline{s_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$\overline{\tau^t_{ij}} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ appelé tenseur de Reynolds, il peut être interprété comme un tenseur de contraintes turbulentes. C'est un terme non-fermé, c'est à dire que l'on ne peut pas résoudre directement. Le principal objectif de la modélisation de la turbulence est de trouver une fermeture au tenseur de Reynolds

III.2 Equations du mouvement moyen

Fermeture des bilans moyens

Première éventualité : écriture d'une équation de transport pour

(Ecrire l'équation d'évolution de $\overline{\tau^t_{ij}} = -\rho\overline{u'_i u'_j}$)

Première conclusion : il s'agit d'un problème non-fermé.

$$\frac{\partial\overline{u'_i u'_j}}{\partial t} = f(\overline{u'_i u'_j u'_k})$$

$$\frac{\partial\overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial t} = f(\overline{u'_i u'_j u'_k u'_l})$$

…… Corrélation d'ordre m = f(corrélation ordre m +1)

Modélisation de la turbulence : estimation correcte des diverses corrélations avec le mouvement moyen. En fonction de la précision désirée, on fermera les termes d'ordre 2, 3, ou plus...

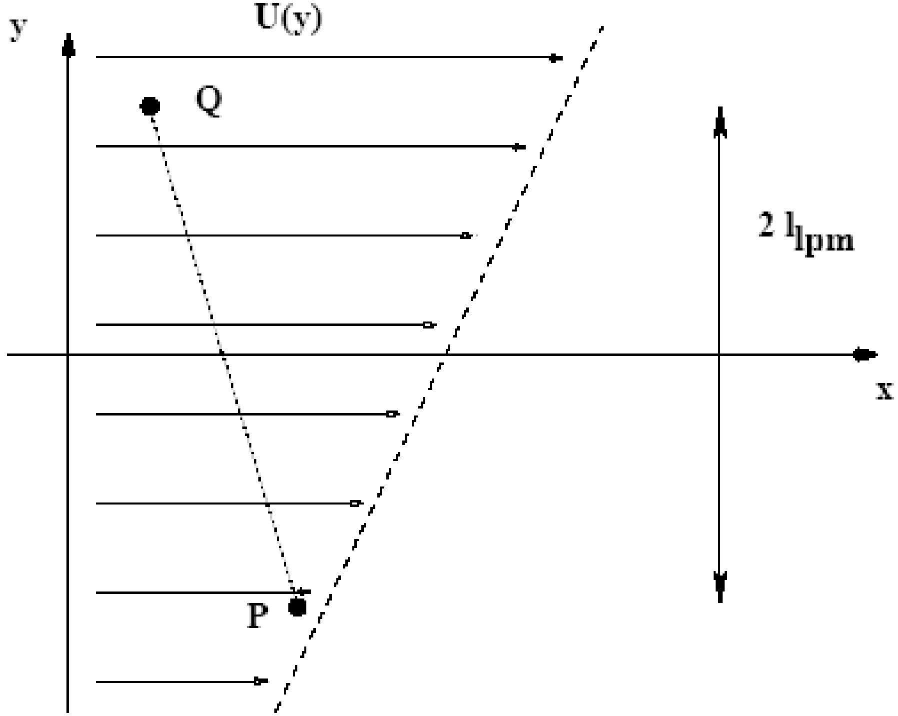
III.2 Equations du mouvement moyen

Transport moléculaire – transport turbulent

Théorie cinétiques des gaz

Considérons un écoulement cisaillé tel que:

$$\begin{cases} u = u(y) \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$



Une molécule traversant le plan y=0 conserve ses propriétés initiales : celles qui montent apportent un déficit de quantité de mouvement ; celles qui descendent apportent un excès de QDM

III.2 Equations du mouvement moyen

Transport moléculaire – transport turbulent

La vitesse est décomposée en valeur moyenne et en mouvement moléculaire stochastique:

$$u = \overline{\overline{u}} + u''$$

Le flux instantannée de toute variable à travers le plan y =0 est proportionnel à la vitesse normale au plan soit v''

Le flux à travers y=0 de quantité de mouvement selon x à travers l'élément de surface dS s'écrit :

$$dP_{xy} = \rho(\overline{\overline{u}} + u'')v''dS$$

En effectuant une moyenne sur l'ensembledes molécules on obtient:

$$\overline{dP}_{xy} = \overline{\rho u''v''}dS$$

III.2 Equations du mouvement moyen

Transport moléculaire – transport turbulent

$$\overline{dP_{xy}} = \overline{\rho u'' v''} dS$$

Le cisaillement en y=0 est donné par:

$$\tau_{xy} = -\frac{\overline{dP_{xy}}}{dS} = -\overline{\rho u'' v''}$$

Forte ressemblance avec le tenseur de Reynolds:

$$\tau_{ij}^{t} = -\overline{\rho u_i' u_j'}$$

A la différence près que les fluctuations de vitesse (u’) sont des fluctuations turbulentes alors que les fluctuations de vitesse (u’’) sont des fluctuations moléculaires

Cette similarité est à la base de l’approximation de viscosité turbulente

Il ne faut pas oublier que les mouvements aux échelles moléculaires sont totalement différents des mouvements des structures turbulentes

III.2 Equations du mouvement moyen

Transport moléculaire – transport turbulent

Le tenseur de Reynolds est symétrique:

$$\overline{u_i' u_j'} = \begin{pmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'w'} & \overline{w'w'} \end{pmatrix}$$

Le tenseur de Reynolds introduit 6 inconnues supplémentaires dont il n'est pas possible d'obtenir les équations sans introduire encore de nouvelles inconnues (tensions de Reynolds)

Problème de fermeture des équations (modèle de turbulence)

En situation de turbulence développée (loin des parois par exemple), le tenseur des contraintes turbulentes est prépondérant devant les contraintes visqueuses

Forte influence des tensions de Reynolds sur le champs moyen

III.3 Equations des grandeurs fluctuantes

Equation de transport des tensions de Reynolds

L'équation de transport des fluctuations de vitesse est obtenue en calculant la différence entre les bilans instantané et moyen de quantité de mouvement.

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i$$

$-$

$$\rho \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \rho \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i$$

On obtient :

$$\rho \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \rho u_j' \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \rho u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j}$$

L'équation de transport des tensions de Reynolds s'obtient en multipliant l'équation des fluctuations de vitesse par la fluctuation de vitesse et en la sommant avec sa transposée:

III.3 Equations des grandeurs fluctuantes

Equation de transport des tensions de Reynolds

$$u'_j x\left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \overline{u_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + u'_k\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}\right)$$

$$+$$

$$u'_i x\left(\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \overline{u_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + u'_k\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k}\right)$$

$$=$$

$$\frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial t} + \overline{u_k}\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k} + u'_j u'_k\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + u'_i u'_k\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + u'_j u'_k\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i u'_k\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$$

$$-u'_i\frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_k} - u'_j\frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}u'_j\frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}u'_i\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu u'_j\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} + \nu u'_i\frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k}$$

III.3 Equations des grandeurs fluctuantes

Equation de transport des tensions de Reynolds

$$\frac{\partial(\overline{u_i^{'}u_j^{'}})}{\partial t}+\overline{u_k}\frac{\partial \overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{\partial x_k}+u_j^{'}u_k^{'}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}+u_i^{'}u_k^{'}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}+u_j^{'}u_k^{'}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}+u_i^{'}u_k^{'}\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_k}$$

$$-u_i^{'}\frac{\partial \overline{u_j^{'}u_k^{'}}}{\partial x_k}-u_j^{'}\frac{\partial \overline{u_i^{'}u_k^{'}}}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}u_j^{'}\frac{\partial p^{'}}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}u_i^{'}\frac{\partial p^{'}}{\partial x_j}+\nu u_j^{'}\frac{\partial^2 u_i^{'}}{\partial x_k \partial x_k}+\nu u_i^{'}\frac{\partial^2 u_j^{'}}{\partial x_k \partial x_k}$$

Termes de viscosité

$$\nu u_j^{'}\frac{\partial^2 u_i^{'}}{\partial x_k \partial x_k}+\nu u_i^{'}\frac{\partial^2 u_j^{'}}{\partial x_k \partial x_k}=\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_j^{'}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}+u_i^{'}\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_k}\right]-2\nu\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_k}$$

$$=\nu\frac{\partial^2 u_i^{'}u_j^{'}}{\partial x_k \partial x_k}-2\nu\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_k}$$

III.3 Equations des grandeurs fluctuantes

Equation de transport des tensions de Reynolds

$$\frac{\partial(\overline{u_i'u_j'})}{\partial t}+\overline{u_k}\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}+\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_k}+\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_k}+\overline{u_j'u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}+\overline{u_i'u_k'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$$

$$-\overline{u_i'\frac{\partial\overline{u_j'u_k'}}{\partial x_k}}-\overline{u_j'\frac{\partial\overline{u_i'u_k'}}{\partial x_k}}=-\frac{1}{\rho}\overline{u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}}-\frac{1}{\rho}\overline{u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j}}+\nu\frac{\partial^2\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k\partial x_k}-2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$$

Termes de corrélation triple

$$u_j'u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+u_i'u_k'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}=2\frac{\partial(u_i'u_j'u_k')}{\partial x_k}-\left(u_j'\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial x_k}+u_i'\frac{\partial(u_j'u_k')}{\partial x_k}\right)$$

$$u_j'\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial x_k}+u_i'\frac{\partial(u_j'u_k')}{\partial x_k}=u_j'u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+u_i'u_k'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}$$

$$u_j'u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+u_i'u_k'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}=\frac{\partial(u_i'u_j'u_k')}{\partial x_k}$$

III.3 Equations des grandeurs fluctuantes

Equation de transport des tensions de Reynolds

$$\frac{\partial(u_i^{'}u_j^{'})}{\partial t}+\overline{u}_k\frac{\partial u_i^{'}u_j^{'}}{\partial x_k}+u_j^{'}u_k^{'}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}+u_i^{'}u_k^{'}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}+u_j^{'}u_k^{'}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}+u_i^{'}u_k^{'}\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_k}$$

$$-u_i^{'}\frac{\partial \overline{u_j^{'}u_k^{'}}}{\partial x_k}-u_j^{'}\frac{\partial \overline{u_i^{'}u_k^{'}}}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}u_j^{'}\frac{\partial p^{'}}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}u_i^{'}\frac{\partial p^{'}}{\partial x_j}+\nu u_j^{'}\frac{\partial^2 u_i^{'}}{\partial x_k\partial x_k}+\nu u_i^{'}\frac{\partial^2 u_j^{'}}{\partial x_k\partial x_k}$$

Termes de corrélation pression-vitesse

$$-\frac{1}{\rho}u_j^{'}\frac{\partial p^{'}}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}u_i^{'}\frac{\partial p^{'}}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p^{'}u_j^{'}}{\partial x_i}+\frac{\partial p^{'}u_i^{'}}{\partial x_j}\right]+\frac{1}{\rho}p^{'}\left[\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\right]$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}(p^{'}u_j^{'}\delta_{ik}+p^{'}u_i^{'}\delta_{jk})+\frac{1}{\rho}p^{'}\left[\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\right]$$

III.3 Equations des grandeurs fluctuantes

Equation de transport des tensions de Reynolds

$$\frac{\partial (u_i^{'} u_j^{'})}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial u_i^{'} u_j^{'}}{\partial x_k} + u_j^{'} u_k^{'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + u_i^{'} u_k^{'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial (u_i^{'} u_j^{'} u_k^{'})}{\partial x_k}$$

$$- u_i^{'} \frac{\partial \overline{u_j^{'} u_k^{'}}}{\partial x_k} - u_j^{'} \frac{\partial \overline{u_i^{'} u_k^{'}}}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} u_j^{'} \frac{\partial p^{'}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} u_i^{'} \frac{\partial p^{'}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i^{'} u_j^{'}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k} \frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_k}$$

Le passage à la moyenne dans cette équation fait disparaître les termes de la forme .

$$\overline{u_i^{'} \frac{\partial \overline{u_j^{'} u_k^{'}}}{\partial x_k}} = \overline{u_j^{'} \frac{\partial \overline{u_i^{'} u_k^{'}}}{\partial x_k}} = 0$$

Equation de transport des tensions de Reynolds

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} = \qquad \textit{variation temporelle et transport convectif}$$

$$- \left[\overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \right] \qquad \textit{couplage avec le mouvement moyen}$$

$$- \frac{\partial (\overline{u_i' u_j' u_k'})}{\partial x_k} \qquad \textit{diffusion par agitation turbulente}$$

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' u_j'} \delta_{ik} + \overline{p' u_i'} \delta_{jk}) \qquad \textit{corrélation pression} - \textit{fluctuation de vitesse}$$

$$+ \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k \partial x_k} \qquad \textit{diffusion par agitation moléculaire}$$

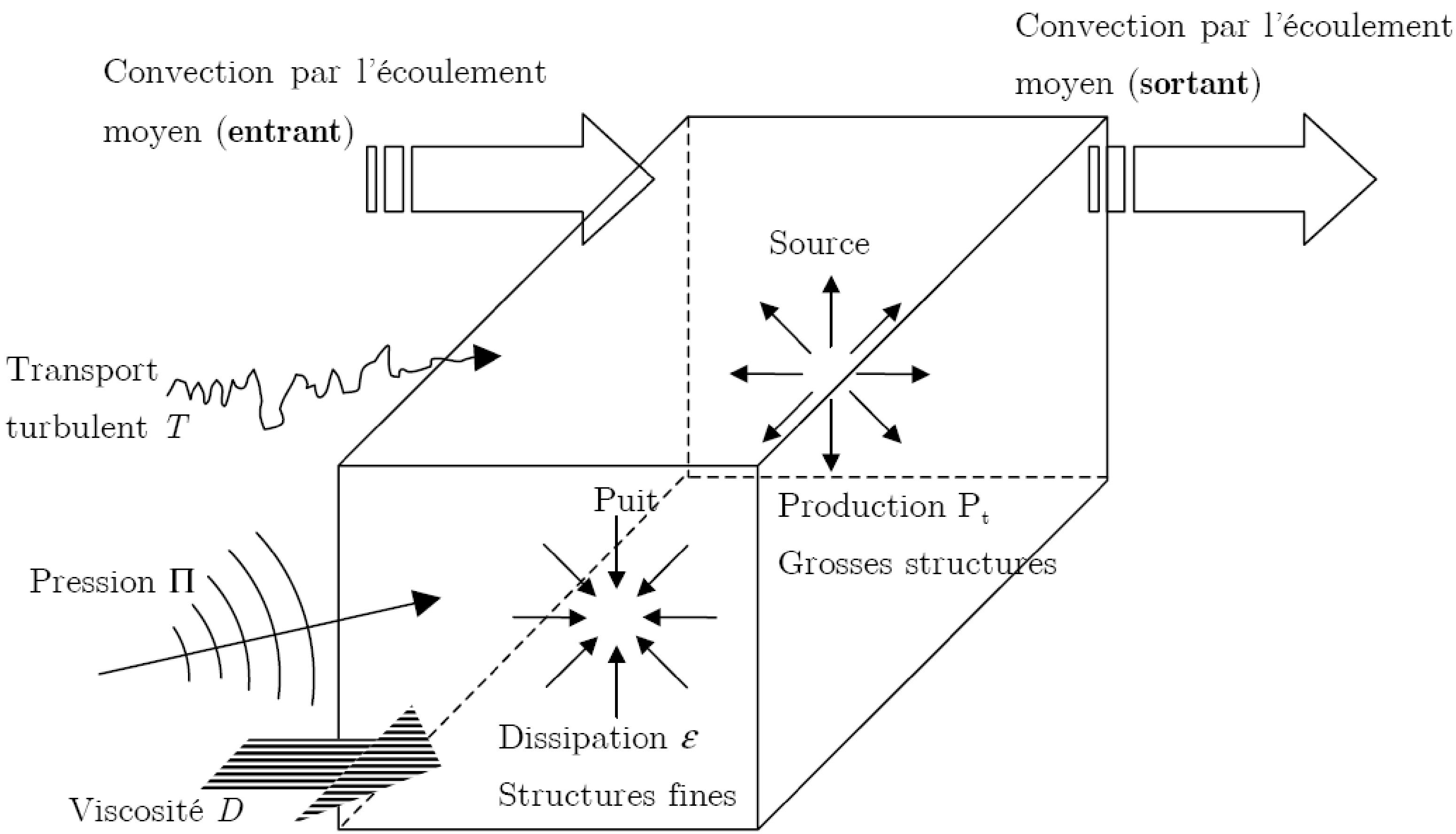
$$+ \frac{1}{\rho} \overline{p' \left[\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right]} \qquad \textit{corrélation pression} - \textit{déformation}$$

$$- 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \qquad \textit{terme de dissipation}$$

Equation de transport des tensions de Reynolds

Deux types de termes :

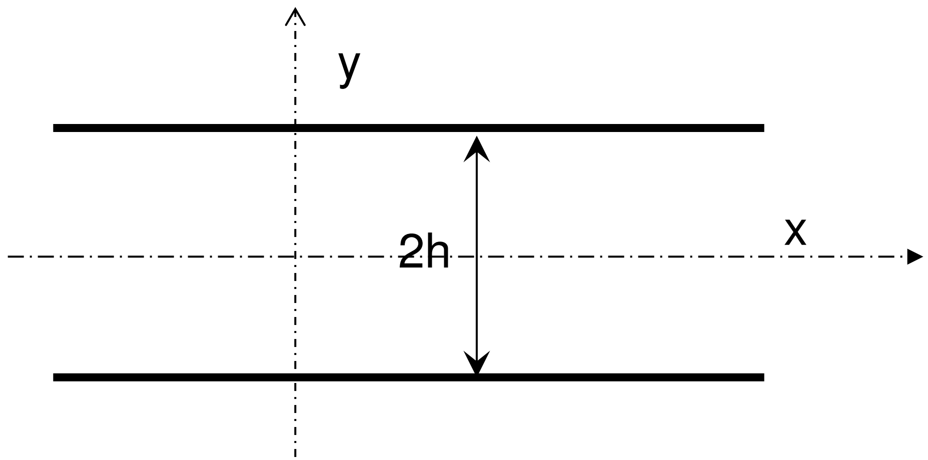
- termes exprimables sous la forme de gradients de tenseurs qui représentent le transport d'une quantité d'un endroit à un autre
- termes sources et puits (SP).



Exercice : Ecoulement en canal plan

Bilan de masse

On considère l'écoulement turbulent permanent, en régime établi d'un fluide visqueux isovolume et non pesant entre deux plans parallèles fixes distants d'une largeur de 2 h. On suppose que le champ moyen est bidimensionnel



1) Montrer que le champ de vitesse moyenne se réduit à la seule composante $\overline{U}(y)$ suivant la direction de l'écoulement. y est la direction de transversale
2) Que devient l'équation de continuité du mouvement d'agitation

Exercice : Ecoulement en canal plan

Bilan de masse

1) Montrer que le champ de vitesse moyenne se réduit à la seule composante suivant la direction de l'écoulement

Ecoulement plan: $\overline{U}$ $\overline{V}$ $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

Ecoulement établi selon x : $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$\overline{U}(y)$ $\overline{V}(y)$

Equation de continuité:

$\frac{d\overline{V}}{dy} = 0$ $\overline{V}(y) = \text{Constante}$ $\overline{V}(\pm h) = 0$ $\overline{V}(y) = 0$

Exercice : Ecoulement en canal plan

Bilan de masse

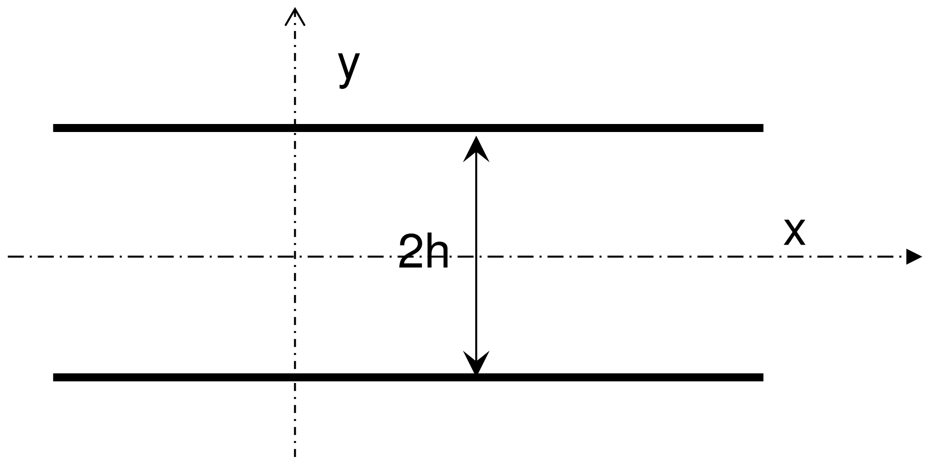
2) Que devient l'équation de continuité du mouvement d'agitation (isovolume)

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Exercice : Ecoulement en canal plan

Dynamique du champ moyen

On considère l'écoulement turbulent permanent, en régime établi d'un fluide visqueux isovolume et non pesant entre deux plans parallèles fixes distants d'une largeur de 2 h. On suppose que le champ moyen est bidimensionnel



1) Ecrire, en projection, les équations de la dynamique du mouvement moyen (équations de Reynolds)
2) Montrer que dans cet écoulement les fluctuations de vitesse radiale et azimuale sont décorrelées

Exercice : Ecoulement en canal plan

Dynamique du champ moyen

1) Ecrire, en projection, les équations de la dynamique du mouvement moyen (équations de Reynolds)

$$\rho\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}+\rho\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\tau_{ij}}+\overline{\tau_{ij}^t})+\rho g_i$$

$$\overline{\tau_{ij}}=2\mu\overline{s_{ij}}$$

$$\overline{s_{ij}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$$\overline{\tau_{ij}^t}=-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}$$

$$\overline{s_{ij}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$$\overline{\tau_{ij}^t}=-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}$$

Exercice : Ecoulement en canal plan

Dynamique du champ moyen

1) Ecrire, en projection, les équations de la dynamique du mouvement moyen (équations de Reynolds)

$$\overline{\tau_{ij}} = 2\mu\overline{s_{ij}}$$

$$\rho\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial t} + \rho\overline{u_j}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\tau_{ij}} + \overline{\tau_{ij}^t}) + \rho g_i$$

$$\overline{s_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \mu\frac{d^2U}{dy^2} - \rho\frac{d\,\overline{u'v'}}{dy}$$

$$\overline{\tau_{ij}^t} = -\rho\overline{u_i'u_j'}$$

$$0 = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial y} - \rho\frac{d\overline{v'^2}}{dy}$$

$$\overline{s_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$$0 = -\rho\frac{d\overline{v'w'}}{dy}$$

$$\overline{\tau_{ij}^t} = -\rho\overline{u_i'u_j'}$$

Exercice : Ecoulement en canal plan

Dynamique du champ moyen

1) Montrer que dans cet écoulement les fluctuations de vitesse radiale et azimuale sont décorrelées

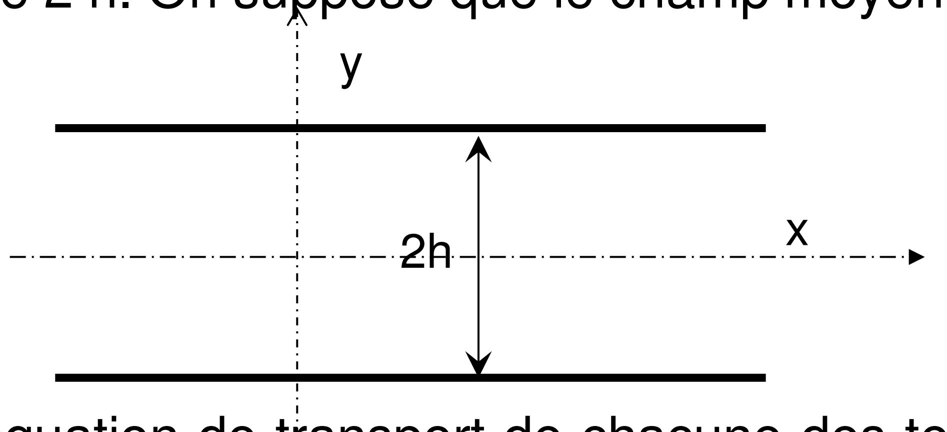
$$0 = -\rho \frac{d\overline{v'w'}}{dy} \qquad \overline{v'w'} = \text{Constante}$$

$$\overline{v'w'}(\pm h) = 0$$

Exercice : Ecoulement en canal plan

Equations de transport des tensions de Reynolds

On considère l'écoulement turbulent permanent, en régime établi d'un fluide visqueux isovolume et non pesant entre deux plans parallèles fixes distants d'une largeur de 2 h. On suppose que le champ moyen est bidimensionnel



1) Ecrire, les équation de transport de chacune des tensions de Reynolds. On désignera par ε_{ij} le tenseur de pseudo-dissipation. Que peut-on dire du terme d'interaction avec le champs moyen
2) On désigne par δ la distance transversale à l'axe du canal sur laquelle la diffusion turbulente s'exerce avec la vitesse u'. Comparer les échelles de diffusion turbulente et moléculaire sur la même distance
3) Les mesures de Laufer en conduite indiquent que sur une distance de 90% du rayon, u'/Uaxe reste supérieure à sa valeur sur l'axe. Pour Re=50000, u'/Uaxe~5%. Qu'en concluez vous pour les équation des composantes normales

Exercice : Ecoulement en canal plan

Equations de transport des tensions de Reynolds

1) Ecrire, les équation de transport de chacune des tensions de Reynolds. Que peut-on dire du terme d'interaction avec le champs moyen

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} = -\left[\overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \right] - \frac{\partial (\overline{u_i' u_j' u_k'})}{\partial x_k}$$

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' u_j'} \delta_{ik} + \overline{p' u_i'} \delta_{jk}) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \left[\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right]} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$$

Exercice : Ecoulement en canal plan

Equations de transport des tensions de Reynolds

1) Ecrire, les équation de transport de chacune des tensions de Reynolds. Que peut-on dire du terme d'interaction avec le champs moyen

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} = -\left[\overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}\right] - \frac{\partial (\overline{u_i' u_j' u_k'})}{\partial x_k}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' u_j'} \delta_{ik} + \overline{p' u_i'} \delta_{jk}) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{\rho} \overline{p' \left[\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right]} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$$

$$0 = -2\overline{u' v'} \frac{d\overline{U}}{dy} - \frac{d\overline{u'^2 v'}}{dy} + \quad 0 \quad + \nu \frac{d^2 \overline{u'^2}}{dy^2} + \frac{2}{\rho} \overline{p' s_{11}} - \varepsilon_{11}$$

$$0 = \quad 0 \quad - \frac{d\overline{v'^3}}{dy} - \frac{2}{\rho} \frac{d\overline{p' v'}}{dy} + \nu \frac{d^2 \overline{v'^2}}{dy^2} + \frac{2}{\rho} \overline{p' s_{22}} - \varepsilon_{22}$$

$$0 = \quad 0 \quad - \frac{d\overline{v' w'^2}}{dy} + \quad 0 \quad + \nu \frac{d^2 \overline{w'^2}}{dy^2} + \frac{2}{\rho} \overline{p' s_{33}} - \varepsilon_{33}$$

Exercice : Ecoulement en canal plan

Equations de transport des tensions de Reynolds

2) On désigne par δ la distance transversale à l'axe du canal sur laquelle la diffusion turbulente s'exerce avec la vitesse u'. Comparer les échelles de diffusion turbulente et moléculaire sur la même distance

$$\tau_t \approx \delta / u'$$

$$\tau_\nu \approx \delta^2 / \nu \approx \tau_t \frac{u'\delta}{\nu} \approx \tau_t R_t$$

Exercice : Ecoulement en canal plan

Equations de transport des tensions de Reynolds

3) Les mesures de Laufer en conduite indiquent que sur une distance de 90% du rayon, u'/Uaxe reste supérieure à sa valeur sur l'axe. Pour Re=50000, u'/Uaxe~5%. Qu'en concluez vous pour les équations des composantes normales

$$\tau_t \approx \delta / u'$$

$$\tau_\nu \approx \delta^2 / \nu \approx \tau_t \frac{u'\delta}{\nu} \approx \tau_t R_T$$

Avec les données de Laufer

$$R_T = \frac{u'\delta}{\nu} = \frac{0{,}9\overline{U}_{axe} D}{2\nu} \frac{u'}{\overline{U}_{axe}} = \frac{0{,}9}{2} \frac{u'}{\overline{U}_{axe}} R_e$$

$$R_T = \frac{0{,}9}{2} 0{,}05 R_e = 1100$$

Sur une grande partie du tuyau la diffusion moléculaire est négligeable devant la diffusion turbulente

Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

On considère un écoulement turbulent cisaillé mince libre de type jet bidimensionnel. On suppose l'écoulement permanent isovolume et non pesant; On se limite à la région où les hypotèses suivantes sont vérifiées.

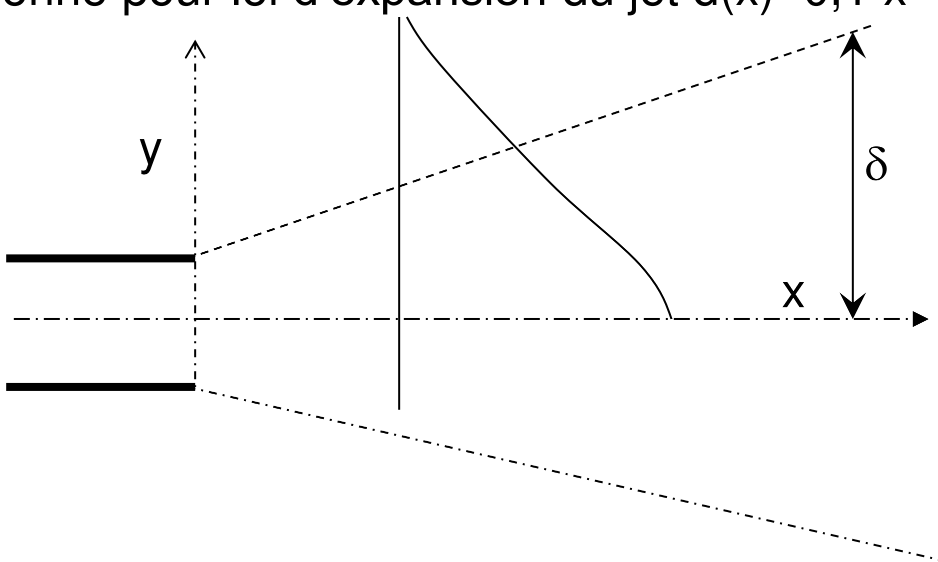
-Les tensions normales de Reynolds sont de même ordre de grandeur,

-Cet ordre de grandeur u'(L) est proportionnel à la différence de vitesse $\Delta U(L)$

$u'(L)=\alpha \; \Delta U(L)$

-Les fluctuations croisées u' et vé sont bien corrélées.

L'expérience donne pour loi d'expansion du jet $d(x)=0{,}1 \; x$

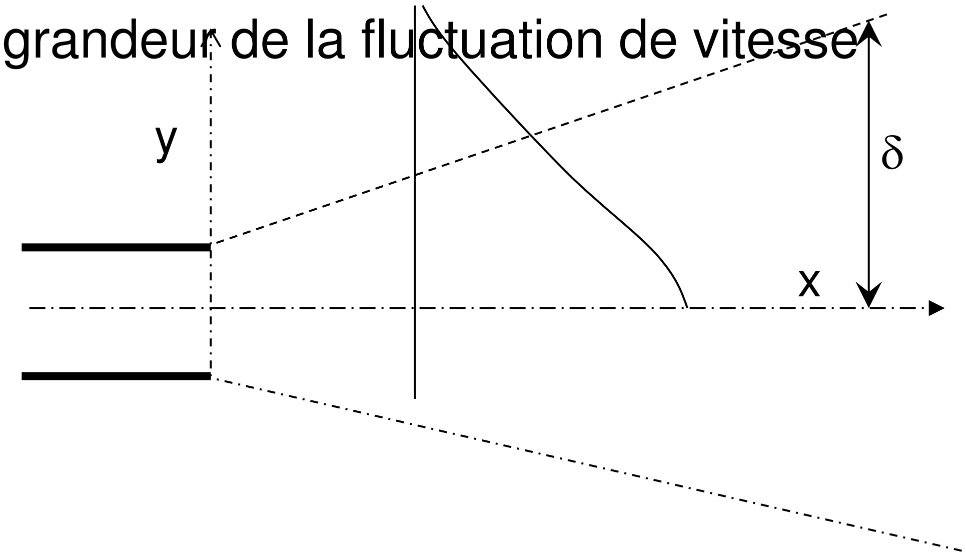


Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

L'expérience donne pour loi d'expansion du jet $\delta(x)=0,1\ x$

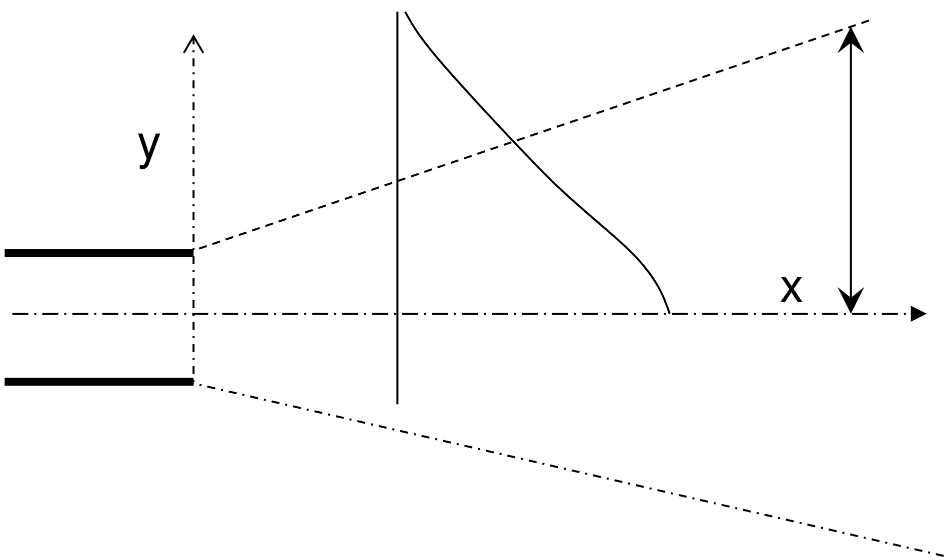
1. Déduire de l'équation de continuité la référence V(L) de la vitesse transversale es fonction de $\Delta U(L)$
2. Estimer les termes d'advection, diffusion moléculaire et turbulente du bilan moyen de quantité de mouvement
3. En déduire que lorsque le nb de Reynolds $\Delta UL/\nu$ est grand, la contribution des termes visqueux est négligeable dans ce bilan
4. En partant de l'estimation des termes du bilan moyen de QDM, déduire l'ordre de grandeur de la fluctuation de vitesse



Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

1. Déduire de l'équation de continuité la référence V(L) de la vitesse transversale en fonction de $\Delta U(L)$



Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

1. Déduire de l'équation de continuité la référence V(L) de la vitesse transversale en fonction de $\Delta U(L)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

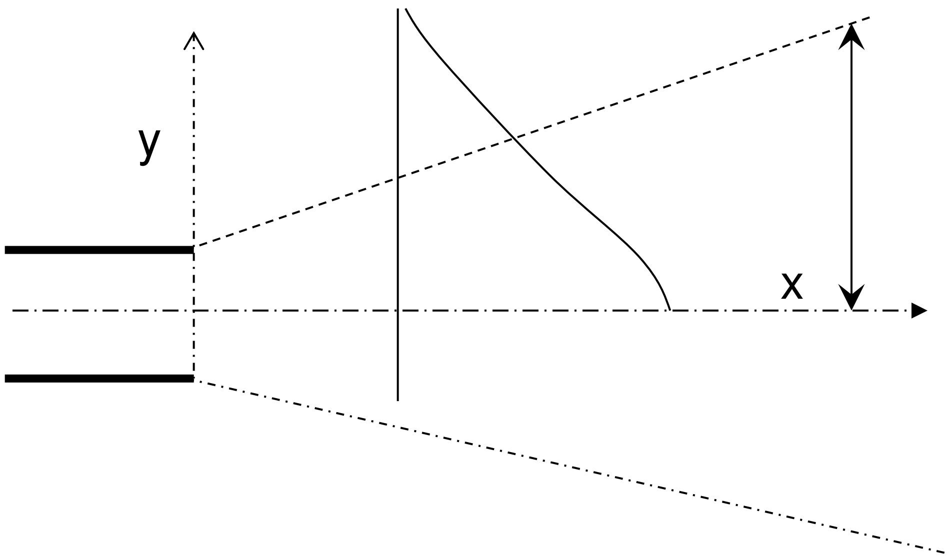
$$\frac{\Delta U}{L} \sim \frac{V_{ref}}{\delta}$$

$$V_{ref} \approx 0{,}1 \Delta U$$

Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

2. Estimer les termes d'advection, diffusion moléculaire et turbulente du bilan moyen de quantité de mouvement



Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

2. Estimer les termes d'advection, diffusion moléculaire et turbulente du bilan moyen de quantité de mouvement

$$\overline{\tau_{ij}} = 2\mu\overline{s_{ij}}$$

$$\rho\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\tau_{ij}} + \overline{\tau_{ij}^t}) + \rho g_i$$

$$\overline{s_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

$$\overline{\tau_{ij}^t} = -\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}$$

$$\frac{\Delta U^2}{L} \qquad V_{ref}\frac{\Delta U}{\delta} \qquad \frac{\alpha^2\Delta U^2}{L} \qquad \frac{\alpha^2\Delta U^2}{\delta} \qquad \frac{\Delta U}{L^2} \qquad \frac{\Delta U}{\delta^2}$$

$$\overline{s_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\overline{\tau_{ij}^t} = -\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}$$

Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

2. Estimer les termes d'advection, diffusion moléculaire et turbulente du bilan moyen de quantité de mouvement

$$\overline{\tau_{ij}} = 2\mu \overline{s_{ij}}$$

$$\rho \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{ij}} + \overline{\tau^t_{ij}} \right) + \rho g_i$$

$$\overline{s_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

$$\overline{\tau^t_{ij}} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$

$$\Delta U \frac{V_{ref}}{L} \qquad \frac{V_{ref}^{\ 2}}{\delta} \qquad \frac{\alpha^2 \Delta U^2}{L} \qquad \frac{\alpha^2 \Delta U^2}{\delta} \qquad \frac{V_{ref}}{L^2} \qquad \frac{V_{ref}}{\delta^2}$$

$$\overline{s_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$

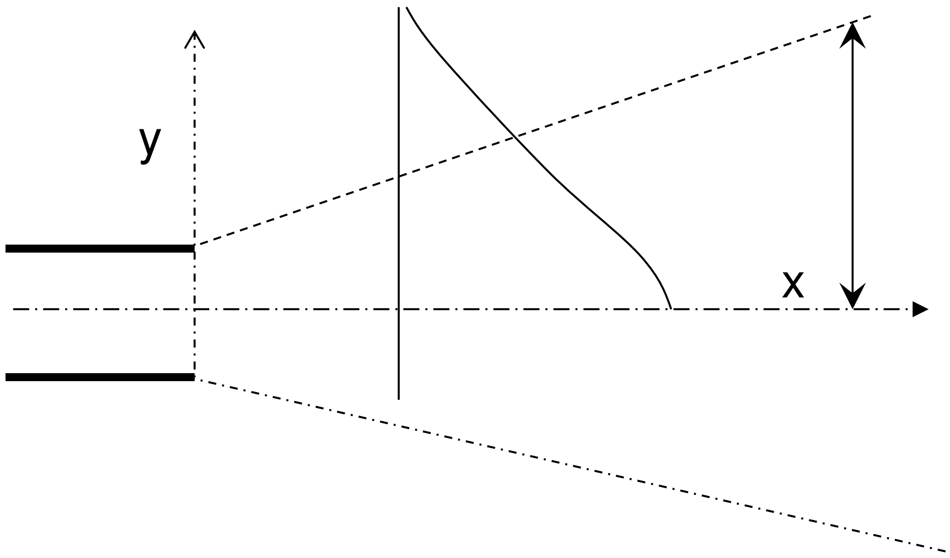
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}$$

$$\overline{\tau^t_{ij}} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$

Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

3. En déduire que lorsque le nb de Reynolds $\Delta UL/\nu$ est grand, la contribution des termes visqueux est négligeable dans ce bilan



Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

3. En déduire que lorsque le nb de Reynolds $\Delta UL/\nu$ est grand, la contribution des termes visqueux est négligeable dans ce bilan

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\Delta U^2}{L} \qquad V_{ref}\frac{\Delta U}{\delta} \qquad \frac{\alpha^2 \Delta U^2}{L} \qquad \frac{\alpha^2 \Delta U^2}{\delta} \qquad \frac{\Delta U}{L^2} \qquad \frac{\Delta U}{\delta^2}$$

$$\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} << \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\frac{\text{Diffusion Moléculaire}}{\text{Advection}} \approx \frac{\nu \Delta U L}{\delta^2 \Delta U^2} \approx \frac{L^2}{\delta^2}\frac{1}{R_{eL}} \approx \frac{100}{R_{eL}}$$

$$R_{eL} \approx 10^4$$

Exercice : Ecoulement de jet libre plan

Dynamique du champ moyen

4. En partant de l'estimation des termes du bilan moyen de QDM, déduire l'ordre de grandeur de la fluctuation de vitesse

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\Delta U^2}{L} \qquad V_{ref}\frac{\Delta U}{\delta} \qquad \frac{\alpha^2 \Delta U^2}{L} \qquad \frac{\alpha^2 \Delta U^2}{\delta} \qquad \frac{\Delta U}{L^2} \qquad \frac{\Delta U}{\delta^2}$$

$$\frac{\Delta U^2}{L} \approx \alpha^2 \frac{\Delta U^2}{\delta} \qquad\qquad \alpha \approx \sqrt{\frac{\delta}{L}} \approx 0{,}3$$

Données expérimentales : dans la zone centrale d'un jet plan on a:

$$\frac{\sqrt{k}}{U} \approx 0{,}27$$

III.4 Bilans énergétiques

Définitions:

Energie cinétique

Valeur locale et instantanée de l'énergie cinétique par unité de volume :

$$\in = \frac{1}{2}\rho u_i u_i$$

En prenant la moyenne et après décomposition de la vitesse en valeurs moyenne et fluctuante on définit :

L'Energie cinétique du mouvement moyen $\overline{E} = \frac{1}{2}\rho \overline{u_i}\,\overline{u_i}$

L'énergie cinétique instantanée et moyenne du mouvement d'agitation

$$e = \frac{1}{2}\rho u_i' u_i' \qquad \overline{e} = \frac{1}{2}\rho \overline{u_i' u_i'}$$

L'énergie cinétique moyenne :

$$\overline{\in} = \frac{1}{2}\rho \overline{u_i}\,\overline{u_i} + \frac{1}{2}\rho \overline{u_i' u_i'} = \overline{E} + \overline{e}$$

III.4 Bilans énergétiques

Retour sur les termes de viscosité de l'équation de transport des tensions de Reynolds :

$$\overline{\nu u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{\nu u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k}} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

A grand nombre de Reynolds de turbulence, la diffusion associée à l'agitation moléculaire est négligeable en comparaison avec celle due à l'agitation turbulente et cette expression se réduit à :

$$\overline{\nu u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{\nu u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k}} = -2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

III.4 Bilans énergétiques

Bilan instantané de l'énergie cinétique

L'équation de l'énergie cinétique instantanée s'obtient en multipliant scalairement l'équation dynamique par u_i soit :

$$u_i\left(\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+2\mu\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}+\rho g_i\right)$$

$$\frac{\partial\left(\rho\frac{u_i u_i}{2}\right)}{\partial t}+u_j\frac{\partial\left(\rho\frac{u_i u_i}{2}\right)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p u_i}{\partial x_i}+2\mu\frac{\partial u_i s_{ij}}{\partial x_j}-2\mu s_{ij}s_{ij}+\rho u_i g_i$$

III.4 Bilans énergétiques

Bilan instantané de l'énergie cinétique

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \in}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial \in}{\partial x_j} = & \text{variation instantanée et transport convectif} \\[2ex]
\qquad - \dfrac{\partial p u_i}{\partial x_i} & \text{puissance instantanée des forces de pression} \\[2ex]
\qquad + 2\mu \dfrac{\partial u_i s_{ij}}{\partial x_j} & \text{puissance instantanée des forces de viscosité} \\[2ex]
\qquad - 2\mu s_{ij} s_{ij} & \text{dissipation instantanée} \\[2ex]
\qquad + \rho u_i g_i & \text{puissance instantanée des forces de volume}
\end{array}
$$

III.4 Bilans énergétiques

Bilan de l'énergie cinétique du mouvement moyen

Le bilan de l'énergie cinétique du mouvement moyen s'obtient en multipliant l'équation dynamique du mouvement moyen par $\overline{u_i}$. En l'absence de fluctuations de forces extérieures de volume, on a :

$$\overline{u_i} x (\rho \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial \overline{s_{ij}}}{\partial x_j} + \rho g_i)$$

$$\frac{\partial (\frac{1}{2} \rho \overline{u_i}\,\overline{u_i})}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho \overline{u_i}\,\overline{u_i})}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial (\rho \overline{u_i' u_j'}\,\overline{u_i})}{\partial x_j} + \rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

$$+ \frac{\partial (2\mu \overline{s_{ij}}\,\overline{u_i})}{\partial x_j} - 2\mu \overline{s_{ij}}\,\overline{s_{ij}} + \rho \overline{u_i} g_i$$

III.4 Bilans énergétiques

Bilan de l'énergie cinétique du mouvement moyen

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{E}}{\partial x_j} = \qquad \textit{variation temporelle et transport convectif}$$

$$- \frac{\partial \overline{u}_i \overline{p}}{\partial x_i} \qquad \textit{puissance dans le mouvement moyen des forces extérieures de pression moyenne}$$

$$+ \frac{\partial (2\mu \overline{s}_{ij} \overline{u}_i)}{\partial x_j} \qquad \textit{puissance dans le mouvement moyen des forces extérieures de viscosité moyenne}$$

$$- 2\mu \overline{s}_{ij} \overline{s}_{ij} \qquad \textit{dissipation dans le mouvement moyen}$$

$$- \frac{\partial (\rho \overline{u'_i u'_j}\, \overline{u}_i)}{\partial x_j} \qquad \textit{puissance dans le mouvement moyen des tensions de Reynolds}$$

$$+ \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \qquad \textit{puissance dans le mouvement moyen des tensions de Reynolds}$$

$$+ \rho \overline{u}_i g_i$$

III.4 Bilans énergétiques

Retour sur la dissipation: Définitions:

Le taux de dissipation $$\varphi = 2\mu s_{ij} s_{ij} = \frac{\mu}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]^2$$

qui exprime la puissance communiquée par les forces extérieures de viscosité au cours du mouvement du fluide

Le taux de dissipation du mouvement moyen

$$\overline{\Phi} = 2\mu \overline{s_{ij}}\ \overline{s_{ij}} = \frac{\mu}{2}\left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right]^2$$

Les taux de dissipation instantané et moyen du mouvement fluctuant :

$$\phi = 2\mu s_{ij}^{'} s_{ij}^{'} = \frac{\mu}{2}\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_i}\right]^2 \qquad \overline{\phi} = 2\mu \overline{s_{ij}^{'} s_{ij}^{'}} = \frac{\mu}{2}\overline{\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_i}\right]^2}$$

Avec bien sûr :

$$\overline{\varphi} = \frac{\mu}{2}\left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right]^2 + \frac{\mu}{2}\overline{\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_i}\right]^2} = \overline{\Phi} + \overline{\phi}$$

III.4 Bilans énergétiques

Bilan de l'énergie cinétique du mouvement d'agitation

L'équation de bilan moyen d'énergie cinétique du mouvement d'agitation se déduit de celle du transport des tensions de Reynolds par simple contraction après multiplication par $\rho/2$, on obtient :

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}\rho\overline{u_i^{'}u_i^{'}})}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial(\frac{1}{2}\rho\overline{u_i^{'}u_i^{'}})}{\partial x_j}=-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}-\frac{\partial(\frac{1}{2}\rho\overline{u_i^{'}u_i^{'}u_j^{'}})}{\partial x_j}-\frac{\partial\overline{p^{'}u_i^{'}}}{\partial x_j}$$

$$+\nu\frac{\partial^2(\frac{1}{2}\rho\overline{u_i^{'}u_i^{'}})}{\partial x_j\partial x_j}+\overline{p^{'}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_i}}-2\mu\overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}}$$

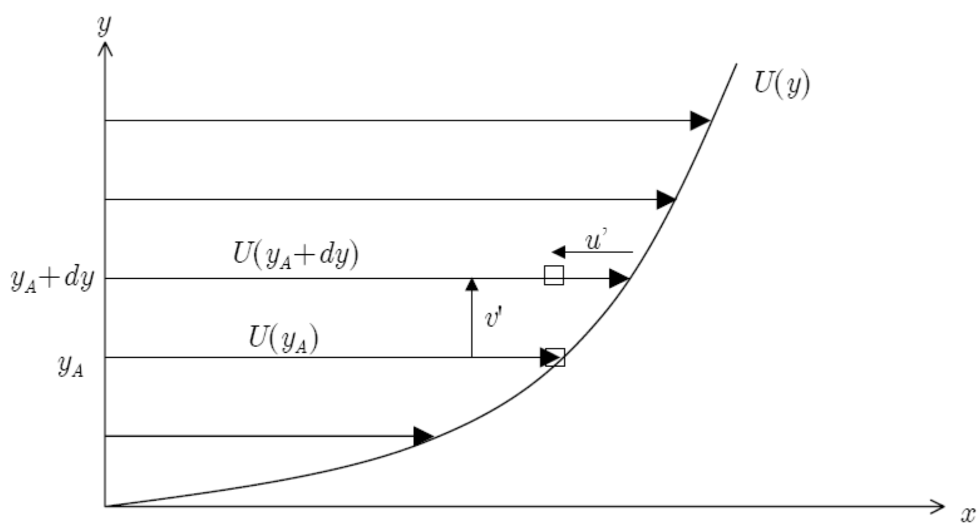
III.4 Bilans énergétiques

Bilan de l'énergie cinétique du mouvement d'agitation

Le terme de production turbulente s'écrit : $$P_t = -\overline{u_i^{'} u_j^{'}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

En analysant le déplacement des particules fluide on peut montrer que ce terme est effectivement un terme de production $$P_t > 0$$

On considère l'écoulement unidirectionnel suivant:



III.4 Bilans énergétiques

Bilan de l'énergie cinétique du mouvement d'agitation

Considérons une particule fluide à l'instant t au point y_A . Elle animée d'une vitesse $u(y_A)$. On déplace la particule brusquement vers le point $y_A + dy$ c'est-à-dire v'>0

• Si $\frac{d\overline{u}}{\partial y} > 0$ (cas représenté)

la particule se trouve dans une région où la vitesse locales est supérieure à sa vitesse initiale. On peut admettre que dans le cas d'un déplacement suffisamment petit, la particule a conservé sa vitesse d'origine.; elle est donc en retard par rapport à l'écoulement local. l'écart de vitesse est donc négatif u'v'<0

•Si $\frac{d\overline{u}}{\partial y} < 0$ la particule déplacée est en avance. Ainsi u'>0 et u'v'>0

•Dans tous les cas $P_t = -\overline{u_i^{'} u_j^{'}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} > 0$ ce qui confirme le signe du terme de production

III.4 Bilans énergétiques

Equation de transport du terme de dissipation $\varepsilon = \mu \overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}}$

L'équation de transport du terme de dissipation ε s'obtient en dérivant par rapport à j l'équation de la fluctuation de vitesse (k étant l'indice muet) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\right] + \overline{u_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\right] + u_k^{'}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}\frac{\partial u_k^{'}}{\partial x_j}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_k^{'}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}\right] - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_k^{'}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p^{'}}{\partial x_i \partial x_j} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\right]$$

$$\overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} \times \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\right]} + \overline{u_k}\,\overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} \times \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\right]} = -\overline{u_k^{'}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}} \times \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_k} - \overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} \times \frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}}\,\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j}$$

$$-\overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} \times \frac{\partial u_k^{'}}{\partial x_j}}\,\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} \times \frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_k^{'}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_k}\right]}$$

$$-\frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} \times \frac{\partial^2 p^{'}}{\partial x_i \partial x_j}} + \nu\overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j} \times \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\left[\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\right]}$$

III.4 Bilans énergétiques

Equation de transport du terme de dissipation $\varepsilon = \mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = -2\nu \left[\overline{u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \cdot \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_k} - \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \cdot \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} - \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} \cdot \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right]$$

couplage avec le mouvement moyen

$$-2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}$$

interaction interne au mouvement d'agitation

$$-\frac{\partial \overline{u_k' \varepsilon}}{\partial x_k}$$

diffusion turbulente

$$-\frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right]}$$

interaction par fluctuation de pression

$$+\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k}$$

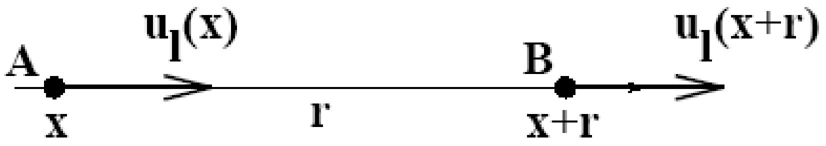
diffusion moléculaire

$$-2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_k}}$$

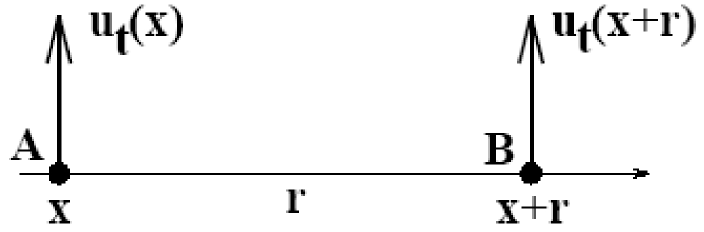
destruction visqueuse

III.5 Retour sur les échelles de la turbulence

Etude des corrélations longitudinales et transversales des fluctuations de vitesses entre deux points A et B distants de r



f(r)



g(r)

III.5 Retour sur les échelles de la turbulence

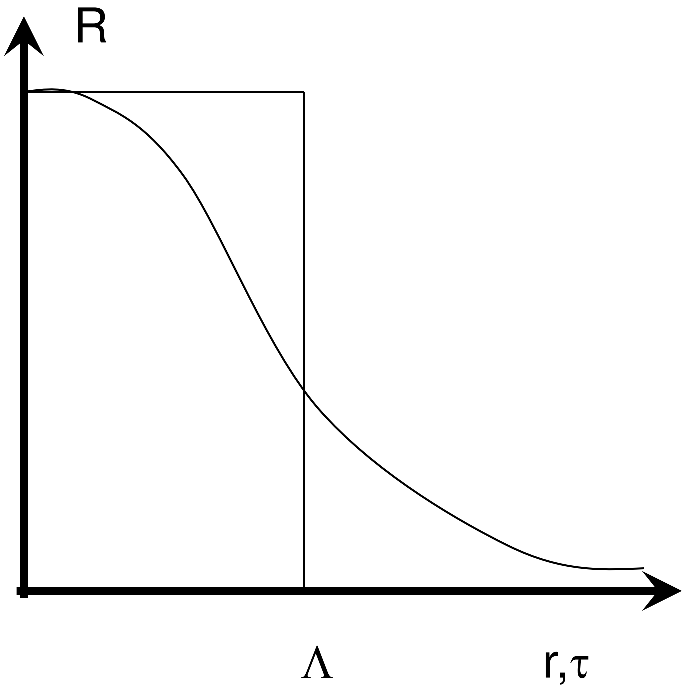
Micro et Macro échelles de Taylor

Les macro-échelles temporelle et spatiale au sens de Taylor sont définies par:

$$\Lambda(t) = \int_0^\infty R(r,t)dr \qquad \Lambda(\vec{x}) = \int_0^\infty R(\vec{x},\tau)d\tau$$

Où la convergence des intégrales est admise

Ces grandeurs intégrales fournissent une évaluation de la durée (ou de la distance) en déça de laquelle la vitesse est parfaitement corrélée avec elle-même ou au-delà de laquelle elle est totalement décorrélée d'elle même

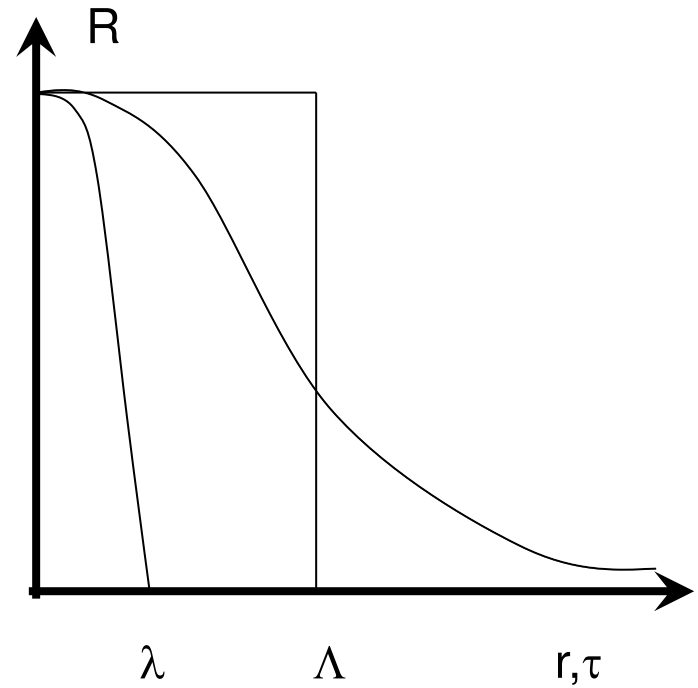


III.5 Retour sur les échelles de la turbulence

Micro et Macro échelles de Taylor

Le comportement à l'origine des fonctions d'auto-corrélations permet de définir ***les micro-échelles temporelle et spatiale de Taylor***

$$\left.\frac{\partial^2 R(r,t)}{\partial r^2}\right|_{r=0} = -\frac{2}{\lambda^2(t)} \qquad \left.\frac{\partial^2 R(\vec{x},\tau)}{\partial \tau^2}\right|_{\tau=0} = -\frac{2}{\lambda^2(\vec{x})}$$



De sorte que la courbe R est osculatrice à l'origine à une parabole d'équation générale $(1-x^2/\lambda^2)$

$$\lambda = U\tau_E$$

$$\lambda = \sqrt{-\frac{2}{\left.\frac{\partial^2 R(r,t)}{\partial r^2}\right|_{\tau=0}}}$$

III.5 Retour sur les échelles de la turbulence

Interprétation dissipative de la micro-échelle de Taylor

Fonctions de corrélation en THI

$$\sqrt{\overline{u_1^2}} = \sqrt{\overline{u_2^2}} = \sqrt{\overline{u_3^2}}$$

$$f(r,t) = \frac{\overline{u'_1(P_1,t)u'_1(P_2,t)}}{u'^2} = R_{11}(r,t)$$

$$g(r,t) = \frac{\overline{u'_2(P_1,t)u'_2(P_2,t)}}{u'^2} = R_{22}(r,t)$$

Turbulence homogène isotrope

$$\bar{\varepsilon} = 15\nu\overline{\left(\frac{du'}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{2\overline{u'^2}}{\lambda^2} = \overline{\left(\frac{du'}{dx}\right)^2}$$

$$\bar{\varepsilon} = 30\nu\frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2}$$

Paramétrisation statistique de la turbulence

Interprétation dissipative de la micro-échelle de Taylor

Fonctions de corrélation en THI

$$\sqrt{\overline{u_1^2}} = \sqrt{\overline{u_2^2}} = \sqrt{\overline{u_3^2}}$$

$$f(r,t) = \frac{\overline{u'_1(P_1,t)u'_1(P_2,t)}}{u'^2} = R_{11}(r,t)$$

$$g(r,t) = \frac{\overline{u'_2(P_1,t)u'_2(P_2,t)}}{u'^2} = R_{22}(r,t)$$

Turbulence homogène isotrope

$$\bar{\varepsilon} = 15\nu\overline{\left(\frac{du'}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{2\overline{u'^2}}{\lambda^2} = \overline{\left(\frac{du'}{dx}\right)^2}$$

$$\bar{\varepsilon} = 30\nu\frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2}$$

Paramétrisation statistique de la turbulence

Retour sur les échelles de turbulence

Echelles de Kolmogorov

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \upsilon = (\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \qquad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Echelles de Taylor

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\overline{u'^3}}{\ell} \propto \frac{\overline{u'^3}}{\Lambda}$$

Macro $\Lambda \propto \ell$ $\Rightarrow$ $R_\Lambda = \dfrac{\Lambda u'}{\nu}$

$$30\nu\frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \propto \frac{\overline{u'^3}}{\Lambda}$$

Micro λ $\Rightarrow$ $R_\lambda = \dfrac{\lambda u'}{\nu}$

$\Rightarrow$

THI $\bar{\varepsilon} = 30\nu\dfrac{\overline{u'^2}}{\lambda^2}$

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{1}{30}\frac{u'\lambda}{\nu} = \frac{R_\lambda}{30}$$

Paramétrisation statistique de la turbulence

Retour sur les échelles de turbulence

Echelles de Kolmogorov

$$30\nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \propto \frac{\overline{u'^3}}{\Lambda} = \frac{\upsilon^3}{\eta}$$

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \upsilon = (\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \qquad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\eta}{\Lambda} = R_\Lambda^{-\frac{3}{4}} = 30^{\frac{3}{4}} R_\lambda^{-\frac{3}{2}}$$

Echelles de Taylor

$$\frac{\eta}{\lambda} = 30^{-\frac{1}{2}} R_\Lambda^{-\frac{1}{4}} = 30^{-\frac{1}{4}} R_\lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Macro $\Lambda \propto \ell \Rightarrow R_\Lambda = \frac{\Lambda u'}{\nu}$

Micro $\lambda \Rightarrow R_\lambda = \frac{\lambda u'}{\nu}$

$$\frac{\upsilon}{u'} = R_\Lambda^{-\frac{1}{4}} = 30^{\frac{1}{4}} R_\lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{1}{30}\frac{u'\lambda}{\nu} = \frac{R_\lambda}{30} \Rightarrow R_\Lambda = \frac{1}{30} R_\lambda^2$$

$$\frac{\tau}{T_e} = R_\Lambda^{-\frac{1}{2}} = 30^{\frac{1}{2}} R_\lambda^{-3}$$