Chapitre 5
Modélisation de la turbulence

5.1 Position du Problème

La modélisation consiste à exprimer les corrélations inconnues en fonction des champs connus. La méthodologie mise en œuvre pour les fermetures en un point des équations dynamiques de l'écoulement turbulent permet d’engendrer des approximations cohérentes des termes inconnues.

Dans le cadre de la description statistique de la turbulence, les spectres de vitesse sont alors être représentés par une seule échelle de longueur et une seule échelle de temps toutes deux caractéristiques des tourbillons les plus énergétiques.

Les modèles de fermeture en un point sont basés sur des hypothèses de l’isotropie locale développée par Kolmogorov. La propriété d’isotropie de la micro-turbulence est utilisée dans les fermetures en un point en particulier pour exprimer la dissipation dans les équations aux tensions de Reynolds. La restriction majeure de ce type d’approche réside dans l’hypothèse de quasi-homogéneité et de faible anisotropie.

5.1 Position du Problème

Les méthodes de fermeture en un point donnent lieu à toute une classe de modèles de turbulence qui sont largement utilisés dans la prédétermination des écoulements industriels.

Issus de la hiérarchie des équations des moments en un point, ces modèles sont d'autant plus performants que leur ordre est élevé ; en revanche les modèles à degrés élevés sont les plus complexes.

La mise en œuvre de ces modèles se limite dans la pratique aux modèles de transport des moments du second ordre.

Les modèles d'ordres inférieurs se basent sur la notion de viscosité turbulente ; dans les modèles les plus élémentaires la viscosité turbulente est donnée à partir d'une formulation algébrique (modèle à zéro équation), elle est déterminée à partir d'une équation de transport d'une grandeur turbulente dans les modèles (à une équation) et à partir de deux équations de transport de deux grandeurs turbulentes dans les modèles (à deux équations).

5.1 Position du Problème

Le recours à l'expérience pour l’ajustement des modèles de turbulence est déterminant L’exploitation de ces expériences intervient à deux niveaux dans l’élaboration des modèles de turbulence :

- d’abord au niveau de la formulation des fermetures : l’analyse physique des expériences permet la compréhension des phénomène qui est souvent à la base de l’intuition physiques qui suggère de schémas conceptuels de modélisation.
- ensuite dans l'ajustement des modèles : les expériences sont utilisées pour évaluer et ajuster les modélisations

Nous présentons dans la suite les modèles de fermetures en un point : on présente d'abord les modèles de fermeture au second ordre ; les modèles de turbulence d'ordre inférieurs sont alors interprétés comme des réductions des fermetures d'ordres plus élevés même si cela inverse l'ordre historique de leur apparition

6.1 Principes méthodologiques de fermeture en un point

a) Nature tensorielle des termes inconnus : la fermeture des divers termes doit être effectuée à l'aide de tenseurs possédant les mêmes propriétés qu'eux: ordre tensoriel, propriétés de symétrie, de trace nulle, etc.

b) indifférence matérielle : Les lois de fermeture ne doivent pas dépendre du système de coordonnées. Cela veut dire que les lois se conservent lors d'un changement de repère.

c) Analyse dimensionnelle : Les termes générés doivent être dimensionnellement corrects. On obtient alors la forme nécessaire à chaque terme à un coefficient numérique près.

d) Comportement asymptotique : En l'absence de contraintes extérieures imposées par le champ de vitesse moyenne, par les conditions aux limites ou par les forces extérieures, le modèle de turbulence doit posséder des solutions relaxant vers un état isotrope

e) Conditions de réalisabilité : Les principes méthodologiques exposés ci haut ne garantissent pas les conditions de réalisabilité. Leur vérification permet d'empêcher le développement de comportements physiquement inacceptables tel que l'apparition d'une énergie négative

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = -(\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k}) - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \frac{1}{\rho}\overline{p'(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i})}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_i u'_j} + \frac{1}{\rho}\overline{p'(\delta_{jk} u'_i + \delta_{ik} u'_j)})$$

•les termes de convection et de production ne demandent pas de modélisation

•le problème de fermeture concerne les termes restants (redistribution, dissipation visqueuse et diffusion).

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

a) Termes de diffusion :

le terme de diffusion par la viscosité est négligé dans les écoulements à grands nombres de Reynolds considérés ici. L'expression la plus utilisée pour la modélisation des moments d'ordre 3 est donnée par Launder et al (1975) :

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i^{'}u_j^{'}u_k^{'}} = C_{s\phi}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_l^{'}u_k^{'}}\frac{\partial \overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{\partial x_l}\right]$$

le modèle de la diffusion d'une grandeur peut être représenté

$$\mathrm{Diff}\,(\phi) = \mathrm{C}_{s\phi}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_k}\left(\frac{\mathrm{k}}{\varepsilon}\overline{\mathrm{u}_k^{'}\mathrm{u}_l^{'}}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}_l}\right)$$

Le terme de diffusion par la pression est négligé par beaucoup d'auteurs. Lumley et Newman (1978) ont montré qu'il est possible de l'exprimer en fonction des moments d'ordre 3

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

c) Terme de corrélation pression déformation :

La corrélation pression-déformation tenseur symétrique de trace nulle, est un terme qui redistribue l'énergie cinétique entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds.

Modèle de Rotta (1951)
La modélisation de Rotta du terme est la plus simple. Elle traduit l'effet de retour à l'isotropie sous la forme:

$$\Phi_{ij} = \overline{\frac{1}{\rho} p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \, \delta_{ij} \right)$$

On peut vérifier que le tenseur est symétrique à trace nulle et qu'en l'absence de contraintes extérieures imposées par le champ moyen, cette modélisation aboutit vers une solution isotrope de la turbulence.

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

c) Terme de corrélation pression déformation :

Modèle de Launder et al (1975)
Launder et al décomposent le terme de pression-déformation en une partie linéaire , une partie non linéaire :

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^{(L)} + \Phi_{ij}^{(NL)}$$

La partie non linéaire est modélisée selon la proposition de Rotta. La modélisation du terme linéaire de Launder et al (1975) exprime des interactions turbulence - champ moyen sous la forme générale :

$$\Phi_{ij}^{(L)} = -\gamma_1(\Pi_{ij} - \frac{2}{3}\Pi\delta_{ij}) - \gamma_2 k(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}) - \gamma_3(D_{ij} - \frac{2}{3}D\delta_{ij})$$

$$\Pi_{ij} = -(\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}) \qquad D_{ij} = -(\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j})$$

$$\Pi = \mathrm{trace}(\Pi_{ij}) \quad D = \mathrm{trace}(D_{ij}) \quad \gamma_1 = \frac{C_2 + 8}{11} \quad \gamma_2 = \frac{30C_2 - 2}{55} \quad \gamma_3 = \frac{8C_2 - 2}{11}$$

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

c) Terme de corrélation pression déformation :

Modèle de Launder simplifié

$$\Phi_{ij}^{(L)} = -\gamma_1 (\Pi_{ij} - \frac{2}{3}\Pi\delta_{ij})$$

$$\Pi_{ij} = -(\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k}) \qquad \Pi = \mathrm{trace}(\Pi_{ij})$$

Là aussi, on peut vérifier que le tenseur est symétrique à trace nulle et qu'en l'absence de contraintes extérieures imposées par le champ moyen, cette modélisation conduit à une solution isotrope de la turbulence.

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

ECT et taux de dissipation de l'ECT:

$$k = \frac{1}{2}\overline{u_i^{'}u_i^{'}} \qquad \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = C_{sk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_j^{'}u_k^{'}}\frac{\partial k}{\partial x_k}\right] - \overline{u_j^{'}u_k^{'}}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \varepsilon$$

Le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente est isotrope conformément à l'hypothèse d'isotropie locale des petites échelles :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\,\delta_{ij}$$

l'équation de transport du taux de dissipation est modélisée sous une forme analogue à celle de l'ECT:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{s\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_j^{'}u_k^{'}}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right] + \frac{\varepsilon}{k}\left(-C_{1\varepsilon}\overline{u_j^{'}u_k^{'}}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - C_{2\varepsilon}\varepsilon\right)$$

Les terme de production et de destruction sont rattachés à ceux de l'énergie cinétique turbulente via une échelle de temps caractéristique du retournement des tourbillons.

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

Turbulence homogène de grille

On considère l'écoulements homogène dans un plan vertical oxy ;

on note u et v les composantes longitudinale (direction x) et horizontale (direction y) de la vitesse moyenne du liquide et u' et v' les fluctuations correspondantes.

Dans cet écoulement la composante longitudinale de la vitesse moyenne est uniforme et la composante transversale est nulle

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

Turbulence homogène de grille

Les équations des tension de Reynolds se réduisent à

$$\frac{D}{Dt}\overline{u'^2} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k_t}(\overline{u'^2} - \frac{2}{3}k) - \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\frac{D}{Dt}\overline{v'^2} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k_t}(\overline{v'^2} - \frac{2}{3}k) - \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\frac{D}{Dt}(\overline{u'v'}) = -C_1 \frac{\varepsilon}{k}(\overline{u'v'})$$

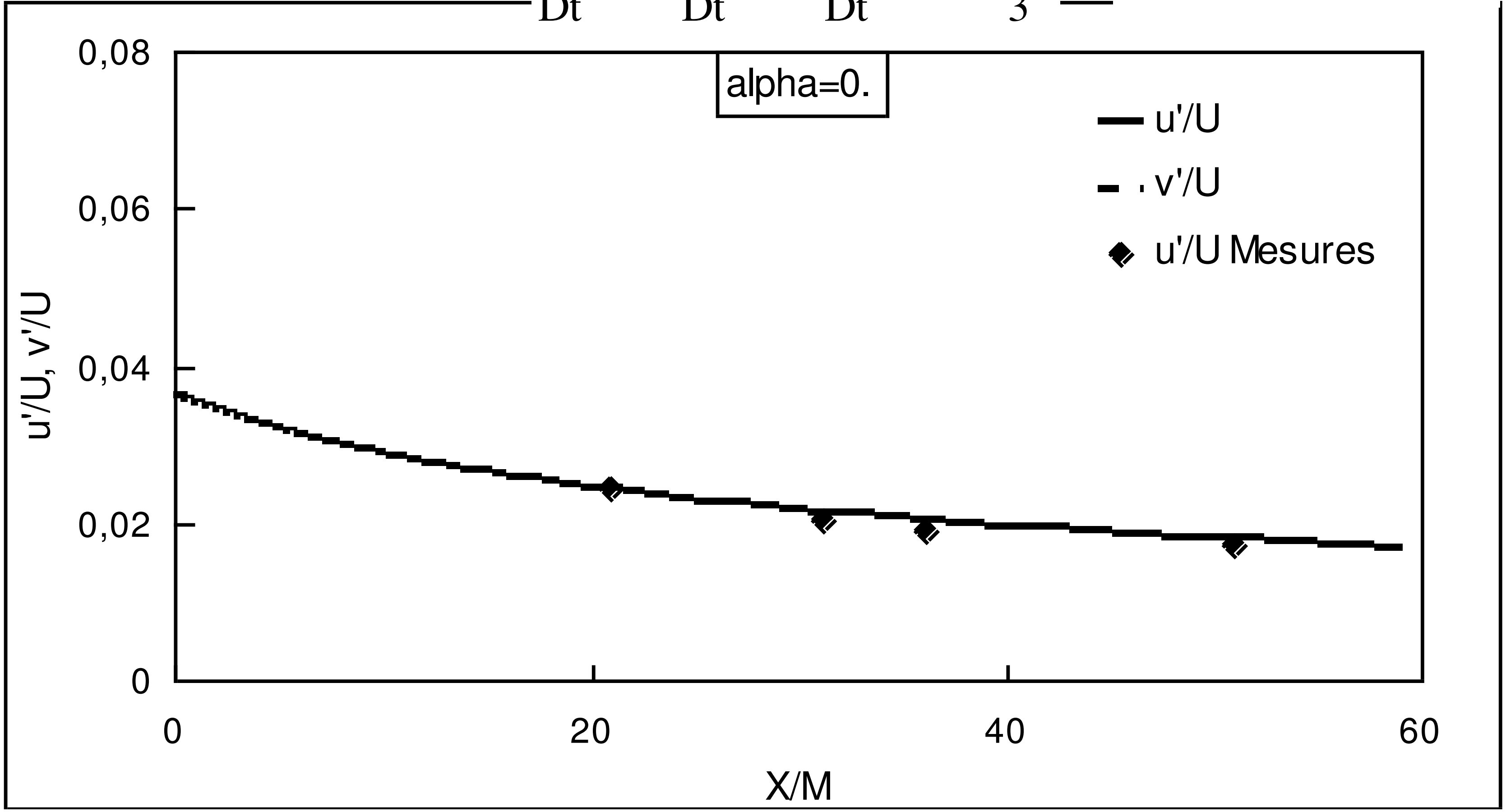
$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}$$

En l'absence de contraintes extérieures imposées par le champ de vitesse moyenne, le modèle de turbulence possède une solutions qui relaxe vers un état isotrope

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = \frac{2}{3}k \qquad \overline{u'v'} = \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$$

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

Turbulence homogène de grille $\frac{D}{Dt}\overline{u'^2} = \frac{D}{Dt}\overline{v'^2} = \frac{D}{Dt}\overline{w'^2} = -\frac{2}{3}\varepsilon \quad \overline{u'v'} = \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$



Décroissance de la turbulence derrière une grille. Données expérimentales de Lance et Bataille (1991). (0.6 m/s, taille de la maille M = 0.04 m)

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

Turbulence homogène de grille

On considère l'écoulements homogène dans un plan vertical oxy ;

on note u et v les composantes longitudinale (direction x) et horizontale (direction y) de la vitesse moyenne du liquide et u' et v' les fluctuations correspondantes.

Dans cet écoulement la composante longitudinale de la vitesse moyenne est uniforme et la composante transversale est nulle

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

4.2 Ecoulement de cisaillement uniforme

On considère un écoulement homogène vertical avec un cisaillement uniforme

$$S = \frac{d\bar{u}}{dy}$$

L'homogénéité transversale de l'écoulement impose que les vitesses moyennes transversales soient nulles.

Les équations des composantes turbulentes s'écrivent alors :

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

4.2 Ecoulement de cisaillement uniforme

Les équations des tension de Reynolds modélisées sont

$$\frac{D}{Dt}\overline{u'^2} = -C_1\frac{\varepsilon}{k_t}(\overline{u'^2}-\frac{2}{3}k\ ) - 2(1-\frac{\gamma_1}{3}+\frac{2\gamma_3}{3})\overline{u'v'}S - \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\frac{D}{Dt}\overline{v'^2} = -C_1\frac{\varepsilon}{k_t}(\overline{v'^2}-\frac{2}{3}k) - \frac{2}{3}(2\gamma_1-\gamma_3)\overline{u'v'}S - \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\frac{D}{Dt}(-\overline{u'v'}) = -C_1\frac{\varepsilon}{k}(-\overline{u'v'}) + ((1-\gamma_1)\overline{v'^2}+\gamma_2 k-\gamma_3\overline{u'^2})S$$

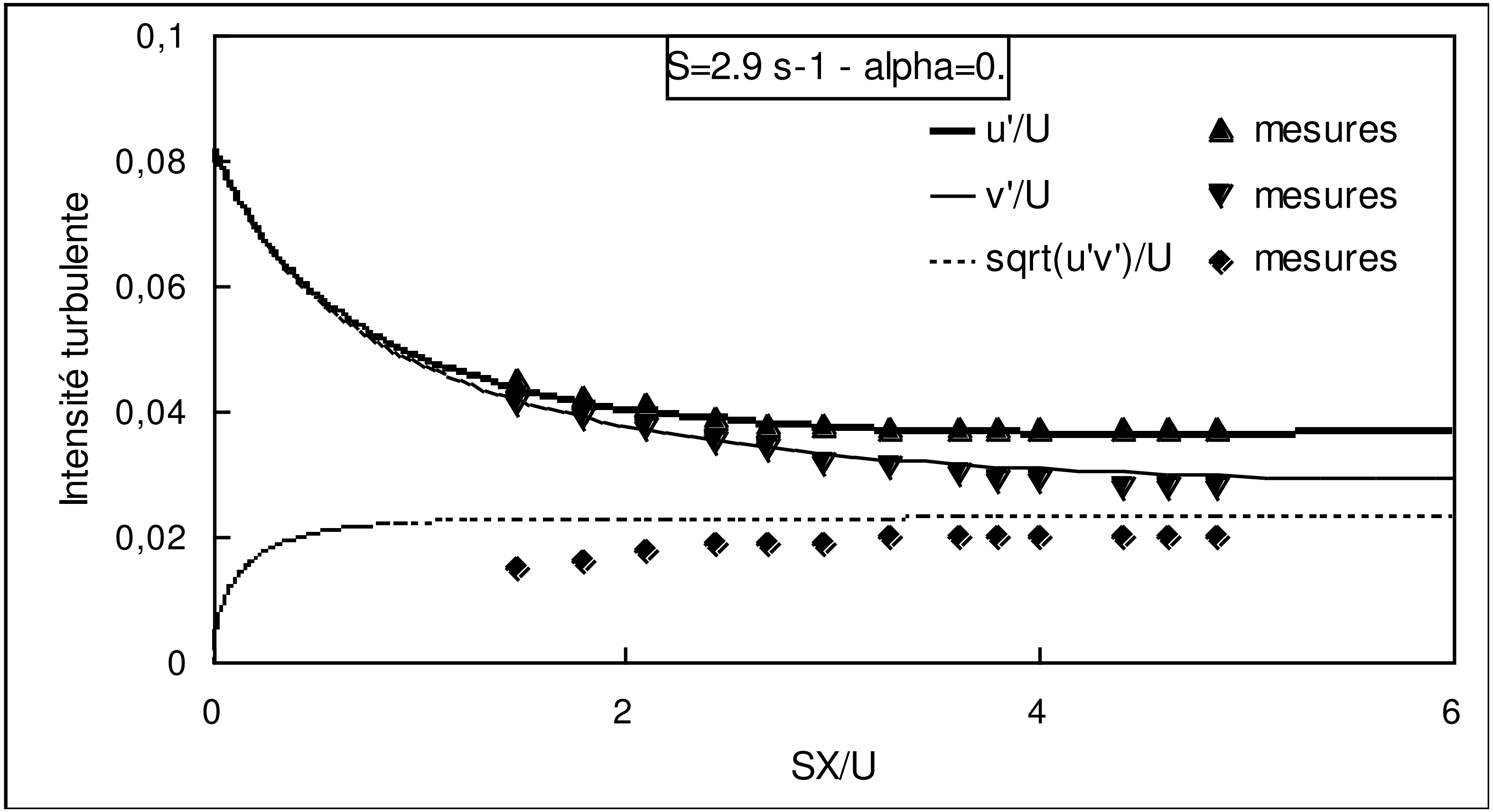
$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u'v'}S - C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}$$

Les contraintes extérieures imposées par le champ de vitesse moyenne, impose que la turbulence est anisotrope

$$\overline{u'^2}\neq\overline{v'^2} \qquad\qquad \overline{u'v'}\neq 0$$

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

4.2 Ecoulement de cisaillement uniforme



écoulement de cisaillement uniforme (U=1 m/s et S=2.9 s-1). données expérimentales de Lance et al (1991).

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

4.2 4Modèle de turbulence en écoulement quasi-parallèle

On considère ici des écoulements turbulents verticaux quasi-parallèles et on exprime le bilan moyen de quantité de mouvement avec l'hypothèse de couche cisaillée mince 2D, (le rapport de l'échelle de longueur diffusive à l'échelle advective est petit,). on note u et v les composantes longitudinale (direction x) et horizontale (direction y) de la vitesse moyenne et u' et v' les fluctuations correspondantes. La projection transversale de l'équation de quantité de mouvement, s'écrit dans ce cas, sous la forme ci-dessous :

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\bar{p} + \rho \overline{v'^2}) = 0$$

On pose alors : $P_e(x) = \bar{p} + \rho g x + \rho \overline{v'^2}$

La projection suivant la direction longitudinale de l'équation (70) s'écrit :

$$\frac{D\bar{\bar{u}}}{Dt} = -\rho^{-1}\frac{dP_e(x)}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})$$

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

4.2 Modèle de turbulence en écoulement quasi-parallèle

Avec les hypothèses de couche mince et en se limitant aux trois composantes importantes dans la configuration d'écoulement quasi-parallèle, les équations des composantes turbulentes s'écrivent :

$$\frac{D}{Dt}\overline{u'^2} = C_{sk}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{v'^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'^2}\right] - C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u'^2} - \frac{2}{3}k\right) \quad - 2\left(1 - \frac{\gamma_1}{3} + \frac{2\gamma_3}{3}\right)\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\frac{D}{Dt}\overline{v'^2} = C_{sk}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{v'^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'^2}\right] - C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{v'^2} - \frac{2}{3}k\right) \quad - \frac{2}{3}(2\gamma_1 - \gamma_3)\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{2}{3}\varepsilon$$

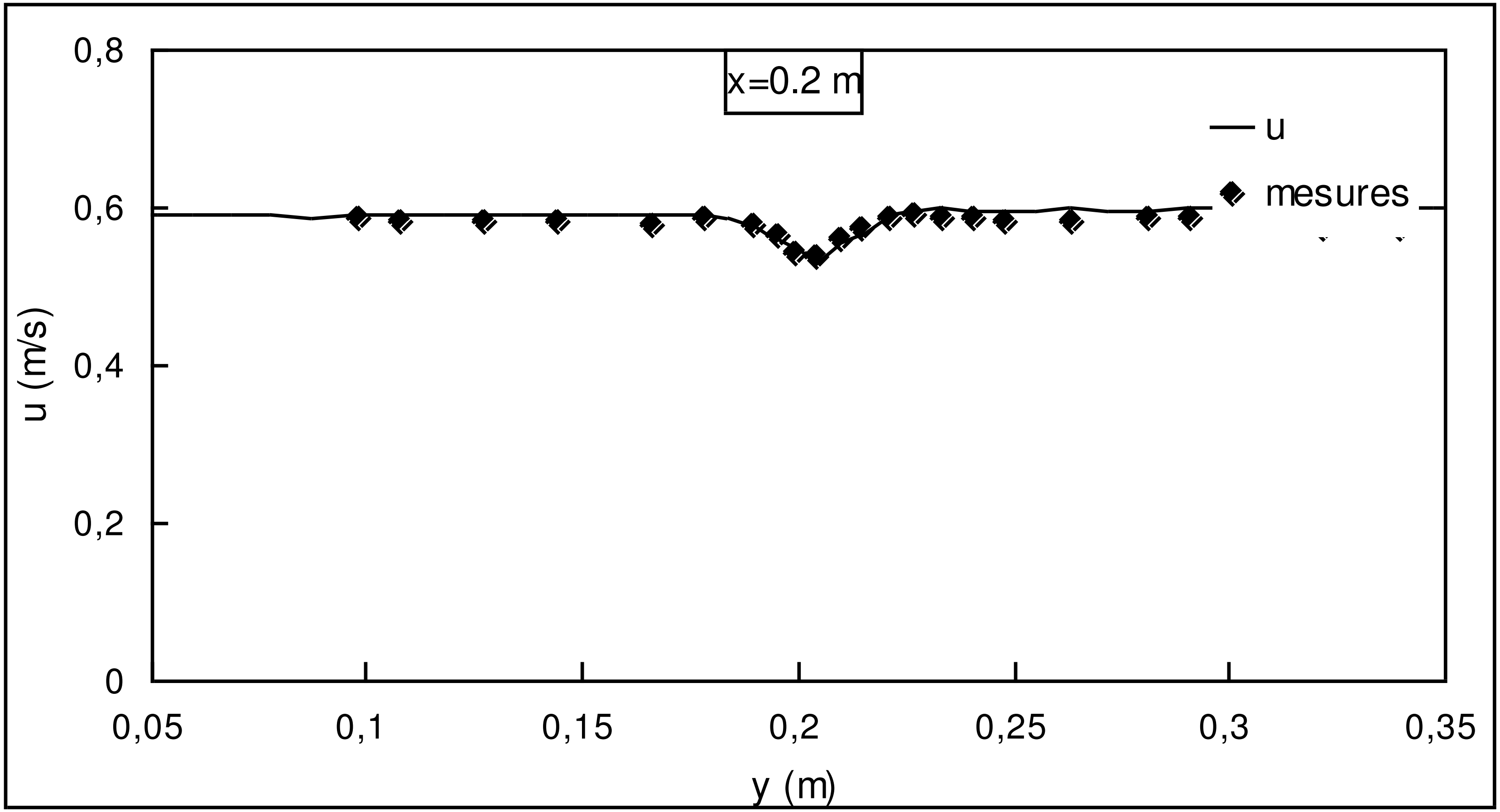
$$\frac{D}{Dt}\left(-\overline{u'v'}\right) = C_{sk}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{k}{\varepsilon}\overline{v'^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u'v'}\right)\right] - C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(-\overline{u'v'}\right) \quad + \left((1-\gamma_1)\overline{v'^2} + \gamma_2 k - \gamma_3\overline{u'^2}\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{s\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k}{\varepsilon}\overline{v'^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right] - C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}$$

C1	γ1	γ2	γ3	C1ε	C2ε	Csk	Csε
1.8	0.76	0.18	0.11	1.44	1.92	0.11	0.15

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

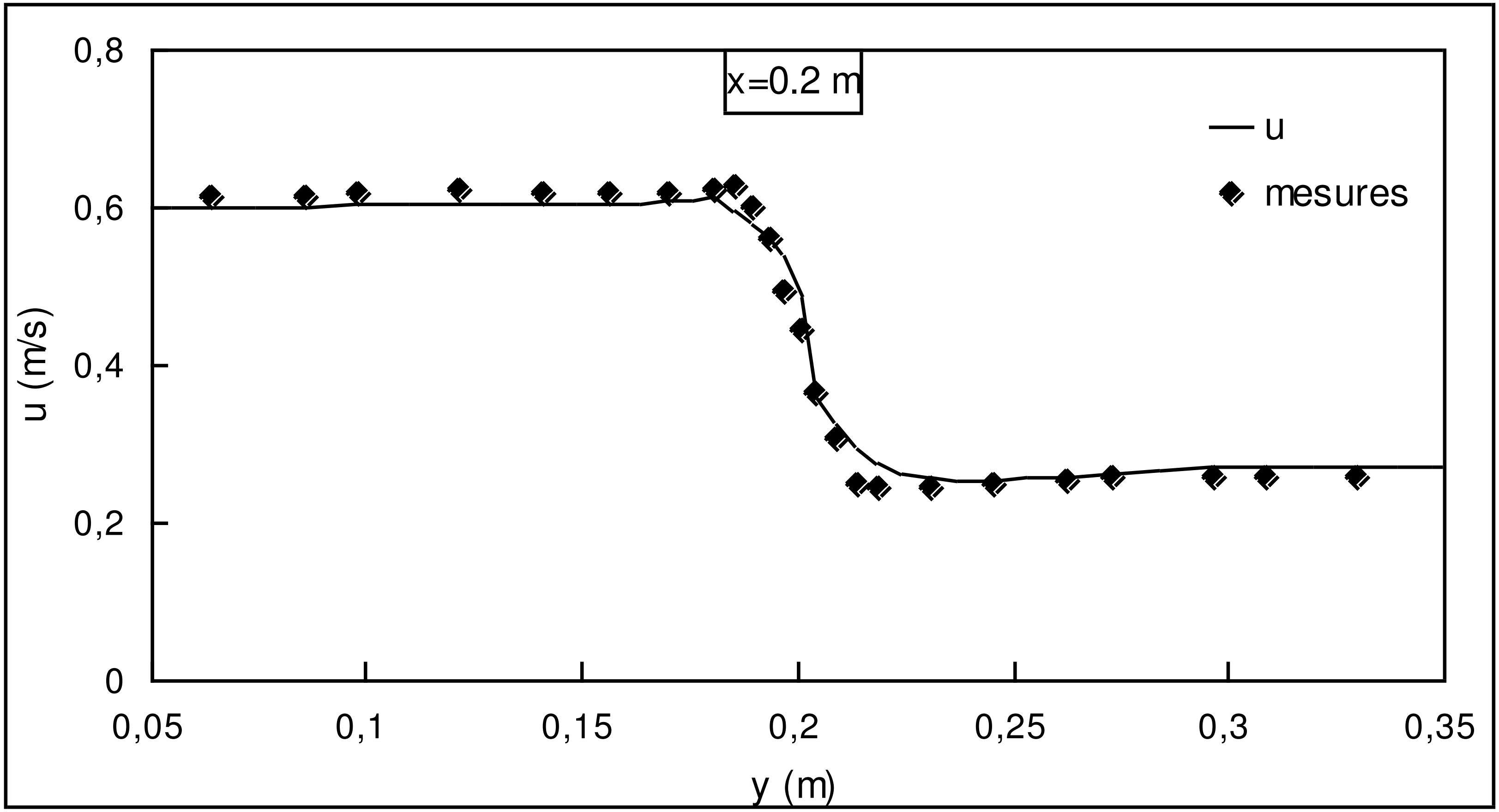
4.2 Ecoulement de sillage d'une plaque plane



Profil de vitesse moyenne en écoulement de sillage à x=0.2 m. Comparaison des résultats numériques avec les données expérimentales de Roig (1993).

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

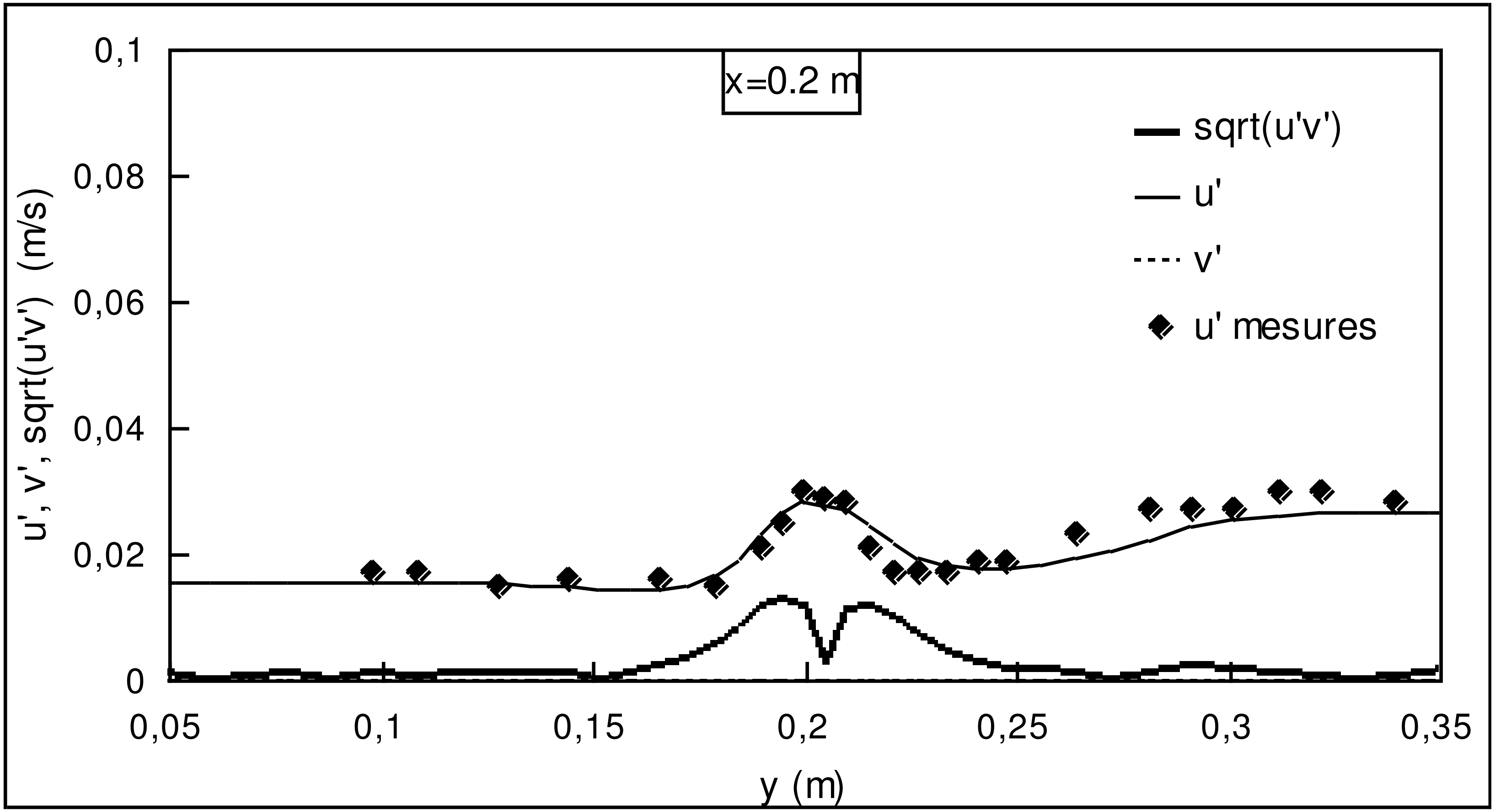
4.2 Ecoulement de zone de mélange



Profil de vitesse moyenne en écoulement de zone de mélange à x=0.2 m. données expérimentales de Roig (1993).

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

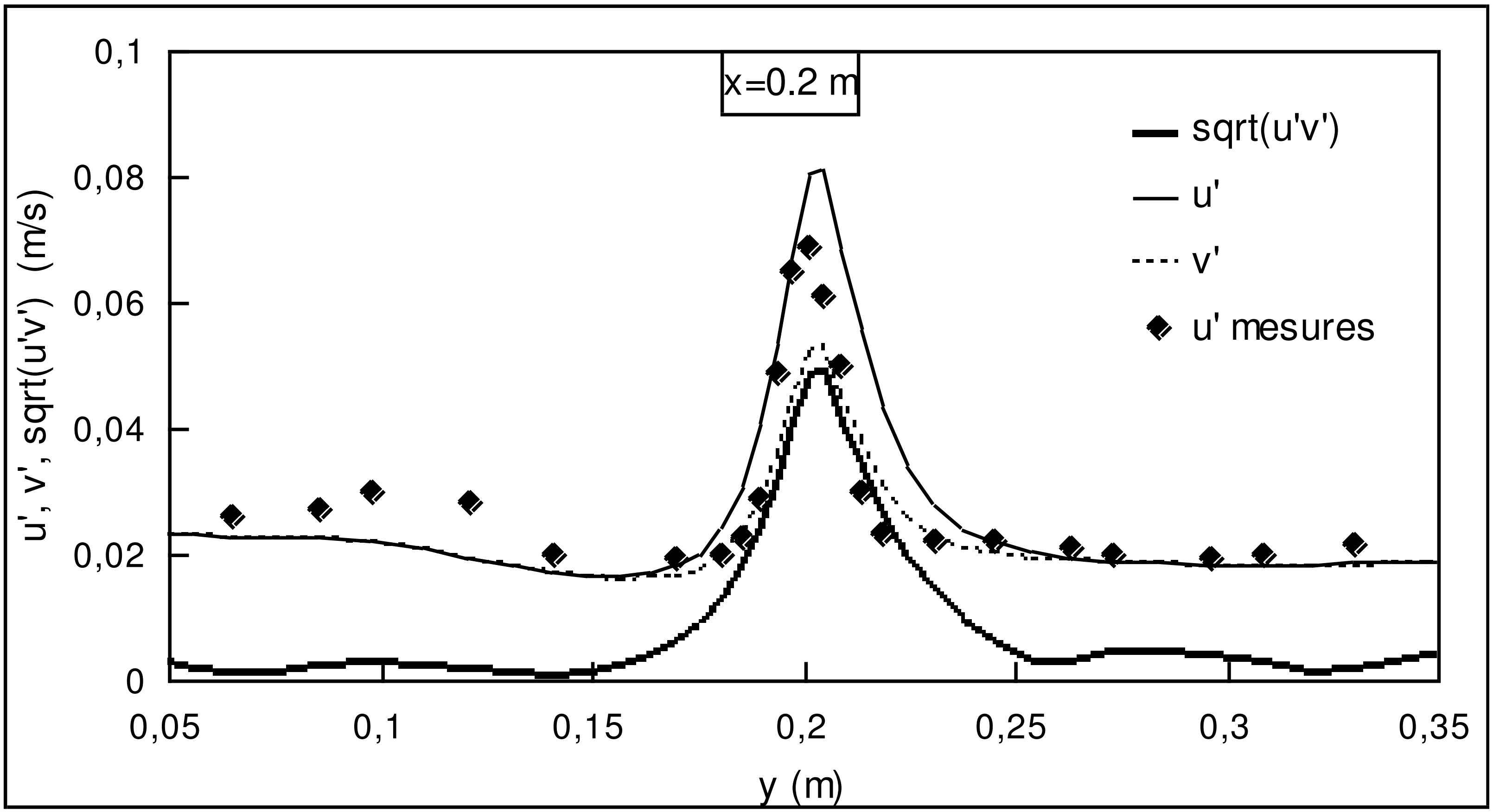
4.2 Ecoulement de sillage d'une plaque plane



Profil de l'intensité turbulente en écoulement de sillage à x=0.2 m. Données expérimentales de Roig (1993)

6.1 Fermetures au second ordre de la turbulence

4.2 Ecoulement de zone de mélange



Profil de de l'intensité turbulente en écoulement de zone de mélange à x=0.2 m. données expérimentales de Roig (1993).

6.1 Réduction des fermetures au second ordre :

La notion de viscosité turbulente

L'expression tensorielle du modèle de viscosité turbulente pour le fluide incompressible s'écrit :

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$

ν_t est la viscosité turbulente.

La formulation de la viscosité turbulente introduit deux variables (k et ε) qu'on se doit d'exprimer pour que les équations de Reynolds soient fermées. L'analyse dimensionnelle montre qu'il possible de relier la viscosité turbulente à l'énergie cinétique turbulente et à une échelle de longueur (l) caractéristique de la taille des tourbillons porteurs d'énergie sous la forme :

$$\nu_t = C k^{\frac{1}{2}} l$$

Il faut donc deux échelles caractéristiques de la turbulence pour exprimer la viscosité turbulente : une échelle caractéristique des fluctuations de vitesse et une échelle caractéristique de la taille des tourbillons porteurs d'énergie.

6.1 Réduction des fermetures au second ordre :

La notion de viscosité turbulente

En écoulement homogène avec un cisaillement constant $S = \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$, l'équation de transport du frottement turbulent exprime à l'équilibre un bilan production-redistribution. Avec le modèle de Rotta on a:

$$\frac{D}{Dt}(-\overline{u'v'}) = -C_1 \frac{\varepsilon}{k}(-\overline{u'v'}) + \overline{v'^2}S = 0$$

Cette équation fournit une forme explicite du frottement turbulent qui s'écrit :

$$-\overline{u'v'} = \frac{\overline{v'^2}}{C_1 \frac{\varepsilon}{k}} S = \nu_t S$$

On en déduit l'expression suivante de la viscosité turbulente en cisaillement uniforme :

$$\nu_t \approx C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

6.1 Réduction des fermetures au second ordre :

La notion de viscosité turbulente

Avec le modèle de Launder, l'équilibre un bilan production-redistribution:

$$\frac{D}{Dt}(-\overline{u^{'}v^{'}}) = -C_1\frac{\varepsilon}{k}(-\overline{u^{'}v^{'}}) + ((1-\gamma_1)\overline{v^{'2}} + \gamma_2 k - \gamma_3\overline{u^{'2}})S = 0$$

Cette équation fournit l'expression suivante du frottement turbulent :

$$-\overline{u^{'}v^{'}} = \frac{((1-\gamma_1)\overline{v^{'2}} + \gamma_2 k - \gamma_3\overline{u^{'2}})}{C_1\frac{\varepsilon}{k}}S$$

On en déduit l'expression suivante de la viscosité turbulente en cisaillement uniforme :

$$\nu_t = \frac{((1-\gamma_1)\overline{v^{'2}} + \gamma_2 k - \gamma_3\overline{u^{'2}})}{C_1\frac{\varepsilon}{k}} \approx C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$$

6.1 Modèles à deux équations:
Modèle (k-ε)

Là encore il faut deux échelles caractéristiques de la turbulence pour exprimer la viscosité turbulente : Ces deux échelles représentent ici deux champs scalaires (k et ε) et doivent être déterminées en résolvant deux équations de transport.

Le modèle (k-ε) est sans doute le plus utilisé ; ce modèle détermine la viscosité turbulente en résolvant les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente k et de son taux de dissipation ε.

Rappelons les équations de transport de k et l'équation modélisée de ε

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = C_{sk} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial k}{\partial x_k}\right] - \overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{s\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right] + \frac{\varepsilon}{k}\left(-C_{1\varepsilon}\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - C_{2\varepsilon}\varepsilon\right)$$

6.1 Modèles à deux équations:
Modèle (k-ε)

Avec le modèle de viscosité turbulente

$$\overline{u_i^{'}u_j^{'}} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - \nu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Les équations de transport de k et de ε sont modélisées sous la forme :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + \nu_t\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right) + \frac{\varepsilon}{k}\left[C_{1\varepsilon}\nu_t\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - C_{2\varepsilon}\varepsilon\right]$$

Les constantes du modèle k, ε conventionnel sont

$$C_\mu = 0.09 \qquad \sigma_k = 1.0 \qquad \sigma_\varepsilon = 1.3 \qquad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \qquad C_{\varepsilon 2} = 1.92$$

6.1 Modèles à deux équations:
Modèle (k-λ)

Les équations de transport des autres modèles à deux équations (k,l), (k,ω) et (k,τ) mettent en jeu d'autres grandeurs scalaires caractéristiques de la turbulence pour exprimer la viscosité turbulente

Modèle (k,ω) ω est appelée dissipation spécifique

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k} \qquad \nu_t = C_\mu \frac{k}{\omega}$$

Modèle (k, l)

$$l = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \qquad \nu_t = C_\mu k^{\frac{1}{2}} l$$

Modèle (k,τ)

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon} \qquad \nu_t = C_\mu k \tau$$

6.1 Modèles à deux équations:

Modèles (k-ω) , (k-l), (k-τ)

Les équations de transport des autres modèles à deux équations (k,l), (k,ω) et (k,τ) peuvent être obtenues à partir de leurs expressions respectives en fonction de k et de ε.

Modèle (k,ω) ω est appelée dissipation spécifique

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k} \qquad \frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{k}\frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\omega}{k}\frac{Dk}{Dt} \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Modèle (k, l)

$$l = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \qquad \frac{Dl}{Dt} = \frac{3}{2}\frac{1}{k}\frac{Dk}{Dt} - \frac{l^2}{k^{\frac{3}{2}}}\frac{D\varepsilon}{Dt}$$

Modèle (k,τ)

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon} \qquad \frac{D\tau}{Dt} = \frac{\tau}{k}\frac{Dk}{Dt} - \frac{\tau^2}{k}\frac{D\varepsilon}{Dt}$$

6.1 Modèles à deux équations:

3.3.3 Fermetures algébriques du tenseur de Reynolds

En comparaison avec les fermetures au second ordre, les modèles de turbulence fondés sur le concept de viscosité turbulente sont:
- plus faciles à implanter dans les codes industriels
- plus simples à ajuster et à interpréter
- plus stables numériquement
- demandent moins d'effort de calcul

Ils sont de ce fait l'outils favori des ingénieurs

Dans leur forme originelle les modèles à viscosité turbulente ne fournissent pas d’information précises sur la structure de la turbulence. En particulier sur les composantes normales du tenseur de Reynolds on a en effet:

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \qquad \overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = \frac{2}{3} k$$

6.1 Modèles à deux équations:

3.3.3 Fermetures algébriques du tenseur de Reynolds

La structure de la turbulence dans certains écoulements joue un rôle important (génération des écoulements secondaires, répartition des phases en écoulement à bulles etc). La reproduction satisfaisante des tensions de Reynolds s'avère nécessaire pour représenter correctement les mécanismes du transfert turbulent dans ces écoulements

Rodi (1980) a formulé des fermetures algébriques des tensions de Reynolds à partir du modèle k . Selon cette méthode Rodi suppose que le transport des tensions de Reynolds reste proportionnel au transport de l'énergie turbulente :

$$\frac{D\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{Dt} - \mathrm{diff}\,(\overline{u_i^{'}u_j^{'}}) = \frac{\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{k}\left[\frac{Dk}{Dt} - \mathrm{diff}\,(k)\right]$$

L'hypothèse de Rodi se justifie lorsque la variation temporelle et spatiale du coefficient de proportionnalité reste faible devant celle des tensions de Reynolds.

6.1 Modèles à deux équations:

3.3.3 Fermetures algébriques du tenseur de Reynolds

Avec les modélisations au second ordre il est possible d'expliciter les tensions de Reynolds en fonction de l'énergie cinétique, de son taux de dissipation et des caractéristiques du champ de vitesse moyenne.

$$\frac{D\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{Dt} - \mathrm{diff}\,(\overline{u_i^{'}u_j^{'}}) = \frac{\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{k}\left[\frac{Dk}{Dt} - \mathrm{diff}\,(k)\right] \qquad \frac{\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{k}(\Pi - \varepsilon) = \Pi_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

Avec le modèle de Launder, par exemple, on a :

$$\frac{\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{k}(\Pi - \varepsilon) = \Pi_{ij} - C_1\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i^{'}u_j^{'}} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}) - \gamma_1(\Pi_{ij} - \frac{2}{3}\Pi\delta_{ij})$$

$$- \gamma_2 k(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}) - \gamma_3(D_{ij} - \frac{2}{3}D\delta_{ij}) - \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$$

6.1 Modèles à deux équations:

3.3.3 Fermetures algébriques du tenseur de Reynolds

$$\frac{\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{k}(\Pi-\varepsilon)=\Pi_{ij}-C_1\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i^{'}u_j^{'}}-\frac{2}{3}k\delta_{ij})-\gamma_1(\Pi_{ij}-\frac{2}{3}\Pi\delta_{ij})$$
$$-\gamma_2 k(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i})-\gamma_3(D_{ij}-\frac{2}{3}D\delta_{ij})-\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$$

$$(\frac{\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}{k}-\frac{2}{3}\delta_{ij})(\Pi-\varepsilon)=-C_1\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u_i^{'}u_j^{'}}-\frac{2}{3}k\delta_{ij})+(1-\gamma_1)(\Pi_{ij}-\frac{2}{3}\Pi\delta_{ij})$$
$$-\gamma_2 k(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i})-\gamma_3(D_{ij}-\frac{2}{3}D\delta_{ij})$$

$$(\overline{u_i^{'}u_j^{'}}-\frac{2}{3}k\delta_{ij})(\frac{\varepsilon}{k}(C_1+\frac{\Pi}{\varepsilon}-1)=(1-\gamma_1)(\Pi_{ij}-\frac{2}{3}\Pi\delta_{ij})-\gamma_2 k(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i})-\gamma_3(D_{ij}-\frac{2}{3}D\delta_{ij})$$

6.1 Modèles à deux équations:

3.3.3 Fermetures algébriques du tenseur de Reynolds

$$(\overline{u_i^{'}u_j^{'}} - \frac{2}{3}k\delta_{ij})(\frac{\varepsilon}{k}(C_1 + \frac{\Pi}{\varepsilon} - 1) = (1-\gamma_1)(\Pi_{ij} - \frac{2}{3}\Pi\delta_{ij}) - \gamma_2 k(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}) - \gamma_3(D_{ij} - \frac{2}{3}D\delta_{ij})$$

On peut ainsi expliciter les corrélations turbulentes par les relations algébriques suivantes :

$$\overline{u_i^{'}u_j^{'}} = k\left[\frac{2}{3}\delta_{ij} + \frac{(1-\gamma_1)(\Pi_{ij} - \frac{2}{3}\Pi\delta_{ij}) - \gamma_2 k(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}) - \gamma_3(D_{ij} - \frac{2}{3}D\delta_{ij})}{\varepsilon\left[C_1 + \frac{\Pi}{\varepsilon} - 1\right]}\right]$$

6.1 Modèles à zéro et à une équation: Modèle de longueur de mélange

Rappel: Prandlt (1925) a proposé le modèle de longueur de mélange

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{u^{'} v^{'}} = \mu_t \frac{d\overline{u}}{dy} \quad \text{avec} \quad \mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right|$$

La forme générale du modèle de longueur de mélange s'écrit :

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right|$$

Il s'agit de déterminer l_m

- Formulation algébrique : modèle à zéro équation
- Modélisation d'une équation de transport : Modèle à une équation

6.1 Modèles à zéro et à une équation: modèle à zéro équation

La forme générale du modèle de longueur de mélange s'écrit :

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right|$$

Exemple du jet turbulent $\qquad l_m = Ct * x$

x est la distance à partir de l'injection et C une constante qui dépend du régime et des conditions d'injection

	C. de mélange	jets plan	jets ronds	sillage
l_m/δ	0.07	0.09	0.075	0.16

6.1 Modèles à zéro et à une équation: modèle à une équation

La forme générale du modèle de longueur de mélange s'écrit :

$$\nu_t = C_\mu l_m k^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_m}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + \nu_t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \varepsilon$$

Modèle à longueur de mélange (0 équation)

- Prandtl 1925

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right|$$

soit, avec φ fraction massique ou température (scalaire),

$$-\overline{\varphi' u_j} = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right| \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_j}$$

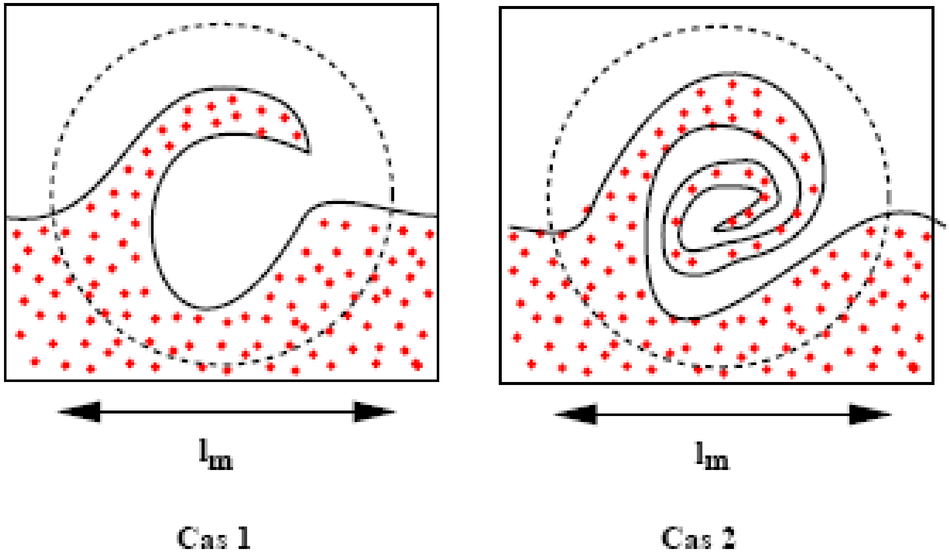
ou, dans le cas de la quantité de mouvement,

$$-\overline{u_i u_j} = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right| \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

- l_m longueur de mélange.

Modèle à longueur de mélange (0 équation)

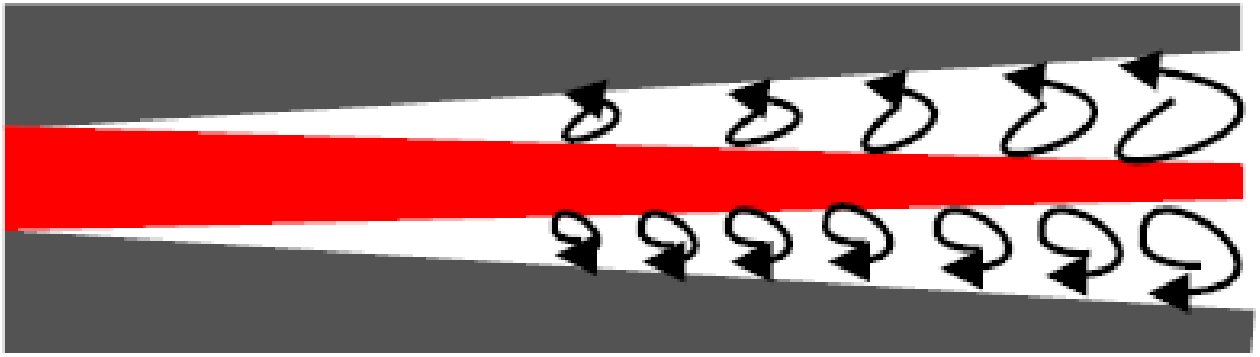
- Pour une même taille l_m de tourbillon, l'énergie correspondante peut être variable.
- Plus l'énergie des tourbillons est importante plus les gradients de vitesse en présence seront forts d'où le modèle de ν_t qui dépend non seulement de l_m^2 mais aussi du gradient.



Modèle à longueur de mélange (0 équation)

- Nouveau problème : détermination de l_m ?
- exemple du jet turbulent : $l_m = C * x$, C : constante dépendant du régime et des conditions d'injection.
- écoulements cisaillés (δ tel que $U(y) = 99\%$ de $U(\infty)$.

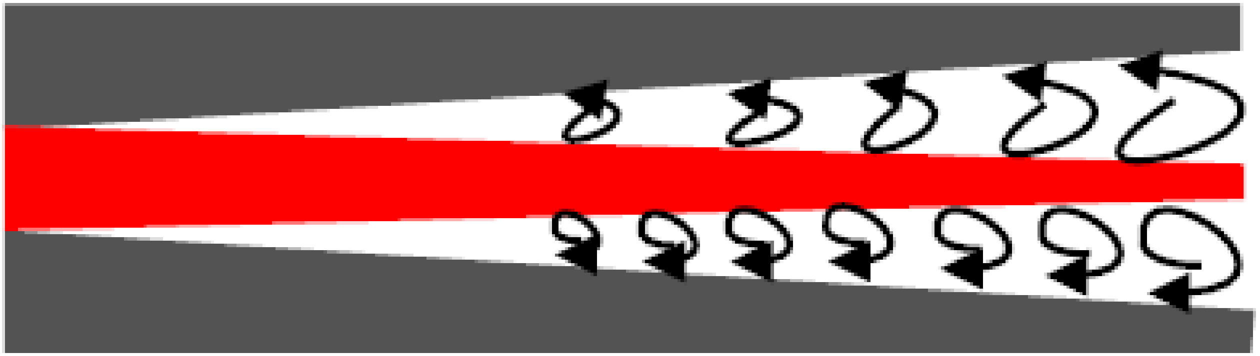
	C. de mélange	jets plan	jets ronds	sillage
l_m/δ	0.07	0.09	0.075	0.16



Modèle à longueur de mélange (0 équation)

- Nouveau problème : détermination de l_m ?
- exemple du jet turbulent : $l_m = C * x$, C : constante dépendant du régime et des conditions d'injection.
- écoulements cisaillés (δ tel que $U(y) = 99\%$ de $U(\infty)$.

	C. de mélange	jets plan	jets ronds	sillage
l_m/δ	0.07	0.09	0.075	0.16



Modèle k – l (1 équation)

- Il est possible, par analyse dimensionnelle, de relier la viscosité turbulente ν_t à l'énergie cinétique de turbulence k.

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} l_m$$

  - Hypothèse de Prandtl-Kolmogorov
  - L'énergie des structures est prise en compte dans le modèle, leur taille reste reliée à l_m.
- Ce modèle nécessite la résolution de l'équation de transport de k.

Modèle k – l (1 équation)

- Energie de la turbulence k

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}_j k_{,j}}_{a} = \underbrace{-R_{ij}\overline{U}_{i,j}}_{b} \underbrace{-\overline{\left(\frac{p}{\rho}u_j\right)}_{,j}}_{c}$$

$$\underbrace{-\overline{\left(\frac{u_i u_i}{2}u_j\right)}_{,j}}_{d} \underbrace{-2\nu\overline{u_{i,j}u_{i,j}}}_{e} \underbrace{+\nu k_{,jj}}_{f}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}_j k_{,j} = -R_{ij}\overline{U}_{i,j} - \varepsilon$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu k_{,j} - \frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j} - \overline{\frac{p}{\rho}u_j}\right)$$

Modèle k – l (1 équation)

- Energie de la turbulence k
  - (a): termes de transport.
  - (b)-SP: terme de production d'énergie turbulente (transfert d'énergie entre écoulement moyen et fluctuant).
  - (c)-G: diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.
  - (d)-G: diffusion turbulente due aux corrélations triples des fluctuations de vitesse.
  - (e)-SP: dissipation visqueuse ε.
  - (f)-G; diffusion moléculaire.

Modèle k – l (1 équation)

- Energie de la turbulence k
  - (a): termes de transport.
  - (b)-SP: terme de production d'énergie turbulente (transfert d'énergie entre écoulement moyen et fluctuant).
  - (c)-G: diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.
  - (d)-G: diffusion turbulente due aux corrélations triples des fluctuations de vitesse.
  - (e)-SP: dissipation visqueuse ε.
  - (f)-G; diffusion moléculaire.

Modèle k – l (1 équation)

- Energie de la turbulence k
  - (a): termes de transport.
  - (b)-SP: terme de production d'énergie turbulente (transfert d'énergie entre écoulement moyen et fluctuant).
  - (c)-G: diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.
  - (d)-G: diffusion turbulente due aux corrélations triples des fluctuations de vitesse.
  - (e)-SP: dissipation visqueuse ε.
  - (f)-G; diffusion moléculaire.

Modèle k – l (1 équation)

- Pour déterminer $\overline{u_i u_j}$ on a introduit ν_t
- Pour déterminer ν_t on a indroduit l_m et k
  - Déplacement du problème
  - On ne peut traiter que les problèmes qui ont été expérimentés.
- 3 termes impliquent des corrélations inconnues :
  - R_{ij} le tenseur de Reynolds.
  - $\frac{1}{\rho}\overline{p u_j} + \overline{u_i u_i u_j}$ la diffusion liée à la pression et le transport turbulent.
  - ε la dissipation de k.

Modèle k – l (1 équation)

- Fermeture tenseur de Reynolds R_{ij}
  - Nous allons utiliser l'approximation de Boussinesq (modèle 0-équation).

$$-R_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

  - le terme $\frac{2}{3} k \delta_{ij}$ est là pour s'assurer du fait que $R_{ii} = 2k$ (par définition) or la trace de $\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right)$ est nulle.

Modèle k – l (1 équation)

- Fermeture diffusion et transport turbulent
  - Il n'est pas possible d'effectuer une analogie de type gradient ($-\overline{u_j \varphi'} \approx \nu_t \partial\overline{\varphi}/\partial x_j$) pour le terme de diffusion de pression.
  - Dans un premier temps, nous allons le considérer comme négligeable, ce qui est le cas dans les écoulements simples.
  - Pour le terme de corrélations triples, nous allons écrire

$$\frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j} = \overline{k u_j} = -\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}$$

avec σ_k coefficient de fermeture à déterminer.

Modèle k – l (1 équation)

- Fermeture dissipation
  - A ce stade, nous avons 2 inconnues : l_m et ε (les coefficients C_μ ou σ_k du modèle seront données par l'expérience ou l'analyse).
  - Si l_m et ε sont considérées comme étant strictement dépendantes de la turbulence et non pas du fluide, il est possible d'écrire, par analyse dimensionnelle:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l_m}$$

  - il nous reste à déterminer l_m.

Modèle k – l (1 équation)

- Fermeture dissipation
  - A ce stade, nous avons 2 inconnues : l_m et ε (les coefficients C_μ ou σ_k du modèle seront données par l'expérience ou l'analyse).
  - Si l_m et ε sont considérées comme étant strictement dépendantes de la turbulence et non pas du fluide, il est possible d'écrire, par analyse dimensionnelle:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l_m}$$

  - il nous reste à déterminer l_m.

Modèle k – l (1 équation)

- Fermeture dissipation
  - A ce stade, nous avons 2 inconnues : l_m et ε (les coefficients C_μ ou σ_k du modèle seront données par l'expérience ou l'analyse).
  - Si l_m et ε sont considérées comme étant strictement dépendantes de la turbulence et non pas du fluide, il est possible d'écrire, par analyse dimensionnelle:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l_m}$$

  - il nous reste à déterminer l_m.

Modèle k – l (1 équation)

Modèle k – l (1 équation)

- l_m reste une inconnue importante.
  - d'où une 2ème équation pour déterminer l_m ou ε
- Il y a de nombreuses possibilités.
  - Kolmogorov 1942

    $\nu_t \sim k/\omega$, $l_m \sim k^{1/2}/\omega$ et $\varepsilon \sim \omega k$ + équation pour ω
  - Rotta 1951

    $\nu_t \sim k^{1/2}/l_m$ et $\varepsilon \sim k^{3/2}/l_m$ + équation pour l_m ou une équation pour kl_m.
  - Zeirman et Wolfshtein 1986

    $\nu_t \sim k\tau$, $l_m \sim k^{1/2}\tau$ et $\varepsilon \sim k/\tau$ + équation pour τ temps caractéristique de la dissipation turbulente.
  - ...

Modèle de Spalart-Allmaras (1-équation)

- La variable transportée est la viscosité turbulente $\tilde{\nu}$. Qui est égale à ν_t sauf près des parois où une correction apparaît.
- L'équation de transport de $\tilde{\nu}$ s'écrit:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{\nu} u_i}{\partial x_i} &= G_\nu \\
&+ \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \left(\nu + \tilde{\nu} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right) \\
&- Y_\nu + S_{\tilde{\nu}}
\end{aligned}
$$

Modèle de Spalart-Allmaras (1-équation)

- La variable transportée est la viscosité turbulente $\tilde{\nu}$. Qui est égale à ν_t sauf près des parois où une correction apparaît.
- L'équation de transport de $\tilde{\nu}$ s'écrit:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{\nu} u_i}{\partial x_i} &= G_\nu \\
&+ \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \left(\nu + \tilde{\nu} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right) \\
&- Y_\nu + S_{\tilde{\nu}}
\end{aligned}
$$

Modèle de Spalart-Allmaras (1-équation)

- Avec G_ν la production de viscosité turbulente, Y_ν la destruction de la viscosité turbulente en zone de proche paroi, $\sigma_{\tilde{\nu}}$ et C_{b2} sont des constantes, $S_{\tilde{\nu}}$ est un terme source définit par l'utilisateur.
- Obtention de la viscosité turbulente : $\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$
- f_{v1} est une fonction d'amortissement de la viscosité turbulente en zone de proche paroi. En posant $\chi = \tilde{\nu}/\nu$:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}$$

- En zone de proche paroi, la viscosité laminaire devient prédominante. C_{v1} est une constante du modèle.

Modèle de Spalart-Allmaras (1-équation)

- Avec G_ν la production de viscosité turbulente, Y_ν la destruction de la viscosité turbulente en zone de proche paroi, $\sigma_{\tilde{\nu}}$ et C_{b2} sont des constantes, $S_{\tilde{\nu}}$ est un terme source définit par l'utilisateur.
- Obtention de la viscosité turbulente : $\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$
- f_{v1} est une fonction d'amortissement de la viscosité turbulente en zone de proche paroi. En posant $\chi = \tilde{\nu}/\nu$:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}$$

- En zone de proche paroi, la viscosité laminaire devient prédominante. C_{v1} est une constante du modèle.

Modèle de Spalart-Allmaras (1-équation)

- Modélisation de la production turbulente: $G_\nu = C_{b1}\rho\tilde{S}\tilde{\nu}$
- avec

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}$$

- Nous avons:

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

- et

$$S = \mid \Omega_{ij} \mid + 2\min\left(0, \mid S_{ij} \mid - \mid \Omega_{ij} \mid\right)$$

avec $\mid \Omega_{ij} \mid = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ et $\mid S_{ij} \mid = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$. Sachant que $\Omega_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)/2$ et $S_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)/2$

6.1 Réduction des fermetures au second ordre :

La notion de viscosité turbulente

$$\nu_t = \frac{((1-\gamma_1)\overline{v'^2} + \gamma_2 k - \gamma_3 \overline{u'^2})}{C_1 \dfrac{\varepsilon}{k}} \approx C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Là encore il faut donc deux échelles caractéristiques de la turbulence pour exprimer la viscosité turbulente : Ces deux échelles représentent ici deux champs scalaires (k et ε) et doivent être déterminées en résolvant deux équations de transport.

Les fermetures à deux équations de transport représentent tout une classe de modèles de turbulence dits « à deux équations » : modèle (k-ε), modèle (k-ω), modèle (k-τ), modèle (k-l).

Le modèle (k-ε) est sans doute le plus utilisé ; ce modèle détermine la viscosité turbulente en résolvant les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente k et de son taux de dissipation. une échelle caractéristique des fluctuations de vitesse   et une échelle caractéristique de la taille des tourbillons porteurs d'énergie.

6.1 Réduction des fermetures au second ordre :

La notion de concept de viscosité turbulente

ECT et taux de dissipation de l'ECT:

L'expression tensorielle du modèle de viscosité turbulente pour le fluide incompressible s'écrit :

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$

ν_t est la viscosité turbulente.

En écoulement homogène avec un cisaillement constant $S = \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$, l'équation de transport du frottement turbulent exprime à l'équilibre un bilan production-redistribution:

$$\frac{D}{Dt}(-\overline{u' v'}) = -C_1 \frac{\varepsilon}{k}(-\overline{u' v'}) + ((1-\gamma_1)\overline{v'^2} + \gamma_2 k - \gamma_3 \overline{u'^2})S = 0$$

Cette équation fournit une expression explicite du cisaillement turbulent $\overline{u' v'}$ sous la forme :

4.4. Équation de l'énergie cinétique de turbulence

4.4.2 Équation de l'ECT dans le jet plan ou la zone de mélange

L'effet de la viscosité n'est présent que dans le terme de dissipation turbulente qui doit s'adapter aux échelles caractéristiques des tourbillons les plus énergétiques ; l'estimation "non-visqueuse de la dissipation confirme, qu'en turbulence développée, la transformation irréversible d'ECT en énergie interne met en jeu une échelle plus petite que l'échelle l des gros tourbillons . En effet, en estimant le taux de dissipation à partir de sa définition :

λ_T

$$\varepsilon = O(\nu \frac{u^2}{\lambda_T^2})$$

Paramétrisation statistique de la turbulence

Retour sur les échelles de turbulence

Echelles de Kolmogorov

$$30\nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \propto \frac{\overline{u'^3}}{\Lambda} = \frac{\upsilon^3}{\eta}$$

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \upsilon = (\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \qquad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\eta}{\Lambda} = R_\Lambda^{-\frac{3}{4}} = 30^{\frac{3}{4}} R_\lambda^{-\frac{3}{2}}$$

Echelles de Taylor

$$\frac{\eta}{\lambda} = 30^{-\frac{1}{2}} R_\Lambda^{-\frac{1}{4}} = 30^{-\frac{1}{4}} R_\lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Macro $\Lambda \propto \ell \Rightarrow R_\Lambda = \frac{\Lambda u'}{\nu}$

Micro $\lambda \Rightarrow R_\lambda = \frac{\lambda u'}{\nu}$

$$\frac{\upsilon}{u'} = R_\Lambda^{-\frac{1}{4}} = 30^{\frac{1}{4}} R_\lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{1}{30}\frac{u'\lambda}{\nu} = \frac{R_\lambda}{30} \Rightarrow R_\Lambda = \frac{1}{30} R_\lambda^2$$

$$\frac{\tau}{T_e} = R_\Lambda^{-\frac{1}{2}} = 30^{\frac{1}{2}} R_\lambda^{-3}$$

6.1 Modèles à viscosité turbulente

c) Terme de corrélation pression déformation :

Modèle de Launder Simplifié

$$\Phi_{ij}^{(L)} = -\gamma_1 (\Pi_{ij} - \frac{2}{3}\Pi\delta_{ij})$$

$$\Pi_{ij} = -(\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}) \qquad \Pi = \mathrm{trace}(\Pi_{ij})$$

Là aussi, on peut vérifier que le tenseur est symétrique à trace nulle et qu'en l'absence de contraintes extérieures imposées par le champ moyen, cette modélisation conduit à une solution isotrope de la turbulence.

6.1 Modèles à viscosité turbulente

c) Terme de corrélation pression déformation :

Modèle de Launder Simplifié

$$\Phi_{ij}^{(L)} = -\gamma_1 (\Pi_{ij} - \frac{2}{3}\Pi\delta_{ij})$$

$$\Pi_{ij} = -(\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}) \qquad \Pi = \mathrm{trace}(\Pi_{ij})$$

Là aussi, on peut vérifier que le tenseur est symétrique à trace nulle et qu'en l'absence de contraintes extérieures imposées par le champ moyen, cette modélisation conduit à une solution isotrope de la turbulence.

5.1 Position du Problème

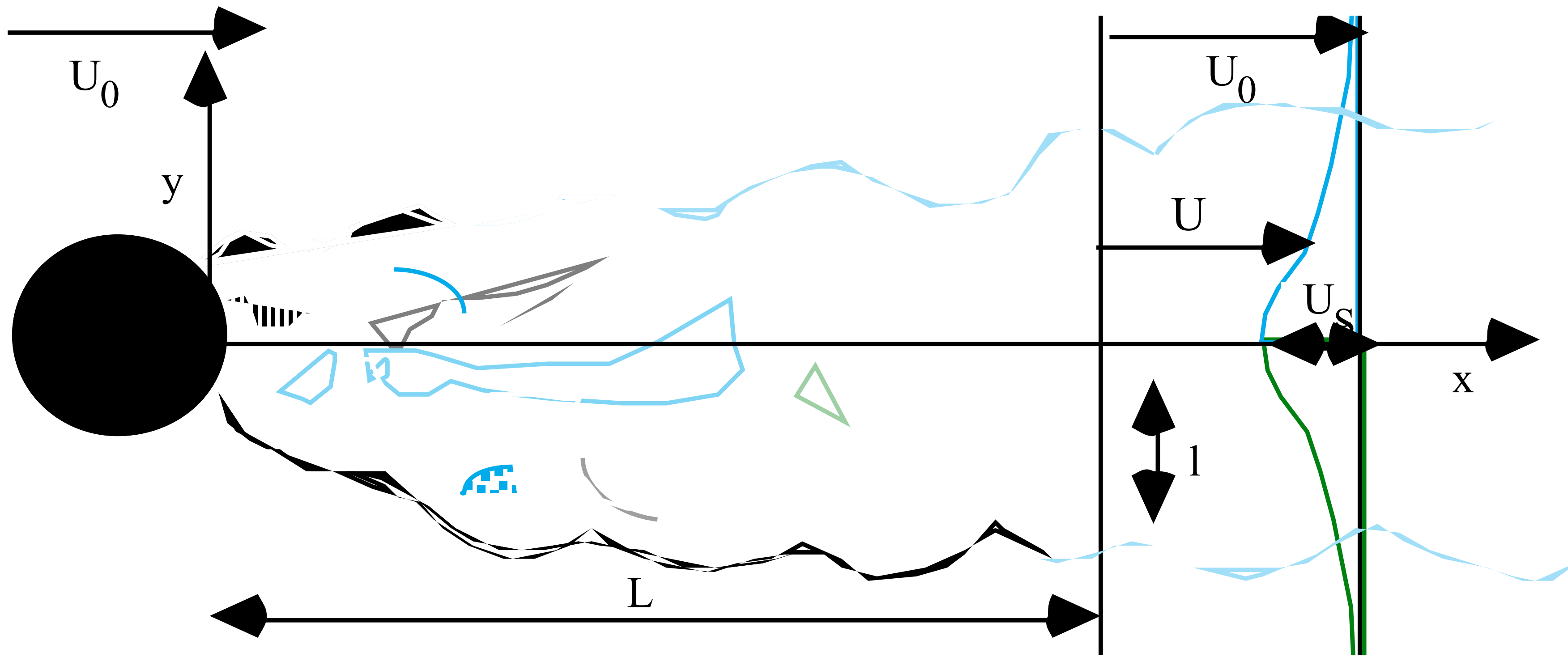


Figure 1. Sillage lointain, plan, en aval d'un obstacle

5.1 Position du Problème

Dans le cas du sillage deux échelles de vitesse caractéristiques du champ de vitesse moyenne U sont apparentes : il s'agit de la vitesse U_0 de l'écoulement non-perturbé à l'extérieur du sillage et du déficit de vitesse **.**

$$U_S = U_0 - U_{\text{axe du sillage}}$$

Le déficit de vitesse décroît suivant ox et il caractérise les variations de la vitesse U à travers le sillage. On pose les hypothèses d'ordre de grandeur suivantes :

$$U = O(U_0) \text{ et } \partial U = O(U_S) \qquad (1)$$

Dans les cas du jet et de la zone de mélange il suffit d'une seule échelle de vitesse U_S pour caractériser la vitesse U et ses variations à travers la couche cisaillée. Pour caractériser la vitesse moyenne U et ses variations on pose :

5.1 Position du Problème

Pour caractériser la vitesse moyenne U et ses variations on pose :

$$U = O(U_1) \;\text{ et }\; \partial U = O(U_S) \;\text{ avec }\; \begin{cases} U_1 = U_0 \;\text{ pour le sillage} \\ U_1 = U_S \;\text{ pour le jet et la zone de mélange} \end{cases} \qquad (2)$$

Pour caractériser les fluctuations turbulentes de vitesse on introduit une vitesse u et on évalue l'ordre de grandeur des composantes du tenseur des corrélations des fluctuations de vitesse par :

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & 0 \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{w'^2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}(u^2) \qquad (3)$$

Notons enfin que nous considérons ici des situations de turbulence développée caractérisées par de grandes valeurs du nombre de Reynolds $R_{el} = \dfrac{ul}{\nu}$

dans ces conditions u et l caractérisent en vitesse et taille les tourbillons les plus énergétiques et contrôlent comme nous allons le voir le transport diffusif de quantité de mouvement.

$$\frac{l}{L} \to 0 \;\text{ et }\; R_{el} = \frac{ul}{\nu} \to \infty$$

5.1 Position du Problème

Nous considérons ici des situations de turbulence développée caractérisées par de grandes valeurs du nombre de Reynolds

$$R_{el} = \frac{ul}{\nu}$$

u et l caractérisent en vitesse et taille les tourbillons les plus énergétiques et contrôlent comme nous allons le voir le transport diffusif de quantité de mouvement.

Le premier stade de l'analyse du problème est d'examiner quelles sont les formes asymptotiques des équations du mouvement moyen puis de l'énergie cinétique turbulente lorsque

$$\frac{l}{L} \to 0 \quad \text{et} \quad R_{el} = \frac{ul}{\nu} \to \infty \tag{3}$$

5.1 Position du Problème

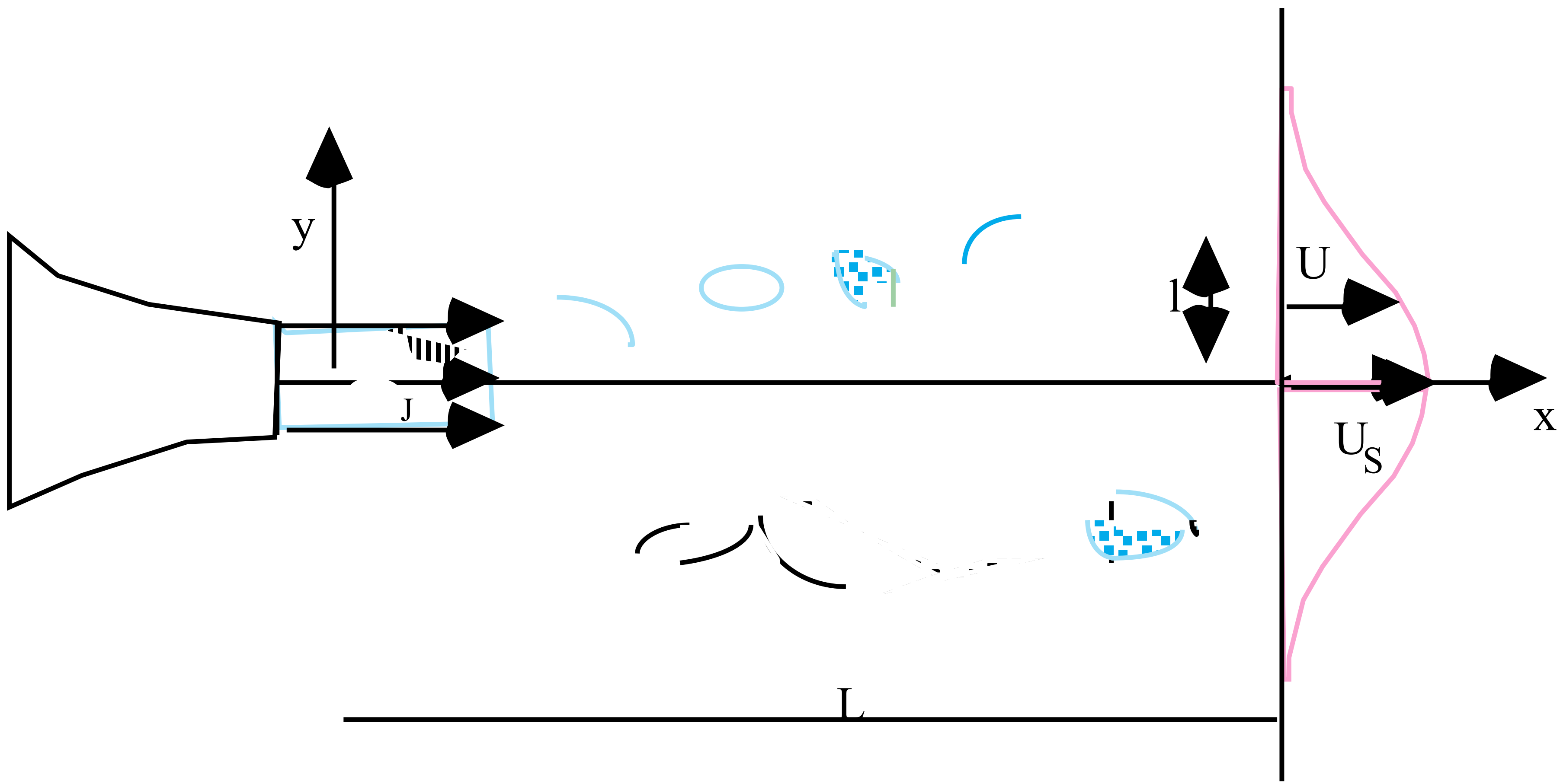


Figure 2 Jet plan dans le même fluide au repos.

5.1 Position du Problème

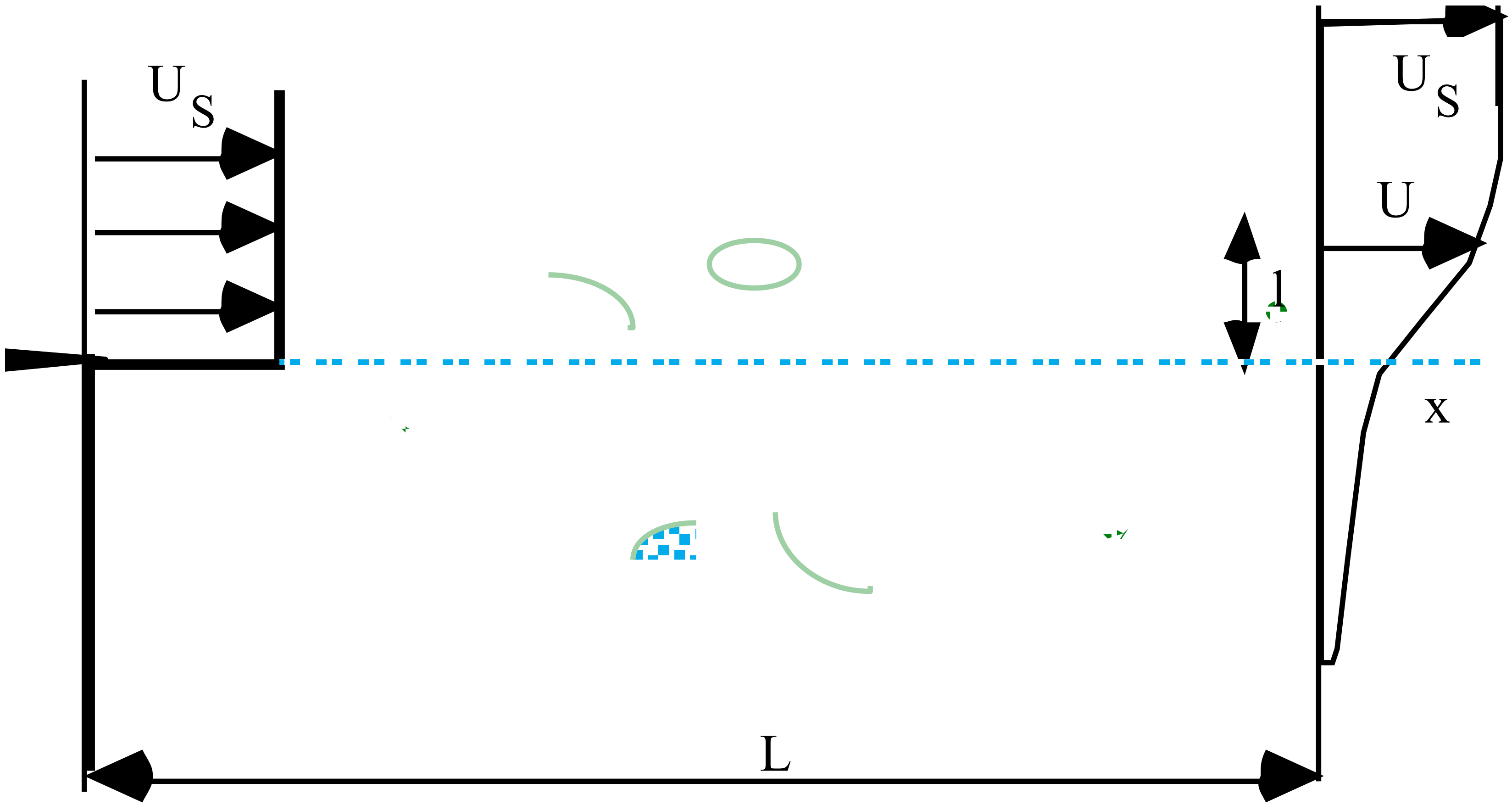


Figure 3 Zone de mélange entre un fluide en mouvement uniforme

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen quand

$$\frac{l}{L} \to 0 \quad \text{et} \quad R_{el} = \frac{ul}{\nu} \to \infty$$

5. 2.1 Équations de Reynolds en écoulement plan

En écoulement plan et stationnaire en moyenne les équations de Reynolds exprimant le bilan moyen de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \qquad (5)$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \qquad (6)$$

$P = p + \rho g z$ est la pression moyenne "modifiée", où p est la pression moyenne et l'axe des z est orientée suivant la verticale ascendante. Les conditions aux limites du problème expriment les conditions de raccordement du champ de vitesse moyenne aux conditions imposées par l'écoulement externe et le fait que l'écoulement externe est non-turbulent.

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

5. 2.2 Forme asymptotique des équations de Reynolds

$$\frac{l}{L} \to 0 \quad \text{et} \quad R_{el} = \frac{ul}{\nu} \to \infty$$

$$U = O(U_1), \ \frac{\partial U}{\partial x} = O(\frac{U_S}{L}), \ \frac{\partial U}{\partial y} = O(\frac{U_S}{l}), \ \overline{u'^2} = O(\overline{v'^2}) = O(\overline{u'v'}) = O(u^2) \quad (7)$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = O(\frac{U_S}{L}) \ \text{et} \ \frac{\partial V}{\partial y} = O(\frac{\partial U}{\partial x}) = O(\frac{U_S}{L}) = O(\frac{V_0}{l}) \quad (8)$$

$$V_0 = O(U_S \frac{l}{L})$$

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

Équation de quantité de mouvement suivant ox

$$\left.\begin{array}{ll}(a)\ U\dfrac{\partial U}{\partial x}=O(U_1\dfrac{U_S}{L}) & =O(\dfrac{U_1}{u}\dfrac{U_S}{u}\dfrac{1}{L})\ \dfrac{u^2}{1}\\ (b)\ V\dfrac{\partial U}{\partial y}=O(U_S\dfrac{1}{L}\dfrac{U_S}{1}) & =O(\dfrac{U_S^2}{u^2}\dfrac{1}{L})\ \dfrac{u^2}{1}\end{array}\right\}(b)\le(a)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(c)\ -\dfrac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}=O(\dfrac{u^2}{L}) & =O(\dfrac{1}{L})\ \dfrac{u^2}{1}\\ (d)\ -\dfrac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}=O(\dfrac{u^2}{1}) & =O(1)\ \dfrac{u^2}{1}\end{array}\right\}(c)<<(d)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(e)\ \nu\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}=O(\nu\dfrac{U_S}{L^2})=O\left[\dfrac{U_S}{u}(\dfrac{1}{L})^2R_{el}^{-1}\right] & \dfrac{u^2}{1}\\ (f)\ \nu\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}=O(\nu\dfrac{U_S}{l^2})=O\left[\dfrac{U_S}{u}R_{el}^{-1}\right] & \dfrac{u^2}{1}\end{array}\right\}(e)<<(f)$$

$$(g)\ -\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial x}=O(?)$$

<u>Moindre dégénérescence</u>

$$\text{si}\ \frac{U_1}{u}\frac{U_S}{u}\frac{1}{L}=O(1)\ \text{alors}\ :$$

$$\text{avec}\ (b)=O(a)\ \text{si}\ U_1=U_S$$

(jet ou zone de mélange)

$$\text{ou}\ (b)<<(a)\ \text{si}\ U_1=U_0>>U_S$$

(sillage)

$$\text{si}\ \frac{U_S}{u}R_{el}^{-1}\to 0\ \text{quand}\ R_{el}^{-1}\to 0,$$

$$\text{alors}\ :\ (e)<<(f)<<(a)$$

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l’écoulement moyen

Équation de quantité de mouvement suivant ox

L'équation de quantité de mouvement projetée suivant ox dégénère sous la forme :

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \qquad (9)$$

à conditions de vérifier les relations d'échelles suivantes :

$$\frac{U_1}{u}\frac{U_S}{u}\frac{1}{L} = O(1) \text{ et } \frac{U_S}{u}R_{el}^{-1} \to 0 \text{ quand } R_{el}^{-1} \to 0, \qquad (10)$$

On note que dans le premier membre de l'équation (10), les deux contributions (a) et (b) de la dérivée advective de la vitesse sont du même ordre dans les cas du jet et de la zone de mélange alors que ce n'est plus le cas pour le sillage où subsiste la seule contribution (a).

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

Équation de quantité de mouvement suivant oy

$$(a')\quad U\frac{\partial V}{\partial x} = O\left(U_1\frac{U_S}{L}\frac{1}{L}\right) = O\left[\frac{U_1}{u}\frac{U_S}{u}\left(\frac{1}{L}\right)^2\right]\frac{u^2}{1} \qquad = O\left[\frac{1}{L}\right]\frac{u^2}{1}$$

$$(b')\quad V\frac{\partial V}{\partial y} = O\left(U_S\frac{1}{L}\frac{U_S}{1}\frac{1}{L}\right) = O\left[\frac{U_S^2}{u^2}\left(\frac{1}{L}\right)^2\right]\frac{u^2}{1} = O\left[\frac{U_S}{U_1}\frac{1}{L}\right]\frac{u^2}{1}$$

$$(c')\quad -\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x} = O\left(\frac{u^2}{L}\right) = O\left(\frac{1}{L}\right)\frac{u^2}{1}$$

$$(d')\quad -\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} = O\left(\frac{u^2}{1}\right) = O(1)\frac{u^2}{1}$$

$$(e')\quad \nu\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = O\left(\nu\frac{U_S}{L^2}\frac{1}{L}\right) = O\left[\frac{U_S}{u}R_{el}^{-1}\left(\frac{1}{L}\right)^3\right]\frac{u^2}{1}$$

$$(f')\quad \nu\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = O\left(\nu\frac{U_S}{1^2}\frac{1}{L}\right) \qquad = O\left[\frac{U_S}{u}R_{el}^{-1}\frac{1}{L}\right]\frac{u^2}{1}$$

$$(g')\quad -\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial y} = O(?)$$

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

Équation de quantité de mouvement suivant oy

Dans l'équation (6) la condition de moindre dégénérescence impose que le terme de pression (g') soit du même ordre que le terme (d') :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{\rho}+\overline{v'^2}\right)=0 \qquad (11)$$

L'équation (11) permet d'exprimer le gradient de pression suivant ox sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{P}{\rho}=\frac{\partial}{\partial x}\overline{v'^2}=O\left(\frac{1}{L}\right)\frac{u^2}{1} \qquad (12)$$

Le résultat (12) montre que dans le cadre des approximations des ordres de grandeur de l'équation (5), le gradient longitudinal de pression est négligeable dans l'équation (9).

En conclusion, les hypothèses de couche cisaillée mince conduisent à exprimer les équations de Reynolds sous la forme présentée dans le tableau 1.

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 && (13)\\
&U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} && (14)\\
&\frac{P}{\rho} + \overline{v'^2} = \frac{P_e}{\rho} = \text{Constante} && (15)
\end{aligned}}$$

Avec les relations :

$$\frac{U_1}{u}\frac{U_S}{u}\frac{1}{L} = O(1) \qquad (16)$$

et,

$$\frac{U_S}{u} R_{el}^{-1} \rightarrow 0 \qquad (17)$$

Pe est l'écart à la pression hydrostatique hors de la couche cisaillée)

Équations de Reynolds pour les couches minces, cisaillées, libres quand

$$\frac{1}{L} \rightarrow 0 \ \text{ et } \ R_{el}^{-1} \rightarrow 0,$$

Examinons comment les relations (16) et (17) sont réalisables dans les configurations d'écoulements cisaillées présentées au début de ce chapitre.

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

Sillage lointain

$$\frac{U_1}{u}\frac{U_S}{u}\frac{l}{L} = O(1) \qquad (16)$$

$$\frac{U_S}{u} R_{el}^{-1} \to 0 \qquad (17)$$

Dans ce cas la vitesse U_1 est la vitesse U_0 à l'extérieur du sillage qui est beaucoup plus grande, loin de l'obstacle, que le déficit de vitesse U_S sur l'axe du sillage, $U_0 >> U_S$; la condition (16) peut être réalisée en posant :

$$\frac{u}{U_S} = O(1) \qquad (18a)$$

ce qui donne l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse dans le sillage et du déficit de vitesse :

$$\frac{u}{U_0} = O(\frac{U_S}{U_0}) = O(\frac{l}{L}) \qquad (18b)$$

La condition (17) est vérifiée puisque

$$R_{el}^{-1} \to 0$$

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

Sillage lointain

Notons aussi que dans (14) le terme advectif peur être linéarisé ; en effet avec les relations (18-a) et (18-b) l'évaluation de l'ordre de grandeur des termes advectifs conduit aux résultats suivants :

$$U\frac{\partial U}{\partial x} = O(\frac{U_1}{u}\frac{U_S}{u}\frac{1}{L})\ \frac{u^2}{l} = O(1)\ \frac{u^2}{l} \quad \text{et} \quad V\frac{\partial U}{\partial y} = O(\frac{U_S^2}{u^2}\frac{1}{L})\ \frac{u^2}{l} = O(\frac{1}{L})\ \frac{u^2}{l}$$

$$\text{soit} \quad U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = U\frac{\partial U}{\partial x}\left[1 + O(\frac{1}{L})\right]$$

Notons enfin que $\quad U - U_0 = O(U_S) = O(\frac{1}{L})U_0$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = U\frac{\partial U}{\partial x}(1 + O(\frac{1}{L})) = U_0\frac{\partial U}{\partial x}(1 + O(\frac{1}{L}))$$

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

Sillage lointain

Notons aussi que dans (14) le terme advectif peur être linéarisé ; en effet avec les relations (18-a) et (18-b) l'évaluation de l'ordre de grandeur des termes advectifs conduit aux résultats suivants :

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0$$

$$U_0\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \qquad \frac{u}{U_S}=O(1)$$

$$\frac{P}{\rho}+\overline{v'^2}=\frac{P_e}{\rho}=\text{Constante} \qquad \frac{u}{U_0}=O(\frac{1}{L})$$

Équations du mouvement moyen dans le sillage $\quad$ quand $\dfrac{1}{L}\to 0$ et $R_{el}^{-1}\to 0$

5. 2. Bilan de quantité de mouvement de l'écoulement moyen

Jet et zone de mélange

$$\frac{U_1}{u}\frac{U_S}{u}\frac{1}{L} = O(1) \qquad (16)$$

$$\frac{U_S}{u}R_{el}^{-1} \to 0 \qquad (17)$$

Dans ces deux cas $U_1 = U_S$ et la condition (16) conduit au résultat suivant :

$$\frac{u}{U_S} = O\left(\frac{1}{L}\right)^{0.5} \qquad (19\text{-a})$$

La condition (17) est réalisée si :

$$R_{el}^{-1} << \left(\frac{1}{L}\right)^{0.5} \qquad (19\text{-b})$$

5.3. Bilan intégral de quantité de mouvement

Équation intégrale de quantité de mouvement pour le jet et le sillage

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 && (13) \\ &U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} && (14) \\ &\frac{P}{\rho} + \overline{v'^2} = \frac{P_e}{\rho} = \text{Constante} && (15) \end{aligned}}$$

Montrer que pour le jet et le sillage on a :

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} U(U - U_0)dy = M_0 = \text{Constante}$$

Qu'en est t-il de la zone de mélange

Calculer M_0 pour le jet et pour le sillage

5.3. Bilan intégral de quantité de mouvement

Équation intégrale de quantité de mouvement pour le jet et le sillage

L'équation (15) peut s'écrire avec U_0 constant :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U(U-U_0)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[V(U-U_0)\right]+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}=0 \qquad (20)$$

En intégrant (20) par rapport à y sur

$$y \in \left[-\infty,+\infty\right]$$

On obtient l'équation :

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} U(U-U_0)dy = \left[V(U-U_0)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \underbrace{\left[\overline{u'v'}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} \qquad (21)$$

Pour le sillage et le jet (U_0 =0) le premier terme du second membre est nul (ce qui n'est pas vrai pour la zone de mélange) et, dans tous les cas le second terme est nul (le cisaillement est nul à l'extérieur de la couche cisaillée. Ainsi, pour le sillage et le jet peut-on écrire à chaque abscisse x :

$$\rho\int_{-\infty}^{+\infty} U(U-U_0)dy = M_0 = \text{Constante} \qquad (22)$$

5.3. Bilan intégral de quantité de mouvement

Cas du jet

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} U(U - U_0)dy = M_0 = \text{Constante}$$

Dans le cas du jet $U_0 = 0$ et le bilan (22) donne dans la section d'injection :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho U^2 dy = M_0 = \int_{S_J} \rho U_J^2 dy$$

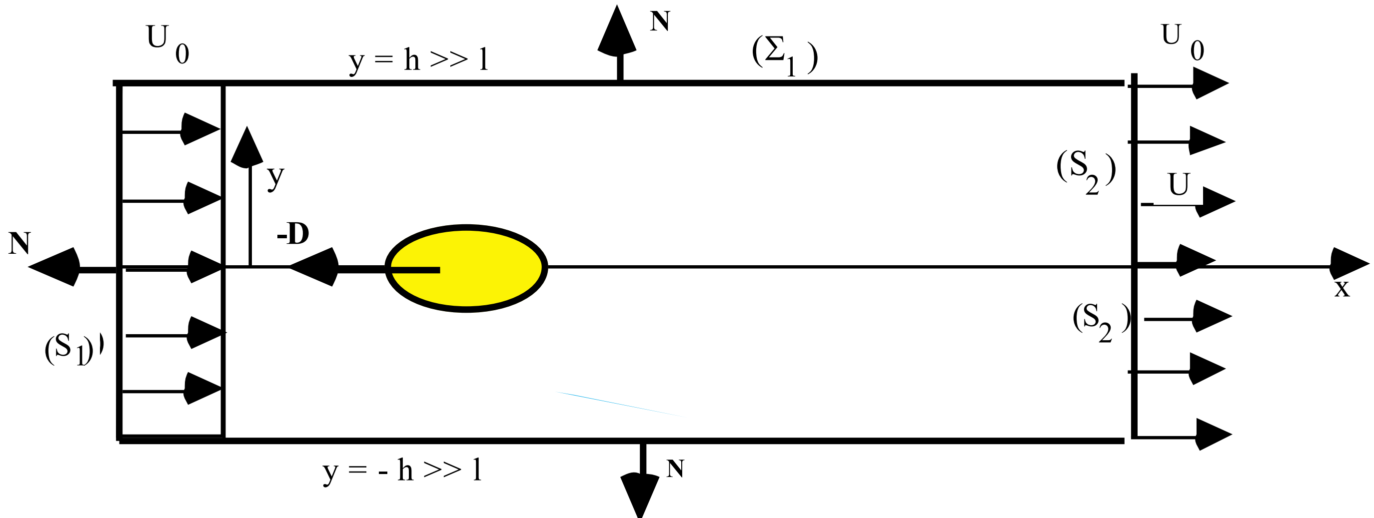
C'est le flux de quantité de mouvement dans la section de sortie de la buse.

5.3. Bilan intégral de quantité de mouvement

Cas du Sillage

La force de traînée s'écrit :

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho U_0^2 d$$



C_D est le coefficient de traînée de l'obstacle de dimension caractéristique d placé dans un écoulement uniforme de vitesse U_0.

$$\vec{P} + \vec{R} = \iiint_{V_C} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dv + \iint_{S_C} (\rho \vec{V}) \vec{V} . \vec{n} \, dS$$

$$\iint_{S_1+S_2+S_p} (\rho \vec{V}) \vec{V} . \vec{n} \, dS = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(U) U dy - U_O \int_{-\infty}^{\infty} \rho(U) dy = R = M_0$$

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} U(U - U_0) dy = M_0 = \text{Constante}$$

$$D = -R$$

$$\rho U_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U}{U_0}\left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy = D$$

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho U_0^2 d = \rho U_0^2 \delta_2$$

$$\delta_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U}{U_0}\left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy$$

$$\delta_2 = C_D \frac{d}{2}$$

5.3. Bilan intégral de quantité de mouvement

Cas du Sillage

Pour le sillage, $U_0 \neq 0$, l'intégrale (22) représente le flux de "déficit de quantité de mouvement" , c'est à dire la quantité de mouvement absorbée par l'obstacle qui produit le sillage.

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} U(U - U_0)dy = M_0 = \text{Constante} \qquad (22)$$

La constante M_0 peut être exprimée en fonction de la force de traînée D par unité de longueur d'envergure exercée sur l'obstacle : Ce résultat s'obtient à partir d'un bilan global de masse et de quantité de mouvement pour le volume de référence représenté sur la figure.

$\int_{S_J} \rho U_J^2 dy$ est le flux de quantité de mouvement dans la section de sortie de la buse.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho U^2 dy = M_0 = \int_{S_J} \rho U_J^2 dy \qquad (23)$$

5.3. Bilan intégral de quantité de mouvement

Commentaires sur les résultats obtenus

Soulignons quelques faits marquant de l'analyse précédente :

• Quand le bilan suivant ox de quantité de mouvement moyenne traduit un équilibre entre l'advection et la diffusion turbulente par le mouvement fluctuant transversal (représenté par la contrainte de cisaillement). L'effet de la diffusion moléculaire de quantité de mouvement (contrainte visqueuse de cisaillement) est négligeable si le nombre de Reynolds est suffisamment grand (dans le sillage et dans le jet ou la zone de mélange).

• Le problème de fermeture des équations du champ moyen de vitesse porte essentiellement sur la contrainte turbulente de cisaillement ; la connaissance de permettrait de déterminer la pression modifiée dans la couche cisaillée, où , mais c'est sans intérêt pour le bilan longitudinal de quantité de mouvement puisque .

• Notons enfin que les relations (18) et (19) traduisent l'adaptation, lors du développement de la couche cisaillée, des échelles u et l caractéristiques des tourbillons les plus énergétiques au champ local de vitesse moyenne.

5.5. Équation de l'énergie cinétique de turbulence

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}\rho\overline{u_i'u_i'})}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial(\frac{1}{2}\rho\overline{u_i'u_i'})}{\partial x_j}=-\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}-\frac{\partial(\frac{1}{2}\rho\overline{u_i'u_i'u_j'})}{\partial x_j}-\frac{\partial\overline{p'u_j'}}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2(\frac{1}{2}\rho\overline{u_i'u_i'})}{\partial x_j\partial x_j}-\mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$

Variation temporelle et transport convectif | Production | Diffusion | Dissipation

$$\underbrace{U\frac{\partial k}{\partial x}+V\frac{\partial k}{\partial y}}_{\text{Advection : A}}=\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'\tilde{k}}+\rho^{-1}\overline{p'u'}-\nu\frac{\partial k}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}}+\rho^{-1}\overline{p'v'}-\nu\frac{\partial k}{\partial y})}_{\text{Diffusion : }D_x+D_y}$$

$$+\underbrace{-\overline{u'v'}(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x})-\overline{u'^2}\frac{\partial U}{\partial x}-\overline{v'^2}\frac{\partial V}{\partial y}}_{\text{Production : }P_R}-\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipation par le mouvement turbulent}}$$

Exercice :

Équation intégrale de quantité de mouvement pour le jet et le sillage

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad (13)$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \qquad (14)$$

$$\frac{P}{\rho} + \overline{v'^2} = \frac{P_e}{\rho} = \mathrm{Cons\,tan\,te} \qquad (15)$$

$$\frac{d}{dy}\overline{v'w'} = 0$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & 0 \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{w'^2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}(u^2)$$

5.5. Équation de l'énergie cinétique de turbulence

$$\underbrace{U\frac{\partial k}{\partial x}+V\frac{\partial k}{\partial y}}_{\text{Advection : A}}=\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'\tilde{k}}+\rho^{-1}\overline{p'u'}-\nu\frac{\partial k}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}}+\rho^{-1}\overline{p'v'}-\nu\frac{\partial k}{\partial y})}_{\text{Diffusion : }D_x+D_y}$$

$$+\underbrace{-\overline{u'v'}(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x})-\overline{u'^2}\frac{\partial U}{\partial x}-\overline{v'^2}\frac{\partial V}{\partial y}}_{\text{Production : }P_R}-\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipation par le mouvement turbulent}}$$

Développons l'analyse asymptotique de l'équation (25) quand $\frac{1}{L}\to 0$ et $R_{el}=\frac{ul}{\nu}\to\infty$

Rappelons les résultats:

$$U=O(U_1)\ \text{ et }\ \partial U=O(U_S)\ \text{ avec }\begin{cases}U_1=U_0 & \text{pour le sillage}\\ U_1=U_S & \text{pour le jet et la zone de mélange}\end{cases}$$

$$V_0=O(U_S\frac{1}{L})$$

$$\frac{u}{U_S}=O(1)\qquad \frac{u}{U_0}=O(\frac{U_S}{U_0})=O(\frac{1}{L})$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\overline{u'^2} & \overline{u'v'} & 0\\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & 0\\ 0 & 0 & \overline{w'^2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}(u^2)$$

5.5. Équation de l'énergie cinétique de turbulence

5.5.1 Équation de l'ECT dans le sillage lointain

Pour le sillage, la moindre dégénérescence des équations de Reynolds a conduit aux relations entre échelles :

$$\frac{u}{U_S} = O(1),\ \frac{u}{U_0} = O(\frac{1}{L}),\ R_{el}^{-1} << 1$$

Advection :

$$A = U_0 \frac{\partial k}{\partial x}\left[1 + O(\frac{1}{L})\right] = \frac{u^3}{1} O(1)\left[1 + O(\frac{1}{L})\right] \qquad (26\text{-a})$$

Production :

$$P_R = \begin{cases} -\overline{u'v'}\dfrac{\partial U}{\partial y}\left[1 + O(\dfrac{1}{L})\right] = \dfrac{u^3}{1} O(1)\left[1 + O(\dfrac{1}{L})\right] \\ -(\overline{u'^2} - \overline{v'^2})\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{u^3}{1} O(\dfrac{1}{L}) \end{cases} \qquad (26\text{-b})$$

5.5. Équation de l’énergie cinétique de turbulence

5.5.1 Équation de l'ECT dans le sillage lointain

Diffusion :

$$\begin{cases} D_y = -\dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}} + \rho^{-1}\overline{p'v'})\left[1 + O(R_{el}^{-1})\right] = \dfrac{u^3}{l}O(1)\left[1 + O(R_{el}^{-1})\right] \\ D_x = -\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{u'\tilde{k}} + \rho^{-1}\overline{p'u'})\left[1 + O(\dfrac{l}{L}R_{el}^{-1})\right] = \dfrac{u^3}{l}O(\dfrac{l}{L})\left[1 + O(\dfrac{l}{L}R_{el}^{-1})\right] \end{cases} \qquad (26\text{-c})$$

Dissipation :

Le principe de moindre dégénérescence (confirmé d'ailleurs par l'observation des écoulements turbulents) impose que le terme de dissipation soit présent dans le bilan d'énergie cinétique turbulente

$$\varepsilon = \frac{u^3}{l}O(1) \qquad (26\text{-d})$$

Équation de l'ECT

$$U_0\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}} + \rho^{-1}\overline{p'v'}) - \overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon \qquad (27)$$

5.5. Équation de l'énergie cinétique de turbulence

5.5.2 Équation de l'ECT dans le le jet plan ou la zone de mélange

L'analyse de l'équation de l'ECT doit être développée en tenant compte des relations entre échelles valables établies pour ces deux configurations d'écoulements : **:**

$$\frac{u}{U_S} = O\left[\left(\frac{1}{L}\right)^{0.5} \right], R_{el}^{-1} \ll \left(\frac{1}{L}\right)^{0.5}$$

Advection :

$$A = U\frac{\partial k}{\partial x} + V\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{u^3}{1}\left[O\left(\frac{1}{L}\right)^{0.5} \right] \qquad (28\text{-a})$$

Production :

$$\begin{cases} -\overline{u'v'}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) = -\overline{u'v'}\dfrac{\partial U}{\partial y}\left[1 + O\left(\dfrac{1}{L}\right)^2 \right] = \dfrac{u^3}{1} O\left(\dfrac{1}{L}\right)^{-0.5}\left[1 + O\left(\dfrac{1}{L}\right)^2 \right] \\ -\left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2}\right)\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{u^3}{1} O\left[\left(\dfrac{1}{L}\right)\left(\dfrac{1}{L}\right)^{-0.5} \right] = \dfrac{u^3}{1} O\left[\left(\dfrac{1}{L}\right)^{0.5} \right] \end{cases} \qquad (28\text{-b})$$

5.5. Équation de l'énergie cinétique de turbulence

5.5.2 Équation de l'ECT dans le jet plan ou la zone de mélange

Diffusion :

$$\begin{cases} D_y = -\dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}} + \rho^{-1}\overline{p'v'})\left[1 + O(R_{el}^{-1})\right] = \dfrac{u^3}{l}O(1)\left[1 + O(R_{el}^{-1})\right] \\ D_x = -\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{u'\tilde{k}} + \rho^{-1}\overline{p'u'})\left[1 + O(\dfrac{1}{L}R_{el}^{-1})\right] = \dfrac{u^3}{l}O(\dfrac{1}{L})\left[1 + O(\dfrac{1}{L}R_{el}^{-1})\right] \end{cases} \qquad (28\text{-}c)$$

Dissipation :

Le principe de moindre dégénérescence (confirmé d'ailleurs par l'observation des écoulements turbulents) impose que le terme de dissipation soit présent dans le bilan d'énergie cinétique turbulente

$$\varepsilon = \frac{u^3}{l}O\left[(\frac{1}{L})^{-0.5}\right] \qquad (28\text{-d})$$

Ces résultats indiquent que l'équation de l'ECT devrait dégénérer en un équilibre production-dissipation

5.5. Équation de l'énergie cinétique de turbulence

5.5.2 Équation de l'ECT dans le jet plan ou la zone de mélange

Ces résultats indiquent que l'équation de l'ECT devrait dégénérer en un équilibre production-dissipation ;

sur l'axe du jet :

le terme de production $-\overline{u'v'}\dfrac{\partial U}{\partial y}$

et le terme de diffusion $-\dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}}+\rho^{-1}\overline{p'v'})$

s'annulent par raison de symétrie, alors que le terme d'advection $U\dfrac{\partial k}{\partial x}$

pour que les simplifications du bilan d'ECT soient acceptables sur toute l'épaisseur de la couche cisaillée, il faut conserver les termes jusqu'à l'ordre : $(\dfrac{1}{L})^{0.5}$

Dans ces conditions, l'équation de l'énergie cinétique turbulente dans le jet ou la zone de mélange devient :

$$U\frac{\partial k}{\partial x}+V\frac{\partial k}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}}+\rho^{-1}\overline{p'v'})-\overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y}-(\overline{u'^2}-\overline{v'^2})\frac{\partial U}{\partial x}-\varepsilon \quad (29)$$

Sillage lointain en aval d'un obstacle dans un écoulement de vitesse U_0.

Equations du champ de vitesse moyenne

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad U_0 \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

Relations d'échelles

$$\frac{u}{U_S} = O(1) \qquad \frac{u}{U_0} = O(\frac{1}{L})$$

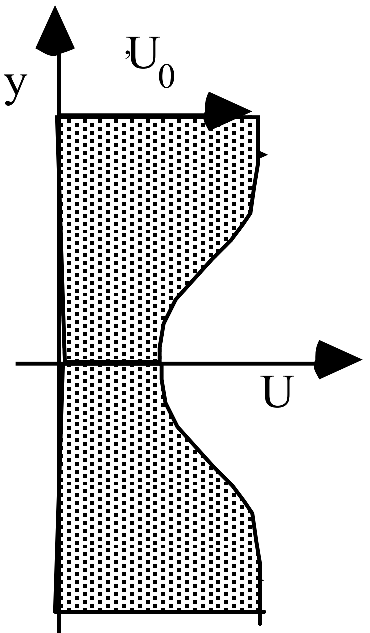
$$R_{el}^{-1} << 1$$

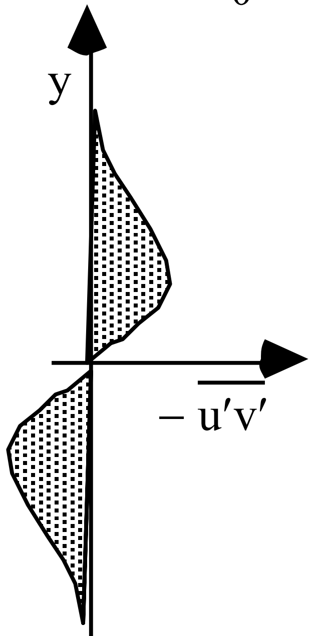
Equation de l'ECT

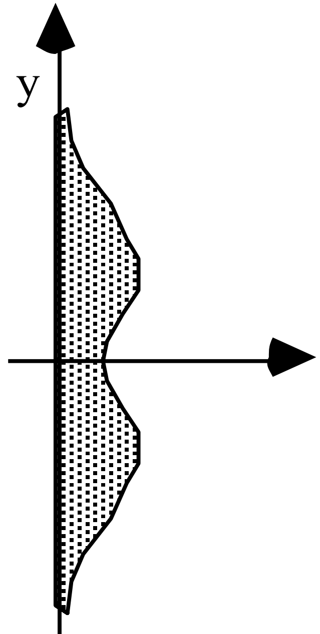
$$U_0 \frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}} + \rho^{-1}\overline{p'v'}) - \overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon$$

$$\delta_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U}{U_0}(1 - \frac{U}{U_0})dy = C_D \frac{d}{2}$$

Conditions aux limites $y \to \pm\infty,\ U - U_0 \to 0,\ -\overline{u'v'} \to 0,\ k \to 0$







Zone de mélange.

Equations du champ de vitesse moyenne

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

Relations d'échelles

$$\frac{u}{U_S} = O\left(\frac{l}{L}\right)^{0.5} \qquad R_{el}^{-1} << \left(\frac{l}{L}\right)^{0.5}$$

U_S est connu

Equation de l'ECT

$$U\frac{\partial k}{\partial x} + V\frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\tilde{k}} + \rho^{-1}\overline{p'v'}) - \overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} - (\overline{u'^2} - \overline{v'^2})\frac{\partial U}{\partial x} - \varepsilon$$

Conditions aux limites

$$y \to +\infty,\ U \to U_S,\ -\overline{u'v'} \to 0,\ k \to 0$$

$$y \to -\infty,\ U \to 0,\quad -\overline{u'v'} \to 0,\ k \to 0$$

Jet

Relations d'échelles

$$\frac{u}{U_S} = O\left(\frac{l}{L}\right)^{0.5} \qquad R_{el}^{-1} << \left(\frac{l}{L}\right)^{0.5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho U^2 dy = M_0 = \int_{S_J} \rho U_J^2 dy$$

Equations du champ de vitesse moyenne

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

Equation de l'ECT

$$U\frac{\partial k}{\partial x} + V\frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'\tilde{k}} + \rho^{-1}\overline{p'v'}\right) - \overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} - \left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2}\right)\frac{\partial U}{\partial x} - \varepsilon$$

Conditions aux limites

$$y \to \pm\infty,\ U \to 0,\ -\overline{u'v'} \to 0,\ k \to 0$$