

Chapitre 4

Ecoulement homogène dans une direction

Chapitre 4 : Ecoulement homogène dans une direction

- 4.1 Position du problème
- 4.2 Equations de Reynolds en écoulement parallèle en moyenne
- 4.3 Etude asymptotique à grand nombre de Reynolds
- 4.4 Propriétés de similitude
- 4.5 Raccordement de la loi de paroi et de la loi déficitaire : Loi logarithmique
- 4.6 Profils de vitesse par zone

4.1 Position du Problème

Dans ce chapitre nous considérons l'exemple des écoulements turbulents, parallèles en moyenne:

- écoulement en charge dans un canal de section rectangulaire de très grande largeur,
- écoulement en charge dans une conduite cylindrique de section circulaire,
- écoulement à surface libre dans un canal de section rectangulaire de très grande largeur.

Loin de l'entrée, ces écoulements deviennent parallèles en moyenne (soit $u \neq 0$, $v=0$, $w=0$) et on attend que la turbulence soit homogène dans la direction longitudinale, ou, autrement dit, que les champs des moments turbulents soient invariants

suivant l'axe des x (par exemple $\frac{\partial}{\partial x} \overline{u_i u_j} = 0$).

4.1 Position du Problème

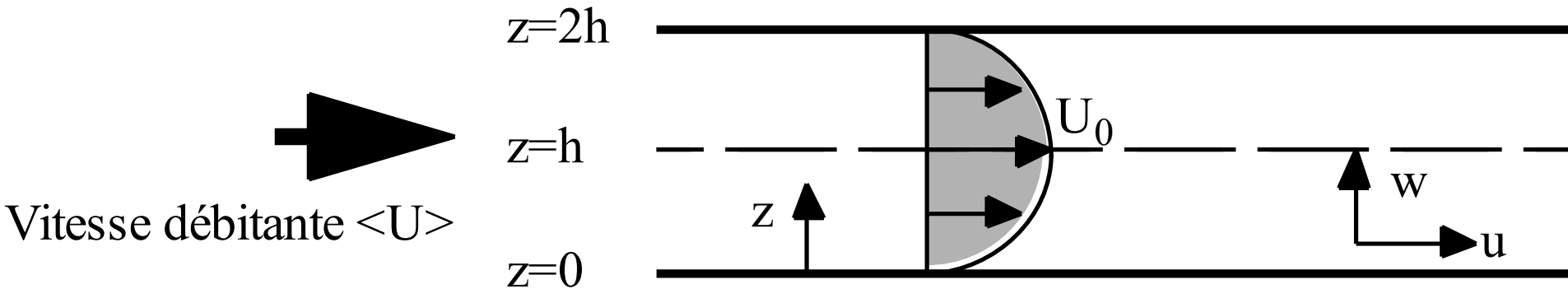


Figure 1. Ecoulement en canal rectangulaire de grande largeur

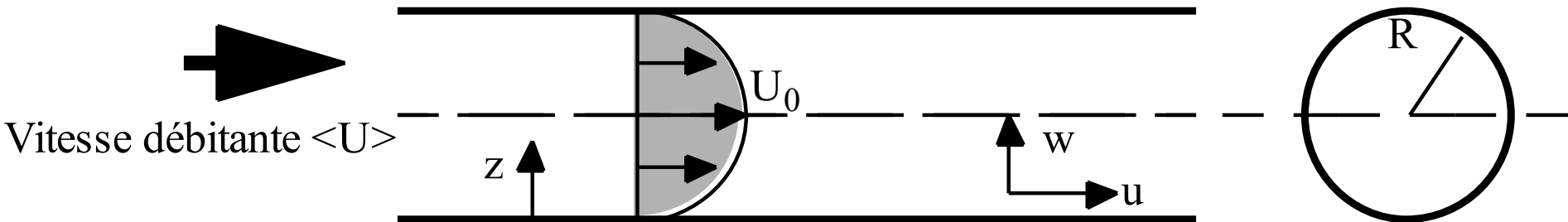


Figure 2. Ecoulement en conduite circulaire

4.1 Position du Problème

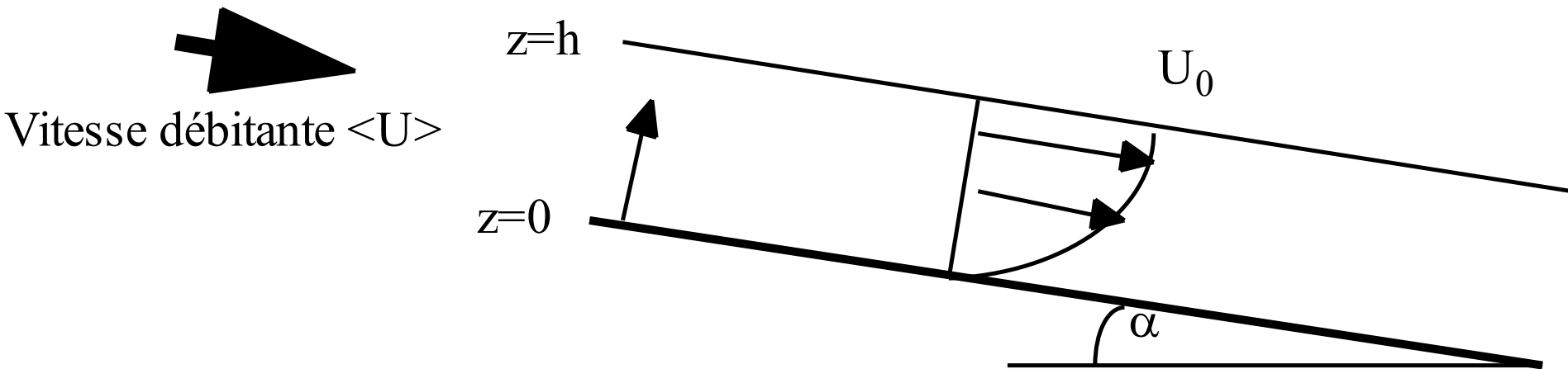


Figure 3. Ecoulement en canal rectangulaire de grande largeur

4.1 Position du Problème

Analyse phénoménologique

L'analyse phénoménologique est la méthode qui va être mise en application pour étudier les écoulements. En *analyse phénoménologique*, l'objectif n'est pas de rechercher une solution exacte, mais seulement l'ordre de grandeur de la solution.

Principe de Moindre Dégénérescence PMD

Le principe dit de "*moindre dégenérescence*" permet de déterminer les valeurs critiques des données libres pour qu'il n'y ait aucune simplification, ce qui correspond à la situation permettant d'observer simultanément le maximum de phénomènes.

Il s'agit donc d'effectuer un classement de toutes les simplifications possibles et de préciser les conditions que doivent vérifier les variables pour qu'un type d'approximation ait lieu.

4.2 Equations de Reynolds en écoulement parallèle en moyenne

En écoulement plan, (invariance de toutes les grandeurs moyennes en y), les équations du mouvement moyen, stationnaire, à densité volumique constante, s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\rho^{-1} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{u'w'} \right] \quad (2)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\rho^{-1} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial W}{\partial z} - \overline{w'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \frac{\partial W}{\partial x} - \overline{u'w'} \right] \quad (3)$$

En remarquant que $\rho \vec{g} = \vec{\nabla}(\rho g z_H)$ où z_H est la cote suivant l'axe orienté suivant la verticale ascendante à la terre ; on note P la pression moyenne "modifiée", $P = p + \rho g z_H$

4.2 Equations de Reynolds en écoulement parallèle en moyenne

En écoulement parallèle ($V=W=0$), l'équation de continuité indique que U ne dépend que de z et les équations (1-b) et (1-c) s'écrivent:

$$0 = -\rho^{-1} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad (2)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} (P + \rho \overline{w'^2}) \quad (3)$$

L'intégration de (3) et l'homogénéité en x de la structure cinématique de l'écoulement entraîne :

$$P + \rho \overline{w'^2} = f(x) = P_w(x) \text{ et d'après (2): } \frac{\partial P}{\partial x} = \text{Constante} \quad (4)$$

4.2 Equations de Reynolds en écoulement parallèle en moyenne

$$0 = -\rho^{-1} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad (2)$$

$$P + \rho \overline{w'^2} = f(x) = P_w(x) \text{ et d'après (2): } \frac{\partial P}{\partial x} = \text{Constante} \quad (4)$$

On en déduit

$$\frac{dP_w}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} = \text{Constante}$$

En remarquant que : $-dP_w S_H = \tau_w L_H dx$

Il est possible d'exprimer le frottement à la paroi par:

$$\tau_w = \rho \nu \left. \frac{dU}{dz} \right|_{\text{Paroi}} \approx -\frac{dP_w}{dx} l_0$$

Où l_0 désigne le rayon hydraulique $l_0 \approx \frac{S_H}{L_H}$

4.2 Equations de Reynolds en écoulement parallèle en moyenne

$$\tau_w \approx -\frac{dP_w}{dx} l_0$$

L'échelle de longueur l_0 et le frottement à la paroi sont définis pour chacune des configurations par les relations

$$\tau_w = -\frac{dP_w}{dx} \frac{h}{2}, \quad l_0 = \frac{h}{2} \text{ pour l'écoulement en charge en canal rectangulaire}$$

$$\tau_w = -\frac{dP_w}{dx} \frac{R}{2}, \quad l_0 = \frac{R}{2} \text{ pour l'écoulement en charge en conduite circulaire,}$$

$$\tau_w = -\frac{dP_w}{dx} h = \rho g I h, \quad l_0 = h \text{ pour l'écoulement à surface libre, (6)}$$

$\frac{dP_w}{dx}$ est le gradient de pression (écoulements en charge), I pente du canal.

4.2 Equations de Reynolds en écoulement parallèle en moyenne

$$0 = -\rho^{-1} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP_w}{dx} = -\frac{\tau_w}{l_0}$$

On pose : $\tau_w = \rho u_*^2$, où u_* est la vitesse de frottement

$$0 = \frac{\rho^{-1} \tau_w}{l_0} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) = \frac{u_*^2}{l_0} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad (2-a)$$

Il est aisé d'intégrer l'équation (2-a) :

$$\frac{d}{dz} \left(\nu \frac{dU}{dz} - \overline{u'w'} \right) = -\frac{u_*^2}{l_0} \quad \nu \frac{dU}{dz} - \overline{u'w'} = -\frac{u_*^2}{l_0} z + \text{Cte} \quad (5)$$

4.2 Equations de Reynolds en écoulement parallèle en moyenne

$$\nu \frac{dU}{dz} - \overline{u'w'} = -\frac{u_*^2}{l_0} z + \text{Cte} \quad \text{à } z = 0 \quad \text{Cte} = \nu \frac{dU}{dz}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho} = -\overline{u'w'} + \nu \frac{du}{dz} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{l_0}\right) \quad \text{avec : } u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5)$$

Notons que l'équation (5) doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\text{A la paroi, } z = 0, u = 0 \text{ et } \overline{u'w'} = 0 \quad (7-a)$$

Sur l'axe de la conduite ou à la surface libre de l'écoulement plan

$$z = l_0, \frac{du}{dz} = 0 \text{ et } \overline{u'w'} = 0 \quad (7-b)$$

4.3 Etude asymptotique à grand nombre de Reynolds

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho} = -\overline{u'w'} + \nu \frac{du}{dz} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{l_0}\right) \quad \text{avec : } u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5)$$

Exprimons sous forme non dimensionnelle l'équation (5) en posant :

$$\xi = \frac{z}{l_0}, \quad u^+ = \frac{u}{u_*}, \quad R_{e*} = \frac{u_* l_0}{\nu} \quad (8)$$

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho u_*^2} = -\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{1}{R_{e*}} \frac{du^+}{d\xi} = 1 - \xi \quad \text{où } R_{e*} = \frac{u_* l_0}{\nu} \quad (9)$$

Quand le nombre de Reynolds est grand ($R_{e*} \rightarrow \infty$), l'équation (9) a la forme asymptotique suivante :

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = 1 - \xi \quad (10)$$

4.3 Etude asymptotique à grand nombre de Reynolds

(15)

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = 1 - \xi \quad (10)$$

Ainsi, à grand nombre de Reynolds, les équations de Reynolds permettent d'exprimer le profil de contrainte turbulente de cisaillement, alors que la vitesse moyenne n'y est plus présente. En fait la dégénérescence (10) n'est pas acceptable dans tout le domaine car la condition (7-a)

$$z = 0, u = 0 \text{ et } \overline{u'w'} = 0$$

n'est pas vérifiée à la paroi: la contrainte turbulente n'est pas nulle. Néanmoins loin de la paroi, on doit s'attendre à une solution générale sous la forme :

$$u^+ = F(\xi), -\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = G(\xi) = 1 - \xi \quad (10-a)$$

4.3 Etude asymptotique à grand nombre de Reynolds

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = 1 - \xi \quad (10)$$

Ainsi, à grand nombre de Reynolds, les équations de Reynolds permettent d'exprimer le profil de contrainte turbulente de cisaillement, alors que la vitesse moyenne n'y est plus présente. En fait la dégénérescence (10) n'est pas acceptable dans tout le domaine car la condition (7-a)

$$z = 0, u = 0 \text{ et } \overline{u'w'} = 0$$

n'est pas vérifiée à la paroi: la contrainte turbulente n'est pas nulle. Près de la paroi faudrait considérer que la viscosité et la vitesse de frottement sont des grandeurs de référence . Ainsi une échelle de longueur caractéristique est :

$$l_w = \frac{\nu}{u_*} \quad (11)$$

4.3 Etude asymptotique à grand nombre de Reynolds

Une échelle de longueur caractéristique près de la paroi est :

$$l_w = \frac{\nu}{u_*} \quad (11)$$

Posons donc : $z^+ = \frac{z}{l_w} = \frac{u_* z}{\nu}$ (12)

Et l'équation (5) s'écrit :

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{du^+}{dz^+} = 1 - R_{e*}^{-1} z^+ \quad (13)$$
$$\frac{\tau_{xz}}{\rho} = -\overline{u'w'} + \nu \frac{du}{dz} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{l_0}\right)$$

Lorsque $R_{e*} \rightarrow \infty$, la dégénérescence de l'équation (5) donne:

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho_0 u_*^2} = -\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{du^+}{dz^+} = 1 \quad (14)$$

L'équation (14) doit vérifier les conditions aux limites (7-a) ; par contre les conditions (7-b) ne peuvent être vérifiées.

4.3 Etude asymptotique à grand nombre de Reynolds

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho_0 u_*^2} = -\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{du^+}{dz^+} = 1 \quad (14)$$

L'équation (14) doit vérifier les conditions aux limites (7-a) ; par contre les conditions (7-b) ne peuvent être vérifiées.

A la paroi,

$$z = 0, u = 0 \text{ et } \overline{u'w'} = 0 \quad (7-a)$$

Sur l'axe de la conduite ou à la surface libre

$$z = l_0, \frac{du}{dz} = 0 \text{ et } \overline{u'w'} = 0 \quad (7-b)$$

4.3 Etude asymptotique à grand nombre de Reynolds

En résumé les conclusions de l'analyse asymptotique de l'équation (5) sont les suivantes :

Dans la zone centrale de l'écoulement ou zone externe, contrôlée par les échelles u^* et l_0 :

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = 1 - \xi \quad \text{quand } R_{e*} \rightarrow \infty$$

Dans la zone de paroi ou zone interne, contrôlée par les échelles u^* et $l_w = \nu/u^*$:

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{du^+}{dz^+} = 1 \quad \text{quand } R_{e*} \rightarrow \infty$$

4.4 Propriétés de similitude

4.4.1 Bilan de Quantité de Mouvement: loi de paroi

Près de la paroi à grand nombre de Reynolds compte tenu de la forme asymptotique du bilan de quantité de mouvement et des conditions aux limites on cherche une solution sous la forme :

$$u^+ = f(z^+), -\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = g(z^+) \quad (15)$$

vérifiant l'équation différentielle et les conditions aux limites :

$$\frac{df}{dz^+} + g = 1 \text{ avec } f(0) = 0 \text{ et } g(0) = 0 \quad (16)$$

4.4 Propriétés de similitude

4.4.2 Energie cinétique turbulente

Dans la zone centrale de l'écoulement on connaît le profil de contrainte turbulent de cisaillement mais on ne sait rien sur le profil de vitesse moyenne. L'équation de l'ECT traduit aussi une adaptation de la turbulence au mouvement moyen

$$\frac{\partial(k)}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial(k)}{\partial x_j} = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{k u_j'})}{\partial x_j} - \rho^{-1} \frac{\partial \overline{p' u_i'}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2(k)}{\partial x_j \partial x_j} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$

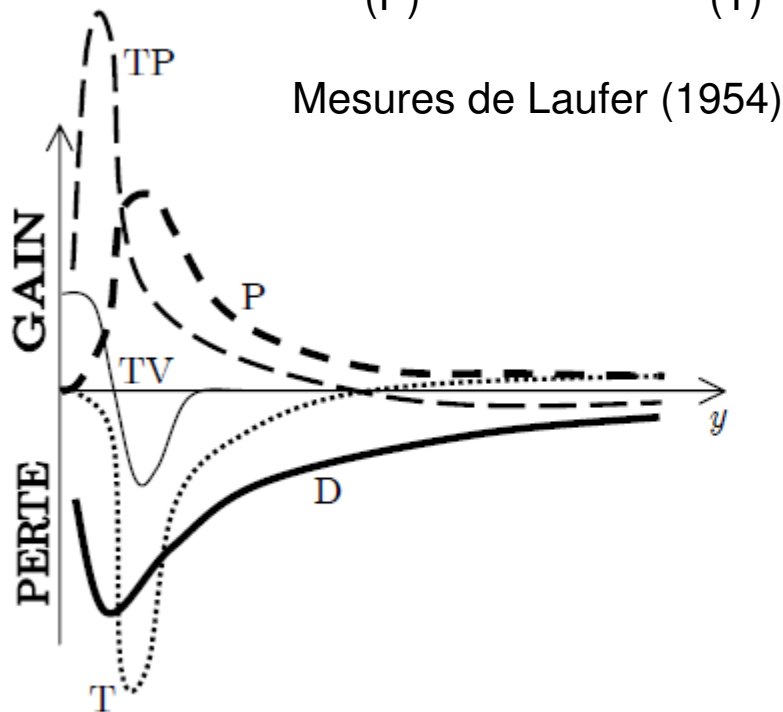
en écoulement parallèle, stationnaire, à masse volumique constante, elle s'écrit :

$$0 = -\overline{u' w'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{k w'}) - \rho^{-1} \overline{p' w'} - \nu \frac{\partial k}{\partial z} - \varepsilon \quad (17)$$

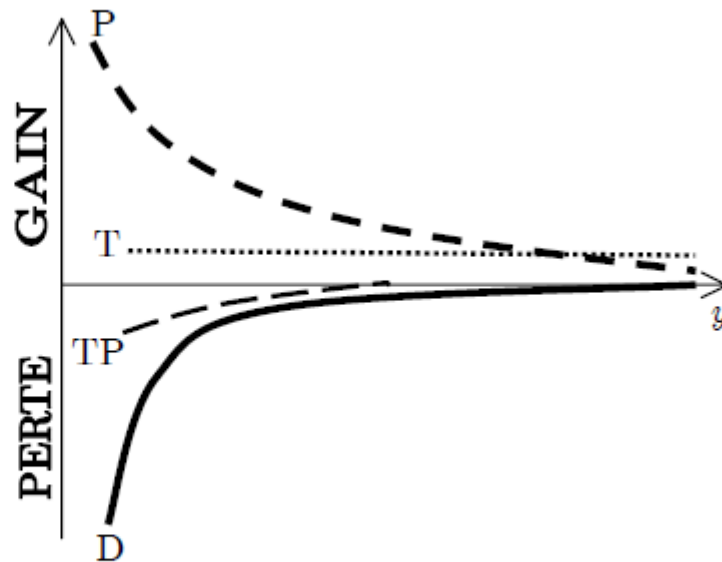
4.4 Propriétés de similitude

4.4.2 Energie cinétique turbulente

$$0 = \underbrace{-\overline{u'w'}}_{(P)} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(\overline{kw'})}_{(T)} - \underbrace{\rho^{-1} \overline{p'w'}}_{(TP)} - \underbrace{\nu \frac{\partial k}{\partial z}}_{(TV)} - \underbrace{\varepsilon}_{(D)} \quad (17)$$



a) très près de la paroi



b) loin de la paroi

4.4 Propriétés de similitude

4.4.2 Energie cinétique turbulente

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} (\overline{k w'} + \rho^{-1} \overline{p' w'} - \nu \frac{\partial k}{\partial z}) - \overline{u' w'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \varepsilon$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\underbrace{\frac{\overline{k w'}}{u_*^3} + \rho^{-1} \frac{\overline{p' w'}}{u_*^3}}_{O(1)} - \underbrace{\frac{\nu}{u_* l_0}}_{R_{e*}^{-1}} \frac{\partial k}{u_*^2 \partial \xi} \right) - \underbrace{\frac{\overline{u' w'}}{u_*^2}}_{O(1)} \frac{\partial \overline{u^+}}{\partial \xi} - \underbrace{\frac{l_0 \varepsilon}{u_*^3}}_{O(1)} \quad (18)$$

L'interaction entre gradient de vitesse moyenne et ECT via le terme de production impose :

$$\frac{\overline{u' w'}}{u_*^2} \frac{d\overline{u^+}}{d\xi} = (1 - \xi) \frac{d\overline{u^+}}{d\xi} = O(1) \text{ soit } \frac{d\overline{u^+}}{d\xi} = \frac{dF(\xi)}{d\xi} = O(1) \quad (19)$$

4.4 Propriétés de similitude

4.4.3 Loi Déficitaire

L'interaction entre gradient de vitesse moyenne et ECT via le terme de production impose :

$$\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} \frac{du^+}{d\xi} = (1 - \xi) \frac{du^+}{d\xi} = O(1) \text{ soit } \frac{du^+}{d\xi} = \frac{dF(\xi)}{d\xi} = O(1)$$

$$u^+ = F(\xi) + \text{Cte}$$

On en déduit que dans la zone centrale la loi de similitude de la vitesse moyenne est de la forme "déficitaire" :

$$\frac{u - U_0}{u_*} = F(\xi) \quad (20)$$

où U_0 est la vitesse moyenne sur l'axe de la conduite ou sur la surface libre.

4.4 Propriétés de similitude

4.4.3 Loi Déficitaire

En conclusion dans la zone centrale les propriétés de similitude du champ moyen de vitesse et de contrainte turbulente de cisaillement s'expriment sous la forme :

$$\frac{u - U_0}{u_*} = F(\xi), \text{ et } -\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = 1 - \xi$$

4.5 Raccordement de la loi de paroi et de la loi déficitaire : Loi logarithmique

Pour raccorder les deux solutions asymptotiques des équations de Reynolds admettons qu'il existe une zone de recouvrement où la variable ξ est petite alors que la variable de paroi z^+ est grande. De fait c'est toujours possible si le nombre de Reynolds est suffisamment grand. En effet ces deux variables vérifient la relation :

$$z^+ = \xi R_{e*} \quad \text{quand } R_{e*} = 10^3, \text{ à } \xi = 0.1, z^+ = 100$$

Adoptons une condition de raccordement sur les dérivées :

$$\lim_{\text{quand } z^+ \rightarrow \infty} \left[\frac{du}{dz} \right]_{(\text{zone interne})} = \lim_{\text{quand } \xi \rightarrow 0} \left[\frac{du}{dz} \right]_{(\text{zone externe})}$$

$$\text{Avec :} \quad \text{Zone externe : } \frac{du}{dz} = \frac{u_*}{l_0} \frac{dF}{d\xi} \quad \text{zone interne : } \frac{du}{dz} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dz^+} \quad (21)$$

4.5 Raccordement de la loi de paroi et de la loi déficitaire : Loi logarithmique

La condition de raccordement s'exprime ainsi sous la forme :

$$\frac{u_*}{l_0} \frac{dF}{d\xi} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dz^+} \quad \text{quand } \xi \rightarrow 0 \text{ et } z^+ \rightarrow \infty$$

Où encore

$$\xi \frac{dF}{d\xi} = z^+ \frac{df}{dz^+} = \text{Constante} = \frac{1}{\kappa} \quad \text{quand } \xi \rightarrow 0 \text{ et } z^+ \rightarrow \infty \quad (22)$$

La condition de raccordement s'exprime ainsi sous la forme :

$$u^+ = f(z^+) = \frac{1}{\kappa} \text{Ln} z^+ + a$$

$$\frac{u - U_0}{u_*} = F(\xi) = \frac{1}{\kappa} \text{Ln} \xi + b$$

4.6 Profils de vitesse par zone

Région interne ou de paroi

La région interne est une région commune à tous les écoulements de paroi

Elle comprend trois parties qu'on distingue selon le degré d'influence de la viscosité

Le frottement à la paroi s'écrit:

$$\tau_w = \rho \nu \left. \frac{dU}{dz} \right|_{\text{Paroi}} = - \frac{dP_w}{dx} l_0$$

Le frottement total est constant dans toute la région interne :

$$\tau_{xz} = \tau_w = \rho \nu \frac{dU}{dz} - \rho \overline{u'w'}$$

4.6 Profils de vitesse par zone

La sous couche laminaire (où linéaire)

Très près de la paroi où les effets de viscosité sont prépondérants devant les termes turbulents le frottement total (constant) s'écrit:

$$\tau_w = \rho \nu \left. \frac{dU}{dz} \right|_{\text{Paroi}, z=0} \quad \text{avec } U = 0 \quad \text{à } z = 0 \quad U(z) = \frac{\tau_w}{\rho \nu} z$$

$$\tau_w = \rho u_*^2 \quad \frac{U(z)}{u_*} = u^+ = z^+$$

On admet en accord avec la plus part des résultats expérimentaux que la sous couche linéaire (ou laminaire) s'étend pour

$$0 < z^+ < 5 \text{ à } 10$$

Ce qui représente une distance très faible

4.6 Profils de vitesse par zone

La sous couche visqueuse (où zone tampon)

Il s'agit d'une zone intermédiaire dans laquelle les effets visqueux sont importants mais diminuent lorsque z augmente.

Dans cette région, la viscosité s'applique à des tourbillons plus gros porteurs d'énergie

Cette zone s'étend pour :

$$5 \text{ à } 10 < z^+ < 30$$

4.6 Profils de vitesse par zone

La région logarithmique : profil de vitesse

A l'extérieur de la sous-couche visqueuse, le frottement est essentiellement dû au cisaillement turbulent (et reste constant)

$$\tau_w = \rho u_*^2 = -\rho \overline{u'w'}$$

La zone logarithmique est une zone de raccordement entre la région interne (commune à tous les écoulements) et la région externe (zone inertielle spécifique).

Le domaine logarithmique est limité à $h/10$ en conduite

Le profil logarithmique est donné par :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln z^+ + a$$

Les valeurs des constantes sont données expérimentalement:

Const de Van Karman $\kappa = 0,41$

Paroi lisse $a = 5$

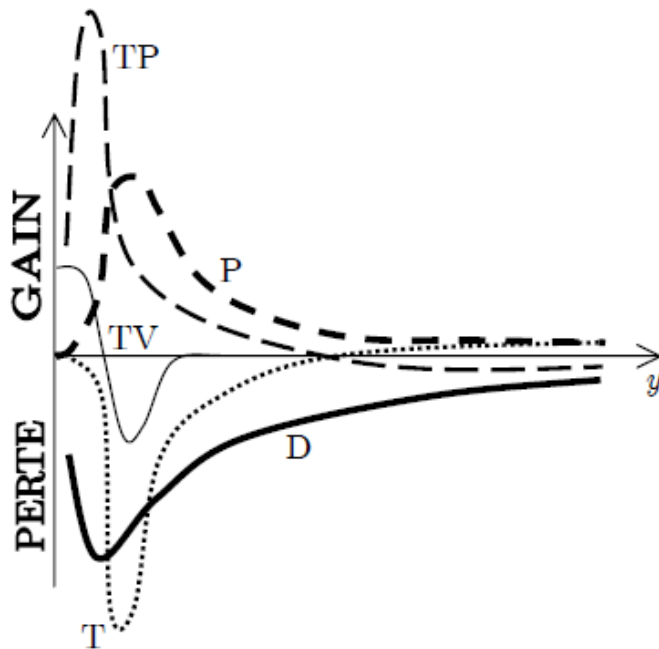
4.6 Profils de vitesse par zone

La région logarithmique : Condition aux limites de paroi

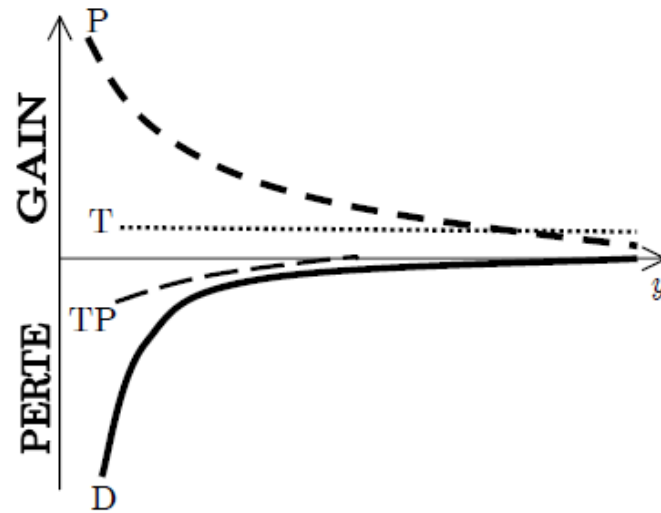
Dans la zone logarithmique le frottement constant

$$\tau = \rho u^2 = \overline{\rho u'v'}$$

Et la



a) très près de la paroi



b) loin de la paroi

tion

$$nz^+ + a$$

Const de Van Karman $\kappa = 0,41$

Paroi lisse $a = 5$

4.6 Profils de vitesse par zone

La région logarithmique : Condition aux limites de paroi

Et la turbulence est en équilibre Production=Dissipation

$$P = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = \varepsilon$$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z}{\nu} + a$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z}$$

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}$$

4.6 Profils de vitesse par zone

La région externe

Cette région est spécifique à chaque écoulement. Le profil de vitesse est donné par la loi déficitaire

$$\frac{u - U_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \text{Ln} \xi + b$$

On utilise parfois pour la couche externe la loi de Coles dite de sillage

$$\frac{u - U_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \text{Ln} \xi + 1,84(1 + \cos(\pi \xi))$$

Les études des régions internes et externes donnent 2 loi différentes indépendantes.

Il es possible de déterminer une région de recouvrement entre ces deux zones où les deux lois sont valables

4.6 Profils de vitesse par zone

Zone de recouvrement. La loi de frottement

Il est possible de déterminer une région de recouvrement entre ces deux zones où les deux lois sont valables

$$\frac{U_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \text{Ln} z^+ + a - \frac{1}{\kappa} \text{Ln} \zeta + b$$

En utilisant la définition du coefficient de frottement et de la vitesse de frottement

$$\rho u_*^2 = C_f \rho \frac{U_0^2}{2}$$

il vient

$$\frac{U_0}{u_*} = \sqrt{\frac{2}{C_f}}$$

On obtient

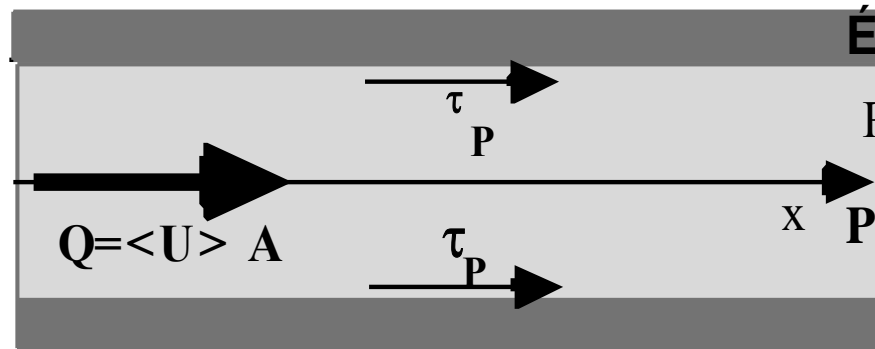
$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = \frac{1}{\kappa} \text{Ln}(R_{l_0} \sqrt{C_f}) + a'$$

Où

$$R_{l_0} = \frac{U_0 l_0}{\nu}$$

Résultats expérimentaux illustrant la transition à la turbulence

Ecoulement en conduite



Écoulement laminaire

$$R_e < 2300$$

Poiseuille : $\lambda = 64R_e^{-1}$ (courbe 1)

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda}{d} \frac{1}{2} \rho \langle U \rangle^2$$

$$\tau_P = -\frac{dp}{dx} \frac{d}{4} = c_f \frac{1}{2} \rho \langle U \rangle^2$$

$$c_f = \frac{\lambda}{8}$$

Écoulement turbulent

$$410^3 < R_e < 10^5$$

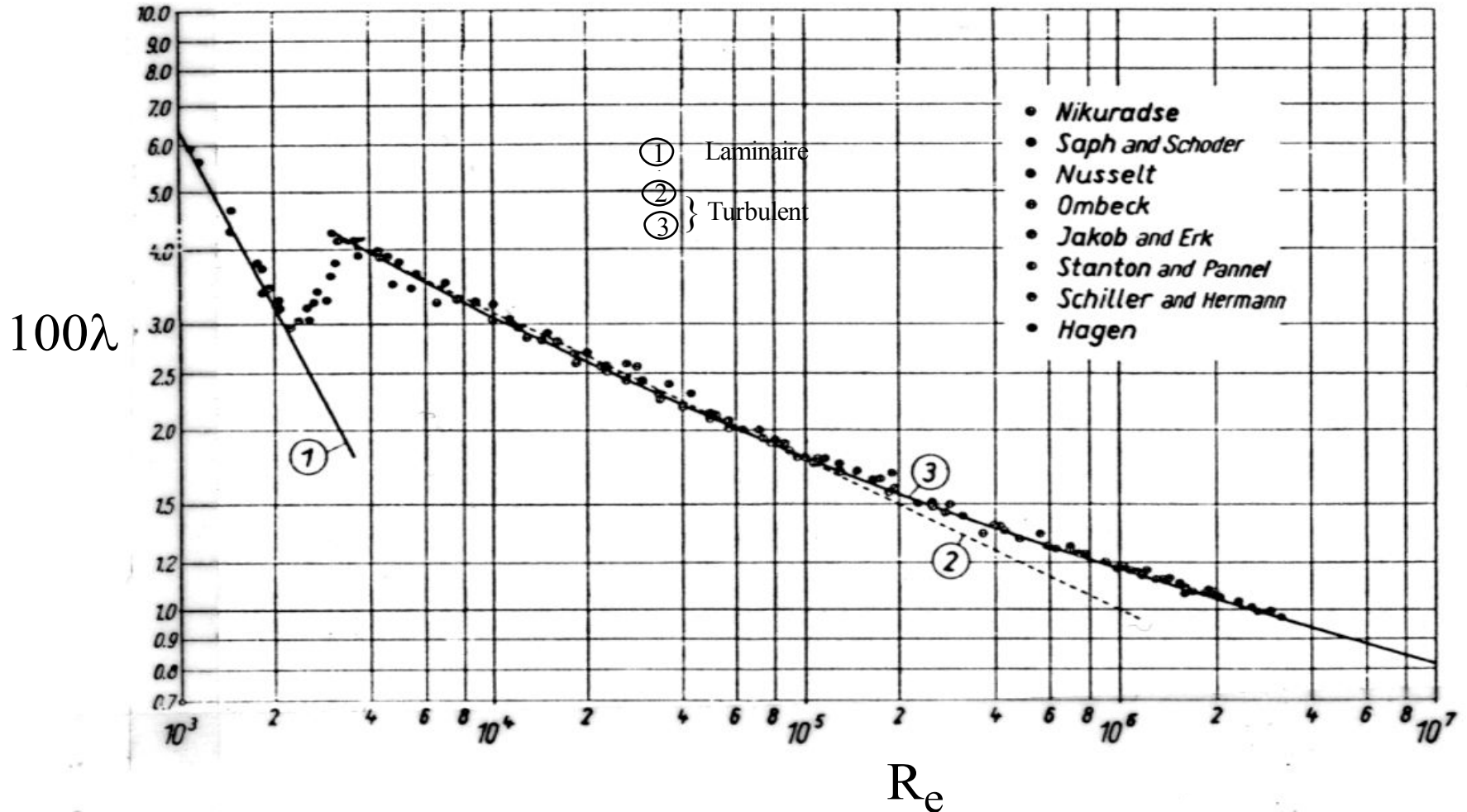
Blasius : $\lambda = 0.3164 R_e^{-0.25}$ (courbe 2)

$$R_e > 10^5$$

Prandtl: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(R_e \sqrt{\lambda}) - 0.8$ (courbe 3)

Résultats expérimentaux illustrant la transition à la turbulence

Ecoulement en conduite



4.6 Profils de vitesse par zone

Frottement turbulent rugueux

La paroi d'un obstacle peut avoir des aspérités de taille k qui peuvent être de même ordre de grandeur (ou supérieures) à l'épaisseur de la sous couche laminaire

- Si k est petite devant la taille de la sous couche visqueuse, la rugosité ne crée pas de perturbations majeures. Le régime est dit hydrodynamiquement lisse.
- Si k est de même ordre de grandeur ou supérieure à la taille de la sous couche laminaire, les rugosités engendrent des perturbations de sillage. La viscosité moléculaire n'intervient plus. La sous couche laminaire devient elle-même turbulente on parle alors de frottement rugueux

4.6 Profils de vitesse par zone

Frottement turbulent rugueux

Les critères de passage du régime lisse au régime rugueux sont:

- $\frac{u_* k}{\nu} \leq 5$ hydrodynamiquement lisse
- $5 \leq \frac{u_* k}{\nu} \leq 70$ régime mixte
- $\frac{u_* k}{\nu} \geq 70$ Frottement rugueux

4.6 Profils de vitesse par zone

Lois empiriques e frottement

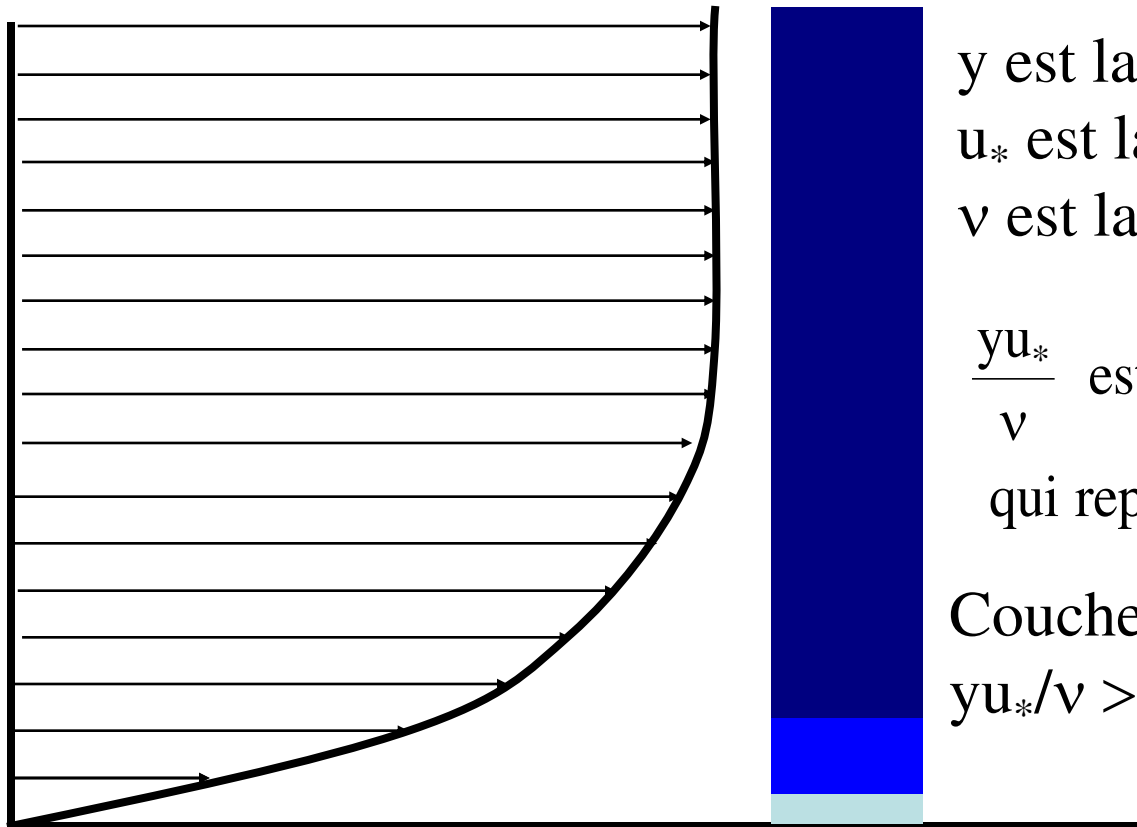
Les critères de passage du régime lisse au régime rugueux sont:

- $\frac{u_* k}{\nu} \leq 5$ hydrodynamiquement lisse

- $5 \leq \frac{u_* k}{\nu} \leq 70$ régime mixte

- $\frac{u_* k}{\nu} \geq 70$ Frottement rugueux

Exemple : turbulence en conduite



y est la distance à partir de la paroi

u_* est la vitesse de friction

ν est la viscosité cinématique μ/ρ

$\frac{yu_*}{\nu}$ est un groupe sans dimensions

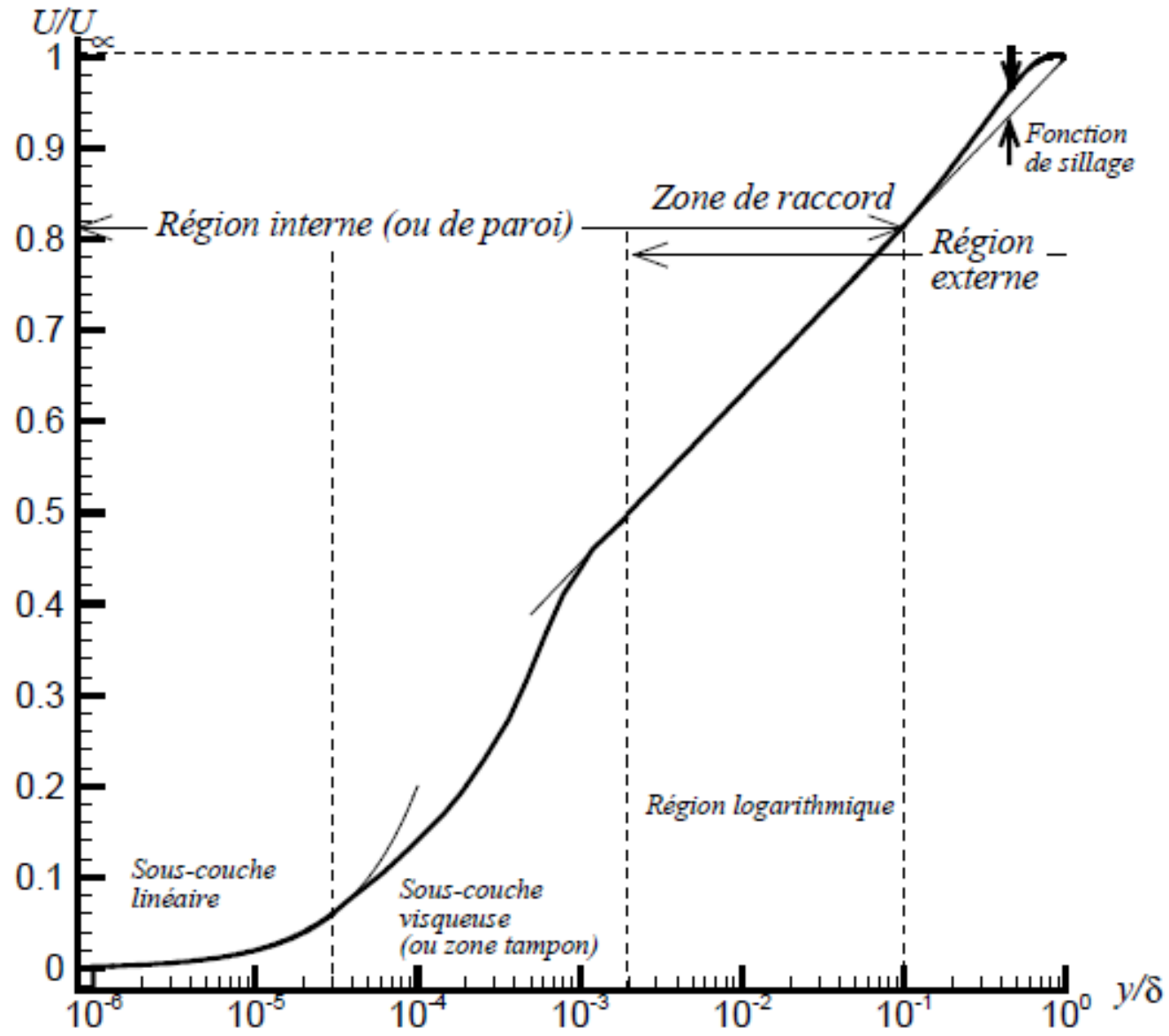
qui représente la distance à la paroi

Couche inertielle (turbulente)

$yu_*/\nu > 30$ Couche tampon

Sous-couche laminaire $yu_*/\nu < 5$

Exemple : turbulence en conduite



Exemple : turbulence en conduite



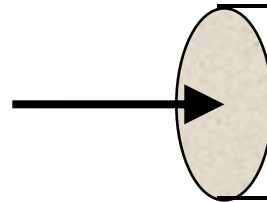
$$\tau_w = \rho u_*^2 = f \frac{1}{2} \rho \langle u \rangle^2 \Rightarrow u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$f \frac{1}{2} \rho \langle u \rangle^2 \pi D L = \Delta P \frac{\pi D^2}{4} = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \langle u \rangle^2 \frac{\pi D^2}{4}$$

$$f = \frac{\lambda}{4} = \frac{0.0791}{\text{Re}^{1/4}} \text{ (formule de Blasius)}$$

Exemple : turbulence en conduite

Épaisseur de la sous-couche laminaire dans une conduite de ventilation



$$Q = 12 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D = 1 \text{ m}$$

$$\rho_{\text{air}} \approx 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \mu_{\text{air}} = 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \Rightarrow \text{Re} = \frac{\rho \langle u \rangle D}{\mu} = \frac{4Q\rho}{\pi D \mu} = 1.53 \times 10^6$$

$$f = 0.003$$

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2} \quad \text{donc} \quad \tau_w = \frac{0.003}{2} \rho \langle u \rangle^2$$

$$\langle u \rangle = \frac{4Q}{\pi D^2} = 15.27 \quad \text{donc} \quad \tau_w = \frac{0.003}{2} 233 = 0.345 \text{ Pa}$$

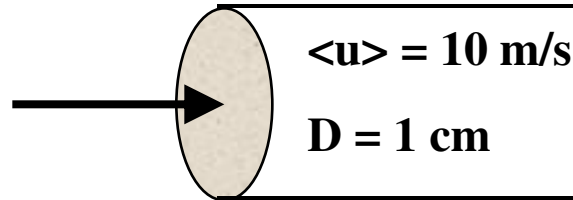
$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = 0.59 \text{ m/sec}$$

$$\text{donc} \quad \frac{y u_*}{\nu} = 5 \quad \text{en} \quad y = \frac{5 \times 1 \times 10^{-5}}{0.59} = 8.47 \times 10^{-5} \text{ m} \quad \text{ou} \quad 85 \text{ microns}$$

$$\Rightarrow f = \frac{0.0791}{\text{Re}^{1/4}}$$

Exemple : turbulence en conduite

Épaisseur de la sous-couche laminaire dans une conduite d'eau



$$\rho_{\text{eau}} \approx 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \mu_{\text{eau}} = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

$$\Rightarrow Re = \frac{\rho \langle u \rangle D}{\mu} = \frac{1000 \times 10 \times 0.01}{10^{-3}} = 1 \times 10^5$$

$$\Rightarrow f = \frac{0.0791}{Re^{1/4}}$$

$$f = 0.0045$$

$$\text{donc } \tau_w = \frac{0.0045}{2} 1000 \times 10 = 22.5 \text{ Pa}$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = 0.15 \text{ m/sec}$$

$$\text{donc } \frac{yu_*}{\nu} = 5 \text{ en } y = \frac{5 \times 1 \times 10^{-6}}{0.15} = 3.33 \times 10^{-5} \text{ m ou } 33 \text{ microns}$$

Exemple : turbulence en conduite

