Groupe 3, Exo Challenge (Exo 10)

(1) • Est-ce que cette loi est une loi de decomposition interne ?

Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$.

$C_E(A \cup B) \in \mathcal{P}(E)$.

Donc, c'est une loi de decomposition interne.

• Associative : A-t-on $A \star (B \star C) = (A \star B) \star C$?

$$A \star (B \star C) = C_E(A \cup (C_E(B \cup C)))$$
$$= C_E(A) \cap C_E(C_E(B \cup C))$$
$$= C_E(A) \cap (B \cup C)$$

$$(A \star B) \star C = C_E(C_E(A \cup B) \cup C)$$
$$= C_E(C_E(A \cup B)) \cap C_E(C)$$
$$= A \cup B \cap C_E(C)$$

Donc, la relation n'est pas associative.

• Commutativité ?

$A \cup B = B \cup A$.

Donc $C_E(A \cup B) = C_E(B \cup A)$.

La relation est commutative.

• Element neutre e : A-t-on $C_E(A \cup e) = C_E(e \cup A) = A$?

Par l'absurde, on suppose que $C_E(e \cup e) = e$.

Donc $C_E(e) = e$.

La relation n'a pas d'élément neutre.

• Symétrie ?

Puisqu'il n'existe pas d'élément neutre, donc il n'est pas symétrique.

(ii) La relation $(P(E), \star)$ n'est pas un groupe parce que la relation n'est pas associative et n'admet pas d'élément neutre.