Léa Bonafede
Maha El Kandi
Sébastien Rouff
Muhammad Aqil Ridhwan Bin Mohd Shukri
Glenn Jeannin

Exercice challenge.

$$A \mathcal{R} B \iff \sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b \quad \forall A;B \subseteq E_n$$

i) $\{\dot{4}\} = \{\{1;3\};\{4\}\}$

$\{\dot{5}\} = \{\{1;4\};\{2;3\};\{5\}\}$

$\{\dot{6}\} = \{\{6\};\{1;5\};\{2;4\}\}$

ii) • R est réflexive?

$$A \mathcal{R} A \iff \sum_{a \in A} a = \sum_{a \in A} a \quad ✓$$

• R est symétrique?

Soient $A;B \subseteq E_n$

$$B \mathcal{R} A \iff \sum_{b \in B} b = \sum_{a \in A} a$$

$$\iff \sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b$$

$$\iff A \mathcal{R} B \quad ✓$$

• R est transitive?

Soient $A;B \subseteq E_n$

$$A \mathcal{R} B \text{ et } B \mathcal{R} C \iff \sum_{b \in A} b = \sum_{b = B} b$$

$$\text{et } \sum_{b \in B} b = \sum_{c \in C} c$$

$$\iff \sum_{a \in A} a = \sum_{c \in C} c$$

$$\iff A \mathcal{R} C \quad ✓$$

Donc, R est une relation d'ordre.

iii) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ Démonstration par récurrence.

Initialisation :

pour $n=0$

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} i \text{ (avec } n=0) = 0$$

donc $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+2)}{2}$ donc vrai pour $n=0$.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour n, vérifions pour $n+1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + \dots + n + n+1$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.