Equation dynamique :

$x = R\varphi$
$x_c = R\varphi + L\sin\theta$
$z_c = R + L\cos\theta$

$\dot{x} = R\dot{\varphi}$
$\dot{x}_c = R\dot{\varphi} + L\dot{\theta}\cos\theta$
$\dot{z}_c = -L\dot{\theta}\sin\theta$

L'énergie potentielle E_p :

$E_p = mg(R + L\cos\theta) - mg(R+L) = mgL(\cos\theta - 1)$

L'énergie cinétique Ec :

$$E_c = \frac{1}{2} m_w \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_c^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$
$$= \frac{1}{2}(I_w + m_w R^2 + mR^2)\dot{\varphi}^2 + m R L \cos\theta \dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{1}{2}(I + mL^2)\dot{\theta}^2$$

Dérivation du lagrangien

$L = E_c - E_p$

$$= \frac{1}{2}(I_w + m_w R^2 + mR^2)\dot{\varphi}^2 + m R L \cos\theta \dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{1}{2}(I + mL^2)\dot{\theta}^2 - mgL(\cos\theta - 1)$$

Par conséquent, les équations dynamiques pour la coordonnée φ et la coordonnée θ peuvent être dérivées comme suit :

Avec coordonné φ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_w + m_w R^2 + mR^2)\dot{\varphi} + mRL\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = (I_w + m_w R^2 + mR^2)\ddot{\varphi} + m R L \cos\theta\ddot{\theta} - m R L \sin\theta\dot{\theta}^2 = \mu$$

Avec coordonné θ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R L \cos\theta\, \dot{\varphi} + (1 + mL^2)\dot{\theta}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -m R L \dot{\varphi} \sin\theta\ddot{\theta} + mgL\sin\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = (I + mL^2)\ddot{\theta} + m R L \cos\theta\ddot{\varphi} - m g L \sin\theta = \chi$$

μ et χ sont des forces généralisées (couples) pour chaque coordonnée

Nous pouvons réécrire ces équations dynamiques non linéaires dans un style de matrice de second ordre comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Iw} + \mathrm{mw}\,R^2 + \mathrm{m}R^2 & \mathrm{m\,R\,L\,cos\theta} \\ \mathrm{m\,R\,L\,cos\theta} & \mathrm{I} + \mathrm{m}\,L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{m\,R\,L\,sin}\,\theta\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{m\,g\,L\,sin\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \chi \end{pmatrix}$$