



ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS

Département Génie Industriel

Projet Calcul Scientifique Avancé

---

# Résolution du système de la dynamique des gaz isentropiques en une dimension d'espace

---

*Elaboré par :*

BALTI Chaima  
BELHASSEN Aziz

*Encadré par :*

M. AMDOUNI Saber

2<sup>ème</sup> Année MINDS

Année universitaire : 2023/2024

# Remerciements

Nous tenons à exprimer notre sincère reconnaissance envers M.Saber Amdouni, notre professeur de calcul scientifique avancé. Nous lui sommes reconnaissants pour son soutien constant et le temps précieux qu'il nous a consacré tout au long de ce semestre. Enfin, nous sommes également reconnaissants d'avoir eu l'opportunité de travailler sur un sujet aussi passionnant.

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>3</b>
<b>I Résolution du système</b>	<b>5</b>
I.1 Introduction . . . . .	5
I.2 Forme non conservative de notre système . . . . .	5
I.3 Caractérisation des champs 1 et 2 . . . . .	6
I.4 Résolution du problème . . . . .	6
I.4.1 Onde de Choc entropique relative au 1-champ . . . . .	7
I.4.2 Onde de Choc entropique relative au 2-champ . . . . .	9
I.4.3 Onde de Détente entropique relative au 1-champ . . . . .	9
I.4.4 Onde de détente entropique relative au 2-champ . . . . .	11
I.4.5 Onde de détente entropique relative au 2-champ . . . . .	12
<b>II Solution du problème de Reimann dans différents cas</b>	<b>14</b>
II.1 Introduction . . . . .	14
II.2 solution 1-choc 2-choc . . . . .	16
II.3 solution 1-choc 2-détente . . . . .	17
II.4 solution 1-détente 2-choc . . . . .	18
II.5 solution 1-détente 2-détente . . . . .	19
<b>III Résolution numérique du problème</b>	<b>20</b>
III.1 Schémas utilisés . . . . .	21
III.1.1 Schéma de Lax-Friedrichs . . . . .	21
III.1.2 Schéma de Rusanov . . . . .	24
III.1.3 Schéma de HLL (Harten, Lax, van Leer) . . . . .	26

# Table des figures

II.1	Courbes de C1 et C2 . . . . .	15
II.2	1-choc 2-choc . . . . .	16
II.3	1-choc 2-détente . . . . .	17
II.4	1-détente 2-choc . . . . .	18
II.5	1-détente 2-détente . . . . .	19
III.1	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs . . . . .	22
III.2	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs . . . . .	22
III.3	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs . . . . .	23
III.4	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs . . . . .	23
III.5	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Rusanov	24
III.6	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Rusanov	25
III.7	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Rusanov	25
III.8	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Rusanov	26
III.9	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de HLL .	27
III.10	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de HLL .	27
III.11	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de HLL .	28
III.12	la solution exacte et La solution approchée par le schéma de HLL .	28

# Introduction

Dans ce projet, nous analysons le système de la dynamique des gaz isentropiques en une dimension, utilisé pour modéliser le comportement d'un gaz isentropique soumis à des variations de densité, de vitesse et de pression. Cette modélisation repose sur un ensemble d'équations aux dérivées partielles décrivant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Ces équations ont des applications dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie, notamment pour modéliser les ondes de choc et les ondes de détente en dynamique des gaz.

L'objectif de ce projet est de résoudre ce système en utilisant des méthodes analytiques et numériques. Nous débutons par le développement des aspects théoriques nécessaires pour comprendre les solutions analytiques. Ensuite, nous appliquons des méthodes numériques, en particulier les schémas de Lax-Friedrichs, Rusanov et HLL, pour obtenir des solutions approximatives. Enfin, nous comparons les résultats analytiques et numériques afin d'évaluer la précision des solutions approchées.

La réalisation de ce projet nous permet de mieux appréhender les défis et les techniques associés à la résolution des systèmes d'équations différentielles partielles en dynamique des gaz. Par ce travail, nous espérons fournir des outils et des méthodes utiles pour des applications pratiques dans le domaine de la dynamique des fluides et au-delà.

# Chapitre I

## Résolution du système

### I.1 Introduction

Considérons le système de la dynamique des gaz isentropiques dans un espace unidimensionnel :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P(\rho)) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec  $\rho$  représentant la densité du gaz,  $u$  sa vitesse et  $P(\rho) = \rho^\gamma$  la pression ( $\gamma > 1$  est la constante du gaz parfait).

Dans ce chapitre, nous visons à identifier les différents éléments permettant de résoudre le système (1) défini précédemment.

### I.2 Forme non conservative de notre système

Le système (1) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Avec  $U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$  et  $A(U)$  est une matrice carrée d'ordre deux tel que :

$$A(U) = \begin{pmatrix} u & \rho^{\gamma-2} \\ \gamma \rho^{\gamma-1} & u \end{pmatrix}$$

Une fois la matrice  $A(U)$  obtenue, nous calculons les deux valeurs propres associées,  $\lambda_1(U)$  et  $\lambda_2(U)$ .

$$\lambda_1(U) = u - \sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \lambda_2(U) = u + \sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}}$$

À ces valeurs propres, nous associons une base de vecteurs propres  $r_1(U), r_2(U)$  de la manière suivante :

$$r_1(U) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\gamma\rho^{\gamma-3}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r_2(U) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\gamma\rho^{\gamma-3}} \end{pmatrix}$$

On peut donc conclure que notre système (2) est strictement hyperbolique, étant donné que  $A(U)$  est diagonalisable avec des valeurs propres réelles et distinctes ( $\lambda_1(U) \neq \lambda_2(U)$ ).

### I.3 Caractérisation des champs 1 et 2

Les champs 1 et 2 présentent des champs qui sont vraiment non linéaires, en effet on peut vérifier que :

$$\nabla \lambda_1(U) \cdot r_1(U) \neq 0 \quad \text{et} \quad \nabla \lambda_2(U) \cdot r_2(U) \neq 0.$$

### I.4 Résolution du problème

Nous abordons maintenant la résolution du problème de Riemann associé au système de la dynamique des gaz isentropiques. Nous définissons les fonctions  $\rho_0$  et  $u_0$  telles que :

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_G, & \text{si } x > 0 \\ \rho_D, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_0 = \begin{cases} u_G, & \text{si } x > 0 \\ u_D, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Du fait que le système de la dynamique des gaz isentropiques soit strictement hyperbolique et que les deux champs soient vraiment non linéaires, le problème de Riemann associé à ce système possède une solution unique, composée de deux ondes (choc ou détente) séparées par un état intermédiaire :

$$U^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

### I.4.1 Onde de Choc entropique relative au 1-champ

Pour un état  $U_G = \begin{pmatrix} \rho_G \\ u_G \end{pmatrix}$  donné, nous recherchons les états  $U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$  qui peuvent être connectés à  $U_G$  par une onde de choc entropique relative au 1-champ, avec une vitesse  $s_1$ . En effectuant des calculs simples, nous obtenons les équations suivantes :

$$[\rho u] = \rho[u] + u_G[\rho] \quad (4)$$

$$[u^2] = ([u])^2 + 2u_G[u] \quad (5)$$

#### Remarque

Avant d'écrire les relations de Rankine-Hugoniot, nous devons d'abord exprimer notre système sous une forme conservatrice. Cela signifie que nous représentons l'équation (1) sous la forme d'un seul système, comme suit :

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} = 0} \quad (6)$$

Tels que :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P(\rho) \end{pmatrix}$$

#### Relations de Rankine-Hugoniot

La condition de Rankine-Hugoniot s'écrit de la façon suivante :

$$s_1(t) \times [W] = [f(W)] \quad (7)$$

Par suite, les relations de Rankine-Hugoniot sont les suivantes :

$$\begin{cases} s_1(t)[\rho] = [\rho u] \\ s_1(t)[\rho u] = [\rho u^2 + P(\rho)] \end{cases} \quad (8)$$



Tout calcul fait, d'après les équations (4) et (5) ainsi que les équations (8), on peut déduire qu'à travers la ligne de choc on a :

$$\boxed{||[u]|| = \sqrt{\frac{[\rho][P(\rho)]}{\rho\rho_G}}} \quad (9)$$

On montre ainsi facilement que les relations de Rankine-Hugoniot s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} J_1 \equiv \rho(u - s_1) = \rho_G(u_G - s_1) \\ \rho u(u - s_1) - \rho_G u_G(u_G - s_1) = P(\rho_G) - P(\rho) \end{cases} \quad (10)$$

Et on déduit que :

$$\boxed{J_1 = \frac{P(\rho_G) - P(\rho)}{u - u_G}} \quad (11)$$

L'étape suivante c'est de montrer que  $\rho_G < \rho$  et  $u < u_G$  :

On a une onde de choc

$\Leftrightarrow$  La condition de Lax est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_1(U_D) < s_1 < \lambda_2(U_D) \\ s_1 < \lambda_1(U_G) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} s_1 > \lambda_1(U) \Rightarrow s_1 > u - \sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}} \Rightarrow J_1 < \sqrt{\gamma\rho^{\gamma+1}} \\ s_1 < \lambda_2(U) \Rightarrow s_2 < u + \sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}} \Rightarrow J_1 > -\sqrt{\gamma\rho^{\gamma+1}} \\ s_1 < \lambda_1(U_G) \Rightarrow s_1 < u_G - \sqrt{\gamma\rho_G^{\gamma-1}} \Rightarrow J_1 > \sqrt{\gamma\rho_G^{\gamma+1}} \end{cases} \\ \Rightarrow & \sqrt{\gamma\rho_G^{\gamma+1}} < J_1 < \sqrt{\gamma\rho^{\gamma+1}} \Rightarrow \rho_G < \rho \text{ et on connaît que } J_1 > 0 \\ \Rightarrow & \boxed{u < u_G} \end{aligned}$$

d'après l'équation (11) (car la fonction  $\phi \mapsto \sqrt{\gamma\phi^{\gamma+1}}$  est bien croissante).

D'après l'équation (9), on déduit la solution  $u_{C1}$  en fonction de  $u_G$ ,  $\rho_G$  et  $\rho$  :

$$\Rightarrow \boxed{u_1^C = u_G - \sqrt{\frac{[\rho][P(\rho)]}{\rho\rho_G}}} \quad (12)$$

### I.4.2 Onde de Choc entropique relative au 2-champ

Pour un état  $U_D = \begin{pmatrix} \rho_D \\ u_D \end{pmatrix}$  donné, on cherche les états  $U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$  qui peuvent être reliés à  $U_D$  par une onde de choc entropique (de vitesse  $s_2$ ) relative au 2-champ.

En suivant la même démarche précédente et en utilisant les conditions de Rankine-Hugoniot, on montre que :

$$\boxed{J_2 = \frac{P(\rho_D) - P(\rho)}{u - u_D}} \quad (13)$$

Montrons maintenant que  $\rho_D < \rho$  et  $u > u_D$  : On a une onde de choc  $\Leftrightarrow$  la condition de Lax est vérifiée :

$$\begin{cases} \lambda_2(U_D) < s_2 \\ \lambda_1(U) < s_2 < \lambda_2(U) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_2 > \lambda_2(U_D) \Rightarrow s_2 > u_D + \sqrt{\gamma \rho_D^{\gamma-1}} \Rightarrow J_2 < -\sqrt{\gamma \rho_D^{\gamma+1}} \\ s_2 > \lambda_1(U) \Rightarrow s_2 > u - \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-1}} \Rightarrow J_2 < \sqrt{\gamma \rho^{\gamma+1}} \\ s_2 < \lambda_2(U) \Rightarrow s_2 < u + \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-1}} \Rightarrow J_2 > -\sqrt{\gamma \rho^{\gamma+1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\gamma \rho^{\gamma+1}} < J_2 < -\sqrt{\gamma \rho_D^{\gamma+1}} \Rightarrow \rho_D < \rho \text{ et on connaît que } J_2 < 0 \Rightarrow u > u_D$$

d'après l'équation (11) (car la fonction  $\phi \mapsto \sqrt{\gamma \phi^{\gamma+1}}$  est bien croissante).

D'après l'équation (9), on déduit la solution  $u_{C2}$  en fonction de  $u_D$ ,  $\rho_D$  et  $\rho$  :

$$\Rightarrow \boxed{u_2^C = u_D + \sqrt{\frac{[\rho][P(\rho)]}{\rho \rho_G}}} \quad (14)$$

### I.4.3 Onde de Détente entropique relative au 1-champ

Pour un état  $U_G = \begin{pmatrix} \rho_G \\ u_G \end{pmatrix}$  donné, on cherche les états  $U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$  qui peuvent être reliés à  $U_G$  par une onde de détente entropique relative au 1-champ.

En supposant que  $u = u(\rho)$ , le système (1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho u'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} [P'(\rho) - \rho^2 (u'(\rho))^2] = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Or,  $\frac{\partial \rho}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow P'(\rho) = \rho^2 (u'(\rho))^2 \Rightarrow u'(\rho) = \pm \sqrt{\frac{P'(\rho)}{\rho}}$

En intégrant l'expression précédente entre  $\rho_G$  et  $\rho$ , on obtient :

$$u(\rho) \pm \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = u_G \pm \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

On déduit ainsi les invariants de Riemann  $I_1$  et  $I_2$  des 1er et 2ème champs caractéristiques :

$$\begin{cases} I_1 = u + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ I_2 = u - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \end{cases} \quad (16)$$

Ces invariants de Riemann vérifient bien que  $\nabla I_1(U) \cdot r_1(U) = 0$  et  $\nabla I_2(U) \cdot r_2(U) = 0$ .

On sait que pour une onde de détente, on a la conservation des invariants de Riemann ( $I_1(U) = I_1(U_G)$ ) :

$$u + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = u_G + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

On déduit la solution  $u_{D1}$  en fonction de  $u_G$ ,  $\rho_G$  et  $\rho$  :

$$u_1^D = u_G + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( \rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \quad (17)$$

La détente est entropique :

$$\begin{aligned} \lambda_1(U_G) < \lambda_1(U) &\Rightarrow u_G - \sqrt{\gamma \rho_G^{\gamma-1}} < u - \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-1}} \\ \Rightarrow u_G - \sqrt{\gamma \rho_G^{\gamma-1}} &< u_G + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( \rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) - \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-1}} \\ \Rightarrow \left( \sqrt{\gamma} + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \right) &\left( \rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \geq 0 \\ \Rightarrow \rho_G &> \rho \text{ et } u > u_G \end{aligned}$$

Dans la zone de détente, on a :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{x}{t} = u - \sqrt{\gamma \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}} \quad (18)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = u - \frac{x}{t}$$

En utilisant la conservation de l'invariant de Riemann, on aura :

$$u + \frac{2}{\gamma-1} \left( u - \frac{x}{t} \right) = u_G + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

On conclut donc que  $U_{1-\text{det}} = \begin{pmatrix} \rho_{1-\text{det}} \\ u_{1-\text{det}} \end{pmatrix}$ , la solution dans la zone de détente entre  $U_G$  et  $U$  :

$$\Rightarrow U_{1-\text{det}} = \begin{pmatrix} \rho_{1-\text{det}} \\ u_{1-\text{det}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( u - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_G + \frac{2}{\gamma+1} \frac{x}{t} + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}} \end{pmatrix} \quad (19)$$

#### I.4.4 Onde de détente entropique relative au 2-champ

Pour une onde de détente, on a la conservation des invariants de Riemann ( $I_2(U) = I_2(U_D)$ ) :

$$u - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = u_D - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

On déduit la solution  $u_{D2}$  en fonction de  $u_D$ ,  $\rho_D$  et  $\rho$  :

$$u_{D2} = u_D + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \quad (20)$$

La détente est entropique si et seulement si :

$$\begin{aligned} \lambda_2(U_D) \geq \lambda_2(U) &\Rightarrow u_D + \sqrt{\gamma} \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \geq u + \sqrt{\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ \Rightarrow u_D + \sqrt{\gamma} \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} &\geq u_D + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) + \sqrt{\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ \Rightarrow \left( \sqrt{\gamma} + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \right) &\left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) < 0 \\ \Rightarrow \rho_D &> \rho \text{ et } u < u_D \end{aligned}$$

Dans la zone de détente, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{x}{t} &= u + \sqrt{\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \lambda_2(U) \\ \Rightarrow \sqrt{\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} &= \frac{x}{t} - u \end{aligned} \quad (21)$$

### I.4.5 Onde de détente entropique relative au 2-champ

Pour une onde de détente, on a la conservation des invariants de Riemann ( $I_2(U) = I_2(U_D)$ ) :

$$u - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = u_D - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

On déduit la solution  $u_{D2}$  en fonction de  $u_D$ ,  $\rho_D$  et  $\rho$  :

$$u_{D2} = u_D + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \quad (20)$$

La détente est entropique si et seulement si :

$$\lambda_2(U_D) \geq \lambda_2(U) \Rightarrow u_D + \sqrt{\gamma}\rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \geq u + \sqrt{\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_D + \sqrt{\gamma}\rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} &\geq u_D + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) + \sqrt{\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ \Rightarrow \left( \sqrt{\gamma} + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \right) \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) &< 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho_D > \rho \text{ et } u < u_D$$

Dans la zone de détente, on a :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{x}{t} = u + \sqrt{\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \lambda_2(U) \quad (21)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{x}{t} - u$$

En utilisant la conservation de l'invariant de Riemann, on aura :

$$u - \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{x}{t} - u \right) = u_D - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

On conclut donc que  $U_{2-\text{det}} = \begin{pmatrix} \rho_{2-\text{det}} \\ u_{2-\text{det}} \end{pmatrix}$ , la solution dans la zone de détente

entre  $U_G$  et  $U$  :

$$\Rightarrow U_{2-\text{det}} = \begin{pmatrix} \rho_{2-\text{det}} \\ u_{2-\text{det}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{x}{t} - u \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_D + \frac{2}{\gamma+1} \frac{x}{t} - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

## Conclusion

Dans cette section, nous avons mené tous les calculs requis pour déterminer les solutions de notre problème en explorant les différents types d'ondes 1 et 2, qu'il s'agisse de chocs ou de détente. Dans le prochain chapitre, nous synthétiserons les solutions des divers scénarios possibles.

# Chapitre II

## Solution du problème de Reimann dans différents cas

### II.1 Introduction

Considérons :

$$\begin{aligned} S_1^a(U_G) &= \{(v, u_C^1(v)); v < v_G\}, \quad \forall U_G \in \mathbb{R}_+^2 \\ S_2^a(U_D) &= \{(v, u_C^2(v)); v < v_D\}, \quad \forall U_G \in \mathbb{R}_+^2 \\ R_1^a(U_G) &= \{(v, u_D^1(v)); v > v_G\}, \quad \forall U_G \in \mathbb{R}_+^2 \\ R_2^a(U_D) &= \{(v, u_D^2(v)); v > v_D\}, \quad \forall U_G \in \mathbb{R}_+^2 \end{aligned}$$

Pour un  $U_G \in \mathbb{R}_+^2$  donné, les courbes :

$$\begin{cases} C_1(U_G) = S_1^a(U_G) \cup R_1^a(U_G) \\ C_2(U_D) = S_2^a(U_D) \cup R_2^a(U_D) \end{cases}$$

divisent le quart de plan  $\mathbb{R}_+^2$  en quatre zones.

- Nous allons inclure ces quatre zones dans une figure en spécifiant le type de solution du problème de Riemann pour chaque zone (c'est-à-dire, identifier le type de solution du problème de Riemann lorsque  $U_D$  est dans l'une de ces zones).

Soit :

$$U^* = C_1(U_G) \cap C_2(U_D)$$

Nous allons obtenir alors la figure suivante :

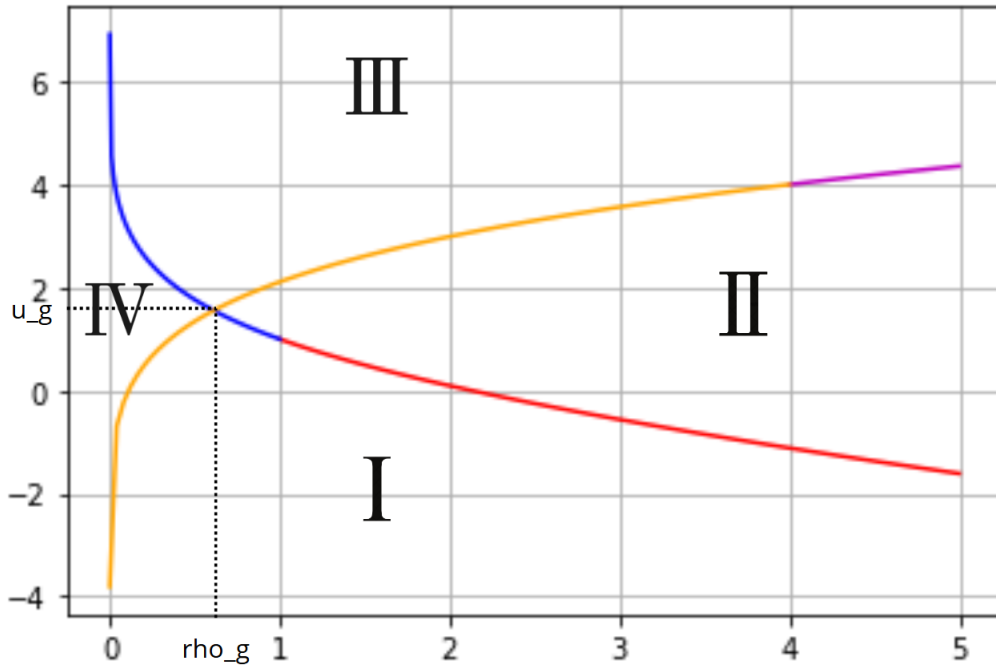


FIGURE II.1 – Courbes de  $C_1$  et  $C_2$

avec :

$$\begin{cases} \text{I : 1-choc 2-choc} \\ \text{II : 1-choc 2-détente} \\ \text{III : 1-détente 2-détente} \\ \text{IV : 1-détente 2-choc} \end{cases}$$

En se basant sur les calculs effectués dans le chapitre 1, on identifie quatre cas distincts pour lesquels nous pouvons fournir la solution du problème de Riemann. Ces solutions sont les suivantes :

- solution 1-choc 2-choc
- solution 1-choc 2-détente
- solution 1-détente 2-choc
- solution 1-détente 2-détente



## II.2 solution 1-choc 2-choc

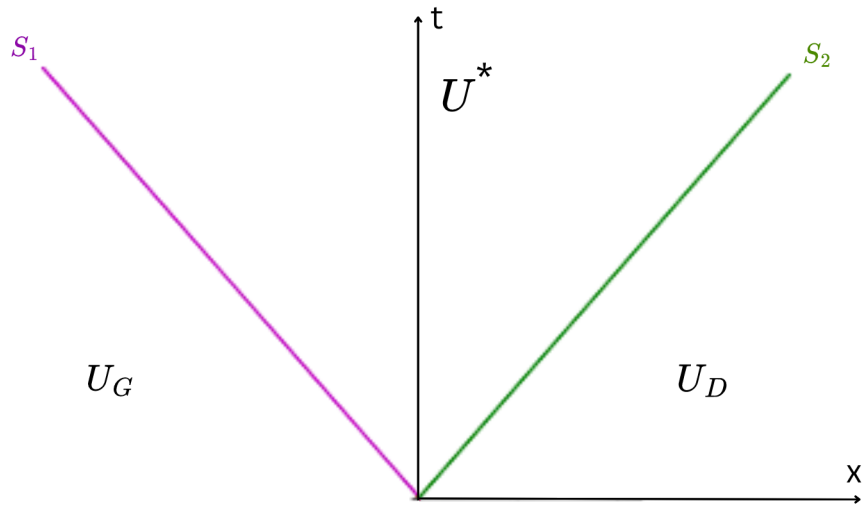


FIGURE II.2 – 1-choc 2-choc

$$U(x, t) = \begin{cases} U_G & \text{si } \frac{x}{t} < s_1(t) \\ U^* & \text{si } s_1(t) < \frac{x}{t} < s_2(t) \\ U_D & \text{si } \frac{x}{t} > s_2(t) \end{cases}$$

## II.3 solution 1-choc 2-détente

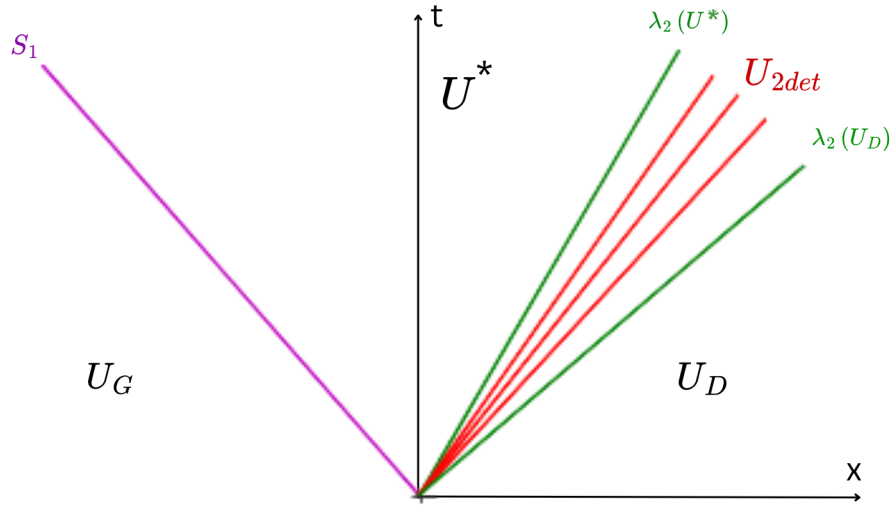


FIGURE II.3 – 1-choc 2-détente

$$U(x, t) = \begin{cases} U_G & \text{si } x/t < s_1(t) \\ U^* & \text{si } s_1(t) < x/t \leq \lambda_2(U^*) \\ U_{2-\det} & \text{si } \lambda_2(U^*) \leq x/t \leq \lambda_2(U_D) \\ U_D & \text{si } x/t \geq \lambda_2(U_D) \end{cases}$$

## II.4 solution 1-détente 2-choc

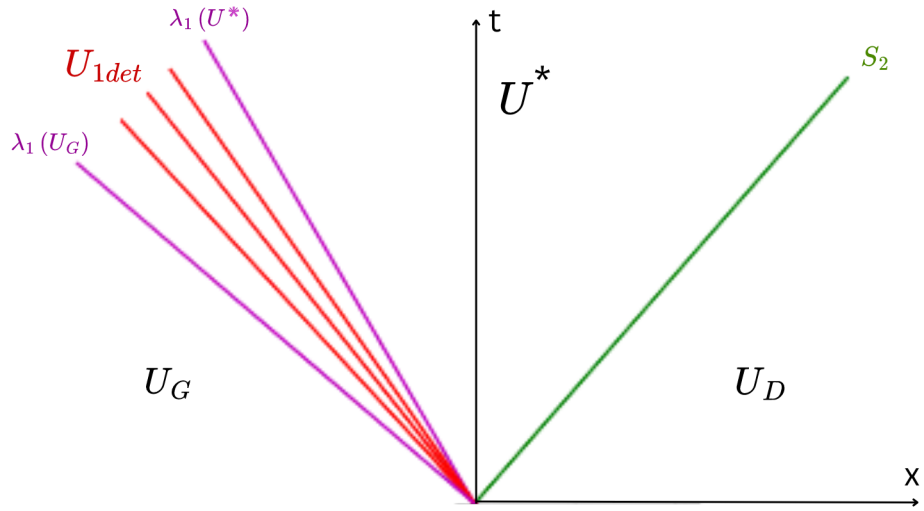


FIGURE II.4 – 1-détente 2-choc

$$U(x, t) = \begin{cases} U_G & \text{si } x/t \leq \lambda_1(U_G) \\ U_{1\text{-det}} & \text{si } \lambda_1(U_G) \leq x/t \leq \lambda_1(U^*) \\ U^* & \text{si } \lambda_1(U^*) \leq x/t < s_2(t) \\ U_D & \text{si } x/t > s_2(t) \end{cases}$$

## II.5 solution 1-détente 2-détente

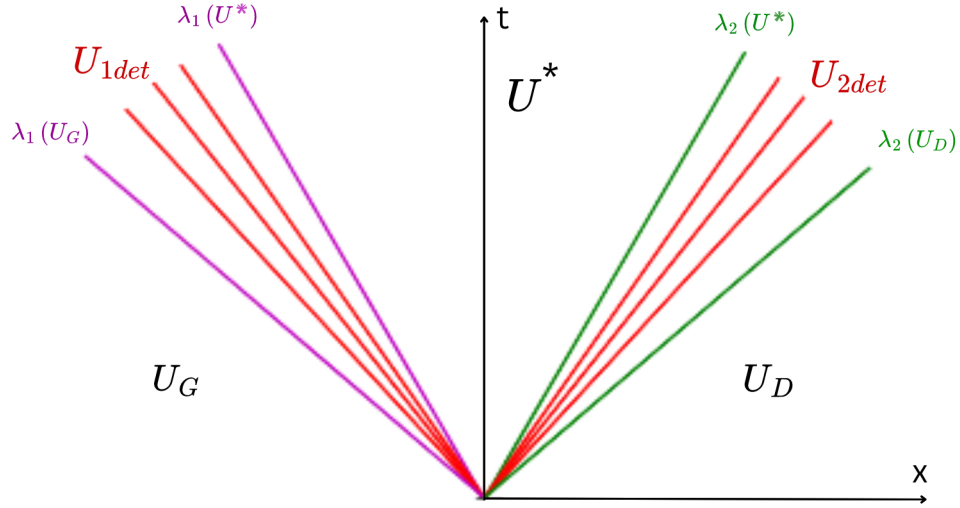


FIGURE II.5 – 1-détente 2-détente

$$U(x, t) = \begin{cases} U_G & \text{si } x/t \leq \lambda_1(U_G) \\ U_{1-det} & \text{si } \lambda_1(U_G) \leq x/t \leq \lambda_1(U^*) \\ U^* & \text{si } \lambda_1(U^*) \leq x/t \leq \lambda_2(U^*) \\ U_{2-det} & \text{si } \lambda_2(U^*) \leq x/t \leq \lambda_2(U_D) \\ U_D & \text{si } x/t \geq \lambda_2(U_D) \end{cases}$$

### Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé la solution exacte de notre problème de Riemann. À présent, il nous faut définir la solution approchée et mettre en œuvre sa résolution en Python. C'est exactement ce que nous examinerons dans le chapitre suivant.

# Chapitre III

## Résolution numérique du problème

Pour la discrétisation de l'équation, nous allons diviser l'intervalle en  $N$  segments de taille  $h = \frac{L}{N}$ . Cela nous donne  $N + 1$  points donnés par

$$x_i = x_{\min} + ih, \quad i \in \{0, 1, \dots, N\}$$

sur lesquels nous cherchons à approcher la solution du problème :

$$u_j^n \approx u(x_j, t_n)$$

Pour ce faire, nous proposons des schémas du type :

$$u_j^{n+1} = H^n(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n), \quad (j, n) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, N_T\}$$

où, afin de prendre en compte les conditions de périodicité, nous posons :

$$\begin{cases} u_{-1}^n = u_N^n, & n \in \{0, \dots, N_T + 1\} \\ u_{N+1}^n = u_0^n, & n \in \{0, \dots, N_T + 1\} \end{cases}$$

Nous supposons que  $u_j^0$ , pour  $j \in \{0, \dots, N\}$ , est une bonne approximation de  $u(x_j, t = 0)$ , ce qui nous permettra d'initialiser le schéma numérique. Le pas de temps  $\Delta t^{(n)}$  sera recalculé à chaque itération par :

$$\Delta t^{(n)} = \frac{\alpha h}{\max_{1 \leq j \leq N} \left( |u_j^n| + \sqrt{\gamma(\rho_j^n)^{\gamma-1}} \right)}$$

où :

$\alpha < 1$  : est un paramètre à choisir au début de la simulation pour respecter la

condition C.F.L.

Il est maintenant utile de rappeler la forme conservative de notre système :

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} = 0}$$

tels que :

$$\boxed{W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{f(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P(\rho) \end{pmatrix}}$$

## III.1 Schémas utilisés

### III.1.1 Schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax-Friedrichs est défini par :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\alpha}{2} (f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n))$$

**Caractéristiques :**

- Facile à implémenter.
- Diffusif (introduit une dissipation numérique).
- Condition de stabilité CFL :  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

## Superposition de la solution exacte et La solution approchée

### 1 Choc - 2 Choc

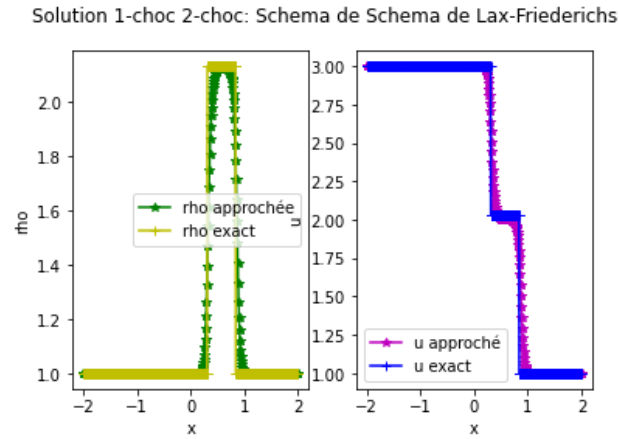


FIGURE III.1 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs

### 1 Choc - 2 Détente

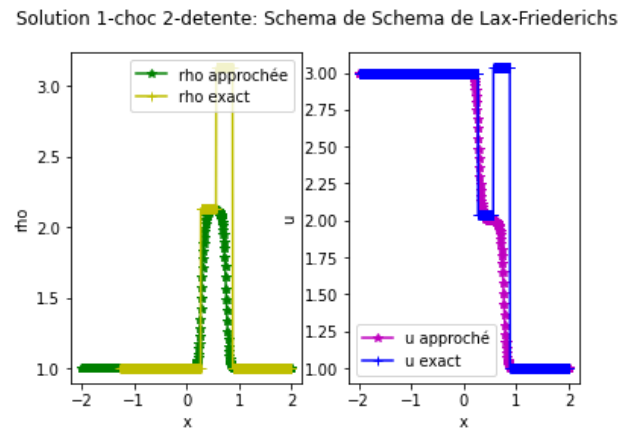


FIGURE III.2 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs

## 1 Détente - 2 Choc

Solution 1-détente 2-choc: Schema de Schema de Lax-Friedrichs

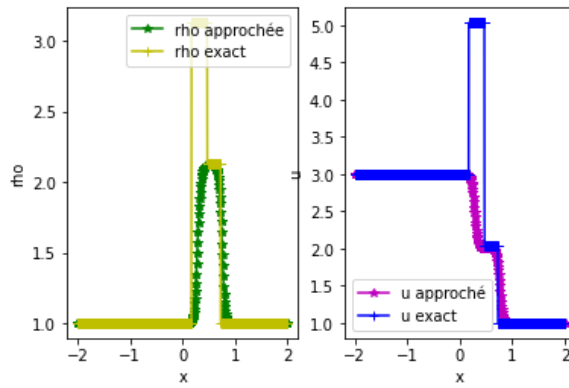


FIGURE III.3 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs

## 1 Détente - 2 Détente

Solution 1-détente 2-détente: Schema de Schema de Lax-Friedrichs

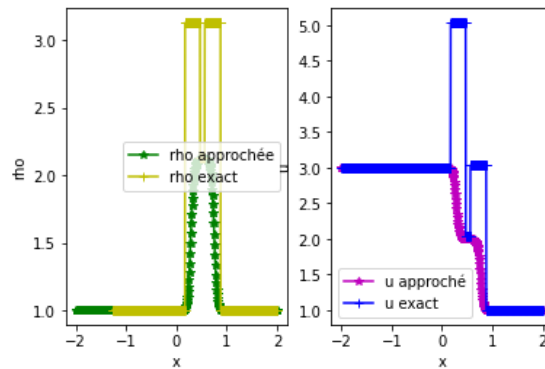


FIGURE III.4 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs



### III.1.2 Schéma de Rusanov

Le schéma de Rusanov, également connu sous le nom de schéma de Lax-Friedrichs modifié, est donné par :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left( f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n) \right) - \frac{c}{2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$$

où  $c$  est le maximum des valeurs propres de  $A(U_{i+1}^n)$  et  $A(U_i^n)$  en valeur absolue.

#### Caractéristiques :

- Moins diffusif que le schéma de Lax-Friedrichs.
- Condition de stabilité CFL :  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a}$ .

#### Superposition de la solution exacte et La solution approchée

##### 1 Choc - 2 Choc

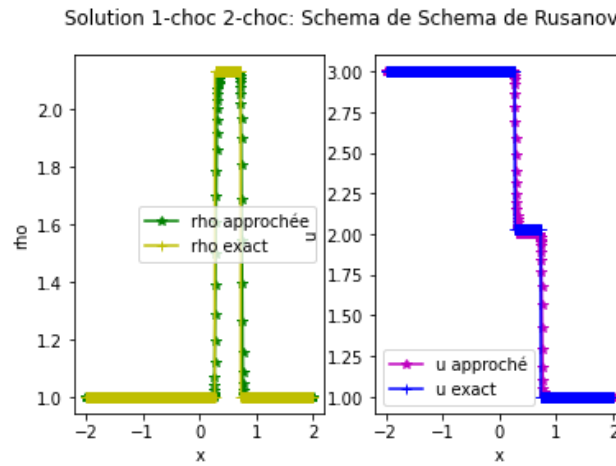


FIGURE III.5 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Rusanov

## 1 Choc - 2 Détente

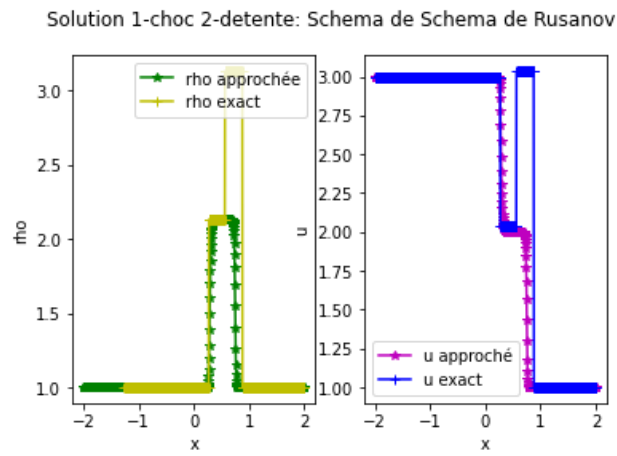


FIGURE III.6 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Rusanov

## 1 Détente - 2 Choc

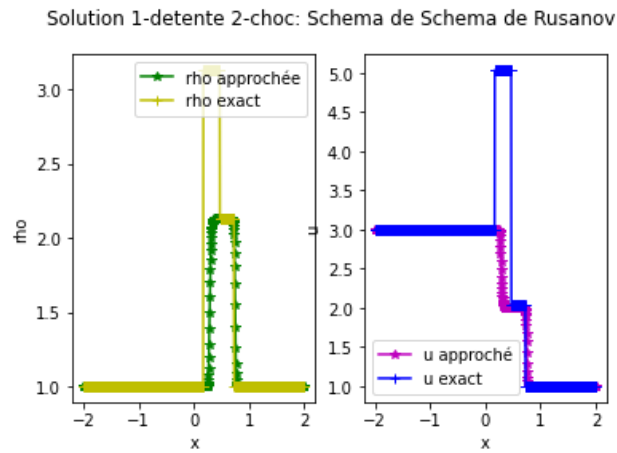


FIGURE III.7 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Rusanov

## 1 Détente - 2 Détente

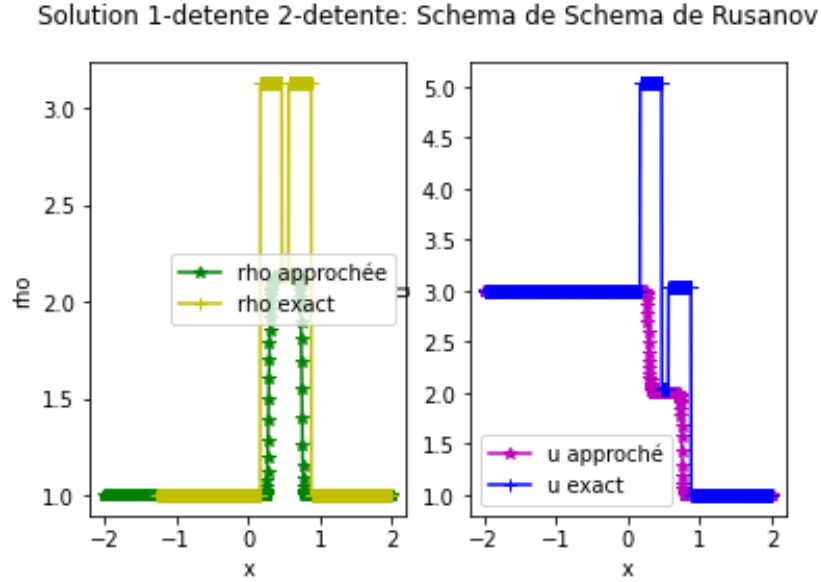


FIGURE III.8 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de Rusanov

### III.1.3 Schéma de HLL (Harten, Lax, van Leer)

Le schéma HLL est défini par :

$$u_i^{n+1} = \frac{\lambda^+ f(u_{i-1}^n) - \lambda^- f(u_{i+1}^n)}{\lambda^+ - \lambda^-} + \frac{\lambda^+ \lambda^-}{\lambda^+ - \lambda^-} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

où  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  sont les vitesses d'onde maximale et minimale, respectivement.

#### Caractéristiques :

- Plus précis que les schémas de Lax-Friedrichs et Rusanov.
- Moins diffusif.
- Condition de stabilité CFL dépendant des vitesses d'onde.

## Superposition de la solution exacte et La solution approchée

### 1 Choc - 2 Choc

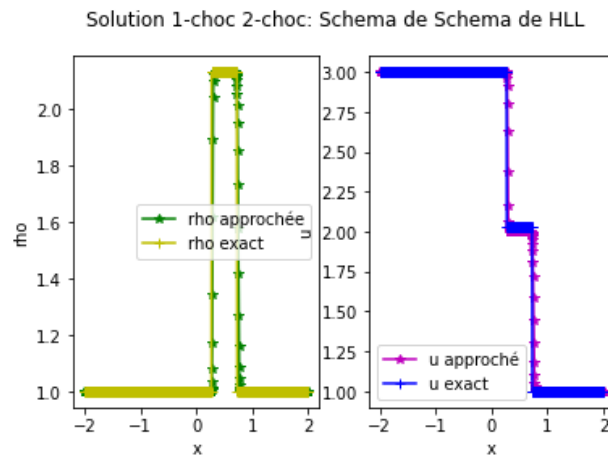


FIGURE III.9 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de HLL

### 1 Choc - 2 Détente

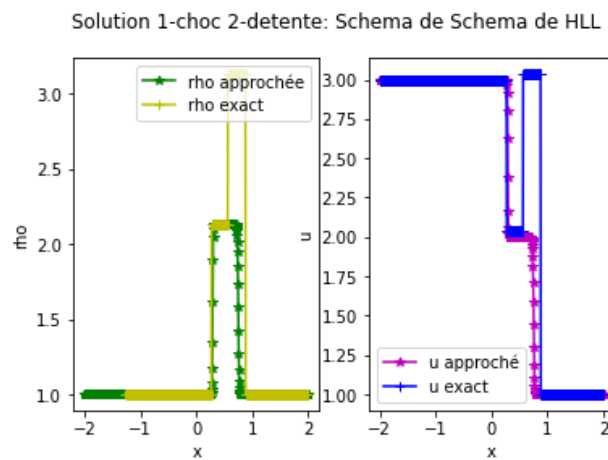


FIGURE III.10 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de HLL

## 1 Détente - 2 Choc

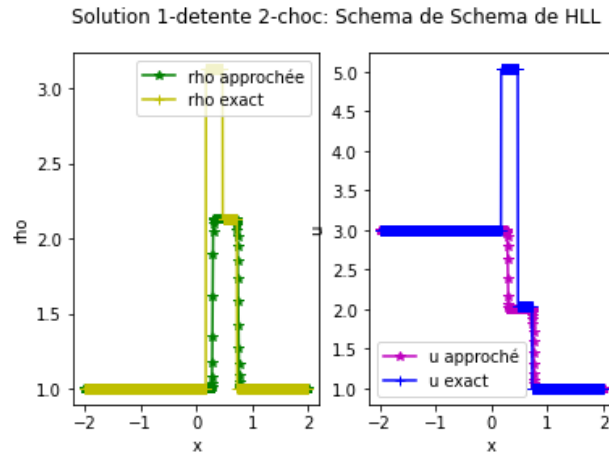


FIGURE III.11 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de HLL

## 1 Détente - 2 Détente

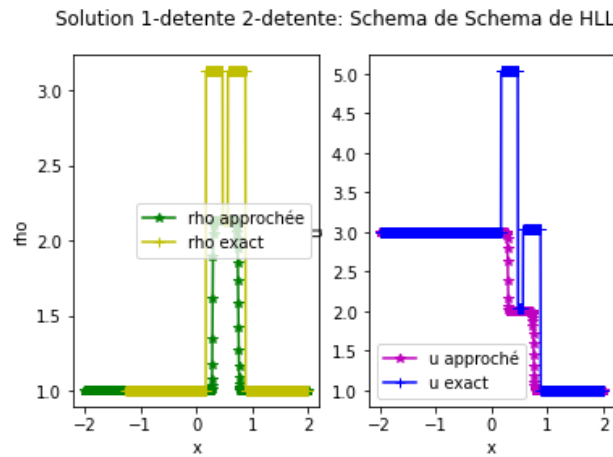


FIGURE III.12 – la solution exacte et La solution approchée par le schéma de HLL

### Conclusion

En conclusion, le choix du schéma dépend du compromis entre la simplicité de mise en œuvre, la précision et la diffusion numérique acceptable pour le problème spécifique à résoudre.

# Conclusion

En guise de conclusion, nous pouvons dire que ce projet nous a permis d'approfondir notre compréhension du système de la dynamique des gaz isentropiques en une dimension et de la complexité associée à la résolution de tels systèmes d'équations différentielles partielles. En combinant des approches analytiques et numériques, nous avons pu obtenir des solutions approximatives et évaluer leur précision.

L'utilisation des schémas numériques de Lax-Friedrichs, Rusanov et HLL nous a offert une perspective pratique sur la manière dont ces méthodes peuvent être appliquées pour modéliser des phénomènes physiques complexes tels que les ondes de choc et les ondes de détente. Les comparaisons entre les résultats analytiques et numériques ont mis en lumière les forces et les limites de chaque approche, nous fournissant ainsi des indications précieuses pour des travaux futurs.

En conclusion, ce projet a non seulement renforcé nos compétences en mathématiques appliquées et en calcul scientifique, mais il a également jeté les bases pour des applications pratiques dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie. Les outils et les méthodes développés ici peuvent être étendus à d'autres problèmes en dynamique des fluides, contribuant ainsi à des avancées technologiques et scientifiques. Nous espérons que notre travail servira de référence et d'inspiration pour de futurs projets dans ce domaine.