# LES EXERCICES DES SUJETS BACCALAURÉAT REGROUPÉS PAR TYPE

# *Les Graphes.*

# BACCALAURÉAT SECTION ECO ET GES

*ANNALES DES Exercices DE MATHÉMATIQUES*
*SESSIONS :*

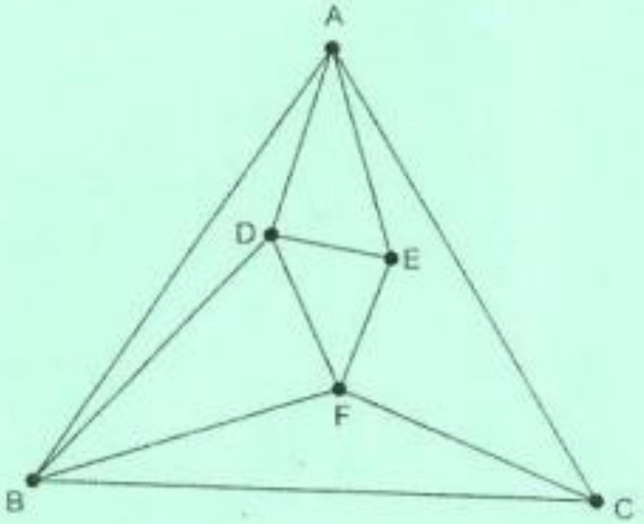
*Principale + Contrôle 2013 **** 2018*

*Proposé par Mr : NAIFAR MED YASSINE*
*LYCEE AHED JADID SKHIRA*

| REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION | EXAMEN DU BACCALAUREAT | |
|---|---|---|
| | Epreuve : MATHEMATIQUES | |
| Section : Économie et gestion | | |

## *Exercice N°1 :* **(5 POINTS) Bac – économie et gestion-2018 (session principale)**

On considère le graphe G ci- contre, dont les sommets sont A, B, C, D, E et F pris dans cet ordre.




1) Justifier que le graphe G est connexe.
2) Justifier que le graphe G admet au moins une chaîne eulérienne et donner un exemple.
3) a) Justifier que le graphe G n'admet pas de cycle eulérien.

   b) Quelle arrête peut-on alors ajouter pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?

4) Déterminer le nombre chromatique du graphe G en expliquant clairement la démarche.

5) Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique)

6) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \\ 11 & 8 & 8 & 11 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 4 & 6 & 5 & 10 \\ 11 & 11 & 6 & 8 & 8 & 11 \\ 10 & 6 & 5 & 8 & 4 & 10 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets C et E et citer toutes ces chaînes.

## *Exercice N°2:* **(5 POINTS) Bac – économie et gestion-2017 (session contrôle)**

La matrice $M=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$ est associée à un graphe orienté G de sommets A ,B,C,D et E dans cet ordre.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant où $d^+$ et $d^-$ représentent respectivement le nombre d'arêtes sortantes et le nombre d'arêtes rentrantes.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| $d^+$ | | | | | |
| $d^-$ | | | | | |

b) Le graphe G admet-il un cycle eulerien? Expliquer.

c) Verifier que G admet une chaine eulerienne .

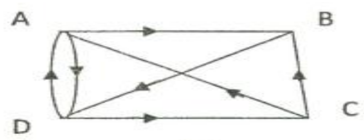
d) Représenter le graphe G et donner un exemple d'une chaîne eulérienne.

2) On donne $M^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&2\\1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$.

**Combien y a-t-il de chaines de longueur 2 reliant le sommet B au sommet E ?**

## *Exercice N°3:* **(5 POINTS) Bac – économie et gestion-2016 (session principale)**

On considère le graphe orienté (G) ci-contre




(G)

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| $d^+$ | 2 | | | |
| $d^-$ | | | 1 | |

2) Répondre par « Vrai » ou « Faux », en justifiant la réponse à chacune des affirmations suivantes :

a) Le graphe (G) admet une chaine orientée eulérienne.

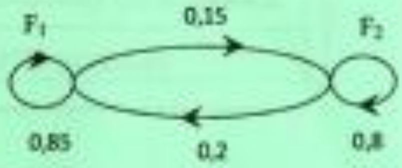
b) Le graphe (G) admet un cycle orienté eulérien.

c) La matrice associée au graphe (G) en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique est $\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

## *Exercice N°4:* **(5 POINTS) Bac – économie et gestion-2016 (session contrôle)**

Un commerçant commande chaque semaine ses besoins auprès de l'un de deux fournisseurs $F_1$ et $F_2$. Le choix de l'un de deux fournisseurs d'une semaine à l'autre est modélisé par le graphe probabiliste (G) ci-contre où :

- Le sommet $F_1$ désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur $F_1$ ».
- Le sommet $F_2$ désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur $F_2$ ».




(G)

1) a) Lorsque la commande est passée auprès du fournisseur $F_1$, quelle est la probabilité qu'elle le soit encore la semaine suivante ?

b) Recopier et compléter la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,85 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ de ce graphe en prenant les sommets $F_1$ et $F_2$ dans cet ordre.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par :

- $a_n$ la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est passée auprès du fournisseur $F_1$ » ;
- $b_n$ la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est passée auprès du fournisseur $F_2$ » ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste pour la semaine n.

Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

3) On donne $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ et on admet que pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4+3(0,65)^n & 3-3(0,65)^n \\ 4-4(0,65)^n & 3+4(0,65)^n \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $7P_1M^{n-1} = \begin{pmatrix} 4-(0,65)^{n-1} & 3+(0,65)^{n-1} \end{pmatrix}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n , $a_n - b_n = \dfrac{1-2(0,65)^{n-1}}{7}$.

c) Déterminer le rang de la semaine où, pour la première fois, la probabilité que le commerçant commande ses fournitures auprès du fournisseur $F_1$ dépasse la probabilité que le commerçant commande ses fournitures auprès du fournisseur $F_2$.

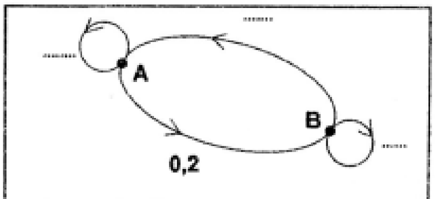
## *Exercice N°5 :* **(4 POINTS) Bac – économie et gestion-2015 (session principale)**

Une compagnie d'assurance propose deux formules A et B d'assurance autos.

Une personne désirant s'affiler à cette compagnie choisit **une seule** de ces deux formules.

- Au bout d'une année, chaque affilé peut garder la même formule ou changer de formule l'année suivante.
- La probabilité qu'un affilé à la formule A change de formule, vers la formule B, l'année suivante est égale 0,2.

Le graphe G ci-contre est le graphe probabiliste décrivant l'évolution du choix de l'affilé d'une année à l'autre.



Le graphe G

Soit $M=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}$ la matrice de transition associée au graphe G.

1) Recopier et compléter le graphe G.
2) Donner :
   a) La probabilité qu'un affilé à la formule B garde la même formule B l'année suivante.
   b) La probabilité qu'un affilé à la formule B change de formule, vers la formule A, l'année suivante.
3) Soit $P_0 = (0{,}3 \quad 0{,}7)$ la matrice ligne qui décrit l'état initial. Donner la matrice ligne $P_1$ décrivant l'état probabiliste après une année.
4) Montrer que la matrice $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

## *Exercice N°6:* **Bac – économie et gestion-2015 (session contrôle)**

*Pour chaque question une seule des trois réponses proposées est exacte. Recopier, chaque fois, sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.*

**I-** Soit G un graphe non orienté dont la matrice associée est $M=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

1) L'ordre du graphe G est égal à
   a) 5 b) 6 c) 12
2) Le graphe G :
   a) est complet b) admet une chaine eulérienne c) admet un cycle eulérien.

**II-** Soit $(u_n)$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=-1+(0{,}9)^n$

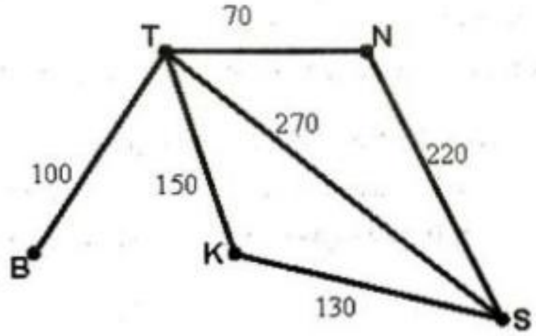
1) La suite $(u_n)$ est
   a) croissante b) décroissante c) n'est pas monotone
2) La limite de $u_n$ quand $n\to+\infty$ est égale à
   a) $-1$ b) $0$ c) $+\infty$

## *Exercice N°7:* **(4.5 POINTS) Bac – économie et gestion-2014 (session principale)**

On considère le graphe pondéré ci-contre de sommets B, K, N, S et T.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

| Sommet | B | K | N | S | T |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | | | | | |




b) Justifier que ce graphe admet au moins une chaîne eulérienne et donner un exemple.

2) Déterminer la matrice A associée à ce graphe, en respectant l'ordre B-K-N-S-T.

3) On admet que $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

a) Combien de chaines de longueur 3 reliant S à B ?

b) Combien de chaines de longueur 3 reliant S à T ?

4) Une entreprise vient de s'installer en Tunisie dont la direction administrative à Tunis, l'atelier à Sfax et les points de distribution autres que les deux villes citées sont à Béja, à Kairouan et à Nabeul. On donne les distances approximatives en km de :
Tunis à Nabeul (70), Tunis à Kairouan (150), Tunis à Béja (100), Tunis à Sfax (270), Sfax à Nabeul (220) et Sfax à Kairouan (130).
Déterminer les chemins reliant Sfax à Béja passant exactement par deux autres villes.

5) Déterminer le chemin le plus court entre Sfax et Béja.

## *Exercice N°8:* **Bac – économie et gestion-2014 (session contrôle) (4 POINTS)**

On considère un graphe G, de sommets A, B, C, D et E, dont la matrice associée est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) a) Justifier que G est un graphe non orienté.

b) Représenter le graphe G et donner son ordre.

2) Compléter le tableau suivant :

| Sommet | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | | | | | |

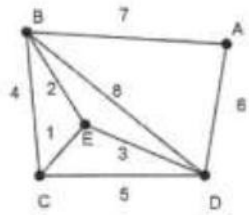
3) a) Donner un sous graphe complet d'ordre 3.

b) On note $\gamma(G)$ le nombre chromatique du graphe G. Justifier que :

$$3 \leq \gamma(G) \leq 5.$$

4) Après avoir classé les sommets dans l'ordre de degré décroissant, colorier le graphe G et en déduire le nombre chromatique $\gamma(G)$.

# *Exercice N°9:* **Bac – économie et gestion-2013 (session principale) (4.5 POINTS)**




On considère le graphe pondéré G ci-contre, dont les sommets sont

A, B, C, D et E pris dans cet ordre.

Répondre à chacune des questions suivantes par Vrai ou Faux,

en justifiant à chaque fois la réponse.

1. Le graphe G est complet.
2. La matrice associée au graphe G est :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Le graphe G admet un cycle eulérien.
4. Le graphe G admet une chaine eulérienne.
5. Le nombre chromatique du graphe G est égal 4.
6. La longueur du chemin le plus court du sommet A au sommet C est égale 11.

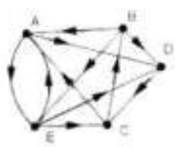
# *Exercice N°10 :* **Bac – économie et gestion-2013 (session contrôle)**

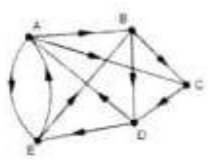
*Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.*
*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*

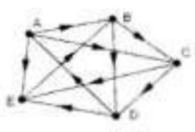
4. On considère un graphe orienté G de sommets A, B, C, D et E, dans cet ordre, dont la matrice

associée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le graphe G peut être schématisé par :

a) 


b) 

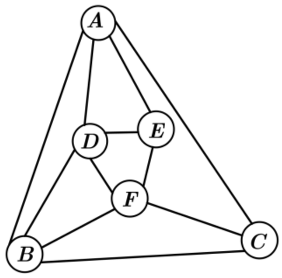

c) 

# *Exercice N°1:* **(corrigé)** **-2018 (session principale)**

**1)** *Le graphe G est connexe car on peut relier deux quelconques de ses sommets par une chaine. (c'est un graphe en un seul morceau) Exemple :A-B-D-E-F-C .*

**2)** *Pour ce graphe G les sommets A, B, C, D ,E et F ont respectivement pour degré :*

| Sommets | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |




* *Dans le graphe G, C et E sont Les seuls sommets de degré impairs alors d'après le théorème d'Euler le graphe G admet au moins une chaîne eulérienne « part » d'un de sommet de degré impair et «arrive» sur un sommet de degré impair.*

*Exemples : (E -A - C –F-E-D-F-B-D-A-B-C) ou bien (C-A-E-F-D-A-B-F-C-B-D-E).*

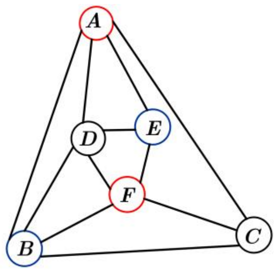
**3)** *a) D'après le théorème d'Euler, G admet un sommet (C) de degré 3 impaire donc il n'admet pas de cycle eulérien.*

*b) On peut relier les deux sommets C et D du graphe G par une arrête pour avoir un cycle eulérienne. ( car tous les sommets seront de degré paire.)*

4) *On a le plus grand degré du graphe ci-contre est 4 (sommet A) donc $\Delta = 4+1 = 5$ et le sous-graphe complet le «plus grand» est celui composé des sommets F, B et C On a donc k= 3 et $\Delta = 5$ d'où $k = 3 \leq$ **nombre chromatique** $\leq \Delta+1=5$ **sig** $3 \leq \gamma\ (G) \leq 5$ .*

* *coloriage du graphe G: On applique l'algorithme de Welsh et Powell*

*On range les sommts dans l'ordre décroissant de leur degré .*




*e*

| Sommets | A | B | D | F | C | E |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| Couleurs | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_1$ | $C_3$ | $C_2$ |

*on trouve qu'il suffit 3 couleurs pour colorer le graphe G .Puisque le graphe G contenant un sous-graphe complet d'ordre 3 et on a réussi de le colorier avec trois couleurs alors on peut affirmer que le nombre chromatique est :* $\boxed{\gamma\ (G) = 3}$.

*Les sommets sont écrits dans l'ordre alphabétique. la matrice M associée au graphe G*

5) *Les sommets sont écrits dans l'ordre alphabétique. la matrice M associée au graphe G*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Le graphe G est simple.La matrice $M^3$ nous permet d'affirmer qu'il existe5 ( $a_{35} = a_{53} = 5$ de la matrice $M^3$ )chaines de longueur 3 reliant les sommets C et E : C-A-D-E /C-B-A-E /C-F-D-E/C-B-F-E/C-B-D-E

$$M^3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \\ 11 & 8 & 8 & 11 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 4 & 6 & 5 & 10 \\ 11 & 11 & 6 & 8 & 8 & 11 \\ 10 & 6 & 5 & 8 & 4 & 10 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

## *Exercice N°2:* **(corrigé) 2017** **(session contrôle)**

1) a) Nombre d'arêtes sortantes et le nombre d'arêtes rentrantes :

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| $d^+$ | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| $d^-$ | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |

b) $d^+ \neq d^-$ pour les sommets B et E donc G n'admet pas de cycle eulérien.

c) Pour les sommets A, C et D : $d^+ = d^-$ .

Pour le sommet B : $d^+ = d^- + 1$.

Pour le sommet E on a $d^+ = d^- - 1$ .

Donc G admet une chaine eulérienne.

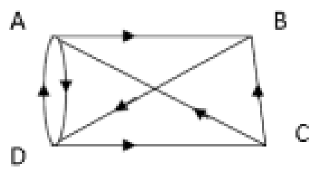
d) Exemple de chaine eulérienne : B-D-A-C-D-E.

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il ya 2 chaines de longueur 2 reliant le sommet B à E.

## *Exercice N°3:* **(corrigé)** **Bac – économie et gestion-2016 (session principale)**

1)

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| $d^+$ | 2 | 1 | 2 | 2 |
| $d^-$ | 2 | 2 | 1 | 2 |



(G)

2)a) Le graphe (G) admet une chaine orientée eulérienne (vrai)

Dans le graphe (G), on a $d^+(A) = d^-(A)$ et $d^+(D) = d^-(D)$ et pour les sommets B et C seulement on a $d^+(B) = d^-(B) - 1$ et $d^+(C) = d^-(C) + 1$, d'où le graphe (G) admet une chaine orientée eulérienne.

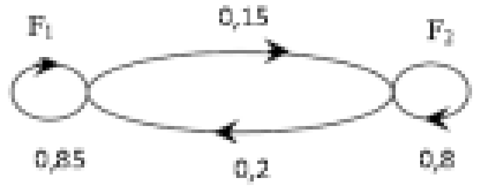
b) Le graphe (G) admet un cycle orienté eulérien (faux)

Dans le graphe (G) il y a des sommets tels que $d^+ \neq d^-$ (les sommets B et C), donc (G) n'admet pas de cycle orienté eulérien.

c) La matrice associée au graphe (G) en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (faux)

On a $d^+(A)$ est la somme des termes de la première ligne de la matrice associée au graphe (G). On a $d^+(A) = 2$ et la somme des termes de la première ligne de cette matrice est 3, ainsi cette matrice n'est pas celle associée au graphe (G).

## *Exercice N°4:* **(corrigé)** **Bac – économie et gestion-2016 (session contrôle)**




1)a) La probabilité est passée auprés du fournisseur F1. La probabilité qu'elle le soit encore la semaine suivante est $p(F_1 / F_1) = 0,85$.

b) La matrice de transition du graphe $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

2) Pour tout entier naturel non n, on désigne par :

- $a_n$ la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est auprés du fournisseur F1 ».
- $b_n$ la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est auprés du fournisseur F2».
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste pour la semaine n.

$$P \times M = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \times 0,85 + \frac{3}{7} \times 0,2 & \frac{4}{7} \times 0,15 + \frac{3}{7} \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = P.$$

$P \times M = P$, d'où la matrice P traduit l'état stable de la situation.

3) $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ ; $M^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 + 3(0,65)^n & 3 - 3(0,65)^n \\ 4 - 4(0,65)^n & 3 + 4(0,65)^n \end{pmatrix}$

a) $$7 P_1 M^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 + 3(0,65)^{n-1} & 3 - 3(0,65)^{n-1} \\ 4 - 4(0,65)^{n-1} & 3 + 4(0,65)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\left(4 + 3(0,65)^{n-1}\right) + \frac{4}{7}\left(4 - 4(0,65)^{n-1}\right) & \frac{3}{7}\left(3 - 3(0,65)^{n-1}\right) + \frac{4}{7}\left(3 + 4(0,65)^{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - (0,65)^{n-1} & 3 + 4(0,65)^{n-1} \end{pmatrix}$$

b) $$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = P_1 M^{n-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 - (0,65)^{n-1} & 3 + (0,65)^{n-1} \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{cases} a_n = \frac{1}{7}\left(4 - (0,65)^{n-1}\right) \\ b_n = \frac{1}{7}\left(3 + (0,65)^{n-1}\right) \end{cases}$

$$a_n - b_n = \frac{1}{7}\left(4 - (0,65)^{n-1}\right) - \frac{1}{7}\left(3 + (0,65)^{n-1}\right) = \frac{1}{7}\left(1 - 2(0,65)^{n-1}\right) = \frac{1 - 2(0,65)^{n-1}}{7}.$$

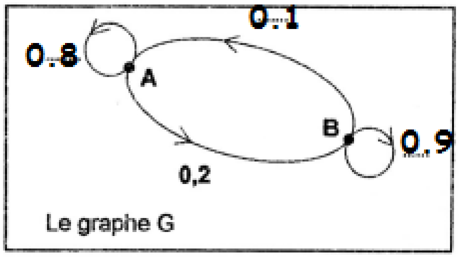
c) Le rang de la semaine où, pour la première fois, la probabilité que le commerçant commande auprès du fournisseur $F_1$ dépasse la probabilité que le commerçant commande auprès du fournisseur $F_2$ :

$$a_n > b_n \Leftrightarrow a_n - b_n > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-2(0,65)^{n-1}}{7} > 0$$
$$\Leftrightarrow 1-2(0,65)^{n-1} > 0$$
$$\Leftrightarrow 2(0,65)^{n-1} < 1$$
$$\Leftrightarrow (0,65)^{n-1} < \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < -\ln 2$$
$$\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < -\ln 2$$
$$\Leftrightarrow n-1 > -\frac{\ln 2}{\ln(0,65)}$$
$$\Leftrightarrow n > 1-\frac{\ln 2}{\ln(0,65)} \approx 2,61$$

D'où le rang $n = 3$.

## *Exercice N°5:* (corrigé) Bac – économie et gestion-2015 (session principale)

### Graphe probabiliste




1. *a) La probabilité qu' un affilé à la formule B garde la même formule B l'année suivante est égale : 0.9 .*

   *b) La probabilité qu' un affilé à la formule B change de formule vers la formule B l'année suivante est égale : 0.1 .*

2. La matrice ligne qui d'écrit l'état initial : $P_0 = (1 \;\; ; 0)$

   et $M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$ la matrice de transition De $G$ d'ordre 2.

   alors $P_1 = P_0 \times M$ . sig $P_1 = (Gf, Cf) = (0.3 \quad 0.7) \times \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = (0.31 \quad 0.69)$

   Sig $P_1 = (0.31 \quad 0.69)$

3. Pour montrer que la matrice $P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ traduit l'état stable de la situation il suffit de vérifier que $P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ est l'unique solution de l'équation matricielle

   $X = X \times M$

   $$P \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{30} + \frac{2}{30} & \frac{2}{30} + \frac{18}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

   Conclusion : $P \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = P$ donc $P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ traduit l'état stable .

## *Exercice N°6:* (corrigé) Bac – économie et gestion-2015 (session contrôle)

| I) | | II) | |
|---|---|---|---|
| 1) | 2) | 1) | 2) |
| a | b | b | a |

## *Exercice N°7:* (corrigé) Bac – économie et gestion-2014 (session principale)

1)a) Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
Ainsi on a :

| Sommet | B | K | N | S | T |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |

b) On peut remarquer que le graphe donné est connexe, puisqu'on peut relier deux quelconques de ces sommets par une chaîne. En plus deux seulement de ces sommets sont de degré impair. D'où le graphe donné admet au moins une chaîne eulérienne.

Exemples de chaînes eulériennes : B-T-K-S-N ; K-S-N-T-B ; N-S-K-T-B.

2) En respectant l'ordre B-K-N-S-T, la matrice A de ce graphe est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) On admet que $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

a) Pour déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant S à B, on lit dans la matrice $A^3$, $N = 2$.

b) Pour déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant S à T, on lit dans la matrice $A^3$, $N = 6$.

4) On peut présenter la situation par le graphe donné.

Il est clair que les chemins reliant Sfax à Béja passant exactement par deux autres villes sont :

Sfax-Nabeul-Tunis-Béja ; Sfax-Kairouan-Tunis-Béja.

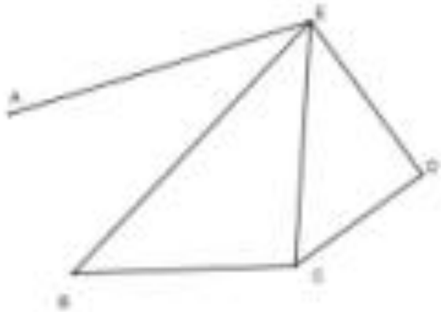
## *Exercice N°8:* **(corrigé)** **Bac – économie et gestion-2014(session contrôle)**

G un graphe de sommets A, B, C, D et E et dont la matrice associée est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1)a) On peut remarquer que la matrice M est symétrique par rapport à sa diagonale, donc le graphe G n'est pas orienté.

b) L'ordre du graphe G (le nombre de sommets) est 5.



2)

| Sommet | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 |

3)a) Un sous graphe complet d'ordre 3, du graphe G, est un sous graphe de G, d'ordre 3 et dont chaque sommet est adjacent aux deux autres.

On a les sous graphes E-C-D et E-B-C sont deux sous graphes complets de G, d'ordre 3.

b) On note $\gamma(G)$ le nombre chromatique du graphe G.

Le nombre chromatique $\gamma(G)$ du graphe G est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets, donc $\gamma(G) \geq 3$.

D'autre part le plus grand degré des sommets de G est 4 (degré de E), d'où $\gamma(G) \leq 4 + 1 = 5$. On a ainsi $3 \leq \gamma(G) \leq 5$.

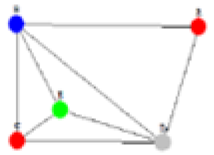
4) On ordonne les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés : E-C-B-D-A.

On attribue une couleur $C_1$ au sommet E. Tous les autres sommets sont adjacents à E, donc on ne peut pas attribuer cette couleur une autre fois. On attribue une couleur $C_2$ au sommet C, on peut attribuer cette couleur au sommet A puisqu'il n'est pas adjacent à C. On peut attribuer aux sommets B et D la même couleur $C_3$. Ainsi $\gamma(G) = 3$.

## *Exercice N°9:* (corrigé)_Bac – économie et gestion-2013 (session principale)

1) Le graphe G est complet. **Faux**
   Les sommets A et C ne sont pas reliés par une arête, donc le graphe G n'est pas complet.
2) La matrice associée au graphe G est la matrice M. **Faux**
   Dans le graphe G, il y a une arête qui relie les sommets B et D.
3) Le graphe G admet un cycle eulérien. **Faux**
   Il existe des sommets de degré impair donc G n'admet pas un cycle eulérien.
   Les sommets C et E sont de degré impair.
4) Le graphe G admet une chaine eulérienne. **Vrai**
   Il existe exactement deux sommets de degré impair (C et E), donc le graphe G admet une chaine eulérienne.
5) Le nombre chromatique du graphe G est égal 4. **Vrai**

| Sommet | B | D | C | E | A |
|---|---|---|---|---|---|
| degré | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| couleur | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_3$ |



6) La longueur du chemin le plus court du sommet A au sommet C est égale 11. **Faux**
   La longueur du chemin le plus court du sommet A au sommet C est 10. Les chemins les plus courts sont : A-B-E-C et A-D-E-C.

| A | B | D | E | C | - |
|---|---|---|---|---|---|
| A(0) | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | A(0) |
| | A(7) | A(6) | $\infty$ | $\infty$ | D(6) |
| | ~~D(14)~~ A(7) | | D(9) | D(11) | B(7) |
| | | | B(9) ou D(9) | B(11) ou D(11) | E(9) |
| | | | | E(10) | C(10) |

Le chemin le plus court de A à C est :

A-D-E-C ou bien A-B-E-C

Est de longueur : 10

## *Exercice N°10 :* (corrigé) Bac – économie et gestion-2013 (session contrôle)

On procède par élimination :

D'après la matrice donnée on a :

- un seul arc d'origine C, c'est l'arc $(C \to D)$. Donc le schéma en c) n'est pas convenable puisqu'il y a deux arcs d'origine C : $(C \to D)$ et $(C \to E)$.
- 3 arcs d'origine A : $(A \to B), (A \to C)$ et $(A \to E)$. Donc le schéma en a) n'est pas convenable puisqu'il n'y a pas l'arc $(A \to B)$. d'origine A et d'extrémité B.

La réponse est donc en b).