弹性力学平面直梁问题的一种通用求解策略[1)]

陈李子晨[*]　张春利[*,†]　沈旭栋[†]　陈伟球[*,†,2)]

[*](浙江大学工程力学系，杭州 310027)

[†](浣江实验室软体机器人与智能器件研究中心，浙江诸暨 311816)

摘要　不同边界条件下狭长等矩形截面直梁在各种载荷作用下的响应分析是弹性力学平面问题教学的主要内容之一。针对直梁的主要边界受多项式载荷作用这一情形，介绍一种通用的理性求解策略，即根据载荷形式确定应力函数形式，进而利用严谨的数学推导一步一步获得多项式形式的弹性力学解析解。针对线性分布载荷作用下一端简支一端固支的直梁，给出了应力函数的解析表达式，通过与基于有限元法的应力计算结果的对比，验证了其正确性。

关键词　直梁，应力函数，通用策略，圣维南原理

中图分类号: O343　　DOI: 10.6052/1000-0879-24-086

文献标识码: A　　CSTR: 32047.14.1000-0879-24-086

A GENERAL STRATEGY FOR SOLUTIONS OF PLANE ELASTICITY PROBLEMS OF STRAIGHT BEAMS[1)]

CHEN Lizichen[*]　ZHANG Chunli[*,†]　SHEN Xudong[†]　CHEN Weiqiu[*,†,2)]

[*](Department of Engineering Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

[†](Center for Soft Machines and Smart Devices, Huanjiang Laboratory, Zhuji 311816, Zhejiang, China)

Abstract　Response analyses of narrow straight beams of uniform rectangular cross-section with different end conditions subject to various loads are the main content of plane problems in the course of elasticity. For the cases of the beam subject to polynomial loads on the main boundaries, a general rational solution strategy is introduced here. The form of stress function is solely determined according to the form of load, based on which an analytical elasticity solution in polynomial form may be derived step-by-step by strict mathematical derivations. For a straight beam subject to a linearly distributed load, with one end simply-supported and the other fixed, the analytical expression for the stress function is presented, with its correctness verified by comparing the theoretical stress results with the finite element modeling.

Keywords　straight beam, stress function, general strategy, Saint Venant’s principle

学习弹性力学知识，在利用已建立的三维数学弹性理论进行具体问题的求解时，除了若干简单问题外，首先碰到的是平面问题。其中，各种边界条件下狭长等矩形截面均质各向同性材料直梁（以下简称直梁）在不同载荷作用下的响应分析又是主要的学习内容。通过对这些典型问题求解思路和过程的学习，不仅能加深对弹性力学平面问题应力（函数）解法的认识，也能为实际工

2024–02–23 收到第 1 稿，2024–03–18 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金项目（12192211，12192210）资助。

2) 陈伟球，教授，主要研究方向为智能材料与多场耦合力学、连续体的振动和波动。E-mail：chenwq@zju.edu.cn

引用格式: 陈李子晨, 张春利, 沈旭栋等. 弹性力学平面直梁问题的一种通用求解策略. 力学与实践, 2024, 46(6): 1271-1277

Chen Lizichen, Zhang Chunli, Shen Xudong, et al. A general strategy for solutions of plane elasticity problems of straight beams. *Mechanics in Engineering*, 2024, 46(6): 1271-1277

程中直梁问题的解析分析奠定坚实的基础。

在大多数教科书里，考虑到各种直梁问题的特征有所区别，因此采用的求解思路也并不一致。例如，在经典教材 [1] 中，通过与多项式应力函数给出的应力形式进行匹配，解析求解了端部横向集中力作用下悬臂直梁的弯曲和均布载荷作用下直梁的弯曲这两个弹性力学平面问题。国内徐芝纶[2] 讨论了简支直梁受均布载荷作用下的弯曲，其分析的思路是：考虑到载荷沿轴向均匀分布，因此假设横向正应力沿轴向也保持不变。陆明万等[3] 从应力函数及其导数的物理意义出发，给出了受横向均布载荷和端部力/力矩共同作用下的悬臂直梁弯曲的解答。吴家龙[4] 把相关问题分析的灵活性展现得淋漓尽致，例如在考虑简支直梁受均布载荷作用下的弯曲问题时，给出了基于材料力学解的修正解。在最近出版的教材 [5] 中，给出了固支直梁受均布载荷作用下的解析解，其多项式形式的应力函数是引用文献成果[6] 直接给出的。杨振宇等[7] 最近以悬臂直梁为例，针对简单载荷、梯度分布载荷、常体力等几种典型载荷情形，总结给出了 3 种弹性力学解析求解方法，即应力函数解法、应力分量解法和等效解法。

不同的求解方法确实可以展示弹性力学问题灵活多变的求解思路，锻炼并夯实学生的思辨能力，但也可能给一部分初学者以高深莫测之感，容易带来学习上的困惑，并进而影响学习效果。事实上，对直梁问题的求解，存在一个基本的出发点，即徐芝纶[2] 所指出的：在主要的边界上，边界条件必须精确满足*。对狭长梁而言，其主要边界就是梁的上下边界；相应地，梁的左右两个端部就是次要边界，在其上可以使用圣维南原理以近似满足边界条件。蒋玉川[8] 据此确定了应力函数的初步形式，并针对 3 个特定的例子演绎了具体的求解过程。

本文针对均质各向同性材料直梁主要边界作用有多项式载荷这一情况，根据已有文献结果[2,6,8-9]，梳理介绍一种通用的理性求解策略，可以完全避免猜解困扰，这对减轻学生的畏难情绪并使其深刻把握弹性力学各类求解方法的内在统一性有一定的帮助。

1 平面直梁问题的通用求解策略

根据均质各向同性弹性力学平面问题的应力解法，为满足平衡微分方程，引入应力函数 φ

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{1}$$

该应力函数需满足应变协调条件，即如下双调和方程

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=0 \tag{2}$$

故弹性力学平面问题归结为在给定边界条件下求解控制方程 (2) 的数学定解问题。

本文考虑单位宽度直梁的主要边界受多项式载荷作用这一情形。如图 1 所示，假定梁的上边界仅作用有法向分布载荷，其形式为 $q(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}q_ix^i$，其中 n 为正整数，q_i 为已知常数。梁的上下边界是主要边界，在多项式载荷情形，边界条件必须精确满足，即

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_y)_{y=-h/2}=-q(x)=-\sum_{i=0}^{n}q_ix^i\\&(\sigma_y)_{y=h/2}=0,(\tau_{xy})_{y=\pm h/2}=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由式 (1) 的应力与应力函数之间的关系可知，如要精确满足式 (3) 中的第 1 式，则应力函数同样应具有如下多项式形式

$$\varphi=\sum_{i=0}^{n+2}f_i(y)x^i \tag{4}$$

式中，$f_i(y)$ 为待定函数。将式 (4) 代入式 (1)，可得相应的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\sum_{i=0}^{n+2}\frac{\mathrm{d}^2f_i(y)}{\mathrm{d}y^2}x^i\\&\sigma_y=\sum_{i=0}^{n}(i+2)(i+1)f_{i+2}(y)x^i\\&\tau_{xy}=-\sum_{i=0}^{n+1}(i+1)\frac{\mathrm{d}f_{i+1}(y)}{\mathrm{d}y}x^i\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

将式 (4) 代入式 (2)，得

$$\sum_{i=0}^{n-2}(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)f_{i+4}(y)x^i+2\sum_{i=0}^{n}(i+2)(i+1)\frac{\mathrm{d}^2f_{i+2}(y)}{\mathrm{d}y^2}x^i+\sum_{i=0}^{n+2}\frac{\mathrm{d}^4f_i(y)}{\mathrm{d}y^4}x^i=0 \tag{6}$$

*严格说来，在主要边界上也可以利用圣维南原理，比如其上作用有局部分布载荷时，考虑梁远处的受力情况，就可以把其等效为集中力/力矩。如果限定主要边界上的载荷是连续分布载荷，那么边界条件就必须精确满足。

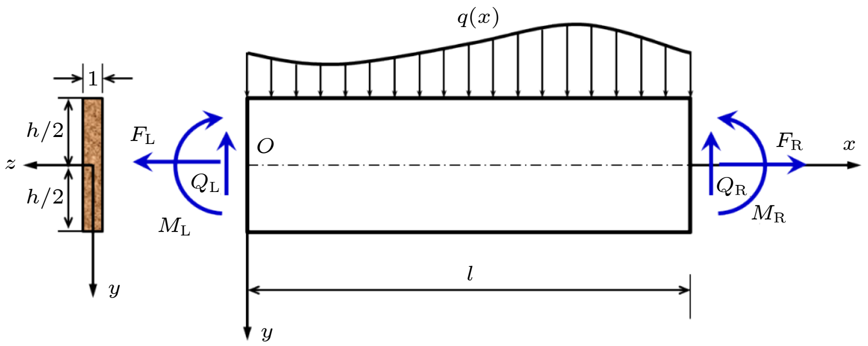


图 1　上表面受法向分布载荷作用的直梁。两端的合力/力矩可以是外加载荷，也可以是约束反力

式 (6) 对任意 x 都应满足，因此 x 的不同幂次前的系数必须都为零，从而可得 $n+3$ 个四阶常微分方程，正好用于求解 $n+3$ 个待定函数 $f_i(y)$。这些常微分方程的具体形式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^4 f_{n+2}(y)}{\mathrm{d}y^4}=0\\ \frac{\mathrm{d}^4 f_{n+1}(y)}{\mathrm{d}y^4}=0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}2\frac{(n+2)!}{n!}\frac{\mathrm{d}^2 f_{n+2}(y)}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}^4 f_n(y)}{\mathrm{d}y^4}=0\\ 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^2 f_{n+1}(y)}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}^4 f_{n-1}(y)}{\mathrm{d}y^4}=0\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(n+2)!}{(n-2)!}f_{n+2}(y)+2\frac{n!}{(n-2)!}\frac{\mathrm{d}^2 f_n(y)}{\mathrm{d}y^2}+\\&\quad\frac{\mathrm{d}^4 f_{n-2}(y)}{\mathrm{d}y^4}=0\\&\quad\vdots\\&120f_5(y)+12\frac{\mathrm{d}^2 f_3(y)}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}^4 f_1(y)}{\mathrm{d}y^4}=0\\&24f_4(y)+4\frac{\mathrm{d}^2 f_2(y)}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}^4 f_0(y)}{\mathrm{d}y^4}=0\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

在求解上述常微分方程组时，采用的应是倒序方式，即先从式 (7) 解得 $f_{n+2}(y)$ 和 $f_{n+1}(y)$ 为

$$\left.\begin{aligned}f_{n+2}(y)=a_{n+2}y^3+b_{n+2}y^2+c_{n+2}y+d_{n+2}\\ f_{n+1}(y)=a_{n+1}y^3+b_{n+1}y^2+c_{n+1}y+d_{n+1}\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

式中，a_i，b_i，c_i 和 d_i 为积分常数，可由上下边界条件确定。事实上，由式 (3) 和式 (5) 可知

$$\left.\begin{aligned}&(n+1)(n+2)f_{n+2}(-h/2)=-q_n\\&n(n+1)f_{n+1}(-h/2)=-q_{n-1}\\&f_{n+2}(h/2)=0,f_{n+1}(h/2)=0\\&\frac{\mathrm{d}f_{n+2}(-h/2)}{\mathrm{d}y}=0,\frac{\mathrm{d}f_{n+1}(-h/2)}{\mathrm{d}y}=0\\&\frac{\mathrm{d}f_{n+2}(h/2)}{\mathrm{d}y}=0,\frac{\mathrm{d}f_{n+1}(h/2)}{\mathrm{d}y}=0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

对于 $f_{n+2}(y)$ 和 $f_{n+1}(y)$，皆有 4 个方程，正好可以确定各自表达式中的 4 个待定常数。将求得的 $f_{n+2}(y)$ 和 $f_{n+1}(y)$ 代入式 (8)，即可积分求得

$$\left.\begin{aligned}&f_n(y)=a_ny^3+b_ny^2+c_ny+d_n+g_n(y)\\&f_{n-1}(y)=a_{n-1}y^3+b_{n-1}y^2+c_{n-1}y+\\&\quad d_{n-1}+g_{n-1}(y)\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

式中，$g_i(y)$ 为对应 $f_{n+2}(y)$ 和 $f_{n+1}(y)$ 等已知非齐次项的特解，都是 y 的多项式。上述方程中的 8 个积分常数类似地可由上下边界条件确定。再将求得的 $f_n(y)$ 和 $f_{n-1}(y)$ 代入式 (9)，并逐步积分求解，可得

$$\left.\begin{aligned}&f_{n-2}(y)=a_{n-2}y^3+b_{n-2}y^2+c_{n-2}y+\\&\quad d_{n-2}+g_{n-2}(y)\\&\quad\vdots\\&f_2(y)=a_2y^3+b_2y^2+c_2y+d_2+g_2(y)\\&f_1(y)=a_1y^3+b_1y^2+c_1y+d_1+g_1(y)\\&f_0(y)=a_0y^3+b_0y^2+c_0y+d_0+g_0(y)\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

需要指出的是，直至 $f_2(y)$，所有的积分常数都可以由上下边界条件确定。对于最后两个函数，从上下边界条件仅可以得到如下两个条件

$$\frac{\mathrm{d}f_1(-h/2)}{\mathrm{d}y}=0,\frac{\mathrm{d}f_1(h/2)}{\mathrm{d}y}=0\tag{14}$$

注意到 $f_0(y)$ 中的 c_0 和 d_0 项以及 $f_1(y)$ 中的 d_1 项给出应力函数中的常数项或一次项，对应着无应力状态，因此可以把这 3 个常数略去。这样还需要 3 个方程才能确定，由端部力的平衡条件给出

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x)_{x=0}\,\mathrm{d}y=F_{\mathrm{L}},\int_{-h/2}^{h/2}y\,(\sigma_x)_{x=0}\,\mathrm{d}y=M_{\mathrm{L}}\\&\int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{xy})_{x=0}\,\mathrm{d}y=Q_{\mathrm{L}},\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x)_{x=l}\,\mathrm{d}y=F_{\mathrm{R}}\\&\int_{-h/2}^{h/2}y\,(\sigma_x)_{x=l}\,\mathrm{d}y=M_{\mathrm{R}},\int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{xy})_{x=l}\,\mathrm{d}y=-Q_{\mathrm{R}}\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

注意，由直梁的整体平衡条件可知，式 (15) 中正好只有 3 个方程是独立的。

如果上下边界作用有多项式形式的分布剪力，求解过程也类似。可以看出，在均质各向同性材料情形，由上述过程确定的应力函数是坐标 x 和 y 的多项式，求解思路与文献[9-10] 中方法基本一致♣。Barber[11] 基本上遵循了 Neou 方法，即直接假设了应力函数的多项式形式，不含待求函数，因此也不涉及微分方程的求解；但他也指出，由该方法导出的最后用于确定积分常数的代数方程可能存在线性相关情形，但足以唯一确定所有的待定常数。

值得指出的是，在梁的两端（即次要边界），有的边界条件可以不利用圣维南原理，而直接采用精确的表达形式。例如，在吴家龙[4] 的教材中，考虑悬臂直梁非固定端受横向集中力作用时，该边界上采用了法向正应力为零而非轴向合力为零的条件；考虑悬臂直梁上边界受均布载荷作用时，非固定端采用了切应力为零而非剪力为零的条件。由于这些问题的特殊性，采用精确的边界条件得到的结果与采用基于圣维南原理的近似条件的结果是一致的，读者不妨动手一试。

另外，采用以上方式求解静定（指的是结构力学意义下的静定）直梁问题才可以完全确定所有积分常数。当直梁超静定时，如一端简支一端固支或者两端固支情形，则还需要借助位移约束条件才能完全确定相应的积分常数，具体见第 2 节的例子。

2 超静定直梁问题求解举例

第 1 节已阐述了平面直梁问题通用求解策略的基本过程。本节针对一端简支一端固支直梁，分析其在上边界线性分布载荷作用下的响应（如图 2 所示），来进一步展示超静定情形时积分常数的具体确定方法。

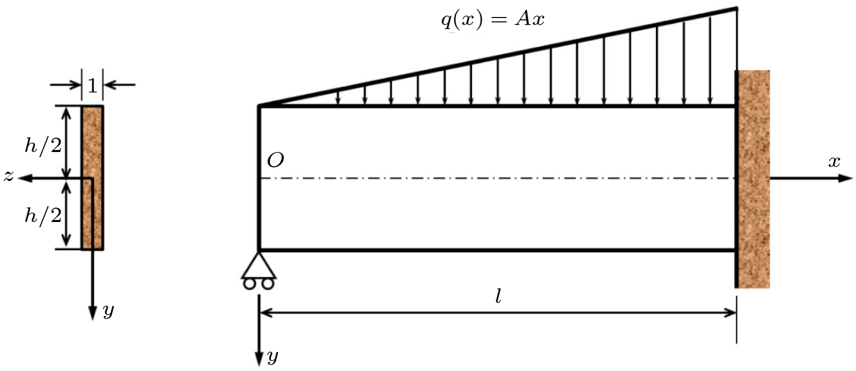


图 2 上表面受线性分布载荷作用的简支-固支直梁

当上边界受线性分布载荷 $q(x) = Ax$（A 为已知常数）作用时，式 (4) 中的 n 取 1，根据第 1 节中的方法，可知

$$\left.\begin{aligned}f_3(y)&=a_3y^3+b_3y^2+c_3y+d_3\\f_2(y)&=a_2y^3+b_2y^2+c_2y+d_2\\f_1(y)&=a_1y^3+b_1y^2+c_1y+g_1(y)\\f_0(y)&=a_0y^3+b_0y^2+g_0(y)\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

其中，$g_i(y)(i=0,1)$ 和 $a_j,b_j,c_j,d_j(j=2,3)$ 按第 1 节可确定为

$$\left.\begin{aligned}g_1(y)&=\frac{A}{5h^3}y^5\\g_0(y)&=0\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}&a_3=-\frac{A}{3h^3},b_3=0,c_3=\frac{A}{4h},d_3=-\frac{A}{12}\\&a_2=0,b_2=0,c_2=0,d_2=0\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

♣Neou 方法的提出者是钮因迈（1917—2006），浙江吴兴人，著名航空航天专家。1941 年浙江大学机械工程系本科毕业后留校任助教，1947 年获美国麻省理工学院机械工程硕士学位，1950 年获美国斯坦福大学机械工程哲学博士学位，美国西弗吉尼亚大学机械与航空系正教授、荣休教授。曾任雪城大学机械系助理教授、桥港大学机械系副教授及正教授。

剩余的 a_1, b_1, c_1, a_0, b_0 5 个常数由下述过程确定。首先，由式 (15) 中左端的两个力平衡条件，即

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} \mathrm{d}y = 0, \int_{-h/2}^{h/2} y(\sigma_x)_{x=0} \mathrm{d}y = 0 \tag{19}$$

可得

$$a_0 = 0, b_0 = 0 \tag{20}$$

其次，由式 (14) 的两个方程可得

$$3a_1 y^2 + 2b_1 y + c_1 + \frac{\mathrm{d}g_1(y)}{\mathrm{d}y} = 0 (y = \pm h/2) \tag{21}$$

可推知

$$a_1 = -\frac{Ah + 16c_1}{12h^2}, b_1 = 0 \tag{22}$$

至此，可将应力函数表示为

$$\varphi = \left(-\frac{Ah + 16c_1}{12h^2} y^3 + c_1 y + \frac{A}{5h^3} y^5\right) x + \left(-\frac{A}{3h^3} y^3 + \frac{A}{4h} y - \frac{A}{12}\right) x^3 \tag{23}$$

其中，常数 c_1 的确定需借助位移约束条件。

由应力函数可求出各应力分量，再基于本构关系，按照弹性力学教材中的常规推导方法，可得到位移表达式为

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{A\nu x^2 y^3}{Eh^3} - \frac{Ax^4 y}{2Eh^3} + \frac{2Ax^2 y^3}{Eh^3} - \frac{3A\nu x^2 y}{4Eh} - \frac{Ax^2 y}{4Eh} + \frac{A\nu x^2}{4E} - \frac{4c_1 x^2 y}{Eh^2} + \eta(y) \\ u_y &= \frac{A\nu x^3 y^2}{Eh^3} - \frac{A\nu x y^4}{Eh^3} - \frac{Axy^4}{2Eh^3} + \frac{A\nu x y^2}{4Eh} + \frac{3Axy^2}{4Eh} - \frac{Axy}{2E} + \frac{4c_1 \nu x y^2}{Eh^2} + \xi(x) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

其中， E 为杨氏模量， ν 为泊松比，且有

$$\left.\begin{aligned} \xi(x) &= -\alpha x - \frac{(5Ah - 16c_1 + 3Ah\nu) x^3}{12Eh^2} + \frac{Ax^5}{10Eh^3} + k_1 \\ \eta(y) &= -\beta y + \frac{Ay^2}{4E} + \frac{(Ah\nu - Ah + 16c_1\nu + 32c_1) y^3}{12Eh^2} - \frac{A(2\nu + 3) y^5}{10Eh^3} + k_2 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

式中， k_1 ， k_2 ， α 和 β 皆为新的待定常数，且有

$$\alpha + \beta = 2c_1 (1 + \nu) / E \tag{26}$$

考虑位移约束条件。在简支端，取中点处 y 方向位移为零，即

$$(u_y)_{x=0,y=0} = 0 \tag{27}$$

在固支端，取如下约束条件

$$(u_x)_{x=l,y=0} = (u_y)_{x=l,y=0} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{x=l,y=0} = 0 \tag{28}$$

由式 (26)～式 (28)，可得

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{3Ah^2 l^2 \nu + 5Ah^2 l^2 - 2Al^4 - 16hl^2 c_1}{4Eh^3} \\ \beta &= -\frac{-3Ah^2 l^2 \nu - 5Ah^2 l^2 + 2Al^4 - 8h^3 c_1 \nu - 8h^3 c_1 + 16hl^2 c_1}{4Eh^3} \\ k_1 &= -\frac{15Ah^2 l^3 \nu + 25Ah^2 l^3 - 12Al^5 - 80hl^3 c_1}{30Eh^3} \\ k_2 &= -\frac{Al^2 \nu}{4E} \\ c_1 &= \frac{A(25h^2 - 12l^2 + 15h^2 \nu)}{80h} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

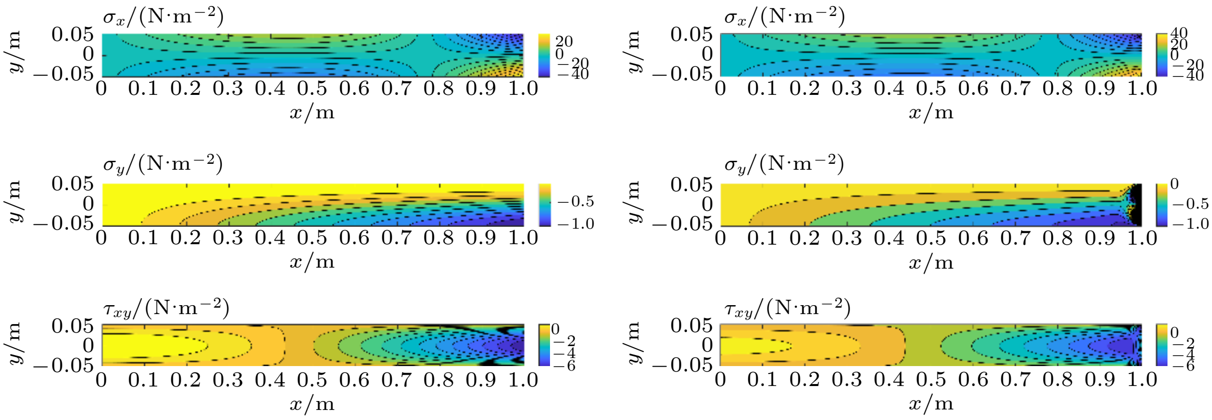
这样可以求得应力函数的最终表达式为

$$\varphi = \left\{\frac{A[4l^2 - 5h^2(2 + \nu)]}{20h^3} y^3 + \frac{A(25h^2 - 12l^2 + 15h^2\nu)}{80h} y + \frac{A}{5h^3} y^5\right\} x + \left(-\frac{A}{3h^3} y^3 + \frac{A}{4h} y - \frac{A}{12}\right) x^3 \tag{30}$$

上述解析表达式的正确性可借助有限元进行校核。不妨取狭长梁的材料与几何参数为

$$\left.\begin{aligned} E &= 206\ \mathrm{GPa}, \quad \nu = 0.25 \\ l &= 1\ \mathrm{m}, \quad h = 0.1\ \mathrm{m} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

同时令线性载荷的常数因子 $A = 1$ 。理论解与 COMSOL 有限元模拟（平面应力单元，四边形网格，共 9231 节点）的比较见图 3。可以看到：除了端部外，3 个应力分量的理论解与有限元结果都比较吻合，轴向正应力尤为一致。值得指出的是，在有限元模拟中，固支侧角点出现了由角点的边界几何奇异性导致的应力骤升现象，这是本文理论解无法考虑的。



(a) 理论解　　(b) 有限元模拟

图 3　应力场理论解与有限元模拟

需要指出的是，当考虑固支或者其他支撑条件时，不同的约束表达式会给出不同的位移形式，但对于狭长梁来说相互之间仅是高阶小量的区别[4]。对于静定梁，这些高阶小量对应着刚体位移（转动或平移），不影响梁内应力[3]。

3　结论

对于狭长等矩形截面悬臂梁主要边界受多项式载荷作用的弹性力学平面问题，本文根据已有文献结果，针对一般情形阐述了一种通用的理性求解策略，也针对上边界受线性分布载荷作用的简支-固支超静定直梁进行了具体的求解。利用具有符号推导功能的软件（如 Maple），也容易实现这一求解策略的程序化、自动化。

利用该方法还可以解析处理各向异性材料直梁[12-14]、功能梯度材料直梁[15] 以及多场耦合材料直梁[16] 等更为复杂的平面梁问题。事实上，对于狭长直梁主要边界受到分布载荷作用下的响应问题，如果要在平面弹性理论的框架下求取解析解，一个必须把握住的要点就是在其主要边界上，边界条件必须得到精确满足，这是不同问题的内在统一所在。

在讲授弹性力学课程的该部分内容时，如果能够把这个统一的出发点强调出来，那么学生面对灵活多变的求解方法时可能就会少一些困惑，甚至可以反过来促使他们尝试寻找书本上没有的解题思路。另外，也有助于学生更好地把握圣维南原理应用的本质以及弹性力学唯一性定理[17] 的意义。

参 考 文 献

1 Timoshenko SP, Goodier JN. Theory of Elasticity, 3rd edn. New York: McGraw-Hill, 1970

2 徐芝纶. 弹性力学, 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006
Xu Zhilun. Elasticity, 4th edn. Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese)

3 陆明万, 罗学富. 弹性理论基础, 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2001
Lu Mingwan, Luo Xuefu. Foundations of Elasticity, 2nd edn. Beijing: Tsinghua University Press, 2001 (in Chinese)

4 吴家龙. 弹性力学, 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2016
Wu Jialong. Elasticity, 3rd edn. Beijing: Higher Education Press, 2016 (in Chinese)

5 国凤林, 王国庆. 弹性力学. 上海: 上海交通大学出版社, 2023
Guo Fenglin, Wang Guoqing. Elasticity. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2023

6 Ding HJ, Huang DJ, Wang HM. Analytical solution for fixed-end beam subjected to uniform load. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, 2005, 6A(8): 779-783

7 杨振宇, 龚文弈, 卢子兴. 梁在几种典型载荷作用下的弹性力学求解方法. 力学与实践, 2023, 45(1): 206-212
Yang Zhenyu, Gong Wenyi, Lu Zixing. Methods for solving beam elasticity problems under several typical loads. *Mechanics in Engineering*, 2023, 45(1): 206-212 (in Chinese)

8 蒋玉川. 确定应力函数的一种简单方法. 力学与实践, 2002, 24(1): 62-64
Jiang Yuchuan. A simple method for determining stress functions. *Mechanics in Engineering*, 2002, 24(1): 62-64 (in Chinese)

9 Neou CY. A direct method for determining Airy polynomial stress functions. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, 24(3): 387-390

10 Boresi AP, Chong KP, Lee JD. Elasticity in Engineering Mechanics, 3rd edn. New Jersey: John Wiley & Sons, 2011

11 Barber JR. Elasticity, 3rd revised edn. Dordrecht: Springer, 2010
12 Jiang AM, Ding HJ. The analytical solutions for orthotropic cantilever beams (I): subjected to surface forces. *Journal of Zhejiang University Science*, 2005, 6A(2): 126-131
13 Jiang AM, Ding HJ. The analytical solutions for orthotropic cantilever beams (II): solutions for density functionally graded beams. *Journal of Zhejiang University Science*, 2005, 6A(3): 155-158
14 Ding HJ, Huang DJ, Wang HM. Analytical solution for fixed-fixed anisotropic beam subjected to uniform load. *Applied Mathematics and Mechanics* (*English Edition*), 2006, 27(10): 1305-1310
15 Ding HJ, Huang DJ, Chen WQ. Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(1): 176-196
16 Jiang AM, Ding HJ. Analytical solutions to magneto-electro-elastic beams. *Structural Engineering and Mechanics*, 2004, 18(2): 195-209
17 蒋玉川, 朱钦泉. 弹性力学平面问题例说解的唯一性定理. 力学与实践, 2019, 41(4): 458-462
Jiang Yuchuan, Zhu Qinquan. Examples are given to illustrate the uniqueness law of solutions for plane problems of elasticity. *Mechanics in Engineering*, 2019, 41(4): 458-462 (in Chinese)

(责任编辑: 胡 漫)