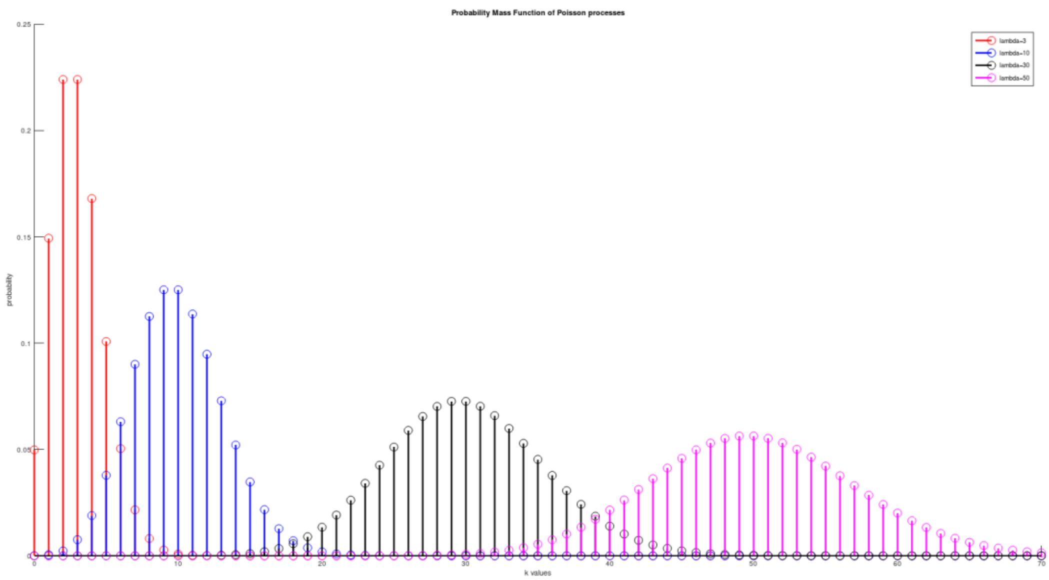
Συστήματα Αναμονής

1η Ομάδα Ασκήσεων

Παναγιώτης Σταματόπουλος
Α.Μ: el20096

<u>Κατανομή Poisson</u>

A) Σχεδιάζουμε τις συναρτήσεις μάζας πιθανότητας (PMF) των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ = 3, 10, 30 και 50 σε κοινό διάγραμμα:



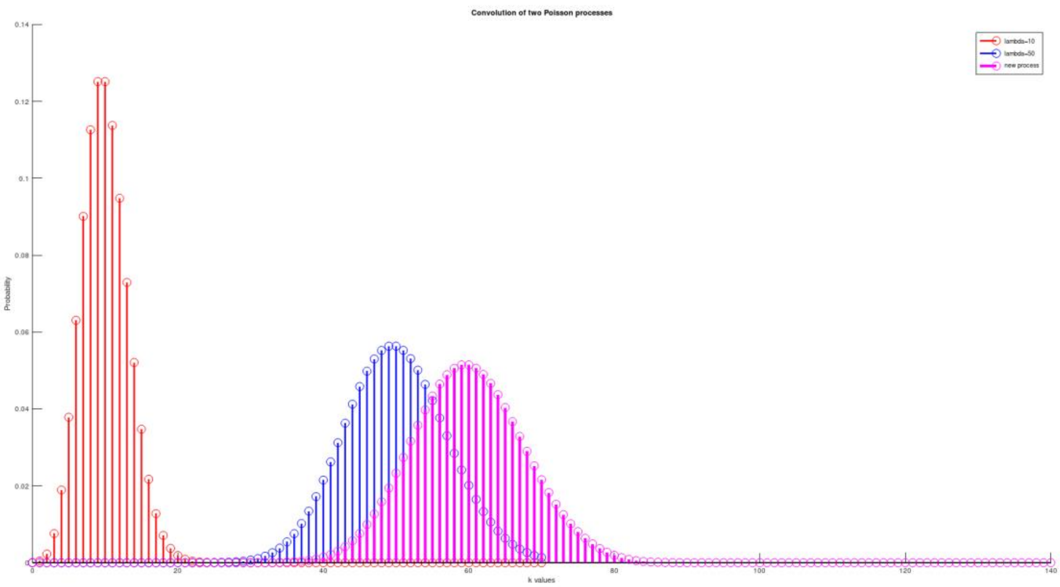
Παρατηρούμε πως για μεγαλύτερες τιμές του λ η κορυφή της καμπύλης μετατοπίζεται δεξιά και το πλάτος της μειώνεται, διατηρώντας πάντα σταθερό το εμβαδό. Αυτό σημαίνει ότι η αύξηση του λ συνεπάγεται την αύξηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης.

B) Επιλέγουμε την κατανομή με παράμετρο λ = 30 και υπολογίζουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανσή της:

```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
```

Πράγματι, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι τόσο η διακύμανση όσο και η μέση τιμή της κατανομής Poisson είναι ίσες με την παράμετρο λ.

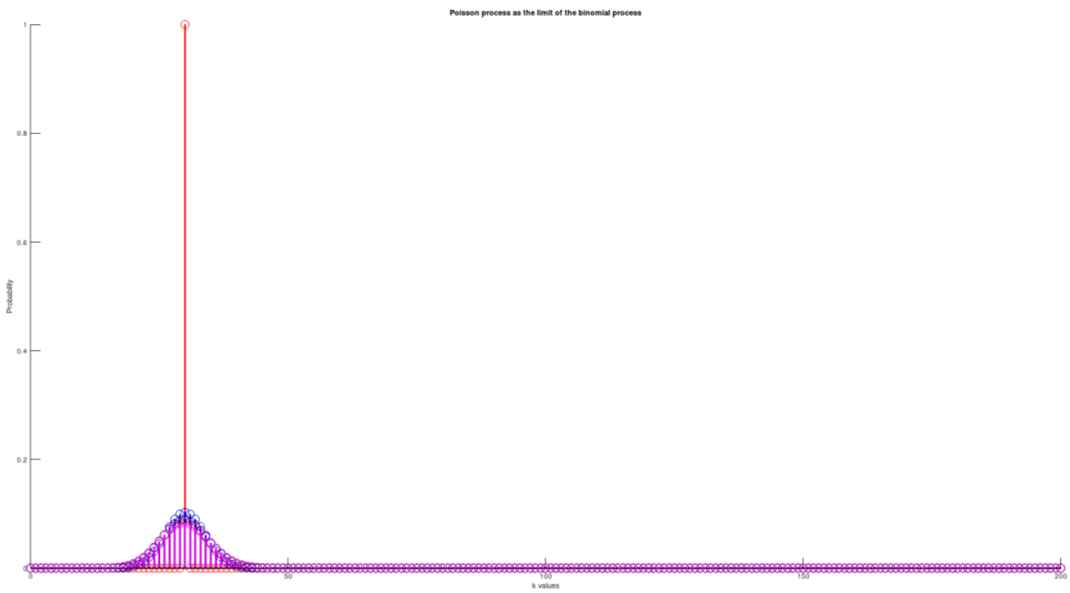
Γ) Υπολογίζουμε την κατανομή που προκύπτει από τη συνέλιξη των κατανομών με λ = 10 και λ = 50 και σχεδιάζουμε τις τρεις κατανομές σε κοινό διάγραμμα:



Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι η καινούρια κατανομή είναι επίσης Poisson με $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 10 + 50 = 60$. Απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβεί αυτό είναι οι δύο επιμέρους κατανομές να είναι Poisson.

Δ) Θεωρητικά η κατανομή Poisson μπορεί να αποτελέσει προσέγγιση της διωνυμικής αν το n είναι αρκετά μεγάλο και το p αρκετά μικρό. Για τη διωνυμική κατανομή έχουμε: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$, επομένως για $n \to \infty$ και λ =np έχουμε:

$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ η οποία είναι πράγματι η κατανομή Poisson.



Στην πραγματικότητα διατηρούμε σταθερό το $n \cdot p$ επομένως αυξάνοντας το n μειώνεται το p και καταλήγουμε στην κατανομή Poisson.

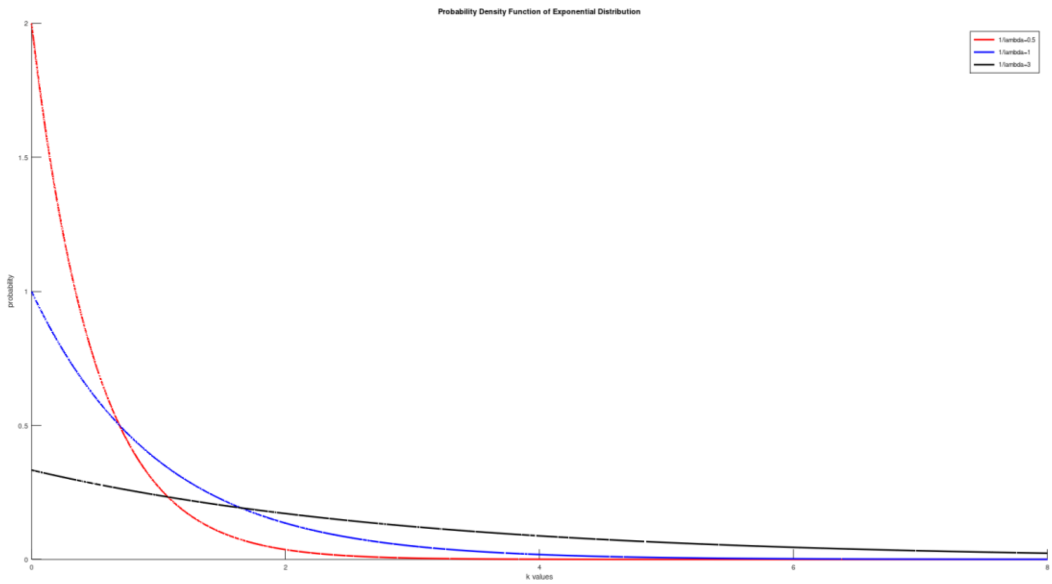
```
clc;
clear all;
close all;

# TASK: In a common diagram, design the Probability Mass Function of Poisson processes
# with lambda parameters 3, 10, 30, 50. In the horizontal axes, choose k parameters
# between 0 and 70.

k = 0:1:70;
lambda = [3, 10, 30, 50];

for i = 1 : columns(lambda)
  poisson(i, :) = poisspdf(k, lambda(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i = 1 : columns(lambda)
  stem(k, poisson(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3", "lambda=10", "lambda=30", "lambda=50");

# TASK: regarding the poisson process with parameter lambda 30, compute its mean
# value and variance

index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index, :);
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index, :)) - 1)
  mean_value = mean_value + i .* poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);

second_moment = 0;
```

```
for i = 0 : (columns(poisson(index, :)) - 1)
  second_moment = second_moment + i .* i .* poisson(index, i + 1);
endfor

variance = second_moment - mean_value .^ 2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);

# TASK: consider the convolution of the Poisson distribution with lambda 20 with
# the Poisson distribution with lambda 30.

first = find(lambda == 10);
second = find(lambda == 50);
poisson_first = poisson(first, :);
poisson_second = poisson(second, :);

composed = conv(poisson_first, poisson_second);
new_k = 0 : 1 : (2 * 70);

figure(2);
hold on;
stem(k, poisson_first(:), colors(1), "linewidth", 1.2);
stem(k, poisson_second(:), colors(2), "linewidth", 1.2);
stem(new_k, composed, "mo", "linewidth", 2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10", "lambda=50", "new process");

# TASK: show that Poisson process is the limit of the binomial distribution.
k = 0 : 1 : 200;
# Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i = 1 : 1 : 5;
n = lambda .* i;
p = lambda ./ n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
```

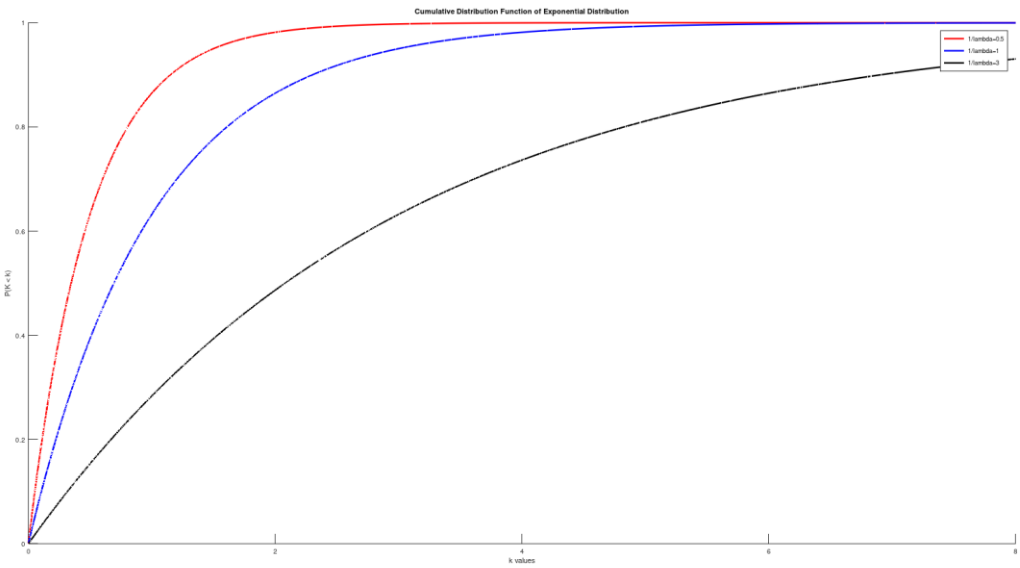
```
for i = 1 : 4
  binomial = binopdf(k, n(i), p(i));
  stem(k, binomial, colors(i), 'linewidth', 1.2);
endfor
hold off;
```

Εκθετική Κατανομή

Α) Σχεδιάζουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (PDF) των εκθετικών κατανομών με μέσο όρο 1/λ = 0.5, 1 και 3 σε κοινό διάγραμμα:



Β) Σχεδιάζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής των προηγούμενων κατανομών σε κοινό διάγραμμα:



Γ) Για την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ = 2.5 υπολογίζουμε τις πιθανότητες P(X>30000) και Pr(X>50000|X>20000) = P(X>50000)/P(X>20000):

```
Prob3 = 0.8869
Prob5_2 = 0.8869
```

Αυτό συμβαίνει λόγω της έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, δηλαδή:

$$P(X > a + b|X > b) = \frac{P(X>a+b \cap X>b)}{P(X>b)} = e^{-\lambda a} = P(X > a)$$

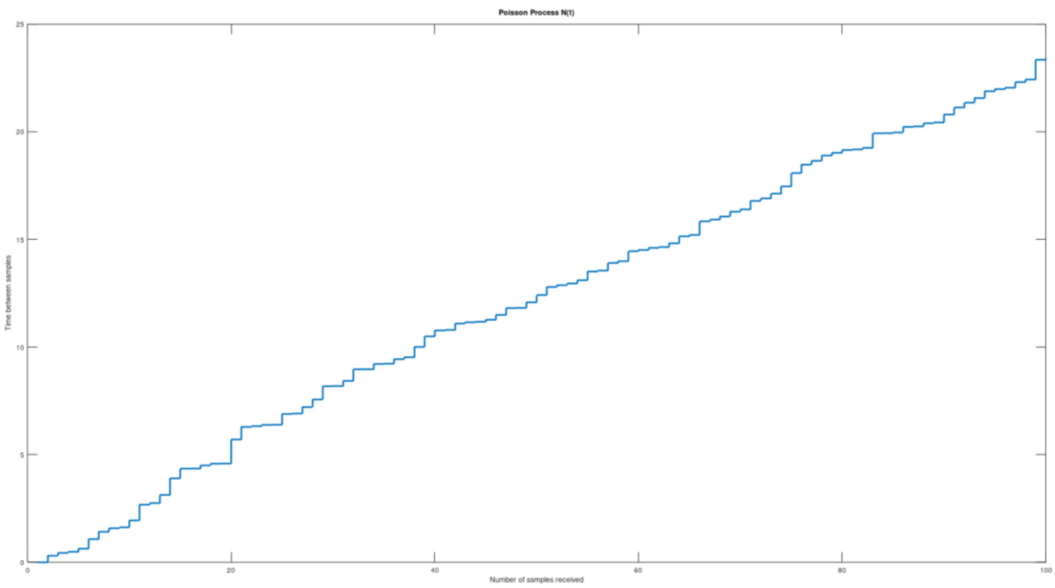
Επομένως στην περίπτωση μας P(X>50000|X>20000) = P(X>50000-20000) = P(X>30000)

```
clc;
clear all;
close all;

# TASK: In a common diagram, design the Probability Density Function of Exponential Distribution
# with mean values 1/lambda 0.5, 1, 3. In the horizontal axes, choose k parameters
# between 0 and 8.

k = 0:0.00001:8;
lambda = [0.5, 1, 3];

for i = 1 : columns(lambda)
  exponential(i,:) = exppdf(k,lambda(i));
endfor

colors = "rbk";
figure(1);
hold on;

for i = 1 : columns(lambda)
  plot(k, exponential(i,:), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor

hold off;

title("Probability Density Function of Exponential Distribution");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("1/lambda=0.5", "1/lambda=1", "1/lambda=3");

# TASK: In a common diagram, design the Cumulative Distribution Function of the
# former Exponential Distributions.

for i = 1 : columns(lambda)
  exponentialcdf(i, :) = expcdf(k, lambda(i));
endfor

figure(2);
hold on;

for i = 1 : columns(lambda)
  plot(k, exponentialcdf(i,:), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor
```

```
hold off;

title("Cumulative Distribution Function of Exponential Distribution");
xlabel("k values");
ylabel("P(K < k)");
legend("1/lambda=0.5", "1/lambda=1", "1/lambda=3");

# TASK: For 1/lambda = 2.5 calculate the probabilities P( X > 30000) and
# P ( X > 50000 | X > 20000).

exponentialcdf_Task3 = expcdf(k, 2.5);

Prob3 = 1 - exponentialcdf_Task3(30000)
Prob5 = 1 - exponentialcdf_Task3(50000);
Prob2 = 1 - exponentialcdf_Task3(20000);
Prob5_2 = Prob5/Prob2
```

Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

A) Η κατανομή που ακολουθούν οι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson είναι εκθετική, το οποίο επιβεβαιώνεται από το διάγραμμα:



B) Ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο ΔT = t1 – t2 ακολουθεί κατανομή Poisson, το οποίο επαληθεύεται από τις μέσες τιμές που υπολογίζουμε για N = 100, 200, 300, 500, 1000, 10000:

```
mean_no_samples = 5.2939
mean_no_samples = 5.1056
mean_no_samples = 5.2282
mean_no_samples = 4.9495
mean_no_samples = 5.1233
mean_no_samples = 4.9194
```

Για οποιονδήποτε αριθμό γεγονότων η μέση τιμή είναι πολύ κοντά στο $\lambda = 5$ (μέση τιμή Poisson).

```
clc;
clear all;
close all;

# TASK A

lambda = 1/5;
random_exp_samples = exprnd(lambda, 1, 100);
time_between_samples = zeros(1, 100);

for i = 2 : 100
  time_between_samples(i) = time_between_samples(i-1) + random_exp_samples(i);
endfor

samples = 1:1:100;

figure(1);
stairs(samples, time_between_samples, "linewidth", 1.2);
title("Poisson Process N(t)");
xlabel("Number of samples received");
ylabel("Time between samples");

# TASK B

no_random_samples = [100, 200, 300, 500, 1000, 10000];

for i = 1 : columns(no_random_samples)
  sample = exprnd(lambda, 1, no_random_samples(i));
  sample_time = sum(sample);
  mean_no_samples = no_random_samples(i)/sample_time
endfor

```