



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής

Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

---

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80, Τηλ: 772.1448, Fax: 772.1452

e-mail: queueing@netmode.ntua.gr, URL: <http://www.netmode.ntua.gr>

3 Απριλίου 2023

## Συστήματα Αναμονής

### 1η Ομάδα Ασκήσεων

#### Κατανομή Poisson

A) Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function) της κατανομής Poisson: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους  $\lambda = \{3, 10, 30, 50\}$ . Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι και 70. Πώς αλλάζει η μορφή τους, καθώς μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ ;

B) Μέση τιμή και διακύμανση κατανομής Poisson: Να επιλέξετε την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda = 30$ . Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της και τη διακύμανσή της. Τι παρατηρείτε για τις τιμές που υπολογίσατε;

Γ) Υπέρθεση κατανομών Poisson: Να επιλέξετε τις κατανομές Poisson με παραμέτρους  $\lambda = 10$  και  $\lambda = 50$ . Να υπολογίσετε την κατανομή που προκύπτει από τη συνέλιξη των δύο αυτών κατανομών και, στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τις τρεις αυτές κατανομές σε κοινό διάγραμμα. Τι είδους κατανομή προέκυψε; Τι παρατηρείτε για τη σχέση της κατανομής που υπολογίσατε με τις δύο επιμέρους κατανομές; Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό;

Δ) Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής: Πώς μπορεί να ληφθεί μία κατανομή Poisson παραμέτρου  $\lambda$  ως το όριο μιας διωνυμικής (binomial) κατανομής παραμέτρων  $n$  και  $p$ ; Να κατασκευάσετε, με αυτόν τον τρόπο, μία κατανομή Poisson παραμέτρου  $\lambda = 30$  σημεία/sec. Πιο συγκεκριμένα, να σχεδιάσετε, σε κοινό διάγραμμα, την εξέλιξη μιας διωνυμικής κατανομής, καθώς τείνει στην επιθυμητή κατανομή Poisson (για  $n = 30, 60, 90, 120$  και  $150$ ).

Για την άσκηση αυτή, σας δίνεται έτοιμος ο κώδικας (αρχείο *demo1a.m*).

## **Εκθετική κατανομή**

A) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF, Probability Density Function) της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των εκθετικών κατανομών με μέσους όρους  $1/\lambda = \{0.5, 1, 3\}$ . Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι 8 (Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την εντολή  $k = 0:0.00001:8$ . Έτσι, μπορείτε να προσεγγίσετε τη συνεχή εκθετική κατανομή ως μία διακριτή με πολύ μικρό σφάλμα).

B) Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cumulative Distribution Function) των εκθετικών κατανομών του προηγούμενου ερωτήματος σε κοινό διάγραμμα.

Γ) Απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής: Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής για  $1/\lambda = 2.5 \text{ sec}$ , να υπολογίσετε τις πιθανότητες  $P(X > 30000)$  και  $\Pr(X > 50000 | X > 20000)$ . Τι παρατηρείτε για τις δύο πιθανότητες; Γιατί συμβαίνει αυτό; Πώς ερμηνεύεται η παρατήρησή σας; (Επεξήγηση: οι τιμές 30000, 50000 και 20000 δηλώνουν τη θέση του σημείου στο διάνυσμα  $k = 0:0.00001:8$  που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα).

**Σημείωση:** Στην περίπτωση που ο υπολογιστής σας δεν μπορεί να επεξεργαστεί το μέγεθος του διανύσματος  $k = 0:0.00001:8$ , μπορείτε να κάνετε την άσκηση για το διάνυσμα  $k = 0:0.0001:8$ .

## **Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson**

A) Διαδικασία καταμέτρησης Poisson  $N(t)$ : Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθούν οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson; Να δημιουργήσετε με την εντολή `exprnd( )` 100 διαδοχικά τυχαία γεγονότα και να σχεδιάσετε (συνάρτηση stairs) μία διαδικασία καταμέτρησης Poisson. Θεωρήστε  $\lambda = 5$  γεγονότα/sec.

B) Μέσος αριθμός γεγονότων: Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθεί ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο  $\Delta T = t_1 - t_2$ ; Να βρείτε το μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα του χρόνου. Να επαναλάβετε για (i) 200, (ii) 300, (iii) 500, (iv) 1000, (v) 10000 διαδοχικά τυχαία γεγονότα. Τι παρατηρείτε;

**Για απορίες να στέλνετε στο [queuing@netmode.ntua.gr](mailto:queuing@netmode.ntua.gr)**