Συστήματα Αναμονής

2η Ομάδα Ασκήσεων

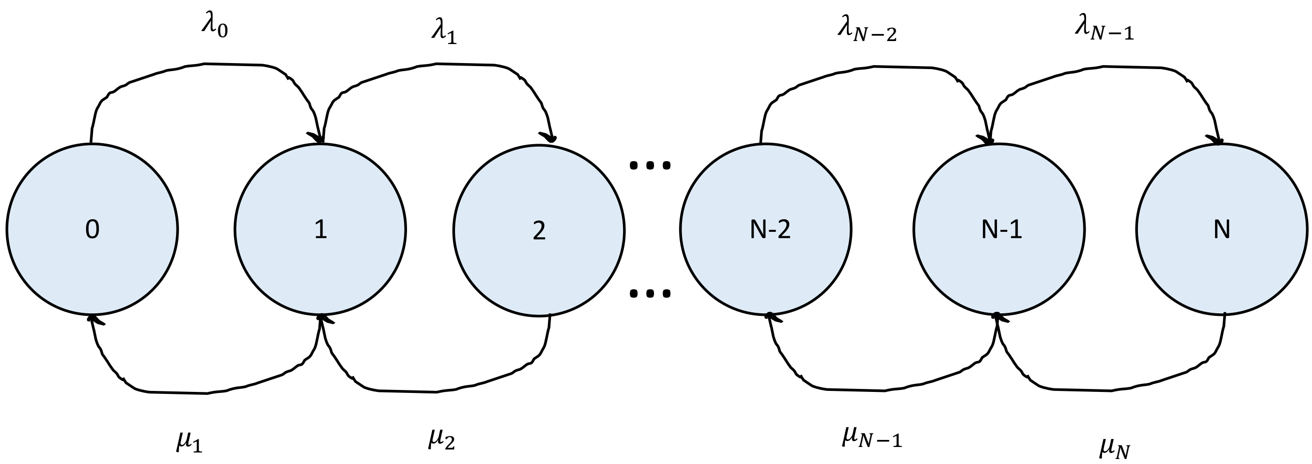
Παναγιώτης Σταματόπουλος
Α.Μ: el20096

Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1:

α) Για την ουρά M/M/1 στην οποία οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο λ πελάτες/sec και οι εξυπηρετήσεις εκθετική με παράμετρο μ πελάτες/sec, απαραίτητη συνθήκη για να είναι εργοδική είναι σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα οι εξυπηρετήσεις να είναι περισσότερες από τις αφίξεις προκειμένου να λειτουργεί ομαλά:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \ Erlang$$

Διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων M/M/1:



Με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας έχουμε:

- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
- $p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$
- $p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu$
- $p_{k-1} \cdot \lambda = p_k \cdot \mu$

- $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$
- $p_0 = 1 - \rho$
- $p_k = (1-\rho)\rho^k,\ k = 0,1,2,\dots$

β) Για τον υπολογισμό του μέσου χρόνου καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας εφαρμόζουμε τον τύπο του Little:

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

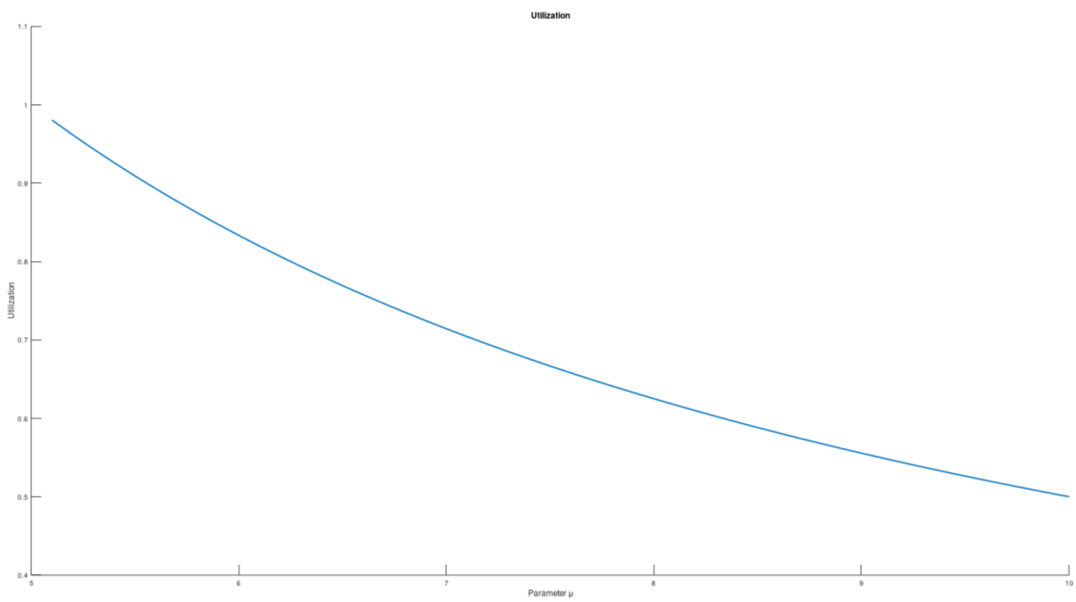
γ) Παρατηρούμε ότι $P_{57} = (1-\rho)\rho^{57} > 0$, επομένως υπάρχει μια μη μηδενική πιθανότητα το σύστημα να εξυπηρετήσει 57 πελάτες σε κάποια χρονική στιγμή.

<u>Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave:</u>

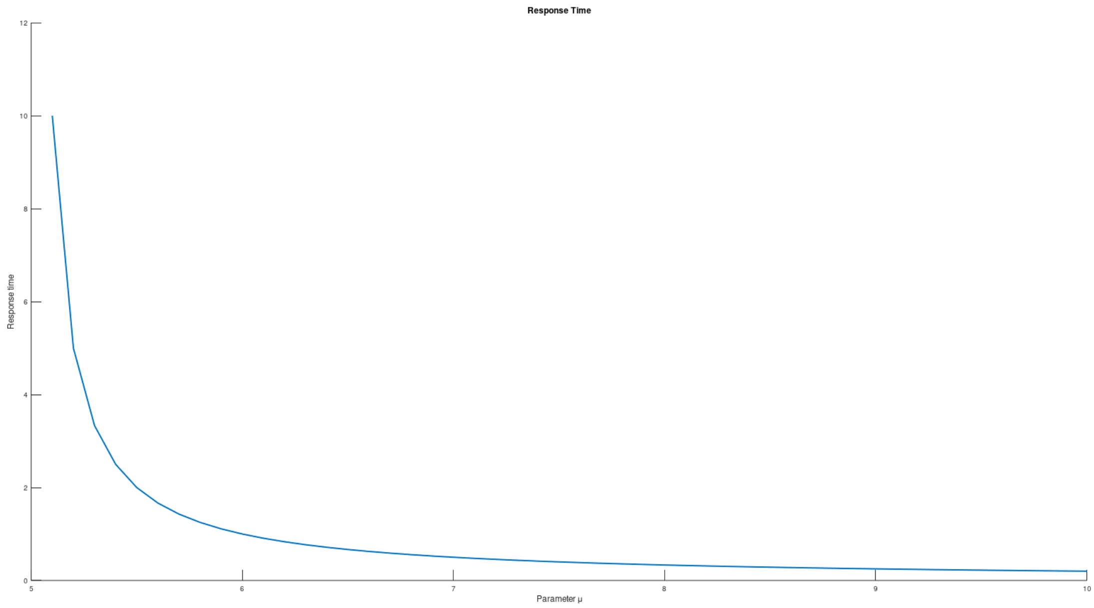
α) Από το ερώτημα (α) της προηγούμενης άσκησης γνωρίζουμε ότι για να είναι εργοδική η ουρά M/M/1 πρέπει $\frac{\lambda}{\mu} < 1 \Longrightarrow \mu > \lambda$ και αφού $\lambda = 5\ \pi\varepsilon\lambda ά\tau\varepsilon\varsigma/min$ και $\mu \in [0,10]$, τότε $\mu \in (5,10]$.

β) Για τις διάφορες τιμές του μ έχουμε τα εξής διαγράμματα:

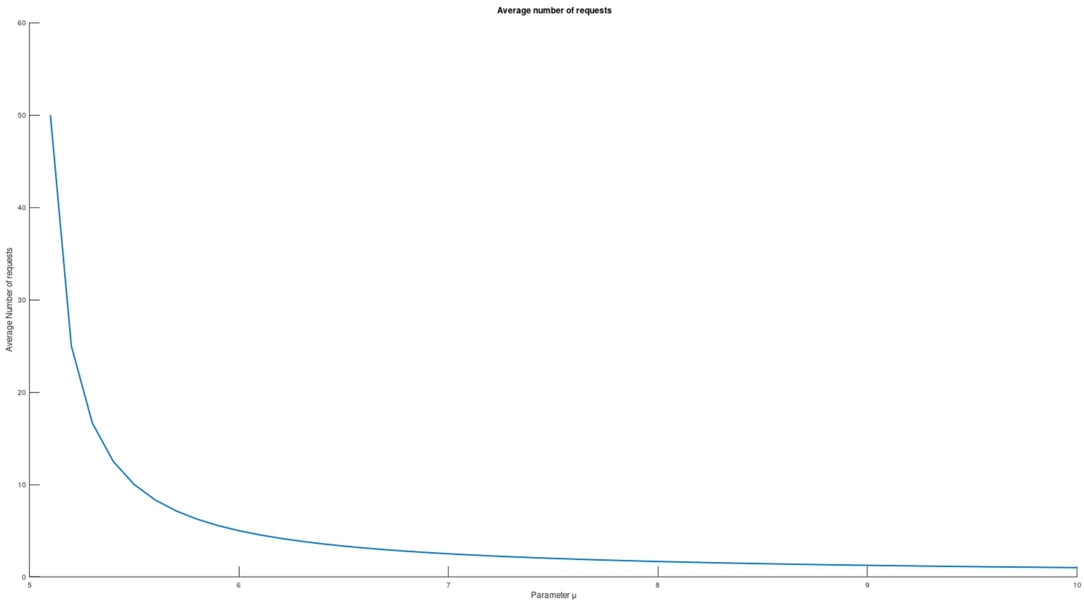
- **Βαθμός χρησιμοποίησης ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης (utilization)**



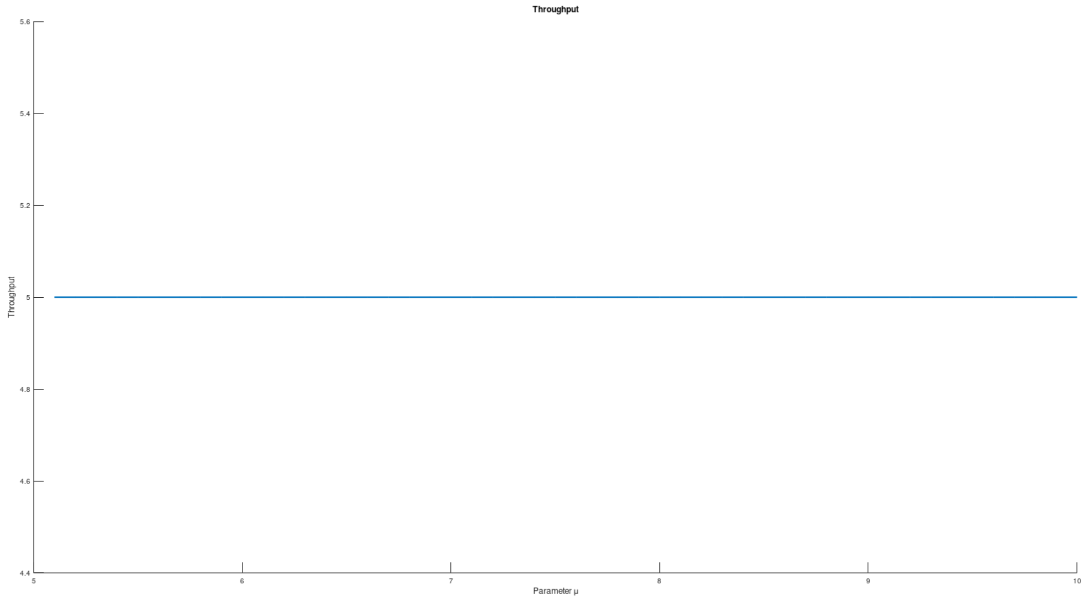
- **Μέσος χρόνος καθυστέρησης του συστήματος E(T) (response time)**



- **Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα**



- **Ρυθμαπόδοση πελατών (throughput)**

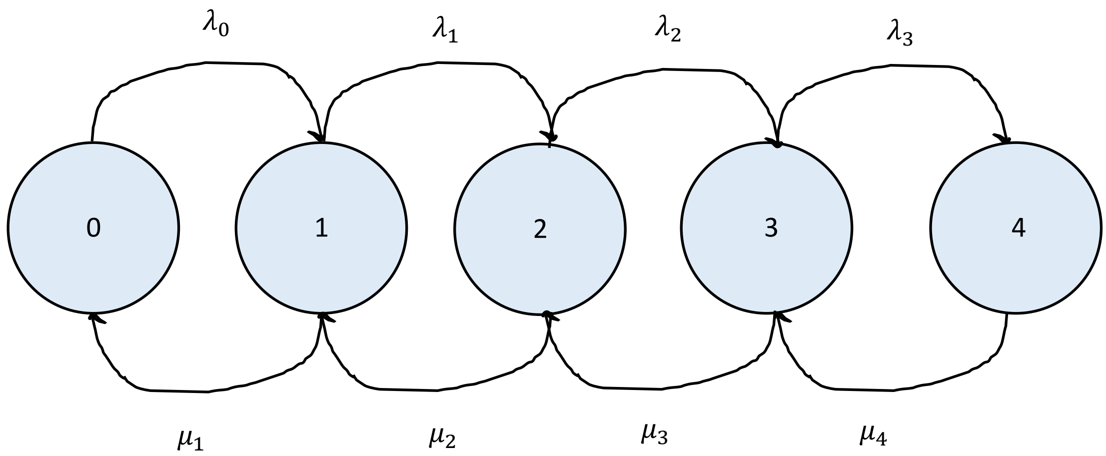


γ) Παρατηρούμε ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης μειώνεται σημαντικά για μεγαλύτερες τιμές του μ και ελαχιστοποιείται στην περιοχή 8-10 πελάτες/min. Επειδή η αύξηση του μέσου χρόνου προκαλεί και αύξηση του κόστους, επιλέγουμε την τιμή $\mu\ =\ 8\, \pi\varepsilon\lambda \acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma/min$.

δ) Παρατηρούμε ότι το throughput των πελατών είναι σταθερό, ανεξάρτητο από το μ και ίσο με το λ, όπως το περιμέναμε.

<u>Διαδικασία γεννήσεων θανάτων: εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K:</u>

α) Διάγραμμα:



$$\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1} = \frac{5}{i+1}, \mu_i = \mu = 10\ \pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma/sec$$

- $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \Longrightarrow \lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k, k = 1,2,3,4$
- $P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu} P_{k-1} = \frac{\lambda}{k \cdot \mu} P_{k-1}$
- $P_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0, k = 1,2,3,4 \Rightarrow P_k = \frac{1}{k!2^k} P_0$
- $P_0 + \sum_{k=1}^{4} P_k = 1 \Rightarrow P_0 = 0.606635,$
- $P_1 = 0.303318,$
- $P_2 = 0.075829,$
- $P_3 = 0.012638,$
- $P_{blocking} = P_4 = 0.00158$

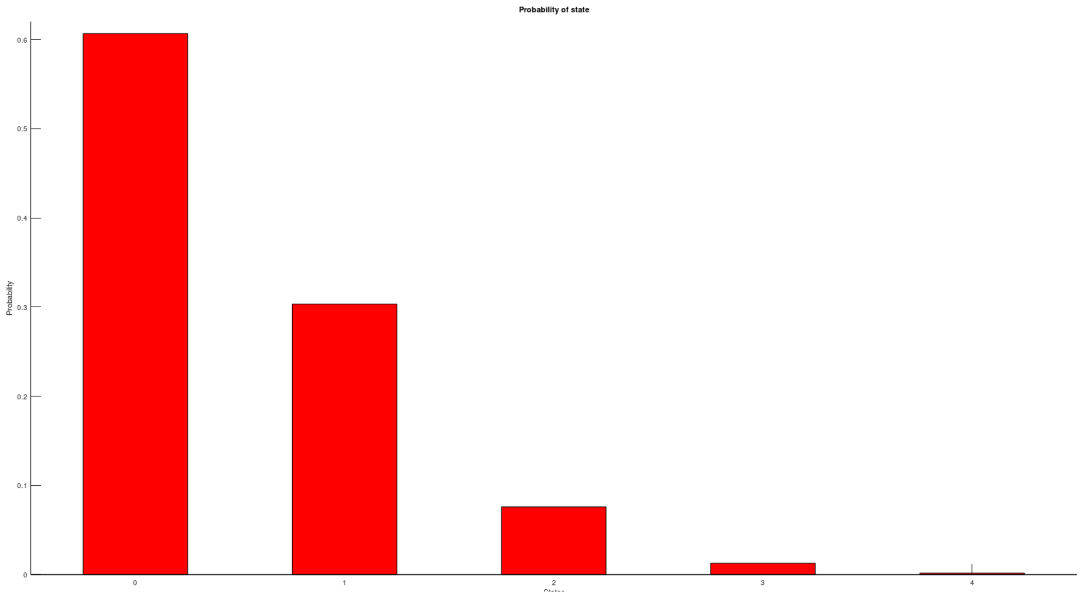
β) Μοντελοποιούμε το σύστημα ως μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων συνεχούς χρόνου:

i. **Μήτρα ρυθμού μεταβάσεων**

```
Part I:
transition_matrix =

   -5.0000    5.0000         0         0         0
   10.0000  -12.5000    2.5000         0         0
         0   10.0000  -11.6667    1.6667         0
         0         0   10.0000  -11.2500    1.2500
         0         0         0   10.0000  -10.0000
```

ii. Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων




```
Part II:
Prob =

   6.0664e-01   3.0332e-01   7.5829e-02   1.2638e-02   1.5798e-03
```

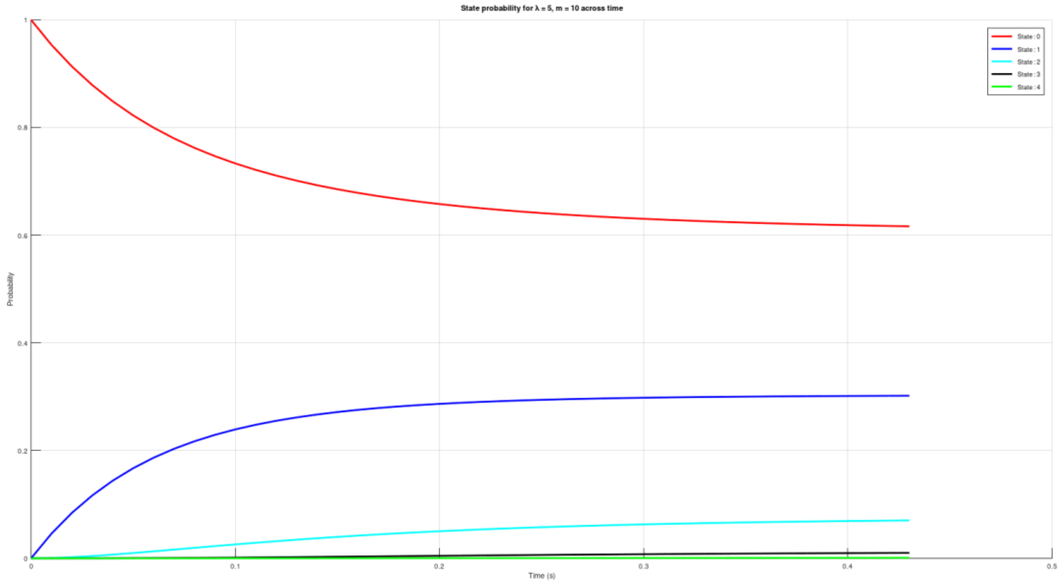
iii. Μέσος αριθμός πελατών σε κατάσταση ισορροπίας

```
Part III:
Average number =0.49921
```

iv. Πιθανότητα απόρριψης (blocking probability)

```
Part IV:
Blocking Probability =0.0015798
```

v. Πιθανότητες καταστάσεων



Κώδικας:

M/M/1:

```
pkg load statistics
pkg load queueing

clc;
clear all;
close all;

lambda = 5;
UTI=[0,50];
RES=[0,50];
AV_REQ=[0,50];
X=[0,50];

m = [5.1:0.1:10];
for i=1:columns(m)
    [UTI(i),RES(i),AV_REQ(i),X(i)] = qsmm1(lambda, m(i));
endfor
# Utiliaztion
figure(1);
hold on;
plot(m,UTI,"linewidth", 1);
title("Utilization","fontsize",12);
xlabel("Parameter μ","fontsize",12);
ylabel("Utilization","fontsize",12);

hold off;
# Server responce time
figure(2);
hold on;
plot(m,RES,"linewidth", 1);
title("Response Time","fontsize",12);
xlabel("Parameter μ","fontsize",12);
ylabel("Response time","fontsize",12);

hold off;
# Average number of requests
figure(3);
hold on;
plot(m,AV_REQ,"linewidth", 1);
title(" Average number of requests","fontsize",12);
xlabel("Parameter μ","fontsize",12);
ylabel("Average Number of requests","fontsize",12);

hold off;
# Server throughput
figure(4);
hold on;
plot(m,X,"linewidth", 1);
title("Throughput","fontsize",12);
xlabel("Parameter μ","fontsize",12);
ylabel("Throughput","fontsize",12);

hold off;
```

M/M/1/4:

```
pkg load statistics
pkg load queueing

clc;
clear all;
close all;

lambda = 5;
m = 10;
states = [0, 1, 2, 3, 4];
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

births = lambda ./ (1+states) (:,[1:4]);
deaths = [m, m, m, m];

#PART B
# I)
display("Part I:");
transition_matrix = ctmcbd(births, deaths);
display(transition_matrix);

# II)
display("Part II:");
Prob = ctmc(transition_matrix);
display(Prob);

figure(1);
hold on;
bar(states, Prob, "r", 0.5);
title("Probability of state");
xlabel("States");
ylabel("Probability");
axis([-0.5 4.5 0 0.62]);
hold off;

# III)
display("Part III:");
avrg = sum(Prob.*states);
display(strcat("Average number = " , num2str(avrg)));
display(" ");

# IV)
display("Part IV:");
```

```
display(strcat("Blocking Probability = " , num2str(Prob(5))));
display(" ");

# V)
display("Part V:")
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 60
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob0(index) = P0(1);
  Prob1(index) = P0(2);
  Prob2(index) = P0(3);
  Prob3(index) = P0(4);
  Prob4(index) = P0(5);
  if (P0 - Prob) < 0.01
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : T;
figure(2);
hold on;
plot(T, Prob0, "r", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob1, "b", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob2, "c", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob3, "k", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob4, "g", "linewidth", 1.3);
title("State probability for \\lambda = 5, m = 10 across time");
xlabel("Time (s)");
ylabel("Probability");
axis([0 0.5]);
legend (" State : 0"," State : 1"," State : 2"," State : 3"," State : 4");
grid on;
hold off;
```