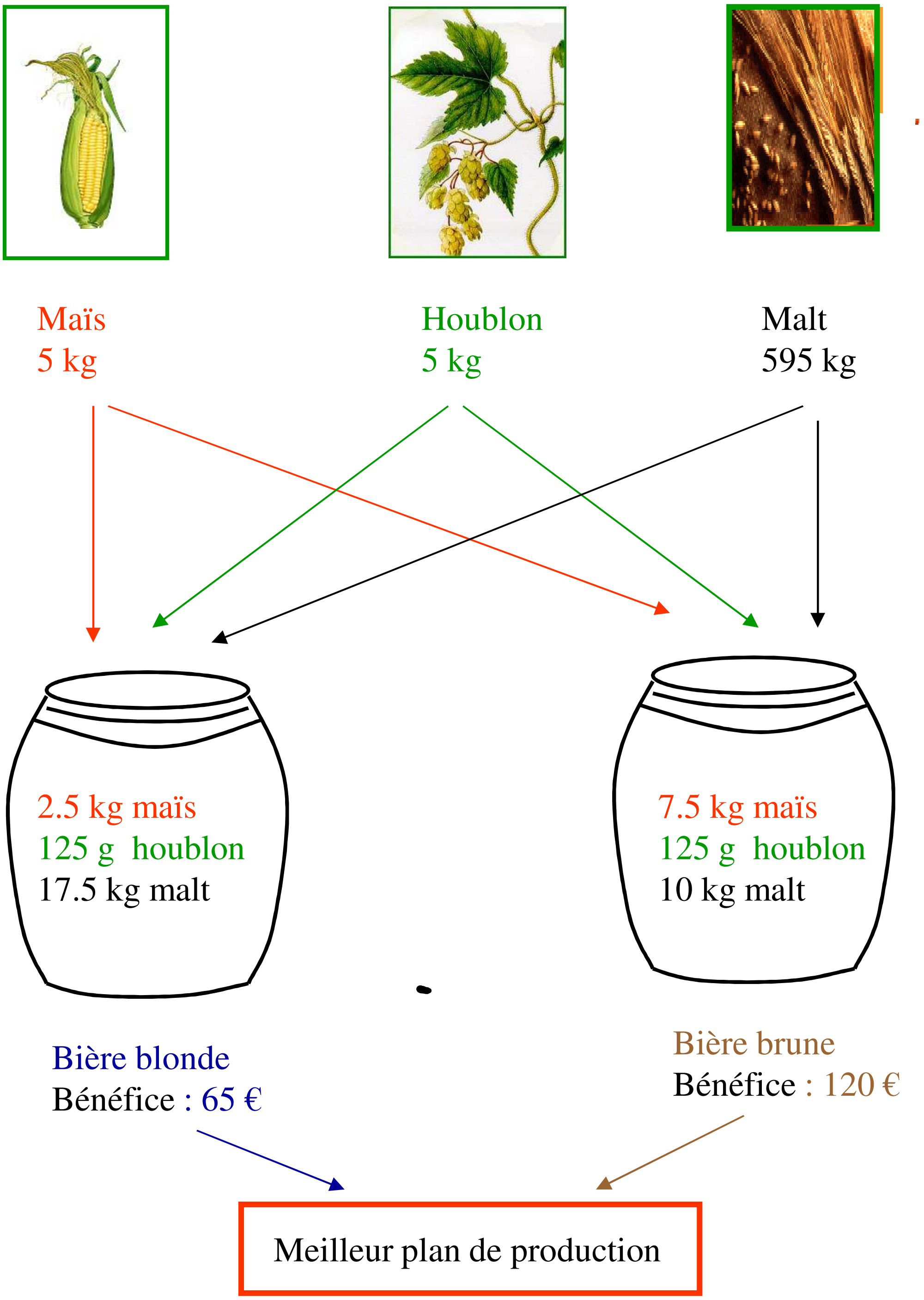
Modélisation
Et
Optimisation

Introduction à la programmation linéaire

Un problème de décision



Modèlisation

1- Variables

Choisir la quantité de bière fabriquée

x : nombre de barils de bière blonde
y : nombre de barils de bière brune

2- Contraintes

Proportionnalité entre ce qui est utilisé et ce qui est produit

Maïs : $2.5\,x + 7.5\,y \leq 240$
Houblon : $125\,x + 125\,y \leq 5000$
Malt : $17.5\,x + 10\,y \leq 595$
$x \geq 0$; $y \geq 0$

contraintes linéaires

3- Objectif

Maximiser le bénéfice

$$\textbf{Max}\ z = 65\,x + 120\,y$$

fonction d'optimisation linéaire

Problème d'optimisation

$$\begin{cases} \textbf{Max } z = 65\,x + 120\,y \\ 2.5\,x + 7.5\,y \leq 240 \\ 125\,x + 125\,y \leq 5000 \\ 17.5\,x + 10\,y \leq 595 \\ x \geq 0 \;\; ; \;\; y \geq 0 \end{cases}$$

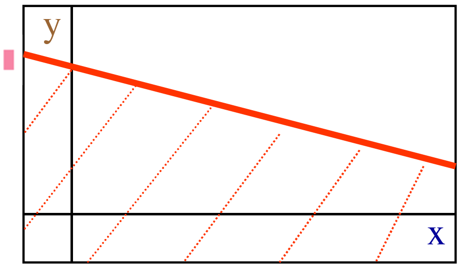
Problème de programmation linéaire

⇨ Résolution algébrique

➡ Analyse de l'espace de recherche

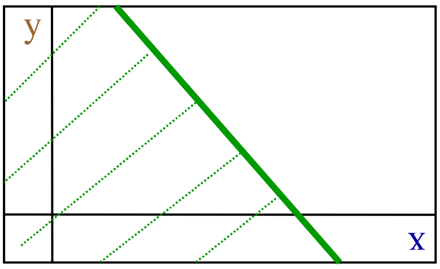
Espace de recherche

Maïs



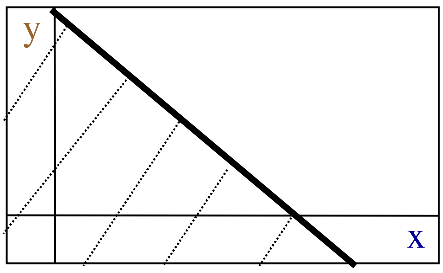
$2.5\ x + 7.5\ y \leq 240$

Malt

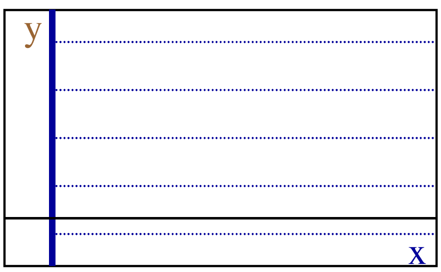


$125\ x + 125\ y \leq 5000$

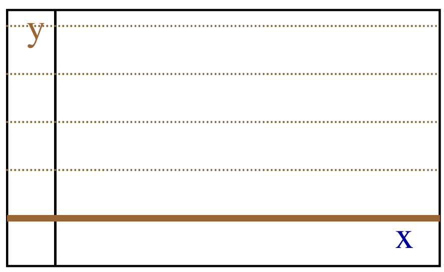
Houblon



$17.5\ x + 10\ y \leq 595$

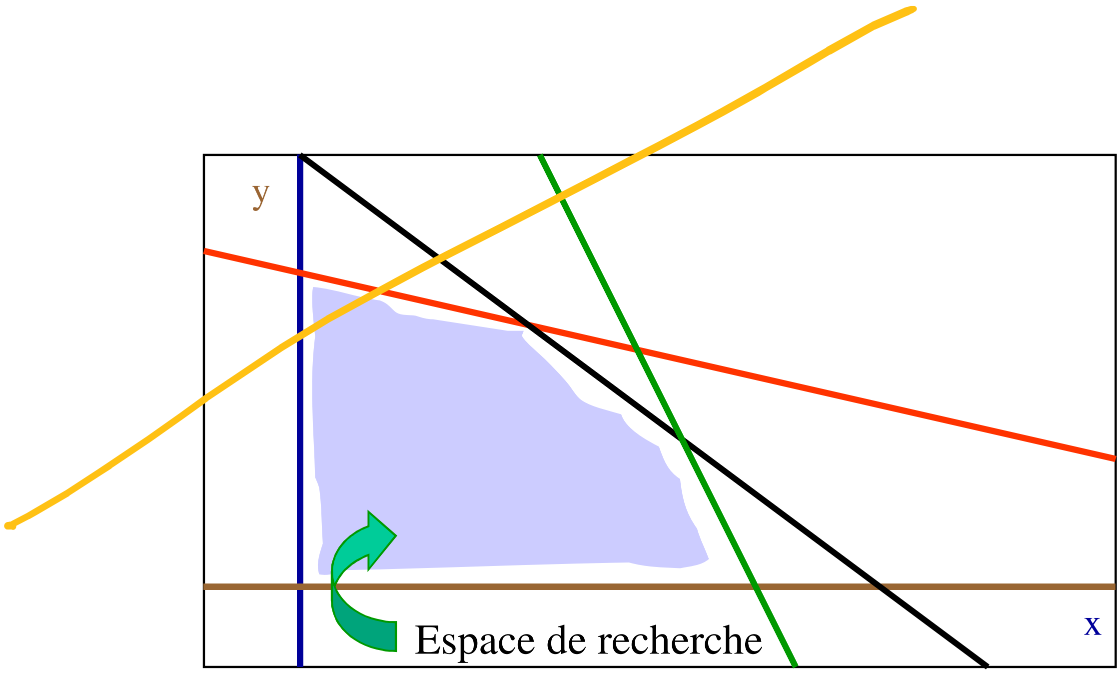


$x \geq 0$



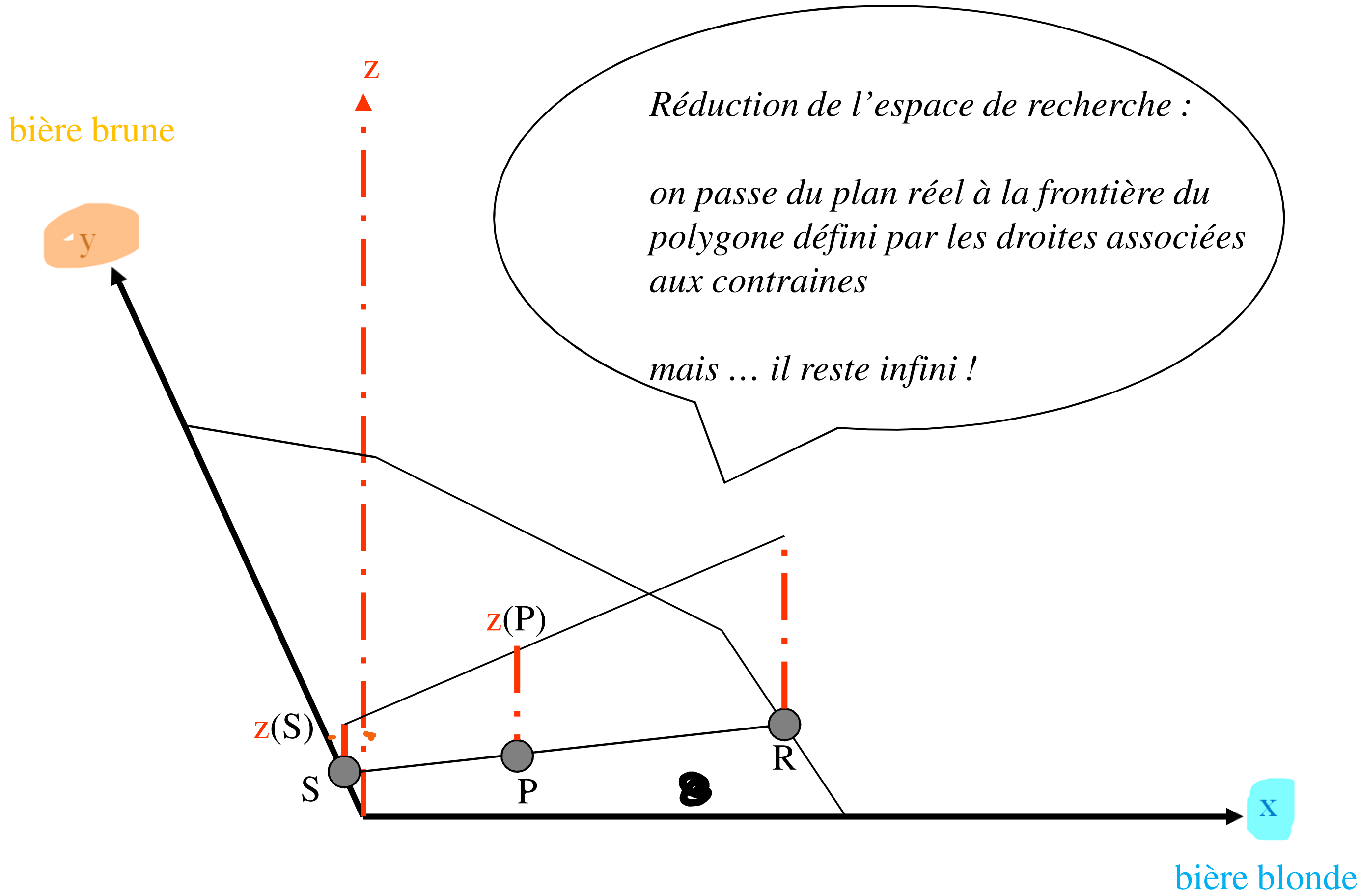
$y \geq 0$

Espace de recherche



Comment rechercher astucieusement la solution optimale dans cet espace ?

Espace de recherche

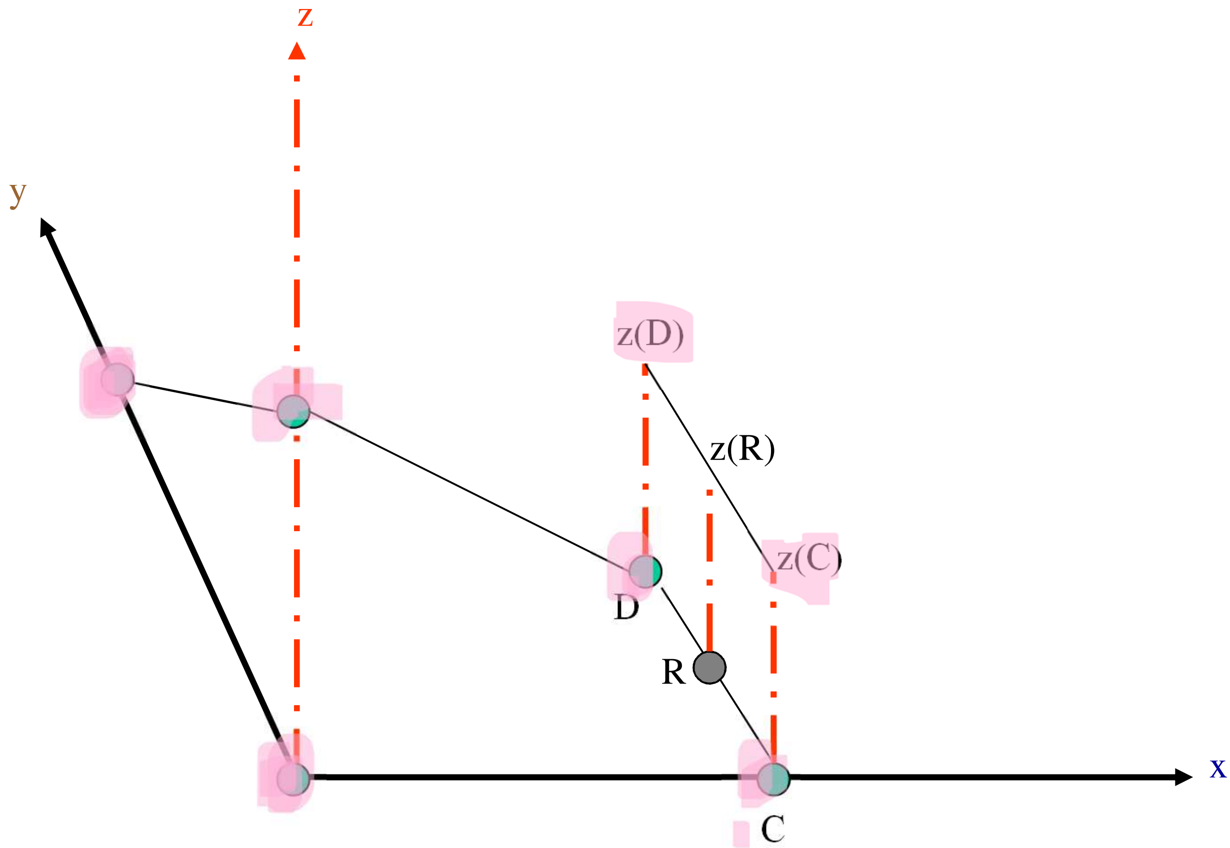


2 caractéristiques fondamentales : *fonction d'optimisation*

- la fonction objectif est linéaire *linéaire*
- l'espace de recherche (région admissible) est un polygone

⇨ La valeur maximale est atteinte <u>sur la frontière</u>

Espace de recherche



2 caractéristiques fondamentales :

- la fonction objectif est linéaire
- l'espace de recherche est un polygone

Si l'espace de recherche est un polygone
alors la valeur maximale de la fonction objectif est atteinte
en un de ses sommets

Réduction de l'espace de recherche :

on passe de la frontière du polygone défini par les droites associées aux contraintes aux sommets du polygone
Il est très grand … mais fini !

Méthode d'optimisation

Conséquence des caractéristiques l'espace de recherche :
- il suffit de rechercher le maximum de la fonction objectif aux sommets du polygone

⇨ Optimisation combinatoire

▲ L'ensemble de ces sommets peut être très grand

- Introduction d'une contrainte supplémentaire
  (ex : quantité limitée de levure de bière)

  ⇨ Le polygone a 6 sommets au lieu de 5

Augmentation du nombre de droites délimitant l'espace de recherche. Et par conséquent du nombre de sommets du polygone

- Introduction d'un nouveau type de bière

  ⇨ L'espace de recherche passe à 3 dimensions.
  La région admissible est un polyèdre dont les faces sont des polygones.

2D -> 3D –> n D

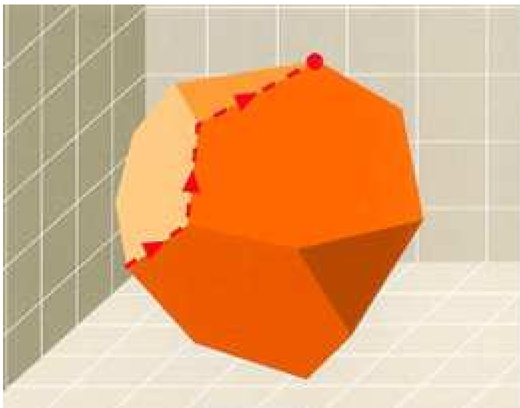
Polygone -> Polyèdre

Espace de recherche

La région admissible est un polyèdre dont les faces sont des polygones.

Grâce à la linéarité de la fonction et des contraintes, les solutions sont sur les sommets du polygone.

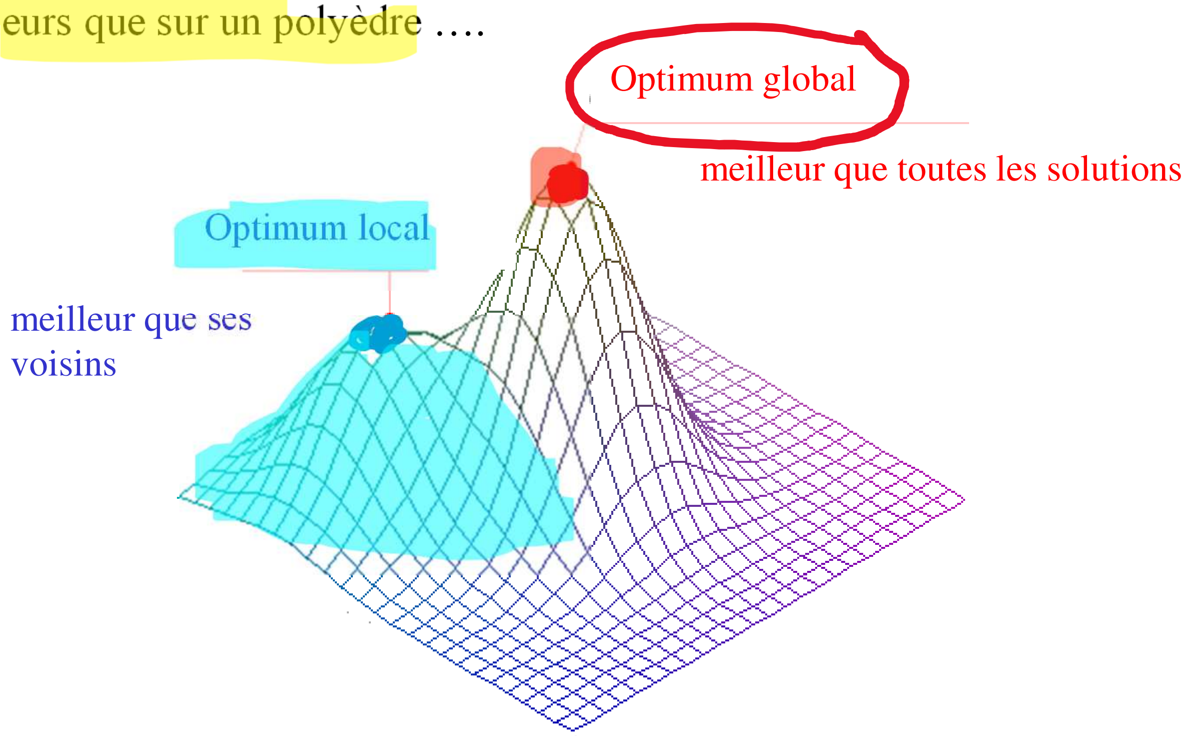
Comment parcourir astucieusement les sommets du polyèdre ?



Raisonnement :
1- Modéliser le problème
2- Caractériser l'espace de recherche
3- Développer un algorithme pour pouvoir le parcourir efficacement pour trouver une solution optimale … ou de « bonne qualité » en cas de problème NP-méchant

Parcours d’espace de recherche

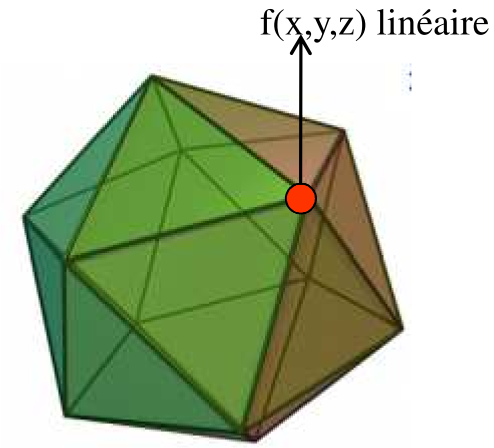
Ailleurs que sur un polyèdre ….



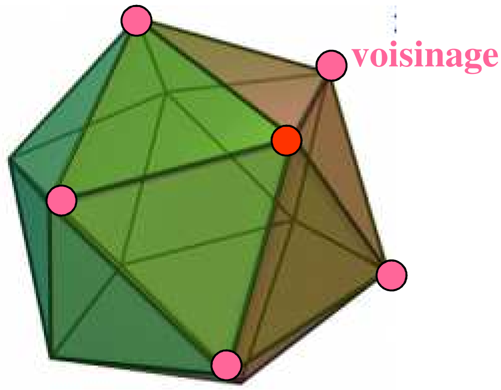
Ce schéma dans le cas continu permet de comprendre ce qu’est un optimum local.
La définition reste valide en discret : une solution meilleure que ses voisines.
Mais le schéma est contre-intuitif sur l’imbrication des optima locaux et globaux. La notion de voisinage est très différente en discret.

Parcours d'espace de recherche

Retour à l'optimisation d'une fonction linéaire sur un polyèdre ….



Espace de recherche

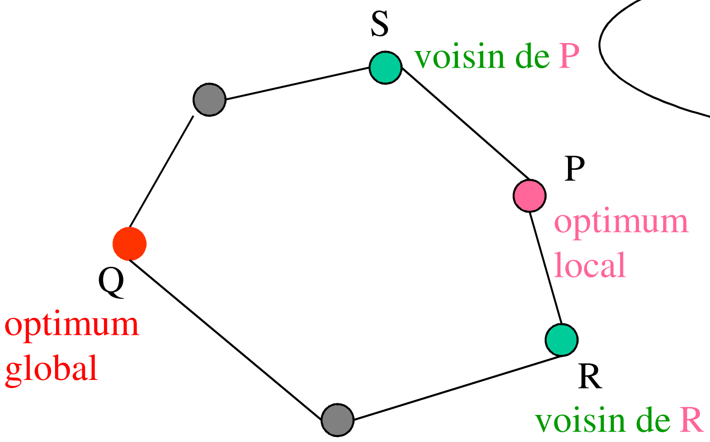


Théorème : tout optimum local est optimum global

Conséquence pratique :
Si un sommet du polygone correspond à un plan de production (valeurs de x et y) meilleur que ceux de ses voisins alors il est une solution optimale du problème.
Cela permet de construire un algorithme efficace de parcours de l'espace de recherche

Méthode d'optimisation

Comment parcourir astucieusement les sommets du polyèdre ?

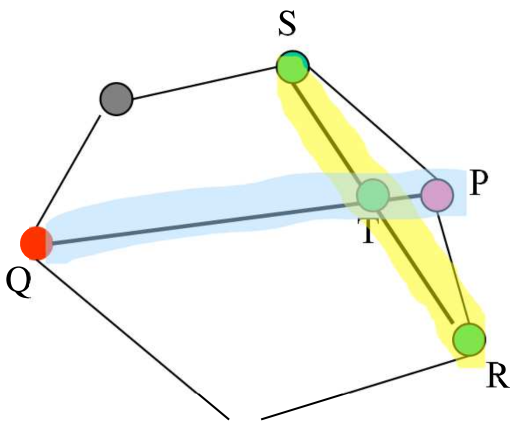


Raisonnement par l'absurde :
On suppose qu'on a en même temps un optimum local et un optimum global et On montre que c'est impossible.

Q optimum global

P optimum local

$$\begin{cases} z(Q) > z(P) \\ z(S) < z(P) \\ z(R) < z(P) \end{cases}$$



Linéarité de z sur [Q,P] :
z(T) > z(P)

Linéarité de z sur [S, R] :
1- soit z(T) < z(S)
2- soit z(T) < z(R)

1- soit z(P) < z(T) < z(S)
ABSURDE
(P optimum local)

2- soit z(P) < z(T) < z(R)
ABSURDE
(P optimum local)

⇨ Si P est un optimum local alors il est global de par la convexité de la région admissible.

Méthode d'optimisation

Conséquence des caractéristiques l'espace de recherche :

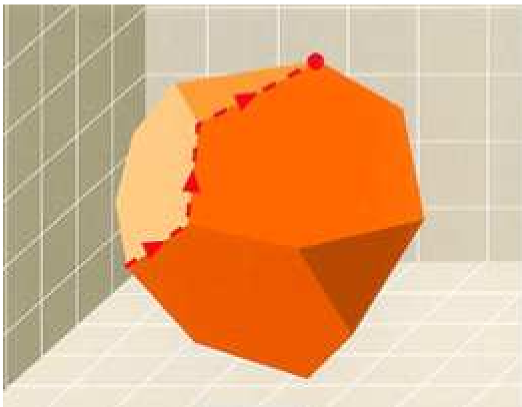
Algorithme « efficace » de recherche de la solution

⇨ Algorithme du simplexe

Stratégie

Passer itérativement d 'un sommet du polyèdre des contraintes à un sommet adjacent de façon à augmenter la valeur de la fonction à optimiser

jusqu'à trouver un sommet où la fonction ne varie plus (le maximum est atteint)



Complexité algorithmique

Pire des cas

Klee-Minty (1972)
Il existe des problèmes pour lesquels l'algorithme nécessite l'examen d 'un nombre de points extrêmes croissant exponentiellement avec la taille du problème (nombre de variables + contraintes)

En moyenne

Statistiques de Dantzig (1963)
O(m) à O(3m) où m est le nombre de contraintes

En théorie

Kachian (1979)
Les problèmes de programmation linéaire peuvent être résolus en temps polynomial en fonction de la taille du problème

MAIS

l'algorithme polynomial de Kachian-Shor est moins efficace en pratique que l'algorithme du simplexe

D’autres problèmes

Pour de nombreux problèmes d’optimisation - en particulier d’optimisation combinatoire- on n’a pas toutes les belles propriétés rencontrées dans l’exemple.

- Peu de connaissances sur la structure de l’espace de recherche

- Beaucoup d’optima locaux
  MAIS pas d’information sur leur distribution