Recherche Opérationnelle

Chapitre 2 : Programmation linéaire
(Partie 2 : Un problème d'optimisation linéaire en dimension supérieure)

Julian Tugaut

Vendredi 13 *Novembre* 2015

Sommaire

Plan

Problème de transport - 1

Notre fabricant d'automobiles possède trois chaînes de montage M_1, M_2 et M_3 tandis que son stock d'acier provient de deux aciéries A_1 et A_2. Les coûts de transport d'une unité d'acier d'une aciérie vers une usine de montage sont donnés par le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3
A_1	9	16	28
A_2	14	29	19

Problème de transport - 2

Les besoins de production des chaînes de montage diffèrent :

M_1	142
M_2	266
M_3	192

De même les capacités de production des aciéries sont différentes :

A_1	206
A_2	394

Problème de transport - 3

Il s'agit pour le fabricant de déterminer le plan de transport des unités d'acier produites vers les chaînes de montage afin de minimiser le coût total de transport. Pour $i \in [\![1;2]\!]$ et $j \in [\![1;3]\!]$, on note $x_{i,j}$ le nombre d'unités d'acier acheminées depuis l'aciérie A_i vers la chaîne de montage M_j. Le problème de transport optimal peut alors s'écrire :

$$\begin{array}{ll}
\text{min. } T = & 9x_{1,1} + 16x_{1,2} + 28x_{1,3} + 14x_{2,1} + 29x_{2,2} + 19x_{2,3} \\
\text{sous} & x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 206 \\
& x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 394 \\
& x_{1,1} + x_{2,1} \geq 142 \\
& x_{1,2} + x_{2,2} \geq 266 \\
& x_{1,3} + x_{2,3} \geq 192 \\
& x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3} \geq 0
\end{array}$$

Problème de transport - 4

Nous verrons par la suite qu'il est possible de traiter un tel problème de manière systématique, par le biais d'une réduction à une forme standard suivie d'un algorithme qui porte le nom de méthode du simplexe. Toutefois, dans ce cas précis, cela nous mènerait à des manipulations trop fastidieuses pour être réalisées sans l'aide d'un ordinateur. À sa place, nous allons procéder à un certain nombre de remarques ad hoc qui vont nous permettre de poursuivre les calculs à la main.

Problème de transport - 5

La remarque principale ici est que dans la mesure où la somme des capacités de productions des aciéries $(206 + 394 = 600)$ est égale à la somme des besoins de production des trois chaînes de montage $(142 + 266 + 192 = 600)$, chacune des cinq premières inégalités dans le problème d'optimisation ci-dessus doit nécessairement être une égalité. Si on omet momentanément de s'occuper des contraintes $x_{i,j} \geq 0$, les contraintes restantes se réduisent à un système de cinq équations à six inconnues, que nous pouvons tenter de résoudre par la méthode du pivot de Gauss.

Problème de transport - 6

On réécrit le sous-système des contraintes d'égalité sous la forme (on choisit l'ordre des équations afin de faciliter le pivot de Gauss) :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{1,1} & & & & & + & x_{2,1} & & & & & = & 142 \\
& & x_{1,2} & & & & & + & x_{2,2} & & & = & 266 \\
& & & & x_{1,3} & & & & & + & x_{2,3} & = & 192 \\
x_{1,1} & + & x_{1,2} & + & x_{1,3} & & & & & & & = & 206 \\
& & & & & & x_{2,1} & + & x_{2,2} & + & x_{2,3} & = & 394
\end{array}
$$

Problème de transport - 7

Sous forme matricielle :

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 142 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 266 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 192 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 206 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 394
\end{array}
$$

Problème de transport - 8

Ce qui donne

$$\begin{array}{cccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 142 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 266 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 192 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 64 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 394
\end{array}$$

Problème de transport - 9

puis

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 142 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 266 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 192 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -202 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 394 \end{array}\right)$$

Problème de transport - 10

puis

$$\begin{array}{cccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 142 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 266 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 192 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -394 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 394
\end{array}$$

Problème de transport - 11

Les deux dernières lignes sont similaires. On peut donc en enlever une :

$$
\left.\begin{array}{cccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -252 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 266 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 192 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 394
\end{array}\right.
$$

Problème de transport - 12

Les variables $x_{2,2}$ et $x_{2,3}$ sont libres. On en déduit :

$$\begin{aligned}
x_{2,1} &= 394 - x_{2,2} - x_{2,3} \\
x_{1,3} &= 192 - x_{2,3} \\
x_{1,2} &= 266 - x_{2,2} \\
x_{1,1} &= -252 + x_{2,2} + x_{2,3} \,.
\end{aligned}$$

On exprime ensuite le coût T uniquement en termes des variables libres $x_{2,2}$ et $x_{2,3}$:

$$\begin{aligned}
T =& 9(-252 + x_{2,2} + x_{2,3}) + 16(266 - x_{2,2}) + 28(192 - x_{2,3}) \\
& + 14(394 - x_{2,2} - x_{2,3}) + 29x_{2,2} + 19x_{2,3} \\
=& 8x_{2,2} - 14x_{2,3} + 12\,880 \,.
\end{aligned}$$

Problème de transport - 13

Afin de minimiser T, il est donc opportun de choisir $x_{2,3}$ le plus grand possible et $x_{2,2}$ le plus petit possible. C'est à ce niveau qu'il nous est nécessaire de faire réapparaître les contraintes de positivité sans lesquelles T pourrait être rendu aussi négatif que souhaité.

En examinant les équations plus haut, on se convainc assez rapidement que le meilleur choix est obtenu en prenant $x_{2,3} = 192$ (afin de satisfaire mais de saturer la contrainte $x_{1,3} \geq 0$) et ensuite $x_{2,2} = 60$ (afin de satisfaire mais de saturer la contrainte $x_{1,1} \geq 0$). On propose alors la solution suivante :

$$x_{1,1} = 0\,,\ x_{1,2} = 206\,,\ x_{1,3} = 0\,,\ x_{2,1} = 142\,,\ x_{2,2} = 60\,,\ x_{2,3} = 192\,,$$

Problème de transport - 14

comme candidat à être le transport optimal. Pour vérifier notre intuition, on choisit d'exprimer le coût total T uniquement en termes des variables $x_{1,1}$ et $x_{1,3}$ ce qui donne l'expression :

$$\begin{aligned} T =& 8x_{2,2} - 14x_{2,3} + 12\ 880 \\ =& 8(60 + x_{1,1} + x_{1,3}) - 14(192 - x_{1,3}) + 12\ 880 \\ =& 8x_{1,1} + 22x_{1,3} + 10\ 672\,. \end{aligned}$$

Comme $x_{1,1} \geq 0$ et $x_{1,3} \geq 0$ par contrainte, on a nécessairement $T \geq 10\ 672$ quel que soit le choix des autres variables satisfaisant l'ensemble des contraintes. Par ailleurs, le choix proposé précédemment fournit $T = 10\ 672$ et satisfait à l'ensemble des contraintes. Il s'agit donc effectivement de la solution optimale.

Problème de transport - 15

Pour terminer cet exemple par une synthèse, observons que nous sommes parvenus à réécrire le problème d'optimisation initial sous la forme d'un système linéaire augmenté de contraintes de positivités de toutes les variables. Nous avons ensuite déterminé le rang de la matrice sous-jacente et exprimé de diverses manières possibles (deux en fait) la fonction à optimiser en termes de variables libres pour ce système linéaire. Nous nous sommes arrêtés lorsque les coefficients des variables libres dans l'expression de la fonction à optimiser furent tous positifs ou nuls, et avons conclu que les égaler à zéro fournissait une solution assurément optimale.

Plan

Simplexe - 1

Considérons le problème d'optimisation linéaire :

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{maximiser} & Z := & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{sous les contraintes} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\
 & & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{1}
$$

Simplexe - 2

Afin de se ramener à un système d'équations plutôt que d'inéquations, on introduit les variables d'écart e_1, e_2 et e_3 et l'on écrit le problème ci-dessus sous la forme

$$\begin{array}{ccccccccc} e_1 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ e_2 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ e_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ Z & = & & + & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \end{array} \tag{2}$$

avec pour but de maximiser Z sous les contraintes additionneles $x_i, e_i \geq 0$ (pour tout $i \in [\![1;3]\!]$). Il est aisé de vérifier que si $(x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3)$ est une solution optimale de ce dernier problème, alors (x_1, x_2, x_3) constitue une solution optimale du problème (1). Inversement, si (x_1, x_2, x_3) est une solution optimale de (1), alors $(x_1, x_2, x_3, 5-2x_1-3x_2-x_3, 11-4x_1-x_2-2x_3, 8-3x_1-4x_2-2x_3)$ constitue une solution optimale de (2).

Simplexe - 3

Le système (2) possède la solution (non optimale) $(0, 0, 0, 5, 11, 8)$.

Définition

L'usage est d'appeler « solution réalisable » tout choix de variables satisfaisant à l'ensemble des contraintes.

On observe que dans l'expression $Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$, une augmentation de x_1 entraîne une augmentation de Z. L'idée première est alors d'augmenter x_1 autant que possible (sans modifier ni x_2 ni x_3) tant qu'aucune des variables d'écart e_1, e_2 ou e_3 ne devient négative. Le choix maximal est donc $x_1 = \min\left\{\frac{5}{2}; \frac{11}{4}; \frac{8}{3}\right\} = \frac{5}{2}$, lorsque e_1 devient nulle et qui fait passer à la solution réalisable $\left(\frac{5}{2}, 0, 0, 0, 3, \frac{1}{2}\right)$.

Simplexe - 4

On réécrit le système (2) en exprimant cette fois (x_1, e_2, e_3) (ainsi que Z) en termes de (x_2, x_3, e_1), au moyen de l'équation

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1 \,.$$

Simplexe - 5

Ceci donne, après substitutions :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}e_1 \\
e_2 & = & 1 & + & 5x_2 & & & + & 2e_1 \\
e_3 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}e_1 \\
Z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{5}{2}e_1
\end{array}
\qquad (3)
$$

Simplexe - 6

Cette fois, on observe que dans l'expression $Z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1$, une augmentation de x_3 (c'est ici le seul choix possible) entraîne une augmentation de Z. À nouveau, on augmente donc x_3 autant que possible (sans modifier ni x_2 ni e_1) tant qu'aucune des variables de base x_1, e_2 ou e_3 ne devient négative. Le choix maximal est donc $x_3 = \min\left\{\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}; \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = 1$, lorsque e_3 devient nulle, et qui fait passer à la solution réalisable $(2, 0, 1, 0, 1, 0)$.

Simplexe - 7

On réécrit le système (3) en exprimant cette fois (x_1, x_3, e_2) (ainsi que Z) en termes de x_2, e_1, e_3, au moyen de l'équation

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3 \,.$$

Ceci donne, après substitutions :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & 2 & - & 2x_2 & - & 2e_1 & + & e_3 \\ x_3 & = & 1 & + & x_2 & + & 3e_1 & - & 2e_3 \\ e_2 & = & 1 & + & 5x_2 & + & 2e_1 & & \\ Z & = & 13 & - & 3x_2 & - & e_1 & - & e_3 \,. \end{array} \tag{4}$$

Simplexe - 8

Puisque les coefficients de x_2, e_1 et e_3 intervenant dans l'expression de Z ci-dessus sont tous négatifs ou nuls, on déduit que la solution réalisable

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= 1 \\
e_1 &= 0 \\
e_2 &= 1 \\
e_3 &= 0
\end{aligned}
$$

est une solution optimale pour laquelle $Z = 13$.

Simplexe - 9

Plutôt que de formaliser l'algorithme du simplexe et d'en découvrir les bases théoriques, voyons une deuxième méthode pour l'aborder et qui consiste à placer les calculs en tableau (toutes les variables se retrouvent du même côté du signe de l'égalité) plutôt que sous forme de dictionnaire comme ci-dessus. L'avantage de cette deuxième façon de présenter les choses (mais qui est bien sûr équivalente à la première) est qu'elle se rapproche plus de la méthode bien connue du pivot de Gauss.

Plan

Simplexe - 10

Il convient de garder à l'esprit que l'algorithme qui sera présenté dans ce cours n'est pas *stricto sensu* l'algorithme du simplexe. En effet, il faudrait que l'on applique des critères pour éviter la cyclicité et pour que la vitesse soit optimale.

Simplexe - 11

Considérons donc maintenant le problème d'optimisation linéaire

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{maximiser} & Z := & x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & \\
\text{sous les contraintes} & & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
& & -x_1 & + & & + & 3x_3 & \leq & 2 \\
& & 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
\tag{5}
$$

Simplexe - 12

On introduit les variables d'écart e_1, e_2, e_3 et e_4 (on a quatre variables d'écart car on a quatre contraintes) et on réécrit le problème sous la forme

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
Z := & x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & & \\
& x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & e_1 & & & & & & & = & 3 \\
& -x_1 & + & & + & 3x_3 & & & + & e_2 & & & & & = & 2 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & & & & & + & e_3 & & & = & 4 \\
& x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & & & + & e_4 & = & 2 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & e_1 & , & e_2 & , & e_3 & , & e_4 & \geq & 0
\end{array}
\tag{6}
$$

Simplexe - 13

On adopte alors la notation sous forme de tableau :

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
-1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

La dernière ligne du tableau correspond à une expression possible de Z comme fonction affine des variables $x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3, e_4$, l'opposé du terme constant se trouvant en bas à droite du tableau. On part de la solution réalisable $(0, 0, 0, 3, 2, 4, 2)$ et puisque le terme en x_1 dans la dernière ligne du tableau est strictement positif, on va augmenter x_1 (sans modifier x_2 ni x_3) jusqu'à ce que l'une des variables e_1, e_2, e_3, e_4 devienne nulle. Ceci se produit pour $x_1 = 2$ pour lequel à la fois e_3 et e_4 deviennent nulles. On choisit donc de faire rentrer x_1 en base et de faire sortir (par exemple) e_3. Cela donne :

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r}
1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
-1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\
1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Simplexe - 15

puis

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\
0 & 2 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\
1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\hline
0 & 3 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -2
\end{array}$$

et fournit une solution réalisable pour laquelle $x_1 = 2$, $e_1 = 1$, $e_2 = 4$, $e_4 = 0$ (et les variables hors base sont toujours nulles : $x_2 = x_3 = e_3 = 0$).

Simplexe - 16

Puisque le coefficient de x_2 dans la nouvelle expression de Z est positif, on fait ensuite rentrer x_2 en base, et on doit faire sortir e_4. Cela donne :

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & 4 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 & 2 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2
\end{array}$$

et fournit la solution réalisable $(2, 0, 0, 1, 4, 0, 0)$.

Simplexe - 17

On fait ensuite rentrer x_3 en base (son coefficient dans l'expression de Z vaut maintenant 3) et on fait sortir e_1 (qui s'annule lorsque $x_3 = \frac{1}{2}$). Cela donne

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & 4 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 & 2 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2
\end{array}$$

Simplexe - 18

puis

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\
\hline
0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2}
\end{array}
$$

et fournit la solution réalisable $\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right)$.

Simplexe - 19

On fait ensuite rentrer e_3 et sortir x_1 (qui s'annule en premier lorsque $e_3 = \frac{7}{6}$). Cela donne

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\
\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\
\hline
0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2}
\end{array}$$

Simplexe - 20

puis

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
-1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} \\
\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\
\hline
-\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{14}{3}
\end{array}$$

et fournit finalement la solution optimale $\left(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, 0\right)$ pour laquelle $Z = \frac{14}{3}$.