Université Med premier-OUJDA

Ecole nationale des sciences appliquées-OUJDA

Département Mécanique Et Maths Appliquées

Filière Génie Industriel

TD de fiabilité
Avec corrections

Réalisé par :

- MABSOUT Med Amine

Année universitaire : 2015/2016

TD N : 1

Exercice 1 :

Si une pièce a une probabilité de se réaliser p=0.9 pour une mission donnée.

1-quelle est la probabilité d'avoir exactement k=3 pièces bonnes sur un groupe de n=5 ?

2- quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 pièces bonnes sur un groupe de n=5 ?

Correction :

Soit X une variable aléatoire désignant le nombre des pièces bonnes. X suit la loi binomiale.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$P(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 (1 - p)^2$

$P(X = 3) = 0.0729$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$= 0.9914$

Exercice 2 :

Pour un certain type d'ampoules électriques, la durée de vie en heures d'une ampoule est une variable aléatoire dont la loi de probabilité admet une densité de probabilité f définie par :

f (t)= 0 pour t < 0

$$ate^{-\lambda t} \quad t \geq 0$$

Où a et λ sont des constantes strictement positives..

1-sachant que la durée de vie moyenne de ces ampoules est de 1000 heures. déterminer la valeur de des constantes a et λ .

2- quelle est la probabilité que la durée de vie moyenne d'une ampoule soit entre 500 et 1000 heures ?

Correction :

1-Soit X une variable aléatoire désignant la durée de vie d'un certain type d'ampoule.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \frac{2a}{\lambda^3} = 1000$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$$

$$a = \lambda^2$$

$$\frac{2a}{\lambda^3} = 1000$$

$\lambda = \frac{1}{500}$

$$a = \frac{1}{2.5 \times 10^5}$$

2- $P(500 < X < 1000) = \int_{500}^{1000} f(t)dt = a \int_{500}^{1000} te^{-\lambda t}\, dt$

$$= 0.329 \cong 0.33$$

Exercice 3 :

Une machine à embouteiller peut tomber en panne. La probabilité d'une panne est de 0.01 à chaque emploi de la machine. La machine doit être utilisée 100 fois.

1-Le nombre de pannes obtenues est une variable X .Calculer les probabilités d'obtenir $X = 0, X = 1$ $X = 2$, $X = 3, X \geq 4$.

2-Déterminer (dans l'ordre que l'on préféra) $E(X), V(X)$ et la fonction génératrice gX de X .

3- On estime le cout d'une réparation à 500 DH. La dépense exprimée en dirhams pour les réparations de la machine est une variable aléatoire Y. Calculer la dépense moyenne.

Correction :

Soit X une variable aléatoire désignant le nombre de pannes de la machine.

$$X \sim B(100; 0.01)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$P(X = 0) = 0.366$; $P(X = 2) = 0.184$

$P(X = 1) = 0.369$; $P(X = 3) = 0.06$

$$P(X \geq 4) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = 0.021$$

$$E(X) = np = 100 \times 0.01 = 1$$

$V(X) = np(1 - p) = 0.99$

$g_x(u) = [pu + (1 - p)]^n$

On a $Y = 500X$

La dépense moyenne : $E(Y) = 500E(X) = 500$ DH

Exercice 4 :

On contrôle séparément les trois dimensions d'une pièce usinée qui a la forme d'un pavé. Les probabilités de rejet sont pour la longueur : p1 =0.06, pour la largeur : p2 =0.04 , pour la hauteur : p3 =0.08.La pièce est refusée dés qu'une de ses dimensions ne respecte pas les normes .

Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit refusée au contrôle ?

A : Rejet de la pièce pour sa longueur L.

B : Rejet de la pièce pour sa largeur l.

C : Rejet de la pièce pour sa hauteur h.

$$D = (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

$$P(D) = (P(\bar{A}) \cap P(\bar{B}) \cap P(\bar{C})$$

$$P(D) = (1 - P(A))\,(1 - P(B))\,(1 - P(C))$$

La probabilité pour qu'une pièce soit refusée au contrôle :

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.83 = 0.17$$

TD N : 2

Exercice 1 :

On considère une série statistique de 60 taux d'hémoglobine dans le sang (g/l) mesurés chez des adultes présumés en bonne santé. La série est rangée par valeurs non décroissantes : une étoile en haut à droite d'une valeur indique que le taux d'hémoglobine a été mesuré chez une femme.

105* ;110* ;112* ;112* ;118* ;119* ;120* ;120* ;125* ;126* ;127* ;128* ;130* ;132* ;133* ;134* ;
135* ;138* ;138* ;138* ;138* ;141 ;142* ;144 ;145* ;146 ;148 * ;148 * ;148 ;149 ;150* ;150 ;150 ;
151* ;151 ;153 ;153 ;153 ;154* ;154* ;154 ;155 ;156 ;156 ;158 ;160 ;160 ;160 ;163 ;164 ;164 ;165 ; 166 ;168 ;168 ;170 ;172 ;172 ;176 ;179.

Résultats partiels :

Hommes $\sum_{i=1}^{30} xih = 4766 g/l$ $\sum_{i=1}^{30} x^2ih = 759954 g/l$

Femmes $\sum_{i=1}^{30} xif = 3988 g/l$ $\sum_{i=1}^{30} x^2if = 536176 g/l$

1-Quelles informations peut-on obtenir, sans aucun calcul, en examinant les données de l'énoncé ?

2-On considère le groupement en classes :

Pour chacune des deux séries : homme, femme. Déterminer les effectifs de chaque classe, les fréquences.

3-Effectuer une représentation graphique adaptée des deux distributions groupées en classes de la question précédente.

4-Calculer les moyennes $\bar{x}$, $\bar{x}_f$, $\bar{x}_h$ des trois distributions initiales :ensemble, hommes, femmes.

5-Calculer les moyennes $\bar{x}'$, $\bar{x}_f'$, $\bar{x}'_h$ des trois distributions (ensemble, hommes, femmes) après le regroupement en classes de la question 2. Pour chaque classe on tiendra son milieu.

6-Calculer les variances et les écarts types des trois distributions initiales : ensemble, hommes, femmes.

7- Calculer les variances et les écarts types des trois distributions (ensemble, hommes, femmes) après le regroupement en classes de la question 2. Pour chaque classe on tiendra son milieu.

Correction :

Le taux d'hémoglobine chez les femmes est inférieur au taux d'hémoglobine chez les hommes.

Le taux d'hémoglobine minimal chez les femmes est égal à 105g/l.

Le taux d'hémoglobine minimal chez les hommes est égal à 179g/l.

Classe	Effectifs		Fréquence	
	Homme	femme	Homme	femme
$]104; 114]$	0	4	0	2/15
$]114; 124]$	0	4	0	2/15
$]124; 134]$	0	8	0	4/15
$]134; 144]$	2	6	1/15	1/5
$]144; 154]$	10	7	1/3	7/30
$]154; 164]$	9	1	3/10	1/30
$]164; 174]$	7	0	7/30	0
$]174; 184]$	2	0	1/15	0

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

-pour l'ensemble :

$$\bar{x} = \frac{1}{60}\left(\sum_{i=1}^{30} x_{ih} + \sum_{i=1}^{30} x_{if}\right) = 145.9 \text{ g/l}$$

-pour femmes :

$$\overline{x_f} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_{if} = 132.9 \text{ g/l}$$

-pour hommes :

$$\overline{x_h} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_{ih} = 158.86 \text{ g/l}$$

Après regroupement :

-pour l'ensemble :

$$\bar{x}' = \frac{1}{60}(4 \times 109 + \cdots + 2 \times 179) = 145.33 \text{ g/l}$$

-pour femmes :

$$\overline{x_f}' = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{8} n_{if}\ x_i' = \frac{1}{30}(4 \times 109 + \cdots + 2 \times 179) = 132.6 \text{ g/l}$$

-pour hommes :

$$\overline{x_h}' = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{8} n_{ih}\ x_i' = \frac{1}{30}(0 \times 109 + \cdots + 2 \times 179) = 158 \text{ g/l}$$

$$v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

-pour l'ensemble :

$$v = \frac{1}{60}\left(\sum_{i=1}^{30} x_{ih}^{\ 2} + \sum_{i=1}^{30} x_{if}^2\right) - \bar{x}^2 = 315.35(\text{ g/l})^2$$

$$\sigma = 17.75\ (g/l)$$

-pour femmes :

$$v_f = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} {x_{if}}^2 - \overline{{x_f}^{\ 2}} = 202.14\ (g/l)^2$$

$$\sigma_f = 14.21\ (g/l)$$

-pour hommes :

$$v_h = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} {x_{ih}}^2 - \overline{{x_h}^{\ 2}} = 95.3\ (g/l)^2$$

$$\sigma_h = 9.76\ (g/l)$$

Après regroupement :

-pour l'ensemble :

$$v' = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{8} n_i\ {x_i}'^2 - \overline{x}'^2 = \frac{1}{60}(4 \times (109)^2 + \cdots + 2 \times (179)^2) - (145.3)^2$$
$$= 314.95\ (g/l)^2$$

$$\sigma' = 17.27(g/l)$$

-pour femmes :

$$v_f' = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{8} n_{if}\ {x_i}'^2 - \overline{x_f}'^2 = \frac{1}{30}(4 \times (109)^2 + \cdots + 0 \times (179)^2) - (132.6)^2$$
$$= 198.22\ (g/l)^2$$

$$\sigma_f' = 14.08\ (g/l)$$

-pour hommes :

$$v_h' = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{8} n_{ih}\ x_i'^2 - \overline{x_h}'^2 = \frac{1}{30}(0\times(109)^2 + \cdots + 2\times(179)^2) - (145.33)^2$$
$$= 109(g/l)^2$$

$$\sigma_h' = 10.44\ (g/l)$$

Exercice 2:

Une entreprise de production de graines veut vérifier la faculté germinative d'une espèce c'est-à-dire la probabilité p pour qu'une graine prise au hasard germe.

Sur un échantillon de 400 graines, on observe que 330 graines germent. Quel est l'intervalle de confiance de p au risque 5% et au risque 1% ?

L'intervalle de confiance de la proportion :

$$I_\alpha = \left[F - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{F(1-F)}{n}}\ ;\ F + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{F(1-F)}{n}}\right]$$

$$F = \frac{Y}{n} = \frac{330}{400} = 0.829$$

$\alpha = 5\%$: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ $I_{5\%} = [0.7877; 0.8622]$

$\alpha = 1\%$: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$ $I_{1\%} = [0.7759; 0.8740]$

La longueur de l'intervalle de confiance est une fonction décroissante du risque.

Exercice 3:

On a mesuré le poids de raisin par souche sur 10 souches prises au hasard dans une vigne. on a obtenu les résultats suivants (en Kg) : 2.4 ; 3.2 ; 3.6 ; 4.1 ; 4.3 ; 4.7 ; 5.4 ; 5.9 ; 6.5 ; 6.9.

1-Déterminer une estimation ponctuelle sans biais de la moyenne et de la variance de la population dont ces souches sont extraites.

2-Donnez un intervalle de confiance de la moyenne de la population au risque de 0.05, en supposant que le poids de raisin par souche suit une loi normale au niveau de la vigne.

3-Toujours dans l'hypothèse d'une population gaussienne, donnez au risque 5% un intervalle de confiance de la variance, puis de l'écart type de la population.

Correction :

Estimation de la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}\ (2.4 + \cdots + 6.9) = 4.7\text{Kg}$$

Estimation de la variance :

$$s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s'^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 2.44\ \text{Kg}$$

L'intervalle de confiance de la moyenne :

$$I_\alpha = \left[\bar{X} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\ \frac{s'}{\sqrt{n}}\ ; \bar{X} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\ \frac{s'}{\sqrt{n}}\ \right]$$

$$I_{5\%} = [3.6\ ; 5.79]$$

L'intervalle de confiance de la variance :

$$I_\alpha = \left[\frac{(n-1)S^2}{X^2{}_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}\ ;\ \frac{(n-1)S^2}{X^2{}_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

$$I_{5\%} = [1.013\ ; 7.133]$$

Exercice 4:

Les spécifications d'un certain médicament indiquent que chaque comprimé doit contenir 2.5g de substance active. 100 comprimés sont choisis au hasard dans la production puis analysés .ils contiennent en moyenne 2.6 g de substance active avec l'écart type estimé S=0.4g.

Peut-on dire que le médicament respecte les spécifications (au risque 5%) ?

Test d'hypothèse pour la moyenne

H0 : le médicament respecte les spécifications m=m0

Règle de décision :

$$\overline{X} \in \left[m_0 - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s'}{\sqrt{n}} ; m_0 + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s'}{\sqrt{n}} \right]$$

A.N :

$\overline{X} = 2.6$; S = 0.4 ; n = 100

L'intervalle de confiance : [2.4 ; 2.5]

On a $\overline{X} \notin$ [2.4 ; 2.5] alors le médicament ne respecte pas les spécifications.

Exercice 5:

On cherche à savoir si la fréquence d'une maladie est liée au groupe sanguin. Sur 200 malades observés on a dénombré 104 personnes du groupe O ?76 du groupe A, 18 du groupe B et 2 du groupe AB. O n admettra que dans la population générale la répartition entre les groupes est : groupe O : 47 % ; groupe A : 47 % ; groupe B : 47 % ; groupe AB : 3 %.

Correction :

Test d'ajustement

H0 : la maladie est liée au groupe sanguin.

Groupe sanguin	O	A	B	AB	Total
θ_i	104	76	18	2	200
p_i	0.47	0.43	0.07	0.03	1
$T_i = np_i$	94	86	14	6	200

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\theta i - Ti)^2}{Ti} = \frac{(104 - 94)^2}{94} + \cdots + \frac{(2 - 6)^2}{6} = 0.64$$

K = 4-1= 3 $\alpha = 5\%$ $X^2{}_{3\,;\,0.95} = 7.81$ $D \leq X^2{}_{3\,;\,0.95}$

On accepte H0 ; la maladie est liée au groupe sanguin.

Exercice 6:

A la suite du même traitement, on a observé 40 bons résultats chez 70 malades jeunes et 50 bons résultats chez 100 malades âgés.

Peut on dire, au risque 10% qu'il existe une liaison entre l'âge du malade et l'effet du traitement ?

Correction :

H0 : l'âge du malade et l'effet de traitement sont indépendants

	Bon	Mauvais	

Jeunes	40	30	70
Agés	50	50	100
	90	80	170

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(nij - \frac{ni\,nj}{n})^2}{\frac{ni\,nj}{n}} = 0.8432$$

$\alpha = 10\%$ $X^2{}_{3\,;\,0.95} = 2.71$ $D \leq X^2{}_{1\,;\,0.9}$

Il n'existe pas un lien entre l'âge du malade et l'effet de traitement.

TD N : 3

Problème 1 :

Le diamètre de la prune d'une certaine variété est une variable aléatoire X qu'on suppose normale.les mesures faites sur un échantillon de 375 prunes de cette variété ont donné les résultats suivants :

Diamètre en cm	24	26	28	30	32	34	36	38	40
Effectif	7	20	38	79	84	75	53	15	4

1-Estimer, en cm, l'espérance de l'écart type de X.

2-Quel est l'intervalle de confiance au niveau 0.95 de l'estimation de E(X) ?

Correction :

L'espérance :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{375}\,(7 \times 24 + \cdots + 4 \times 40) = 31.99 \text{ cm}$$

L'écart type :

$$v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i^{\,2} - \bar{x}^{\,2\prime} = \frac{1}{375}(7\times(24)^2 + \cdots + 4\times(40)^2) - (31.99)^2$$
$$= 10.40\ cm^2$$

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{10.4} = 3.22cm$$

L'intervalle de confiance :

$\alpha = 0.05$ $\qquad S'^2 = \frac{n\,S^2}{n-1}$ $\qquad S' = S\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ $\qquad S' = 3.224\ cm$

$$\left[\bar{X} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s'}{\sqrt{n}}\,;\bar{X} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s'}{\sqrt{n}}\right]$$

$$[31.65\ ;32.32]$$

Problème 2:

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 200pannes des TV en fonction du marque et du model.

Marque / Model	Mod 1	Mod 2
Mar 1	26	20
Mar 2	61	63
Mar 3	8	22

Correction :

Les deux caractères, marque et modèle, sont ils statistiquement reliés ?

Marque / Model	Mod 1	Mod 2	$n_{i.}$
Mar 1	26	20	46
Mar 2	61	63	124
Mar 3	8	22	30

$n_{.j}$	95	105	200

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(nij - \frac{ni\,nj}{n})^2}{\frac{ni\,nj}{n}}$$

$$D = 6.771$$

On a $X^2_{(I-1)(J-1);\,1-\alpha} = X^2_{2\,;\,0.95} = 5.99$ $\quad D > X^2_{2\,;\,0.95}$

On rejette H0, alors la marque et le modèle sont liés.

Problème 3:

Sur 100 tubes à vide testés, 41 ont eu une durée de vie de moins 30 heures, 31 entre 30et 60 heures, 13 entre 60 et 90 heures, et 15 plus de 90 heures. Ces données sont elles compatibles avec l'hypothèse que la durée de vie d'un tube à vide est une loi exponentielle d'espérance égale à 50 heures ?

Correction :

Classes	$\boldsymbol{\theta}$i	$\boldsymbol{T}$i = n $\boldsymbol{P}$i
$\leq \mathbf{30}$	41	45.11
$]\mathbf{30}, \mathbf{60}]$	31	24.66
$]\mathbf{60}, \mathbf{90}]$	13	13.58
$> \mathbf{90}$	15	16.5

$$Pi = P(a_i \leq X \leq a_{i+1}) = F(a_{i+1}) - F(a_i)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\theta t}$$

$$\theta = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{50}$$

$$P_1 = F(30) - F(0) = 0.4511$$

$$P_2 = F(60) - F(30) = 0.2466$$

$$P_3 = F(90) - F(60) = 0.1358$$

$$P_4 = 0.165$$

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\theta i - Ti)^2}{Ti} = \frac{(41 - 45.11)^2}{45.11} + \cdots + \frac{(15 - 16.5)^2}{16.5} = 2.32$$

${X^2}_{n-1-r;\,1-\alpha} = {X^2}_{2\,;\,0.95} = 5.99$

On accepte H0 ; la durée de vie du tube suit une loi exponentielle.

TD N : 4

Problème 1 :

Dans une ville, une banque met en place 5 guichets automatiques, dans 5 quartiers différents : 3 guichets de type carte A et 2 guichets de type carte B. La probabilité qu'un guichet du type carte A soit hors service pendant un week-end est de 0.2 et la probabilité qu'un guichet du type carte B soit hors service pendant un weekend est de 0.3. Soit X le nombre de guichets du type carte A hors service et Y le nombre de guichets du type carte B hors service durant un week-end.

1-Donnez la loi du couple (X ; Y).

2-Calculez la probabilité qu'un client possédant une carte A puisse se servir à un guichet automatique le week-end.

Un client possédant une carte A et une carte B. Calculez la probabilité qu'il se servir à un guichet automatique un week-end sachant que tous les guichets sont hors service.

3-Calculer E(X) et E(Y).

4-Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\mathrm{Cor}(X, Y)$

5-Calculer $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Var}(2X + Y)$.

Correction :

On a 2 événements possibles le guichet en ou hors service.

X : nombre de guichets hors service de carte type A.

Y : nombre de guichets hors service de carte type B.

$X \sim B(3; 0.2)$ $\qquad$ $Y \sim B(2; 0.3)$

X \Y	0	1	2	P_X
0	0.250	0.215	0.046	0.511
1	0.188	0.161	0.034	0.083
2	0.047	0.040	0.00864	0.095
3	0.00392	0.0036	0.00072	0.008
P_Y	0.488	0.419	0.089	

On a $\quad P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad Z \sim B(n; p)$

$$P_{ij} = P(X = i;\ Y = j) = P(X = i)P(X = j)$$

la probabilité qu'un client possédant une carte A puisse se servir à un guichet automatique le week-end est :

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= 0.992$$

on utilise la probabilité conditionnelle :

$$P(X < 3/\,y = 2) = \frac{P(X < 3)P(Y = 2)}{P(Y = 2)} = P(X < 3) = 0.992$$

$$E(X) = 3 \times 0.2 = 0.6$$

$E(Y) = 2 \times 0.3 = 0.6$

$$Cov(X; Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

X et Y sont indépendants alors $Cov(X; Y) = 0$

$Cor(X; Y) = \frac{Cov(X; Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$

$$V(X) = np(1-p) = 0.48$$

$V(Y) = 0.41$

$V(2X + Y) = 4V(X) + V(Y) = 2.34$

Problème 2 :

La durée du processus d'atterrissage d'un avion est le temps T, mesuré en minutes qui s'écoule depuis la prise en charge par la tour de contrôle jusqu'à l'immobilisation de l'avion sur la piste. Dans un certain aéroport, on estime que T est une v.a dont la densité de probabilité est f définie par :

$$f(t) = \{ te^{-t}, t > 0$$

$$0 \ , \text{sinon}$$

1-Calculer le temps moyen d'atterrissage d'un avion.

2-Déterminer la fonction de répartition F de T.

3-Quelle est la probabilité que le processus d'atterrissage d'un avion dépasse 3 min ?soit inférieur à 4 min sachant qu'il dépasse 45 secondes ?

Correction :

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt = 2\text{min}$$

la fonction de répartition F :

$$F(T) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{0}^{x} f(t)dt = \ 1 - e^{-x}(x+1)$$

la probabilité que le processus dépasse 3 min :

$$P(T > 3) = 1 - P(T \leq 3)$$

$$= 1 - F(3) = 1 - e^{-3}(3+1) = 0.2$$

La probabilité que le processus soit inférieur à 4 min sachant qu'il dépasse 45 secondes :

$$P(T < 4/\ 0.75 < T) = \frac{P(0.75 < T < 4)}{P(0.75 < T)}$$

$$= \frac{F(4) - F(0.75)}{1 - F(0.75)} = 0.86$$

TD N : 5

Enoncé de problème

Les ouvriers peuvent se rendre chez le médecin d'entreprise pendant les heures de travail. Le chef du personnel demande une étude relative au fonctionnement du cabinet du médecin.

Travail à faire

*1-*Essai de raccordement de la loi des arrivées à une loi de Poisson par un test en X2. Sinon la loi des arrivées est une loi générale G.

*2-*Essai de raccordement de la loi de service à une loi exponentielle par un test en X2. Sinon la loi de service est une loi générale.

*3-*On calcule pour les valeurs λ et μ déterminées en (1) et (2), et pour les valeurs successives s = 1,2,3,…,s0 du nombre se stations, la fonction de couts totaux : Γs , pour en trouver l'optimum.

$\Gamma s = C_1\ \overline{W}(s).\overline{N} + C_2 . \sigma\ (s)\overline{V}$,

Avec :

$\overline{W}(s)$: le temps moyen d'attente d'un client pour s stations ,

$\overline{N}$: la durée moyenne dont le phénomène peut être considéré comme stationnaire,

$\sigma\ (s)$: $\sigma\ (s) = s - \frac{\lambda}{\mu}$ le taux moyen d'inactivité des stations .

$\overline{V}$: la durée moyenne du travail d'un employé par jour.

C_1 : le cout d'inactivité des clients. (le salaire et les charges).

C_2 : le cout d'inactivité des employés. (compte tenu ,cette fois ,de la perte à la production).

4-Conclusion : Optimisation du nombre de guichetiers.

Retour au problème

5-Etudes des arrivées

Pendant 100 intervalles de 5 minutes successifs ou non, mais tous situés dans la période de stationnarité, le nombre de patients arrivant durant chaque période de 5 minutes est décompté.

Supposons que les résultats soient les suivants (tableau) :

Nombre d'arrivants pendant une période de 5 minutes n	Fréquences observées f_n
0	29
1	34
2	24
3	9
4	3
5	1
6	0

a-Calculer la moyenne m de cette loi de distribution ?

b-Peut on ad mettre (au risque 5%) que la loi de distribution des arrivées est une loi de Poisson ? (sachant que $e^{-m} = 0.2837$)

c-Calculer le taux moyen d'arrivée, λ par minute.

Etudes des services

A cent reprises, consécutives ou non, mais prises dan la période stationnaire, on relève la durée du service, c'est-à-dire le temps passé par client au guichet. Supposons que les résultats obtenus soient les suivants :

Durée	Nombre	Durée	Nombre

des services	observé	de service	observé
1 min	23	De 7 à 8 min	5
De 1 à 2 min	20	8-9	3
2-3	14	9 -10	2
3-4	12	10-11	2
4-5	9	11-12	1
5-6	5	12	0
6-7	4	-	-

a-Calculer la moyenne v de cette loi de distribution ?

b-Peut on ad mettre (au risque 5%) que la loi de distribution des arrivées est une loi exponentielle ?

c-Calculer le temps moyen de service µ par minute.

1-Supposant que le phénomène peut être considéré comme stationnaire : durant la première demi-heure et la dernière de la journée, et l'heure du repas , ainsi que le cout de l'inactivité des employés représente le salaire : 24 Dh de l'heure et le cout du temps perdu en attente par les ouvriers peut être évalué à 100 Dh de l'heure .

2-Calculer les valeurs de la fonction des couts totaux pour $s = 1{,}2{,}3$

3-Déduire le nombre guichetiers Optimal.

Correction :

Etude des arrivées

La moyenne de cette loi de distribution :

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} i\, f_i = \frac{1}{100}(0 \times 29 + \cdots + 5 \times 1) = 1.26$$

Test d'ajustement pour la loi de poisson :

N	f_n	p_i	T_i
0	29	0.2837	28.37
1	34	0.3574	35.74
2	24	0.2252	22.52
3	9	0.0945	9.45
4	3	0.0297	2.97
5	1	0.0075	0.75
6	0	0.0015	0.15

Après regroupement :

f_n	T_i
29	28.37
34	35.74
24	22.52
13	13.32

$$D = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\theta i - Ti)^2}{Ti} = \frac{(29 - 28.37)^2}{28.37} + \cdots + \frac{(13 - 13.32)^2}{13.32} = 0.19$$

$$\alpha = 5\% \qquad X^2{}_{K-1-r\,;\,1-\alpha} = X^2{}_{4-1-1\,;\,0.95} = X^2{}_{2\,;\,0.95} = 5.99 \qquad D \leq X^2{}_{2\,;\,0.95}$$

La loi de distribution des arrivées est une loi de Poisson de paramètre égal à 1.26.

le taux moyen d'arrivée :

$$\lambda = \frac{m}{5} = 0.252 \text{ arrivée/min}$$

Etude de service :

La moyenne :

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i = \frac{1}{100}(0.5 \times 23 + \cdots + 11.5 \times 1) = 3.27$$

Test d'ajustement pour la loi exponentielle :

$$Pi = P(a_i \leq X \leq a_{i+1}) = F(a_{i+1}) - F(a_i)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\theta t}$$

Durée	θ_i	p_i	T_i

<1	23	0.2591	25.91
[1 ; 2[	20	0.1920	19.20
[2 ; 3[	14	0.1422	14.22
[3; 4[	12	0.1053	10.53
[4 ; 5[	9	0.0780	07.80
[5; 6[	5	0.0571	5.71
[6; 7[	4	0.0428	4.28
[7; 8[	5	0.0317	3.17
[8; 9[	3	0.0235	2.35
[9; 10[	2	0.0174	1.74
[10; 11[	2	0.0129	1.29
[11; 12[	1	0.0095	0.95
[12 ; ∞[	0	0.0273	2.73

Après regroupement :

θ_i	T_i
23	25.91
20	19.20
14	14.22
12	10.53
9	7.8
5	5.78
9	7.45
8	9.00

$$D = \sum_{i=1}^{4} \frac{(\theta i - Ti)^2}{Ti} = \frac{(23 - 25.91)^2}{25.91} + \cdots + \frac{(10 - 9.06)^2}{9.06} = 1.30$$

$\alpha = 5\%$ $\quad X^2{}_{K-1-r\,;\,1-\alpha} = X^2{}_{8-1-1\,;\,0.95} = X^2{}_{6\,;\,0.95} = 12.6$ $\quad D \leq X^2{}_{6\,;\,0.95}$

La loi de distribution des services est une loi exponentielle.

Pour s =1

$\overline{\mathrm{N}} = 2$ h $\quad \overline{\mathrm{S}} = 3.27 \quad \overline{\mathrm{V}} = 8$h

$\overline{\mathrm{W}} = \dfrac{\rho\, \overline{\mathrm{S}}}{1-\rho} = 16.31$ min

$\sigma\,(1) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 0.16 \qquad \Gamma 1 = \mathrm{C}_1\ \overline{\mathrm{W}}(1).\overline{\mathrm{N}} + \mathrm{C}_2\,.\,\sigma\,(1)\overline{\mathrm{V}}$

C_1 =100 DH/h C_2 =24 DH/h

Γ1 =3365.39 DH

Pour s =2

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu\,\mathrm{m}} = 0.42$$

$\sigma\,(2) = 2 - \frac{\lambda}{\mu} = 1.16 \qquad \Gamma 2 = \mathrm{C}_2\ \overline{\mathrm{W}}(2).\overline{\mathrm{N}} + \mathrm{C}_2\,.\,\sigma\,(2)\overline{\mathrm{V}}$

$\pi 0^* = \left[\frac{(s\,\rho)^s}{s!(1-\rho\,)} + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s\,\rho)^i}{i!}\right]^{-1} = \left[\frac{(2\,\rho)^2}{2!(1-\rho\,)} + 1 + 2\rho\right]^{-1} = 0.4$

$\zeta = \ \pi 0^* \frac{(s\,\rho)^s}{s!(1-\rho\,)} = 0.24$

$$\overline{\mathrm{W}} = \rho(s + \frac{\zeta}{1-\rho}) = 0.49 \text{ min}$$

Γ2 =320.72 DH

Pour s =3

$\rho = 0.28$

$$\zeta = \pi 0 * \frac{(3\,\rho)^3}{3!\,(1-\rho\,)} = 0.01$$

$\overline{W} = 0.01 \text{ min}$ $\sigma\,(3) = 2.16$

Γ3 = 434.7 DH

Il suffit d'ajouter un médecin pour diminuer les charges 10 fois.

TD N : 6

Enoncé de problème :

Dix équipements de type A ont été soumis à un essai ayant donné les résultats donnés par le tableau ci-après (ti : époque de la i ème défaillance).

i	ti	i	Ti
1	1	6	35
2	6	7	46
3	13	8	60
4	26	9	75
5	28	10	87

1. Tester, au seuil de signification 5%, l'hypothèse ''la fiabilité R d'équipement A est exponentielle''.
2. Déterminer une estimation ponctuelle du MTBF (θ) et du taux de défaillance Z d'équipement A.
3. Calculer l'intervalle de confiance symétrique au niveau de confiance 90% pour la durée de vie moyenne
4. Supposons maintenant que l'essai a été arrêté à T= 74 heures.

- Quel est l'intervalle de confiance 90% pour la durée de vie moyenne ?

5. Soit un système C de deux composants A en parallèle.

- Calculer la durée de vie moyenne du système S de deux composants C et A en série.

6. Le système de navigation d'un navire comporte un équipement de type A. Ce navire doit effectuer une mission de 2 sans ravitaillement technique :

- Si l'on veut la certitude pratique (98%) de la continuité de la fonction assurée par A, combien, au départ doit-on emporter d'équipement A ?

Correction :

On fait un test d'ajustement : test des durées cumulées, puisque le nombre de pièces défaillantes égale à 10

Calcul des $t_{c,i}$:

$t_{c,i}= t_{c,i-1}$ + (n+1- i) (ti-ti-1)

$t_{c,1}$= n. t_1

I	$t_{c,i}$
1	10
2	55
3	111
4	202
5	214
6	249
7	293
8	335
9	365
10	377

Tf=377 heures

Tc= $\sum t_{c,i}$= 1834

$\alpha = 0.05$; $k=r-1=10-1=9$

Calculer l'intervalle : $[(k \times Tf)/2 \pm U1-(\alpha/2) \times ((Tf/2) \times (k/3)1/2)]$

A.N/ [1056.57 ; 2336.40]

Tc appartient à l'intervalle donc on peut informer que la fiabilité de l'équipement A est exponentielle.

L'estimation ponctuelle du MTBF est du taux de défaillance est :

Θ estimé = Tf/k = 377/10= 37.7

ʎ estimé = k/Tf=10/377=0.0265

L'intervalle de confiance :

$$2Tf/\chi 2\ 2r ; \alpha 2< \Theta <2Tf/ \chi 2\ 2r ; 1-\alpha 1$$

Avec $\alpha 2 = 0.05$ et $1-\alpha 1=0.95$

Tf=377 ; r=10 ; $\chi 2$ 20 ; 0.05= 31.41 ; $\chi 2$ 20 ; 0.95=10.85

Donc $24.005< \Theta < 69.49$

On T=74, donc il s'agit d'un essai tronqué donc :

$$I_c=\left[\frac{2T_f}{\chi^2_{2(k+1);\alpha_2}} ; \frac{2T_f}{\chi^2_{2k;1-\alpha_1}}\right]=[12{,}22 ; 225{,}11]$$

On S=C et A en série

Avec C=A//A

Donc on s $R_C=1-\prod(1-R_A)=1-(1-R_A)^2$

Donc $R_S=R_A \times R_C=R_A(1-(1-R_A)^2)=2R_A{}^2-R_A{}^3$

$$=2e^{-2\lambda t}-e^{-3\lambda t}$$

Alors on a $\theta_S=\int_0^{+\infty} R_S(t)dt=\frac{2}{3}\theta$

A.N $\theta_S=25{,}13$

On a $R_{1/n}=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$

On t=2□ alors □t=$\frac{2\theta}{\theta}$=2

N	$R_{1/2}(2□)$
2	0,406
3	0,677
4	0,867
5	0,947
6	0,986

n=6 équipements. Il faut donc 6 équipements de type A pour assurer une attitude pratique.

$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

$E_\tau=\int_0^\tau [tf(t)dt]$ + □R(□)

$=\int_0^\tau \lambda t e^{-\lambda t}dt$ + □R(□)

$= \theta(1 - R(\tau))$

Si le remplacement est intéressant :

$$\frac{C_m + C_p(1 - R(\tau))}{\theta(1 - R(\tau))} < \frac{C_m + C_p}{\theta}$$