Physics, KKU

Workbook

Mathematical Methods in Physics

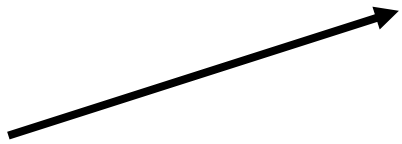
SC512114

Chakrit Pongkitivanichkul

Chapter 1: Vectors and Coordinates

พิกัดและเวกเตอร์เป็นหนึ่งในแนวคิดที่สำคัญที่สุดของการใช้คณิตศาสตร์ในปัญหาทางกายภาพ ดังนั้นเราจะมาเริ่มต้นศึกษาแนวคิดของพิกัดและเวกเตอร์ก่อน เพื่อเป็นการปูพื้นฐานก่อนไปสู่เรื่องที่ซับซ้อนขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งการขยายแนวคิดของพิกัดและเวกเตอร์ไปสู่ขอบเขตที่เป็นนามธรรมมากขึ้น ตัวอย่างเช่นเวกเตอร์สี่มิติ (4-vectors) ซึ่งปรากฏในสัมพัทธภาพพิเศษ และปริภูมิเวกเตอร์เชิงซ้อน (complex vector space) ที่มีมิติเป็นอนันต์ซึ่งมีความจำเป็นต่อการบรรยายธรรมชาติในระดับเล็กที่สุด (กลศาสตร์ควอนตัม)

1.1) เวกเตอร์ในระนาบและเวกเตอร์ในสามมิติ



เวกเตอร์คือส่วนของเส้นตรง(ที่มีลูกศร)ซึ่งประกอบไปด้วย________________________________
(**ระวังว่านิยามนี้ใช้ไม่ได้เมื่อขยายแนวคิดนี้ไปยังมิติที่สูงขึ้น**)

ตัวอย่างของเวกเตอร์ในฟิสิกส์ได้แก่____

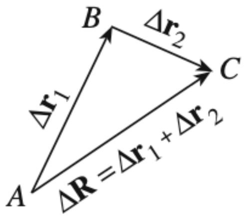
เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 เราเรียกว่า____

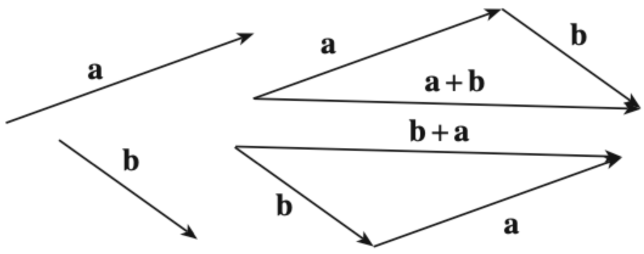
การคูณเวกเตอร์ด้วยตัวเลข(สเกล่าร์)คือการ____

การคูณเวกเตอร์ด้วย 0 เราจะได้____

การคูณเวกเตอร์ด้วย -1 เราจะได้____

การบวกเวกเตอร์ทำได้โดยการ____





เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) คือเวกเตอร์ที่หารด้วยขนาดของตัวมันเอง นั่นคือ

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

โดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมีหน้าที่ในการบอกทิศทางของเวกเตอร์

ดังนั้นถ้าเราทราบ__________และ__________เราสามารถเขียนเวกเตอร์ได้เป็น

$$\vec{a} = |\vec{a}|\ \hat{a}$$

<u>1.2) Dot product (การคูณเวกเตอร์แบบดอทโปรดัค)</u>

โดยปรกติแล้วถ้าไม่มีการคูณแบบ dot product เราจะไม่สามารถนิยามขนาดและทิศทางได้ (แน่นอนว่าถ้าเป็นกรณีทั่วไปของปริภูมิเวกเตอร์เราสามารถสร้างปริภูมิเวกเตอร์ที่ไม่มีขนาดและทิศทางได้เสมอ ถ้าไม่มีการนิยามของดอทโปรดัค)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

โดยทิศทางนิยามได้จาก

$$cos\theta = \underline{\hspace{4cm}}$$

และขนาดนิยามได้จาก

$$|\vec{a}| = \underline{\hspace{4.5cm}}$$

โปรเจคชั่นของเวกเตอร์

$$\hat{a} \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{3.5cm}} = |\vec{b}| cos\theta$$

การดอทมีสมบัติการกระจายนั่นคือ

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \underline{\hspace{5.5cm}}$$

1.3) Cross product (การคูณเวกเตอร์แบบครอสโปรดัค)

เราเรียกผลคูณระหว่างเวกเตอร์โดยที่มีผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ว่าการคูณครอสโปรดัค

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

โดยเวกเตอร์ $\vec{c}$ มีขนาดเท่ากับ ______________ และมีทิศทางตามกฎมือขวา

จากทิศทางของ cross product เราพบว่า $\vec{b} \times \vec{a} =$ _________

เมื่อพิจารณาร่วมกับ dot product เราพบว่า $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$ _________

นั่นคือเวกเตอร์ $\vec{c}$ ตั้งฉากกับทั้ง_____และ_____

ผลคูณเวกเตอร์มีสมบัติต่อไปนี้

$$\vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

1.4) Basis vectors เวกเตอร์ฐาน

เวกเตอร์ฐานคือชุดของเวกเตอร์ที่มีความอิสระเชิงเส้น (linearly independent) ซึ่งกันและกัน และมีจำนวนเท่ากับจำนวนมิติ

(หมายเหตุ: ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น linearly independent หมายความว่าเวกเตอร์ตัวใดตัวหนึ่งไม่สามารถเขียนในรูปของผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่เหลือได้)

โดยทั่วไปแล้วเรามักใช้เวกเตอร์ฐานที่มีลักษณะตั้งฉากกันทั้งหมด (orthogonal basis) และมีขนาดหนึ่งหน่วย (normal basis) ซึ่งเวกเตอร์ฐานที่มีลักษณะทั้งสองอย่างนี้เราเรียกว่า orthonormal basis

ตัวอย่างของเวกเตอร์ฐานที่เป็น orthonormal ได้แก่_________________________________

ในวิชานี้เราจะใช้สัญลักษณ์ $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ แทน $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ และใช้สัญลักษณ์ $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ แทนเวกเตอร์ฐาน orthonormal โดยทั่วไป

<u>1.5) สมบัติของเวกเตอร์ฐาน orthonormal</u>

จากสมบัติการตั้งฉากซึ่งกันและกันของเวกเตอร์ฐานเราจะได้ว่า

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = \underline{\hspace{3cm}}$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = \underline{\hspace{3cm}}$$

ถ้าเวคเตอร์ใดๆเกิดจากผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ฐาน orthonormal แล้วเราสามารถเขียนผลการทำดอทโปรดัคได้เป็น

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3\,, \quad \vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{8cm}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

จากสมบัติการทำครอสโปรดัคเราจะได้ว่า

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 = \underline{\hspace{3cm}}$$

ถ้าเวกเตอร์ฐานมีการตั้งฉากซึ่งกันและกันเราจะพบว่า

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \underline{\hspace{2.5cm}}$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = \underline{\hspace{2.5cm}}$$

$$\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = \underline{\hspace{2.5cm}}$$

ถ้าเวคเตอร์ใดๆเกิดจากผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ฐาน orthonormal แล้วเราสามารถเขียนผลการทำครอสโปรดัคได้เป็น

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3\,, \quad \vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

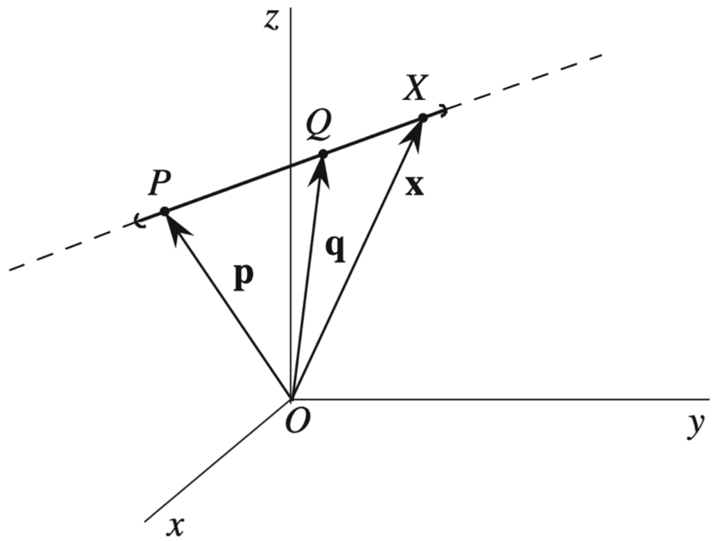
$$\vec{a} \times \vec{b} = \underline{\hspace{8cm}}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_3$$

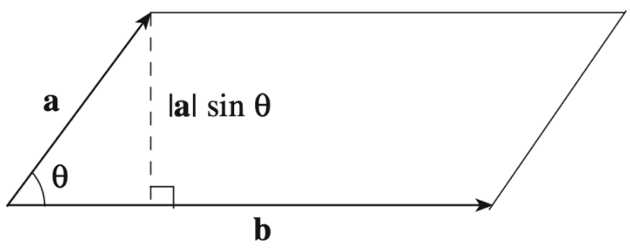
หรือเราสามารถเขียนได้ในรูปของ determinant ของแมทริกซ์

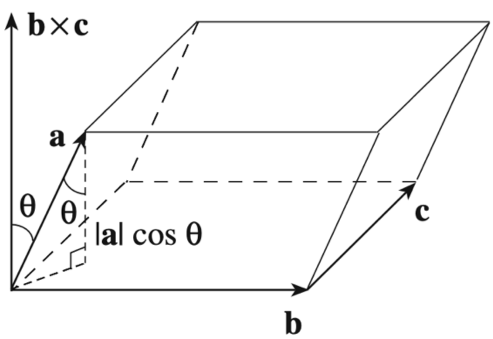
$$\vec{a} \times \vec{b} = \det\begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} =$$

<u>ตัวอย่าง 1</u> จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{q}$ ซึ่งชี้ไปยังจุด Q ที่อยู่บนเส้นตรงระหว่างจุด X, P ซึ่งระบุด้วยเวกเตอร์ $\vec{p}, \vec{x}$ ตามลำดับ



<u>ตัวอย่าง 2</u> จงแสดงให้เห็นว่าปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelepiped) เกิดจาก $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

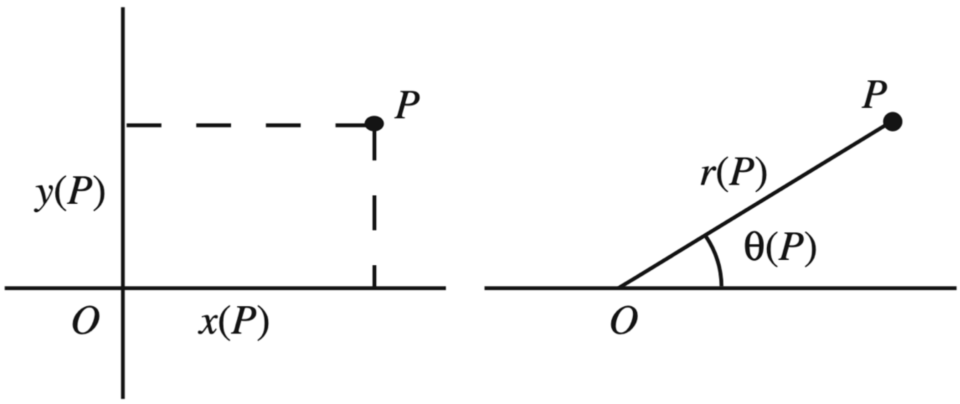




1.6) ระบบพิกัด (Coordinate systems)

พิกัดคือฟังก์ชันที่ระบุตำแหน่งของจุดในปริภูมิ (space) จำนวนของฟังก์ชันที่น้อยที่สุดที่จำเป็นต้องใช้ในการระบุคือจำนวนมิติ (dimensions)
นั่นคือถ้าเรากำหนดให้จุด P เป็นจุดใน space เราเขียนฟังก์ชันระบุตำแหน่งได้เป็น $f(P)$

สำหรับ space สองมิติเรามีระบบพิกัดที่นิยมใช้คือ________________ ซึ่งมักใช้สัญลักษณ์ $(x(P), y(P))$ และ ________________ซึ่งมักใช้สัญลักษณ์ $(r(P), \theta(P))$



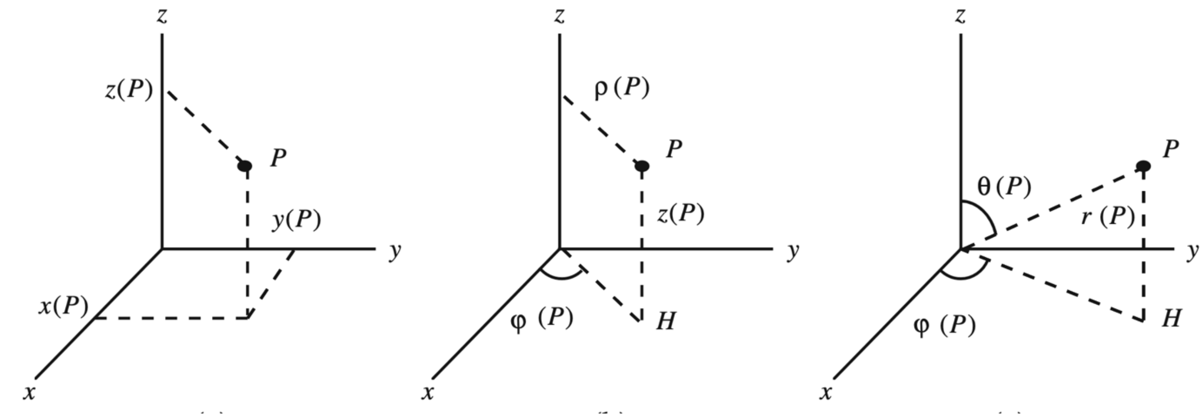
โดย x, y มีความหมายเป็น____
และ r, θ มีความหมายเป็น____
ในทางปฏิบัติแล้วเราจะใช้การระบุพิกัดโดยไม่เขียนชื่อจุดนั่นคือ (x, y) หรือ (r, θ)
โดยความสัมพันธ์ระหว่างสองระบบพิกัดนี้คือ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

เราจะเห็นว่าค่า $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi$

สำหรับ space สามมิติเราต้องการสามฟังก์ชันในการระบุตำแหน่งและมีระบบพิกัดที่นิยมใช้คือ

- Cartesian: $(x(P), y(P), z(P))$
- Cylindrical: $(\rho(P), \phi(P), z(P))$
- Spherical: $(r(P), \theta(P), \phi(P))$



โดย x, y, z มีความหมายเป็น______________________________

และ ρ, ϕ มีความหมายเป็น______________________________

และ r, θ มีความหมายเป็น______________________________

เนื่องจากระบบพิกัดทั้งสามนี้มีความสะดวกต่างกันในแต่ละสถานการณ์ดังนั้นเราจึงต้องการความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด โดยจากภาพเราสามารถพิจารณาได้ดังนี้

Cylindrical ไปเป็น Cartesian

$$x = \rho cos\phi, \qquad y = \rho sin\phi, \qquad z = z$$

Spherical ไปเป็น Cartesian

$$x = rsin\theta cos\phi, \qquad y = rsin\theta sin\phi, \qquad z = rcos\theta$$

Spherical ไปเป็น Cylindrical

$$\rho = rsin\theta, \qquad \phi = \phi, \qquad z = rcos\theta$$

โดยการทำ inverse transformation เราจะได้

Cartesian ไปเป็น Cylindrical

$$\phi =$$

$$\rho =$$

$$z =$$

Cartesian ไปเป็น Spherical

$$\phi =$$

$$\theta =$$

$$r =$$

Cylindrical ไปเป็น Spherical

$$\phi =$$

$$\rho =$$

$$z =$$

โดย range ของฟังก์ชันเหล่านี้คือ

Cartesian

$$-\infty < x < \infty, \qquad -\infty < y < \infty, \qquad -\infty < z < \infty$$

Cylindrical

$$0 \le \rho < \infty, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty$$

Spherical

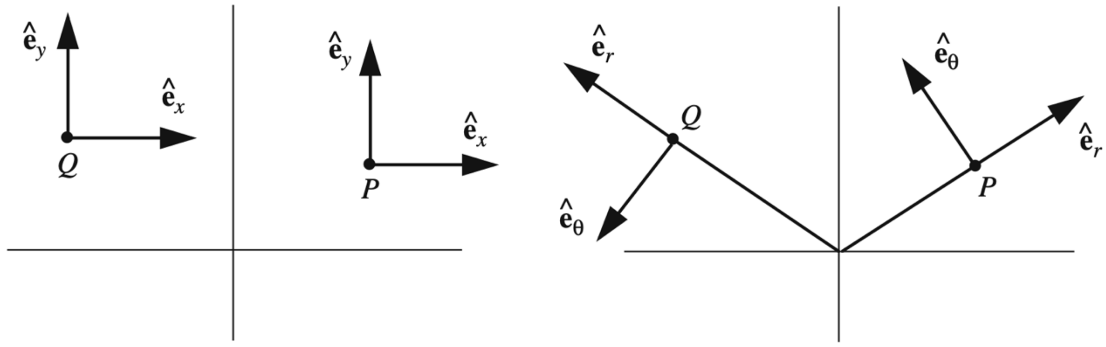
$$0 \le r < \infty, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

สังเกตว่าค่ารัศมีไม่มีโอกาสน้อยกว่าศูนย์และค่ามุมของ θ มีค่าไม่เกิน π
เพราะว่า____

1.7) เวกเตอร์ในระบบพิกัดต่างๆ (Vectors in different coordinate systems)

ในหลายปัญหาเราจำเป็นต้องอธิบายเวกเตอร์ในระบบพิกัดที่แตกต่างออกไปจากเดิม ตัวอย่างเช่นในปัญหาของวงโคจรการใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วย่อมได้เปรียบกว่าระบบคาร์ทีเซียน โดยการพิจารณาเวกเตอร์ในระบบพิกัดต่างๆไม่เพียงแต่ต้องเขียนฟังก์ชันในรูปของพิกัดใหม่เท่านั้น แต่ยังต้องเขียนเวกเตอร์ฐานที่สอดคล้องกับระบบพิกัดนั้นๆด้วย โดยปรกติเราจะใช้เวกเตอร์ฐานที่เป็น orthonormal

การสร้างเวกเตอร์ฐานสำหรับระบบพิกัดนั้นเราจะสร้างให้เวกเตอร์เหล่านี้ขึ้นกับจุดที่เราพิจารณา ตัวอย่างเช่นระบบพิกัดในสองมิติ (ระนาบ)



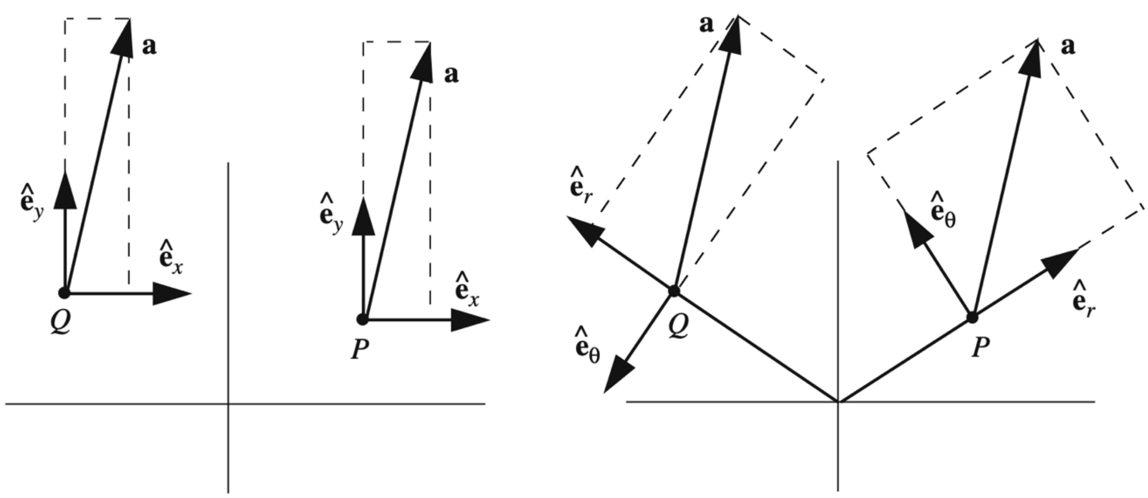
ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน พิจารณาที่จุด P ถ้าเราตรึงค่า y ไว้แล้วเพิ่มค่า x เราจะได้ทิศทาง______
ในทางกลับกันถ้าเราตรึงค่า x แล้วเพิ่มค่า y เราจะได้ทิศทาง__________
ข้อสังเกตของระบบพิกัดคาร์ทีเซียนคือที่จุด P และจุด Q มี______________________________
ดังนั้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเราจึงนิยมเขียน_______________ไว้ที่_____________________

ในระบบพิกัดเชิงขั้ว พิจารณาที่จุด P ถ้าเราตรึงค่า θ ไว้แล้วเพิ่มค่า r เราจะได้ทิศทาง_________
ในทางกลับกันถ้าเราตรึงค่า r ไว้แล้วเพิ่มค่า θ เราจะได้ทิศทาง_________
ข้อสังเกตของระบบพิกัดเชิงขั้วคือที่จุด P และจุด Q มี______________________________
ดังนั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วเราจึงนิยมเขียน_______________ไว้ที่_____________________

เนื่องจากทั้ง $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ และ $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$ เป็นเวกเตอร์ฐานหนึ่งหน่วย ดั้งนั้นเวกเตอร์ใดๆเมื่อพิจารณาจากจุด P (ไม่จำเป็นต้องเป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง)

$$\vec{a} = a_{x,P}\hat{e}_x + a_{y,P}\hat{e}_y = a_{r,P}\hat{e}_r + a_{\theta,P}\hat{e}_\theta$$

โดยค่าคงที่ที่คูณด้านหน้าเวกเตอร์ฐานหนึ่งหน่วยเราเรียกว่า___________________________
สังเกตว่าองค์ประกอบในแต่ละระบบพิกัดไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากัน



ในบางครั้งเพื่อความสะดวกเรามักจะใช้องค์ประกอบแทนการบอกเวกเตอร์ (โดยเป็นที่เข้าใจว่ากำลังใช้ระบบพิกัดใดอยู่)

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y\right)_P = (a_r, a_\theta)_P$$

สำหรับเวกเตอร์ฐานในสามมิติ

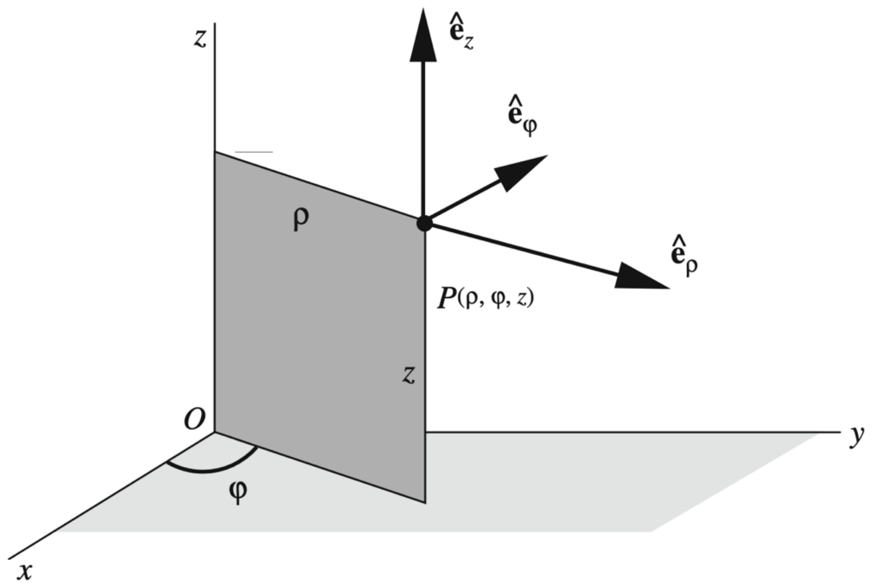
ระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเราเขียน $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ ไว้ที่จุดกำเนิดเพราะว่า________________________

ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate) มีเวกเตอร์ฐานเป็น $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z\}$

โดย $\hat{e}_\rho$ เกิดจากการตรึงพิกัด______และ______และมีทิศทางในทางที่_____มีค่าเพิ่มขึ้น

โดย $\hat{e}_\phi$ เกิดจากการตรึงพิกัด______และ______และมีทิศทางในทางที่_____มีค่าเพิ่มขึ้น

โดย $\hat{e}_z$ เกิดจากการตรึงพิกัด______และ______และมีทิศทางในทางที่_____มีค่าเพิ่มขึ้น



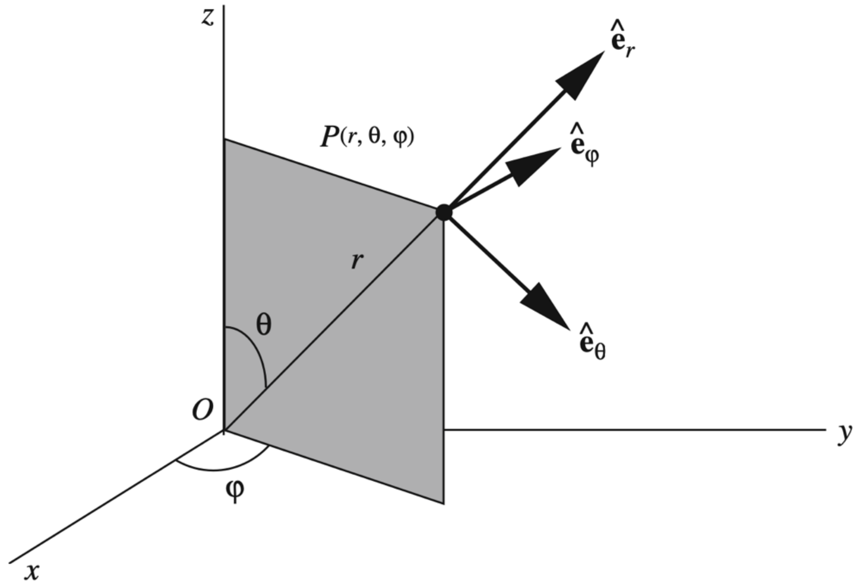
ข้อสังเกตคือเวกเตอร์ $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z\}$ ขึ้นกับ____________________________

ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical coordinate) มีเวกเตอร์ฐานเป็น $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$

โดย $\hat{e}_r$ เกิดจากการตรึงพิกัด_______และ_______และมีทิศทางในทางที่______มีค่าเพิ่มขึ้น

โดย $\hat{e}_\theta$ เกิดจากการตรึงพิกัด_______และ_______และมีทิศทางในทางที่______มีค่าเพิ่มขึ้น

โดย $\hat{e}_\phi$ เกิดจากการตรึงพิกัด_______และ_______และมีทิศทางในทางที่______มีค่าเพิ่มขึ้น

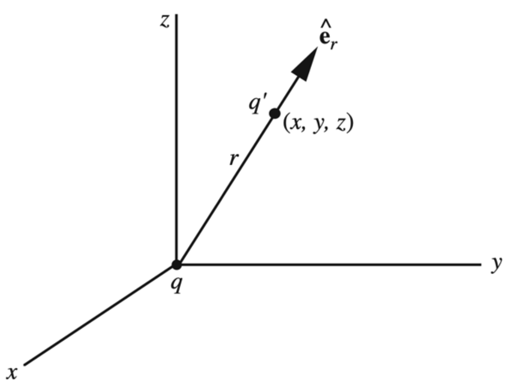


ข้อสังเกตคือเวกเตอร์ $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$ ขึ้นกับ____________________________

1.8) สนามเวกเตอร์และศักย์ (Vector fields and potentials)

จากกฎของคูลอมบ์ (Coulomb's law) ถ้ามีจุดประจุ q อยู่ที่จุดกำเนิด แล้วแรงไฟฟ้าของประจุที่ตำแหน่งซึ่งบอกด้วยเวกเตอร์ $\vec{r} = r\hat{e}_r$ จะมีค่าเป็น

$$\vec{F}_{q'} = \frac{k\ qq'}{r^2}\ \hat{e}_r$$



สังเกตว่ามีเวกเตอร์แรงนี้ในทุกจุดของ space นี้ การที่มีปริมาณซึ่งมีค่าในทุกจุดของ space เราจะเรียกปริมาณนี้ว่า________________ ในกรณีเราจะเรียกว่า__________ของเวกเตอร์ หรือ_________ของแรง

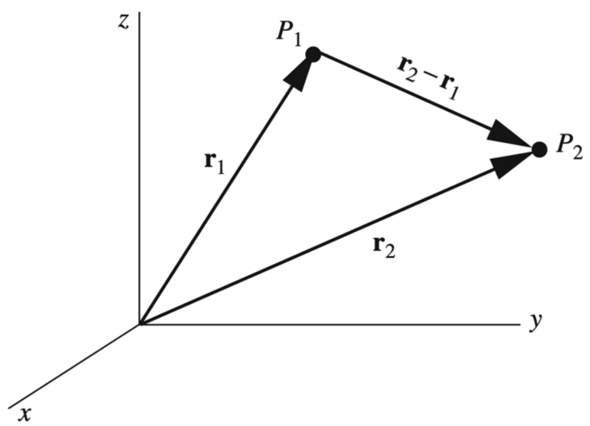
ถ้าเราต้องการเขียนแรงไฟฟ้าในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเราสามารถได้โดยใช้ $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ และ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ทำให้เราได้

$$\vec{F}_{q'} = \frac{k\, qq'}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, (x\hat{e}_x + \ y\hat{e}_y + \ z\hat{e}_z)$$

เช่นเดียวกันในระบบพิกัดทรงกระบอกเราสามารถเขียนแรงได้เป็น

$$\vec{F}_{q'} = \frac{k\, qq'}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \, (\rho\hat{e}_\rho + \ z\hat{e}_z)$$

ถ้าเป็นกรณีที่จุดประจุไม่อยู่ที่จุดกำเนิดดังภาพ โดยมีประจุ q_1 อยู่ที่จุด P_1 และประจุ q_2 อยู่ที่จุด P_2



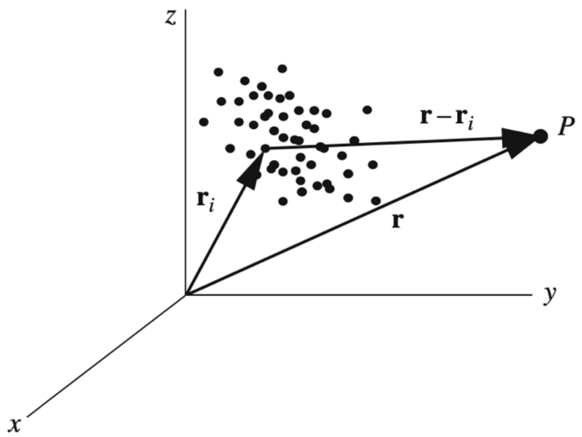
เราจะเขียนทิศของแรงได้จาก $\hat{e}_{21} \equiv \frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$ เราจะได้แรงไฟฟ้าเป็น

$$\vec{F} = \frac{k\ q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

อีกแนวคิดที่สำคัญคือสนามไฟฟ้าซึ่งคือการหาปริมาณที่ไม่ขึ้นกับประจุทดสอบหรือประจุที่ตำแหน่ง________นั่นคือ

$$\vec{E} = \frac{k\ q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

ในกรณีของกลุ่มของจุดประจุดังภาพเราจะได้สนามไฟฟ้ารวมจากหลักการซ้อนทับ (superposition) เป็น



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k\ q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}\ (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

อีกแนวคิดที่เกี่ยวเนื่องกับสนามคือศักย์ไฟฟ้า เราพบว่าศักย์ไฟฟ้าคือสนามของ______________ ซึ่งมีค่า______________ในทุกจุดของ space

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k\ q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

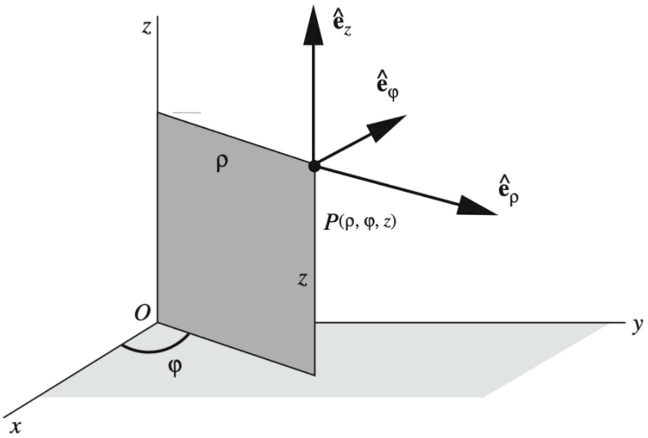
ตัวอย่าง ประจุไฟฟ้า q_1, q_2, q_3 และ q_4 อยู่ที่พิกัด $(\mathrm{a}, 0,0)$, $(0, \mathrm{a}, 0)$, $(-\mathrm{a}, 0,0)$ และ $(0, -\mathrm{a}, 0)$ ตามลำดับในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน จงหาสนามไฟฟ้ารวมและศักย์ไฟฟ้ารวมตามตำแหน่งที่แกน z นั่นคือ $\vec{r} = z\,\hat{e}_z$

1.9) ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ฐาน

เราเห็นการแปลงพิกัดระหว่างระบบพิกัดไปแล้ว ทีนี้ถ้าเราต้องการเชื่อมโยงเวกเตอร์ฐานในระบบพิกัดต่างเราสามารถทำได้โดยการหาองค์ประกอบในของเวกเตอร์ฐานในอีกระบบหนึ่ง

ตัวอย่างเช่นถ้าเราต้องการเขียนเวกเตอร์ฐานระบบพิกัดทรงกระบอก ในรูปของเวกเตอร์ฐานในระบบคาร์ทีเซียน

$$\hat{e}_\rho = a\hat{e}_x + b\hat{e}_y + c\hat{e}_z$$



เราพบว่า

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_x = a + 0 + 0 = a = cos\phi$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_y = 0 + b + 0 = b = cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = sin\phi$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = 0 + 0 + c = c = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ดังนั้น

$$\hat{e}_\rho =$$

เนื่องจากเราทราบแล้วว่า

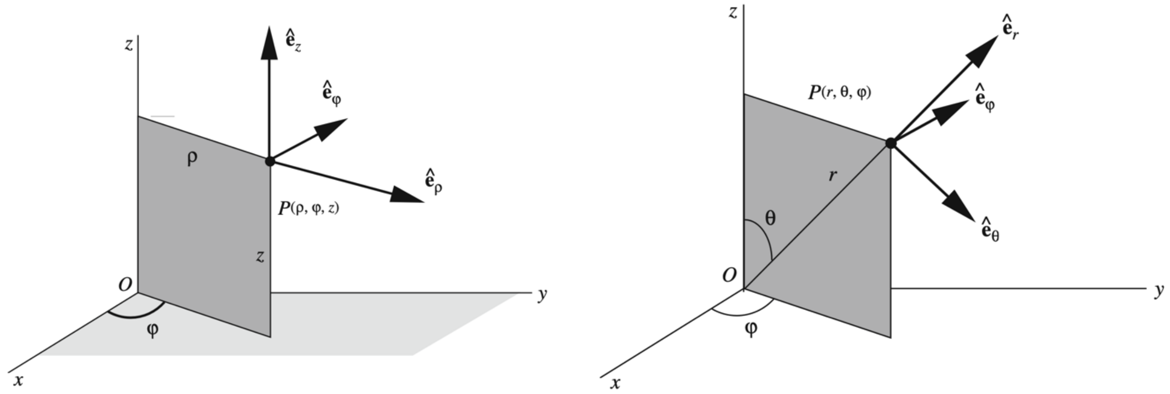
$$\hat{e}_z = 0\hat{e}_x + 0\hat{e}_y + 1\hat{e}_z$$

เราสามารถหาเวกเตอร์ที่เหลือได้จากการทำครอสโปรดัค

$$\hat{e}_\phi = \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho$$

$$\hat{e}_\phi =$$

ตัวอย่าง จงหาองค์ประกอบของเวกเตอร์ฐานระบบพิกัดทรงกลมในเวกเตอร์ฐานระบบพิกัดทรงกระบอก



<u>แบบฝึกหัด</u>

1) จงเขียนสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดซึ่งเขียนในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนได้เป็น

$(0,2,-1)$ และ $(3,-1,1)$

<u>คำแนะนำ</u> ให้ใช้เวกเตอร์ที่ชี้ไปยังเส้นตรงที่เกิดจากเวกเตอร์สองตัวแบบตัวอย่างในห้องเรียน

2) จงหามุมระหว่างเวกเตอร์

$\vec{a} = 2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y + \hat{e}_z$ และ $\vec{b} = \hat{e}_x - 6\hat{e}_y + 2\hat{e}_z$

3) พิจารณาเวกเตอร์ในสองมิติ $\vec{a} = cos\alpha\ \hat{e}_x + sin\alpha\ \hat{e}_y$ และ $\vec{b} = cos\beta\ \hat{e}_x + sin\beta\ \hat{e}_y$

3.1) จงแสดงว่าทั้งสองเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

3.2) จงหาสูตรของ $\cos(\alpha - \beta)$ จากดอทโปรดัคของเวกเตอร์ทั้งสอง

4) จงแสดงว่าเวกเตอร์

$\vec{a} = 2\hat{e}_x - \hat{e}_y + \hat{e}_z$, $\vec{b} = \hat{e}_x - 3\hat{e}_y - 5\hat{e}_z$ และ $\vec{c} = 3\hat{e}_x - 4\hat{e}_y - 4\hat{e}_z$

ประกอบกันเป็นด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

5) จงหาปริมาตรที่ล้อมรอบด้วยเวกเตอร์

$\vec{a} = \hat{e}_x + \hat{e}_y$, $\vec{b} = -\hat{e}_x + \hat{e}_y$ และ $\vec{c} = \hat{e}_y + \hat{e}_z$

6) จากองค์ประกอบของเวกเตอร์ในพิกัดคาร์ทีเซียน

$\vec{a} = a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y + a_z\hat{e}_z$, $\vec{b} = b_x\hat{e}_x + b_y\hat{e}_y + b_z\hat{e}_z$ และ $\vec{c} = c_x\hat{e}_x + c_y\hat{e}_y + c_z\hat{e}_z$

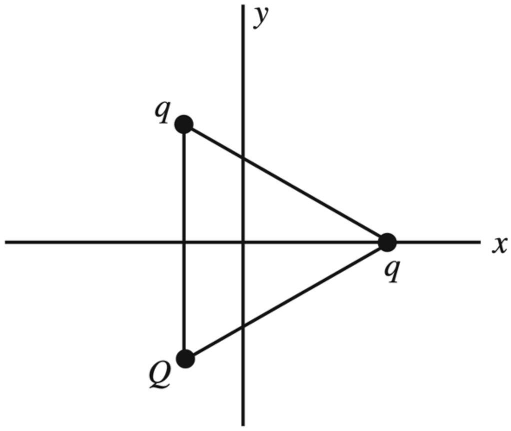
จงพิสูจน์เอกลักษณ์ (identities) ต่อไปนี้

6.1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

6.2) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

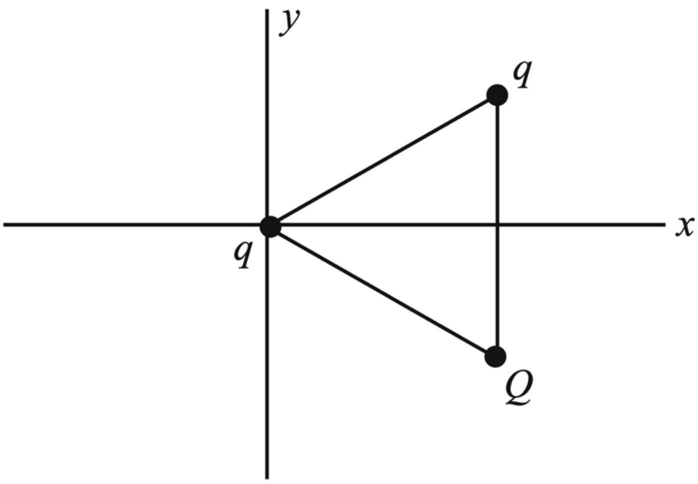
6.3) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

7) จุดประจุสามจุดวางเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a ถูกวางโดยที่กึ่งกลางของสามเหลี่ยมนี้อยู่ที่จุดกำเนิดดังภาพ (จุดประจุอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเท่ากันหมด)



จงหาสนามไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าที่จุดกำเนิด และถ้าเราต้องการให้สนามไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ ประจุ Q ควรมีค่าเป็นเท่าใด

8) จุดประจุสามจุดวางเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a ถูกวางโดยที่จุดประจุ q อยู่ที่จุดกำเนิดดังภาพ



8.1) จงหาสนามไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าของพิกัด $(0,0,z)$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (ตำแหน่งตามแกน z)

8.2) ถ้าสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง $(0,0,a)$ มีค่าองค์ประกอบในแกน z เป็นศูนย์, $E_z = 0$, จงหาขนาดของประจุ Q

9) ประจุ q อยู่ที่พิกัด $(r, \theta, \phi) = (a, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ ในระบบพิกัดทรงกลม จงหาศักย์ไฟฟ้าพร้อมทั้งองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในพิกัดคาร์ทีเซียนที่จุด P ซึ่งอยู่ที่พิกัด $(r, \theta, \phi) = (a, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

10) ประจุ q และ $-2q$ อยู่ที่พิกัดในระบบพิกัดทรงกระบอก $(\rho, \phi, z) = (a, \frac{\pi}{4}, a)$ และ $(\rho, \phi, z) = (a, \frac{2\pi}{3}, -a)$ ตามลำดับ จงหาศักย์ไฟฟ้าและองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในพิกัดคาร์ทีเซียนที่จุดกำเนิด

Chapter 2: Calculus

ฟิสิกส์เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลง โดยการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆมักเป็นการเปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับตำแหน่งหรือเวลา ตัวอย่างเช่น อุณหภูมิที่ตำแหน่งๆต่างมีความแตกต่างกัน นี่คือการเปลี่ยนแปลงของ__________เทียบกับ____________

หรืออุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปในแต่ละช่วงของวัน นี่คือการเปลี่ยนแปลงของ__________เทียบกับ____________

โดยแนวคิดของปริมาณที่ขึ้นกับตำแหน่งและเวลาคือแนวคิดของ________________________ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของมันคือปริมาณพื้นฐานที่เราต้องศึกษาในวิชาฟิสิกส์

2.1) อนุพันธ์ (Derivatives)

ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงที่เราคุ้นเคยกันดีคือความเร็ว เพื่อที่หาความเร็วของอนุภาคที่เวลา t_0 ใดๆ ที่ตำแหน่ง r_0 ใดๆ หาได้จากหาตำแหน่ง______ที่เวลา______ซึ่งใกล้กับ_____และ______ ความเร็วที่เวลา t_0 ใดๆจึงนิยามเป็น

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \equiv \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0} \equiv \dot{\vec{r}}(t_0)$$

ความเร่งคือการเปลี่ยนแปลงของความเร็วจึงนิยามเป็น

สังเกตว่าตัวอย่างของความเร็วและความเร่งคือปริมาณที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยตรง อย่างไรก็ดียังมีการใช้อนุพันธ์ในอีกรูปแบบคืออัตราส่วนระหว่างปริมาณเล็กๆสองปริมาณ ตัวอย่างเช่นความหนาแน่นที่จุดใดๆเกิดจากอัตราส่วน

$$\rho = \lim_{\Delta\mathrm{V}\to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \equiv \frac{dM}{dV}$$

โดยเราพิจารณาปริมาตรเล็กๆรอบๆจุดนั้น

หรือความหนาแน่นเชิงพื้นที่

$$\sigma =$$

หรือความหนาแน่นเชิงเส้น

$$\lambda =$$

หรือความดันซึ่งนิยามจากอัตราส่วนของ____________________กับ________________

$$P = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta F_{\perp}}{\Delta a} \equiv \frac{dF_{\perp}}{da}$$

2.2) อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivatives)

ปริมาณทางฟิสิกส์เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่งและเวลา นั่นหมายความว่าถ้าเราระบุตัวเลขพิกัดทั้งสามตัวและเวลา เราจะสามารถหาค่าได้เสมอ ซึ่งในหลาย ๆ ครั้งเรามักจะสนใจแค่การเปลี่ยนแปลงในตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งโดยที่ตัวแปรอื่นๆคงที่ เช่นถ้าเราต้องการพิจารณาอุณหภูมิของตำแหน่งเดิมที่เวลาต่างๆเป็นต้น

ถ้าเราพิจารณาฟังก์ชัน $f(x_1, x_2)$ ซึ่งขึ้นกับสองตัวแปร เราจะนิยามการเปลี่ยนแปลงในตัวแปรหนึ่งด้วยการนิยามอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

โดยสังเกตว่าผลต่างนั้นมีค่า________เป็นค่าคงที่

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv$$

โดยมี__________________________________

ดังนั้นถ้าเรานิยามผลต่างในตัวแปร x_1 เราจะได้

$$\Delta_1 f \equiv f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\Delta_2 f \equiv f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2) \approx$$

ถ้าเราหาผลต่างในทั้งสองตัวแปรเราจะพบว่า

$$\Delta_{1,2} f \equiv f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)$$

$$\Delta_{1,2} f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2$$

ตัวอย่าง พิจารณาฟังก์ชัน $Q = f(U,V,W)$ โดยปริมาณประเภทนี้ถูกใช้บ่อยในวิชาเทอร์โมไดนามิกส์ จงหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อไปนี้

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_{U,W}, \left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)_{U,W}, \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{Q,W}$$

จาก

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_{U,W} = \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{U,W}$$

เราจะได้ว่า

$$\Delta Q \approx \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)_{V,W} \Delta U + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{U,W} \Delta V + \left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)_{U,V} \Delta W$$

ถ้าเราบังคับให้ U และ W เป็นค่าคงที่เราจะได้

$$\left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)_{U,W} = \frac{1}{\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_{U,W}}$$

ถ้าเราบังคับให้ Q และ W มีค่าคงที่เราจะได้

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{Q,W} = -\frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_{U,W}}{\left(\frac{\partial Q}{\partial U}\right)_{V,W}}$$

เมื่อรวมสองสมการด้านบนเราจะได้

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{Q,W} \left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)_{U,W} \left(\frac{\partial Q}{\partial U}\right)_{V,W} = -1$$

2.3) ดิฟเฟอเรนเชียล (Differentials)

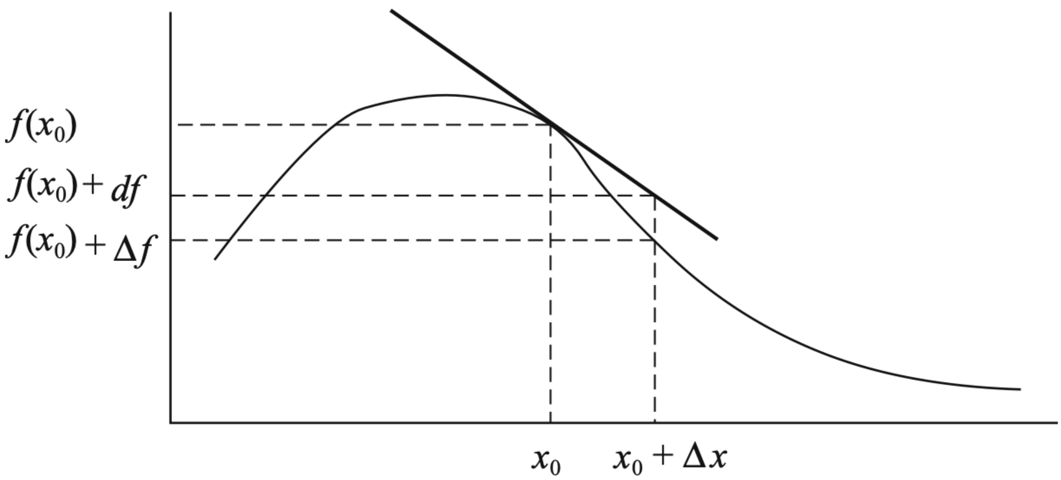
แนวคิดของดิฟเฟอเรนเชียลคือการประมาณของผลต่างของฟังก์ชันในทุกตัวแปร นั่นคือเราใช้สัญลักษณ์ d แทนที่ Δ สำหรับฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

ความหมายของดิฟเฟอเรนเชียลในกรณีของ 1 มิติ

$$df(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} dx$$

จากภาพเราจะพบว่าดิฟเฟอเรนเชียลคือการประมาณโดยใช้______________________________ ที่จุด________________



ตัวอย่าง พลังงานภายในของระบบ U เป็นฟังก์ชันของเอนโทรปี S ปริมาตร V และจำนวนโมล N ตัวแปรเหล่านี้เราเรียกว่าตัวแปรธรรมชาติของ U เราจะเขียนเป็น $U(S, V, N)$ ส่วนอุณหภูมิ ความดันและศักย์ทางเคมีถูกนิยามโดย

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N}, \qquad P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N}, \qquad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$$

อย่างไรก็ตามเอนโทรปีของระบบนั้นวัดได้ยากเมื่อเทียบกับตัวแปรอื่น ดังนั้นเราจึงต้องทำการแปลง Legendre ซึ่งทำให้อุณหภูมิเป็นตัวแปรธรรมชาติแทน เราจะนิยามพลังงานอิสระเฮล์มโฮลตส์ (Helmholtz free energy) ซึ่งมีนิยามเป็น $F = U - ST$ ดังนั้นเราจะพบว่า

$$dU = \qquad\qquad\qquad\qquad = TdS - PdV + \mu dV$$

และ

$$dF = dU - SdT - TdS =$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN$$

ดังนั้น

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -S, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -P, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu$$

2.4) กฎลูกโซ่ (Chain rule)

จาก $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ เราจะได้ดิฟเฟอเรนเชียล

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

ถ้าเราให้ตัวแปร x_i ไม่เป็นอิสระนั่นคือขึ้นกับตัวแปรอีกชุดหนึ่งเช่น $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ โดยฟังก์ชันนั้นคือ

$$x_i = g(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

ดังนั้นดิฟเฟอเรนเชียลของ x_i มีค่าเป็น

$$dx_i = \frac{\partial g_i}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial g_i}{\partial t_2}dt_2 + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial t_m}dt_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial t_j}dt_j$$

เมื่อแทนค่าลงไปจะได้

$$df =$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial t_j}dt_j$$

ถ้าเราสมมติให้ตัวแปร t_7 เท่านั้นที่เปลี่ยนแปลง นั่นคือ $\Delta t_j = 0$ ทุกตัวยกเว้น Δt_7

เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial f}{\partial t_7} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_7} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial t_7} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g_n}{\partial t_7} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g_i}{\partial t_7}$$

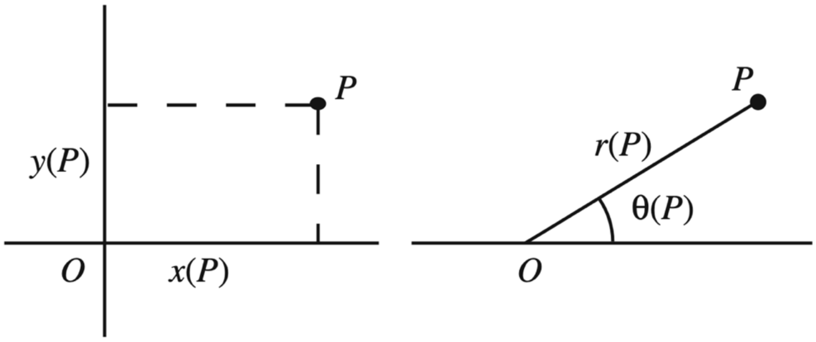
ดังนั้นเราจึงสรุปได้เป็นกฎลูกโซ่

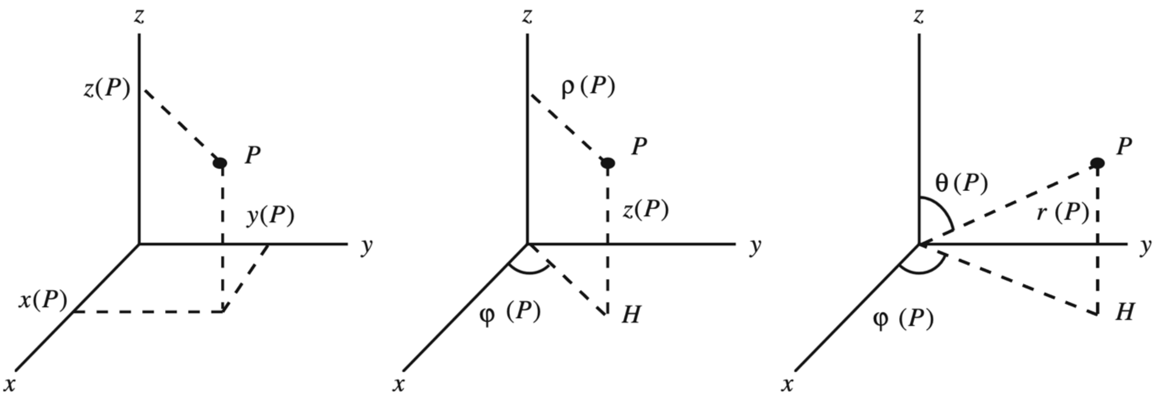
$$\frac{\partial f}{\partial t_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g_i}{\partial t_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_p}$$

<u>2.5) ความยาว พื้นที่ และปริมาตร</u>

ก่อนที่เราจะเริ่มทำการอินทิเกรตหรืออนุพันธ์เพื่อหามวล ประจุ หรือปริมาณต่างๆ เราจะเริ่มจากการศึกษาความยาว พื้นที่และปริมาตรที่ระบบพิกัดใดๆ

<u>เส้น primary curve (เส้นไพรมารี) คือเส้นทางที่เกิดจากการให้พิกัดหนึ่งเปลี่ยนแปลงโดยที่ให้พิกัดที่เหลือไม่เปลี่ยนแปลง</u>





พื้นที่ primary surface (พื้นที่ไพรมารี) คือพื้นที่ที่เกิดจากเส้นไพรมารีสองเส้น

ปริมาตร volume element เกิดจาก_______________________________________

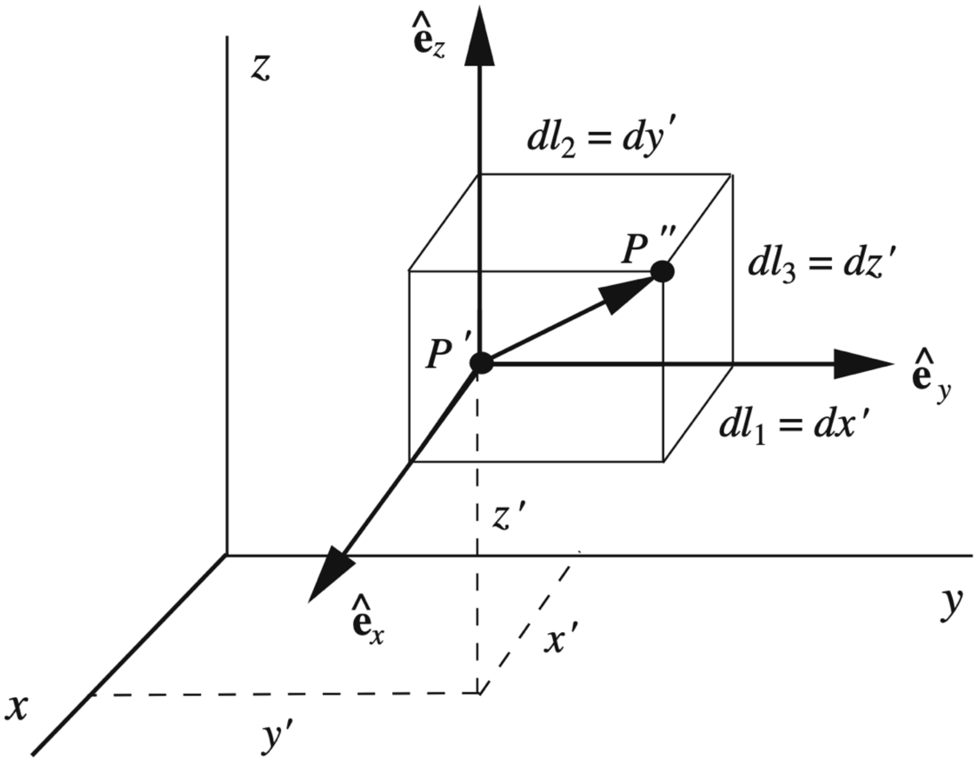
องค์ประกอบของความยาว พื้นที่และปริมาตรในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนสามารถหาได้จากการพิจารณา primary curve สามทิศทางที่จุด P' ใดๆ นั่นคือ primary curve ในแกน x เกิดจาก การยึดค่า y', z' ให้มีค่าคงที่ แล้วเปลี่ยน $x' \rightarrow x' + dx'$

ส่วน primary curve ในแกน y เกิดจาก_______________________________________

ส่วน primary curve ในแกน z เกิดจาก_______________________________________

ซึ่งประกอบเป็นเวกเตอร์ซึ่งชี้จากจุด P' ไปยังจุด P''

$$d\vec{r}' = dx'\hat{e}_x + dy'\hat{e}_y + dz'\hat{e}_z$$



ถ้าเราต้องการใช้เวกเตอร์ตัวนี้ในการบอกความยาวของเส้นโค้งใดๆในสามมิติ เราจะเริ่มจากการเขียนสมการพาราเมตริก (parametric equation) เช่น

$$(x', y', z') = (f(t), g(t), h(t))$$

โดยเส้นโค้งนี้มี $f(t), g(t), h(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร t ซึ่งเป็นตัวแปรอิสระ

ดังนั้นเราจะพบว่า

$$d\vec{r}' =$$

และ

$$|d\vec{r}'| = \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2}\, dt$$

ซึ่งการอินทิเกรตตามเส้นโค้งเป็นสิ่งที่เราจะสนใจในบทถัดไป

ถ้านำชิ้นส่วนเล็กๆนี้มาประกอบเป็นพื้นที่และปริมาตรจะได้

$$da_1 = dy'dz',\ da_2 = dx'dz', da_3 = dx'dy'$$

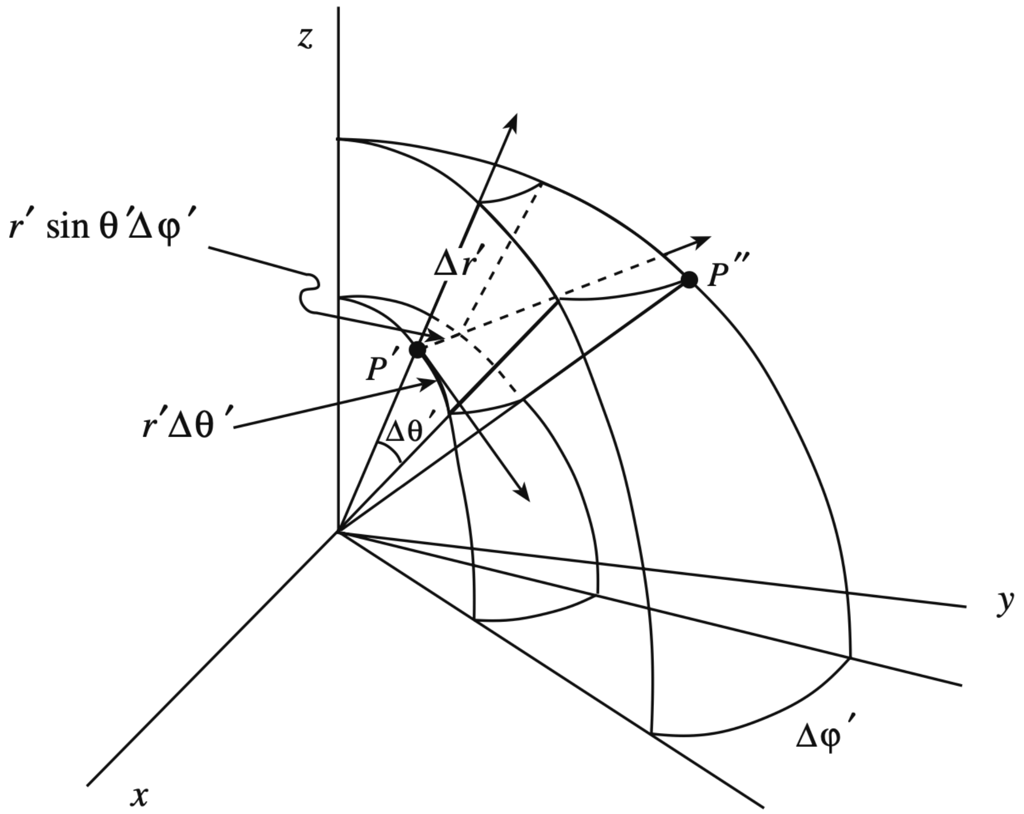
$$dV = dx'dy'dz'$$

องค์ประกอบของความยาว พื้นที่และปริมาตรในระบบพิกัดทรงกลมสามารถหาได้จากการพิจารณา primary curve สามทิศทางที่จุด P' ใดๆ

นั่นคือ primary curve ในทิศ r เกิดจาก การยึดค่า θ', ϕ' ให้มีค่าคงที่ แล้วเปลี่ยน $r' \rightarrow r' + dr'$

ส่วน primary curve ในทิศ θ เกิดจาก____

ส่วน primary curve ในทิศ ϕ เกิดจาก____



ดังนั้นเราจะได้

$$d\vec{r}' = dr'\hat{e}_r + r'd\theta'\hat{e}_\theta + r'sin\theta'd\phi'\hat{e}_\phi$$

และ

$$|d\vec{r}'| =$$

และ

$$da_1 =$$

$$da_2 =$$

$$da_3 =$$

และ

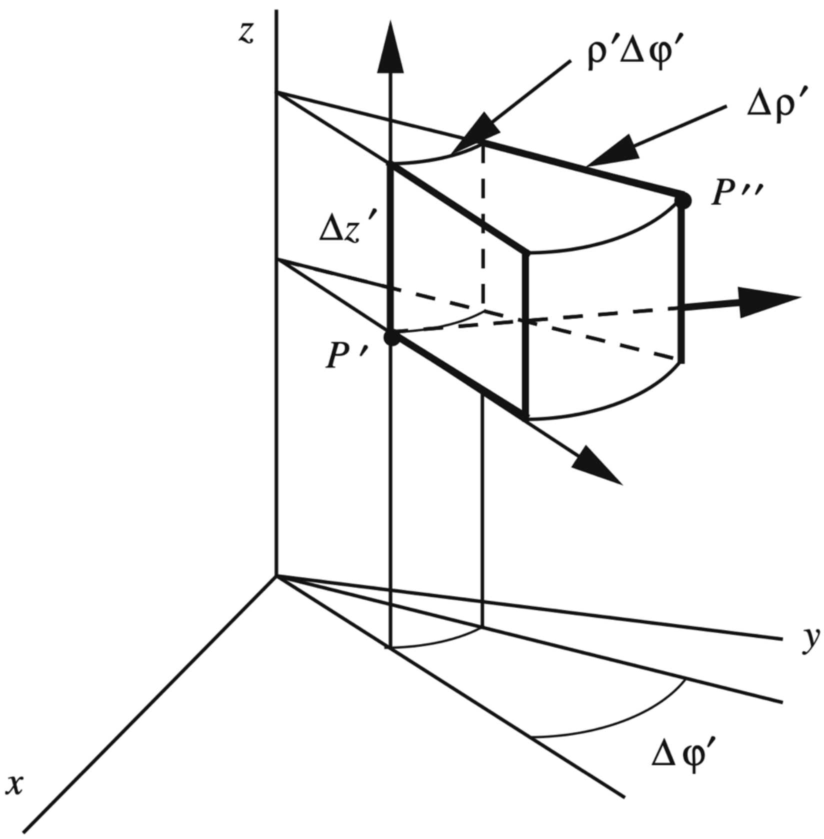
$$dV =$$

องค์ประกอบของความยาว พื้นที่และปริมาตรในระบบพิกัดทรงกระบอกสามารถหาได้จากการพิจารณา primary curve สามทิศทางที่จุด P' ใดๆ

นั่นคือ primary curve ในทิศ ρ เกิดจาก____

ส่วน primary curve ในทิศ ϕ เกิดจาก____

ส่วน primary curve ในทิศ z เกิดจาก____



ดังนั้นเราจะได้

$$d\vec{r}' =$$

และ

$$|d\vec{r}'| =$$

และ

$$da_1 =$$

$$da_2 =$$

$$da_3 =$$

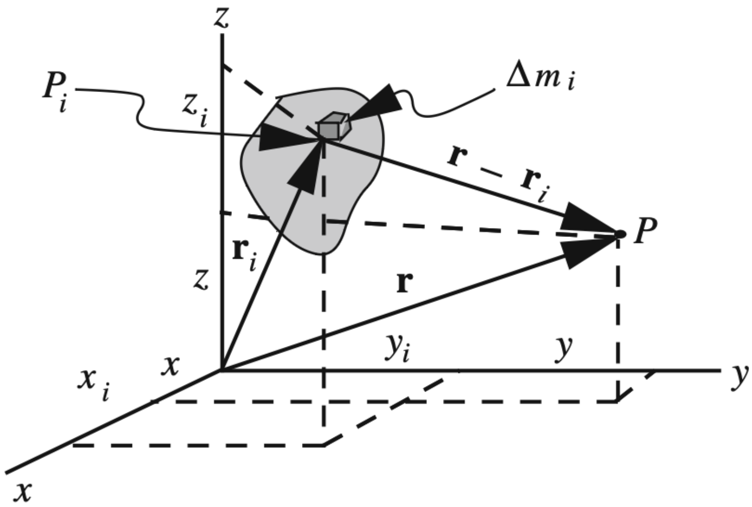
และ

$$dV =$$

Chapter 2: Calculus

2.6) ปริพันธ์ (Integration = ∫ ummation)

เรามักจะใช้ความหมายของปริพันธ์ในลักษณะของการหาพื้นที่ใต้กราฟ แต่ในฟิสิกส์เรามักใช้ความหมายในแง่ของการรวมมากกว่า (summation) พิจารณาสนามแรงโน้มถ่วงที่เกิดจากมวลรูปร่างใดๆ (เช่นโลกหรือดาวเคราะห์) เราเริ่มจากการแบ่งมวลก้อนนี้ออกเป็น N ชิ้น โดยชิ้นที่ i อยู่ที่จุด P_i และมีมวล Δm_i ดังรูป



ดังนั้นสนามแรงโน้มถ่วงที่เกิดจากมวลชิ้นเล็กๆนี้ที่ส่งอิทธิผลไปยังจุด P มีค่าเท่ากับ

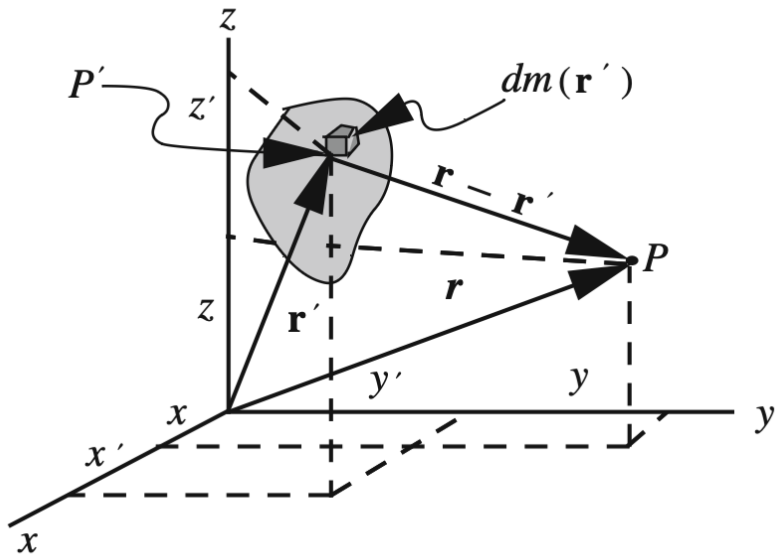
$$\vec{g}_i \approx -\frac{G\Delta m_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

และเมื่อเรารวมมวลก้อนเล็กๆพวกนี้ให้กลายเป็นมวลก้อนใหญ่เราจะได้

$$\vec{g}(\vec{r}) \approx \sum_i^N \vec{g}_i = -\sum_i^N \frac{G\Delta m_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i) = -\sum_i^N \frac{G\Delta m(\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

เมื่อพิจารณาในลิมิตที่____เราจะได้

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\iint_\Omega \frac{G\ dm(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$



ซึ่งเราสามารถเปลี่ยนเป็นอินทิเกรตในปริมาตรได้โดยใช้____________________

นั่นคือ

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\iint_{\Omega} \frac{G\ \rho(\vec{r}')dV(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

โดยบริเวณของการอินทิเกรตคือ____________________

ในอินทิกรัลนี้เราเรียก____________ว่าตัวแปรของการอินทิเกรต

และ____________เรียกว่าอินทิแกรนด์

<u>2.7) สมบัติของอินทิกรัล</u>

เพื่อเป็นการทบทวนเราจะไล่เรียงสมบัติของอินทิกรัลดังนี้

<u>การเปลี่ยนตัวแปรในการอินทิเกรต</u>

ตัวแปรในอินทิกรัลเราจะเรียกว่า______________ซึ่งไม่มีความสำคัญและสามารถนิยามอย่างไรก็ได้

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} g(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} g(s)ds =$$

ความเป็นเชิงเส้น

อินทกรัลของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเขียนได้เป็น

$$\int_{c_1}^{c_2} [af(t) + bg(t)]dt = a\int_{c_1}^{c_2} f(t)dt + b\int_{c_1}^{c_2} g(t)dt$$

การสลับขอบเขต

ขอบเขตสามารถสลับได้โดยการเพิ่ม________________________

$$\int_{c}^{d} f(x)dx =$$

ดังนั้น

$$\int_{c}^{c} f(x)dx =$$

การแบ่งช่วงอินทิเกรต

ถ้าให้ $p < q < r$ และให้____________เป็นขอบเขตและ______เป็นตัวแปรอินทิเกรต

$$\int_{p}^{r} f(t)dt = \int_{p}^{q} f(t)dt + \int_{q}^{r} f(t)dt$$

ซึ่งการแบ่งช่วงอินทิเกรตแบบนี้ช่วยได้ในกรณีของการอินทิเกรตฟังก์ชัน_________________

การแปลงอินทิกรัล

เราสามารถอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรซึ่งเป็นฟังก์ชันของอีกตัวแปรหนึ่งได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ตัวแปร______เป็นตัวแปรในการอินทิเกรตตัวแรกซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร______และเขียนได้เป็น $t = g(y)$ เราจะเขียนอินทิเกรตใหม่ได้เป็น

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \int_{p}^{q} f\big(g(y)\big)\frac{dg}{dy}dy$$

โดย q และ p พิจารณาจากขอบเขตโดย $a = g(p)$ และ $b = g(q)$

การอินทิเกรตบริเวณเล็กๆ

ในกรณีที่อินทิเกรตในบริเวณที่เล็กพอเราสามารถประมาณการอินทิเกรตจากพื้นที่นั่นคือ

$$\int_{a}^{b} f(t)dt \approx$$

โดยที่________คือค่าตรงกลางระหว่าง_____และ_____

<u>ฟังก์ชันคู่ฟังก์ชั่นคี่</u>

ในหลายๆครั้งค่าอินทิเกรตสามารถหาได้ง่ายโดยการใช้สมมาตรของตัวอินทิแกรนด์

ฟังก์ชันคู่ คือฟังก์ชันที่มีสมมาตรการ________________________

นั่นคือ

$$\int_{-T}^{T} f(t)dt = \int_{-T}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt$$

$$\int_{-T}^{T} f(t)dt = 2\int_{0}^{T} f(t)dt$$

ฟังก์ชันคี่ คือฟังก์ชันที่มีสมมาตรการ__________________แบบที่มี_________________

นั่นคือ

$$\int_{-T}^{T} f(t)dt = \int_{-T}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{T} f(t)dt$$

$$\int_{-T}^{T} f(t)dt = 0$$

2.8) การหาอนุพันธ์ของอินทิกรัล

เรามักจะรู้จักว่าอนุพันธ์คือการย้อนกลับ (inverse) ของอินทิกรัล เราจะเริ่มพิจารณาจากอินทิกรัล

$$\int_u^v f(t)dt$$

เนื่องจากว่าหลังจากอินทิเกรตแล้วปริมาณนี้ขึ้นกับขอบเขตเท่านั้นดังนั้นเราจะเขียน

$$F(u,v) = \int_u^v f(t)dt$$

ดังนั้นถ้าเราต้องการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร u เราจะได้

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{F(u + \Delta u, v) - F(u,v)}{\Delta u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u,v)}{\Delta v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = f(v)$$

นั่นคือ

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(t)dt = f(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_u^v f(t)dt = -f(u)$$

ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส

สมมติว่าเรามีฟังก์ชัน f ถ้าเราต้องการหา antiderivative ซึ่งหาอนุพันธ์แล้วได้ f

ตัวอย่างของฟังก์ชั่นนั้นตัวอย่างแรกคือ

$$F(x) \equiv \int_a^x f(s)ds$$

โดย a เป็นค่าคงที่ ซึ่งเมื่อใช้สมการก่อนหน้าเราจะได้

$$\frac{dF}{dx} = \qquad\qquad = f(x)$$

อย่างไรก็ดีเราพบว่าเราสามารถบวกค่าคงที่ในสมการด้านบนได้ โดยที่ถ้าเราบวกด้วยค่า $-F(a)$ มันจะสอดคล้องกับสมการด้านบน นั่นคือ

$$F(x) - F(a) \equiv \int_a^x f(s)ds$$

$$\frac{d(F(x) - F(a))}{dx} = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = f(x)$$

ในขณะที่ถ้าเราคิด a เป็นตัวแปร

$$\frac{d(F(x) - F(a))}{da} = -\frac{dF}{da} = \frac{d}{da}\int_a^x f(s)ds = f(a)$$

$$\frac{dF}{da} = f(a)$$

ซึ่งสอดคล้องกัน

ดังนั้นความสัมพันธ์

$$F(b) - F(a) \equiv \int_a^b f(s)ds$$

จึงเป็นพื้นฐานของการทำอินทิเกรตและหาอนุพันธ์ เราจึงเรียกทฤษฎีนี้ว่าทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส

2.9) ตัวอย่างของการหาอินทิกรัลในฟิสิกส์

ตัวอย่าง จงแสดงการหาอินทิกรัลต่อไปนี้

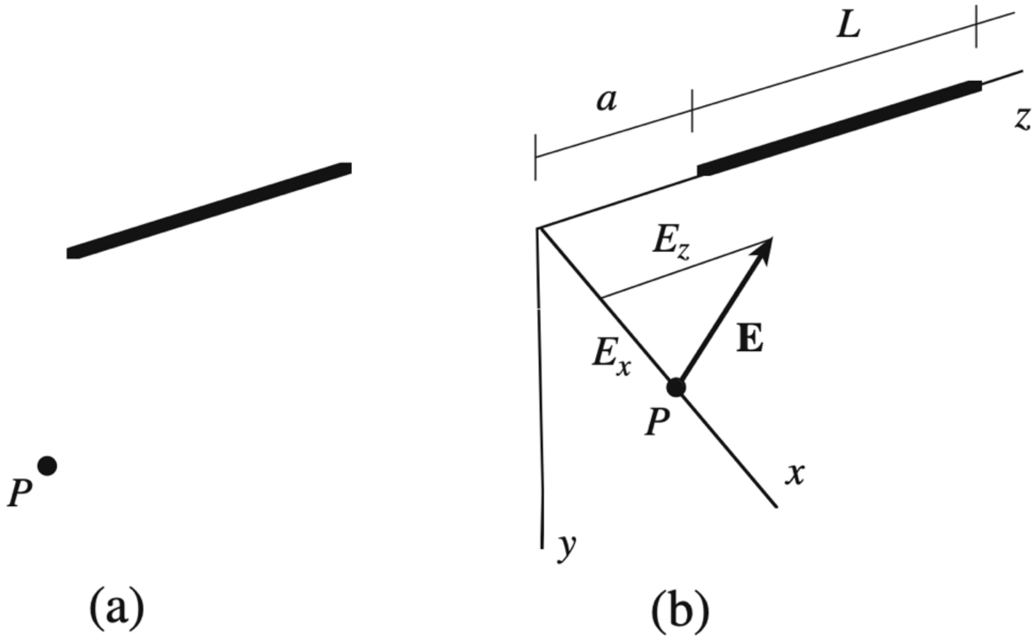
$$\int \frac{1}{(x^2+t^2)^{3/2}}\,dt = \frac{t}{x^2\sqrt{x^2+t^2}} + C$$

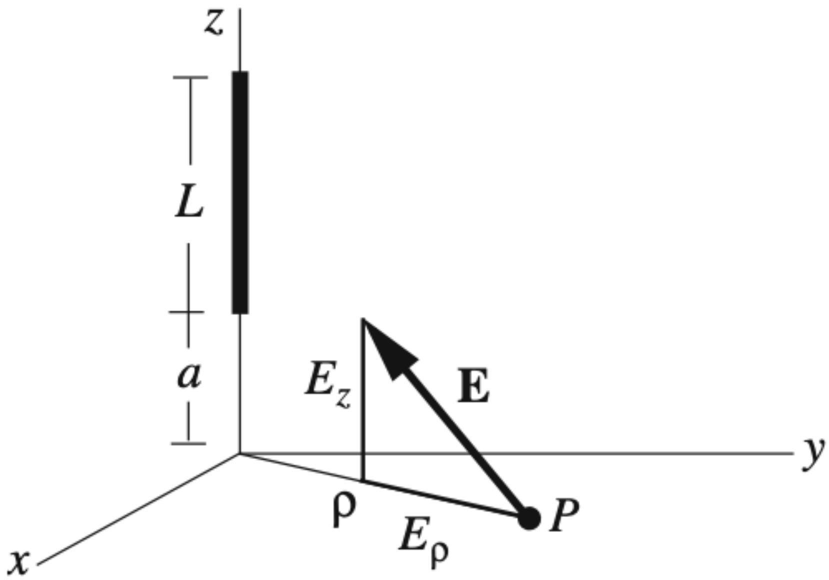
$$\int \frac{t}{(x^2+t^2)^{3/2}}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+t^2)^{1/2}}\,dt = -\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+t^2}+t}{x}\right) + C$$

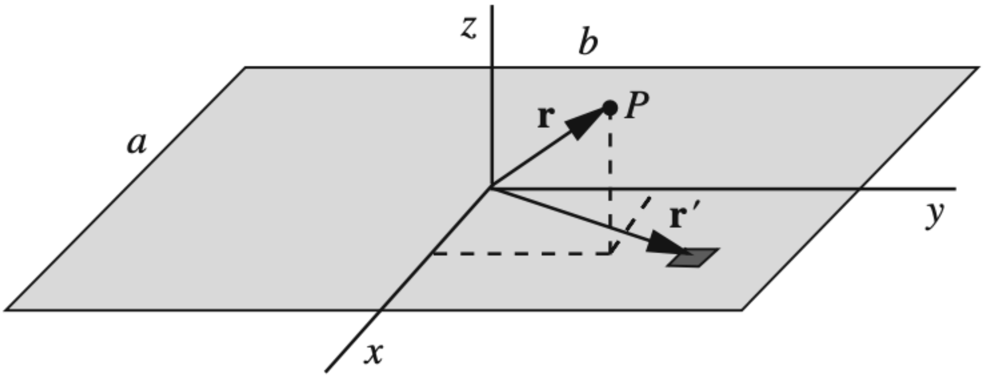
โดยการใช้การเปลี่ยนตัวแปร $t = x\,tan\theta$

ตัวอย่าง แท่งประจุยาว L ซึ่งมีความหนาแน่นเชิงเส้นสม่ำเสมอ λ จงหาสนามไฟฟ้าที่จุด P ใดๆ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน/ระบบพิกัดทรงกระบอก

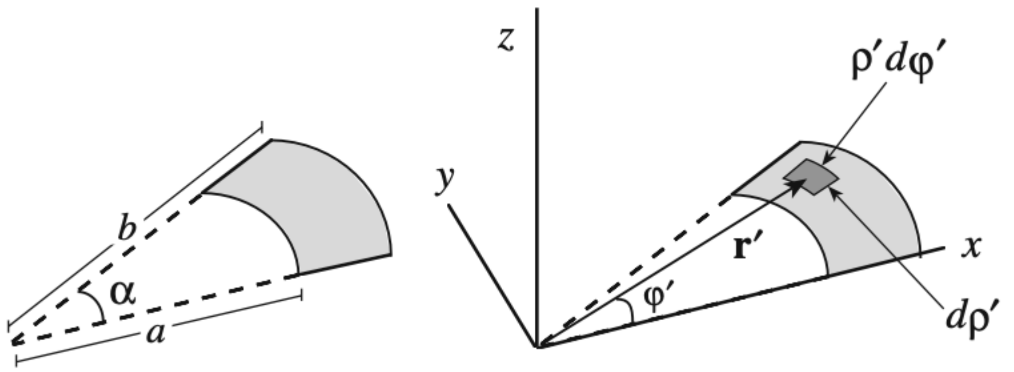



z
L
a
E_z
E
y
ρ
E_ρ
P
x

ตัวอย่าง แผ่นกว้าง a ยาว b มีประจุกระจายอย่างสม่ำเสมอด้วยความหนาแน่น σ จงหาสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งใดๆ



ตัวอย่าง จงหาสนามแรงโน้มถ่วงที่จุดใดๆ ที่เกิดจากแผ่นมวลสม่ำเสมอความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ ซึ่งมีลักษณะเป็นวงแหวนซึ่งมีรัศมีภายใน a รัศมีภายนอก b และกางทำมุม α



(a) (b)

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1) จงเปลี่ยนอินทิกรัลโดยการเปลี่ยนตัวแปรที่กำหนดให้ (ไม่ต้องอินทิเกรตให้เสร็จ)

1.1) $\int_0^a t dt, \ \ t = y^3$

1.2) $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}, \ \ t = \tan y, \ \ 0 \le y \le \pi/2$

1.3) $\int_0^1 \frac{dt}{1+t}, \ \ t = \ln y$

1.4) $\int_1^\infty \frac{tdt}{1+t^3}, \ \ t = \frac{1}{y}$

2) จงหาอนุพันธ์เทียบกับ x ของอินทิกรัลต่อไปนี้

2.1) $\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ ที่ตำแหน่ง $x = 1$

2.2) $\int_{-3}^x \cos t\, dt$ ที่ตำแหน่ง $x = \pi$

2.3) $\int_{-\infty}^{\sqrt{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}} e^{-t^2}\, dt$ ที่ตำแหน่ง $x = \pi$

2.4) $\int_0^{x^2} \cos\sqrt{s}\, ds$ ที่ตำแหน่ง $x = \pi$

3) ฟังก์ชันแฟคทอเรียล

3.1) จงหาค่าของ

$$\int_0^\infty e^{-xt}\, dt$$

3.2) จงหาค่าของ

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt$$

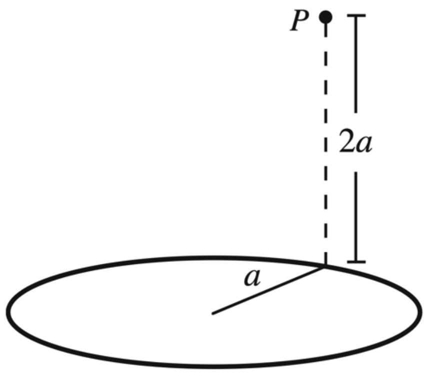
จากการหาอนุพันธ์ n ครั้งของ

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_0^\infty e^{-xt}\, dt \bigg|_{x=1}$$

4) พิจารณาวงแหวนรัศมี a มีประจุกระจายอย่างสม่ำเสมอด้วยความหนาแน่นเชิงเส้น λ จงหา

4.1) สนามไฟฟ้าที่จุด P โดยเขียนในองค์ประกอบของพิกัดทรงกระบอก

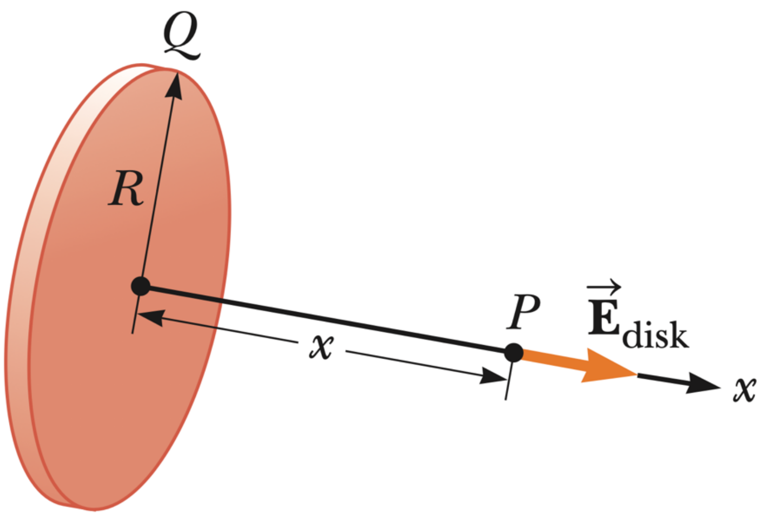
4.2) ศักย์ไฟฟ้าที่จุด P



5) แผ่นประจุวงกลมความหนาแน่นประจุคงที่

5.1) พิจารณาแผ่นประจุวงกลมรัศมี R มีประจุ Q กระจายสม่ำเสมอมีความหนาแน่นประจุ $\sigma = Q/R$ จงใช้พิกัดทรงกระบอกเพื่อหาสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง x เมื่อวัดจากจุดศูนย์กลางของแผ่นวงกลมในแนวตั้งฉาก

5.2) จงหาศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง x เมื่อวัดจากศูนย์กลางของแผ่นวงกลมในแนวตั้งฉาก



5.3) จงแสดงว่าเมื่อทำให้แผ่นนี้กว้างอนันต์ $R \to \infty$ สนามไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากับ

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma\hat{e}_z$$

6) จงหาอนุพันธ์ของศักย์ไฟฟ้า

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{k\ dq(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

เทียบกับพิกัด x, y, z โดยที่ $\vec{r}\ =\ x\ \hat{e}_x + y\ \hat{e}_y + z\ \hat{e}_z$ เพื่อแสดงให้เห็นว่า

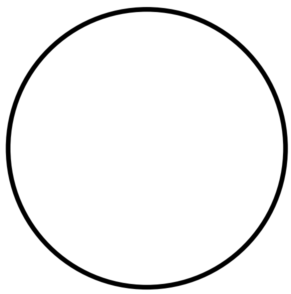
$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\ \hat{e}_x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\ \hat{e}_y - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\ \hat{e}_z = \int \frac{k\ dq(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}') = \vec{E}$$

Chapter 3: Vector Analysis

ในบทนี้เราจะมาเรียนเครื่องมือพื้นฐานของการเรียนฟิสิกส์ก็คือแคลคูลัสของเวกเตอร์ เราจะเห็นได้ว่าปัญหาส่วนใหญ่ถูกบรรยายด้วยเวกเตอร์และการเปลี่ยนแปลง/การรวมกันของเวกเตอร์ ดังในตัวอย่างของบทก่อนๆ เช่นสนามไฟฟ้า สนามแรงโน้มถ่วง เป็นต้น อย่างไรก็ดีปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นไปต้องการโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมากกว่าการอินทิเกรตและหาอนุพันธ์ธรรมดา ซึ่งเราจะได้เรียนกันในบทนี้

3.1) มุมตัน (Solid angle)

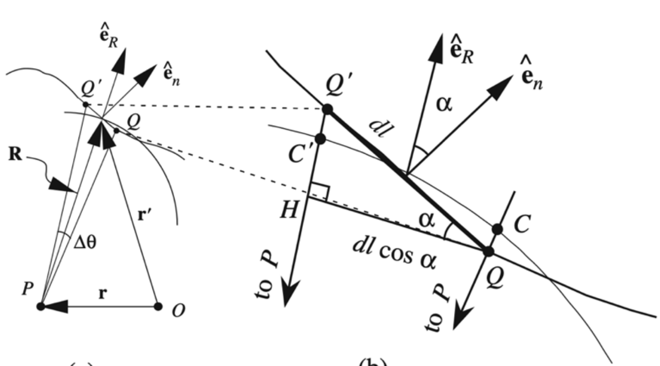
ก่อนที่เราจะเริ่มคุยกันถึงเรื่องแคลคูลัสของเวกเตอร์ เราจะเริ่มจากแนวคิดของมุมตันก่อน
เราจะเริ่มจากนิยามที่เรารู้จักกันดี คือมุมในหน่วยเรเดียน
สำหรับวงกลมรัศมี r เราจะนิยามมุมได้จาก



นั่นคือ

$$\theta = \frac{s}{r}$$

ซึ่งมุมที่มีค่ามากที่สุดคือมุมที่รองรับด้วยเส้นรอบวงของวงกลมและมีค่าเท่ากับ________________
ในกรณีของเส้นโค้งทั่วไปเราสามารถขยายผลออกมาได้ดังรูปต่อไปนี้



(a) (b)

ถ้าให้จุด_______และ_______อยู่บนเส้นโค้งและมีความยาว________เราพบว่าความยาวส่วนโค้งที่เกิดจากวงกลมคือเส้นโค้งที่อยู่ระหว่างจุด_______และ______โดยที่ความยาวนี้มีค่าเท่ากับ

$$\overline{QH} \approx \overline{CC'} \approx dl\cos\alpha = dl\,\hat{e}_R\cdot\hat{e}_n$$

โดยที่ $\hat{e}_R$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้ออกจากจุด_________ และ $\hat{e}_n$ คือ______________________

$$\Delta\theta \approx \frac{\overline{QH}}{R} =$$

และถ้าเรานิยาม

$$\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r} \text{ และ } \hat{e}_R = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

เราจะได้

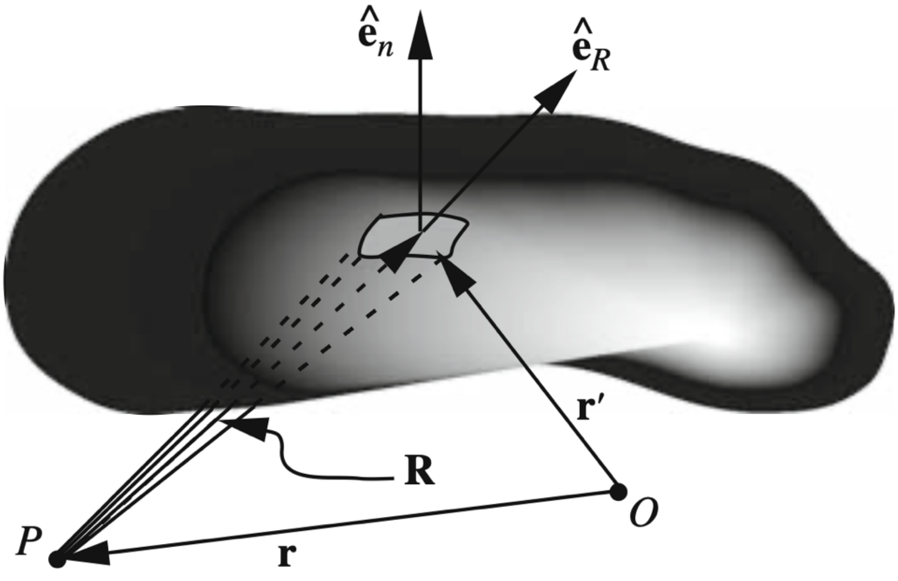
$$\Delta\theta =$$

ในรูปของอินทิเกรตเราได้

$$\theta = \int_a^b \frac{dl\,\hat{e}_R\cdot\hat{e}_n}{R} = \int_a^b \frac{dl\,\hat{e}_n\cdot(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2}$$

เราจะลดรูปเป็นกรณีเส้นโค้งบนวงกลมได้โดย

ในกรณีของมุมตัน เราจะใช้การพิจารณาที่คล้ายคลึงกับมุมในระนาบที่เพิ่งกล่าวไปโดยพิจารณาจากรูปต่อไปนี้



เรานิยามมุมตันจาก

$$\Delta\Omega \approx \frac{\Delta a\ \hat{e}_n \cdot \hat{e}_R}{R^2} = \frac{\hat{e}_R \cdot \Delta\vec{a}}{R^2} = \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \Delta\vec{a}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

โดยที่ $\hat{e}_n$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิว และ $\Delta\vec{a} =$

ในรูปของอินทิเกรตเราจะได้

$$\Omega = \iint_S \frac{\hat{e}_R \cdot d\vec{a}}{R^2} = \iint_S \frac{\vec{R} \cdot d\vec{a}}{R^3} = \iint_S \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot d\vec{a}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

โดย_____คือพื้นผิวที่รองรับด้วยมุมตัน Ω

ในกรณีของทรงกลมเราจะได้

$$\Omega = \iint_S \frac{da}{R^2} = \frac{A}{R^2}$$

ดังนั้นมุมตันที่มีค่ามากที่สุดคือมุมตันที่รองรับด้วยพื้นที่ของทรงกลมซึ่งมีค่าเท่ากับ____________

3.2) การหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์ (Time derivative)

ทั้งปริมาณสเกลาร์และเวกเตอร์สามารถผ่านกระบวนการหาอนุพันธ์และอินทิเกรตได้เหมือนกัน โดยการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์เทียบกับเวลานั้นทำได้ตามปรกตินั่นคือ

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial t}\hat{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial t}\hat{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial t}\hat{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f\vec{A}\right) = \frac{\partial f}{\partial t}\vec{A} + f\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

สังเกตว่าสมการสุดท้ายตำแหน่งมีความสำคัญเนื่องจากเป็นปริมาณครอสโปรดัค

ในกรณีที่เวกเตอร์ที่มีขนาดคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเราจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right) =$$

นั่นแปลว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใดๆจะตั้งฉากกับ________________________________

ตัวอย่าง พิจารณาโมเมนตัมเชิงมุมของแรงของกลุ่มอนุภาคในวิชากลศาสตร์

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{p}_k$$

เมื่อพิจารณาอนุพันธ์เทียบเวลาเราจะได้

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} =$$

ซึ่งถ้าทอร์กมีค่าเป็นศูนย์เราจะได้____

ตัวอย่าง การเคลื่อนที่ของอนุภาคเดี่ยวในระบบพิกัดเชิงขั้ว (2มิติ)

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} =$$

สังเกตว่าเราต้องทำอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์______ด้วยเพราะ_______________

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos\theta\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\hat{e}_y\right) =$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y\right) =$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} =$$

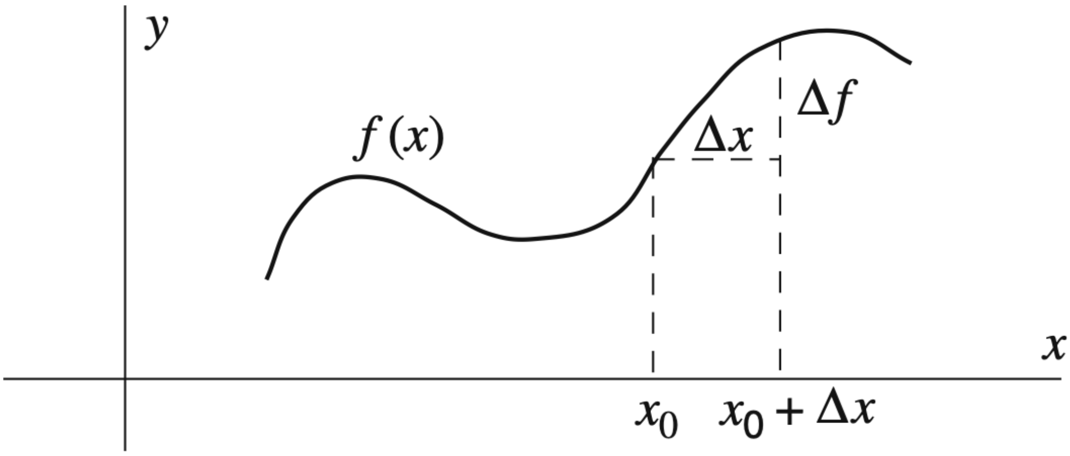
3.3) การหาอนุพันธ์เทียบกับตำแหน่งของเวกเตอร์: เกรเดียนต์ (Gradient)

เนื่องจากเราพิจารณาสนามของเวกเตอร์ซึ่งขึ้นกับตำแหน่ง เราจึงต้องสนใจอนุพันธ์ของเวกเตอร์เทียบกับตำแหน่งด้วย อย่างไรก็ตามตัวแปรที่เป็นเวกเตอร์ไม่สามารถเป็นตัวแปรที่ใช้ในการหาอนุพันธ์เทียบได้โดยตรง นั่นคือเราไม่สามารถเขียน $\frac{d\vec{A}}{d\vec{r}}$ ได้อย่างมีความหมาย เราสามารถทำได้เพียงหาอนุพันธ์เทียบกับพิกัดเท่านั้น

ลองพิจารณาฟังก์ชัน(สนามสเกลาร์)ที่ขึ้นกับพิกัดคาร์ทีเซียนในหนึ่งมิติ $f(x)$ ในกรณีนี้เราเขียน differential ได้เป็น

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} dx$$

ซึ่งรูปสามารถเขียนได้ดังนี้

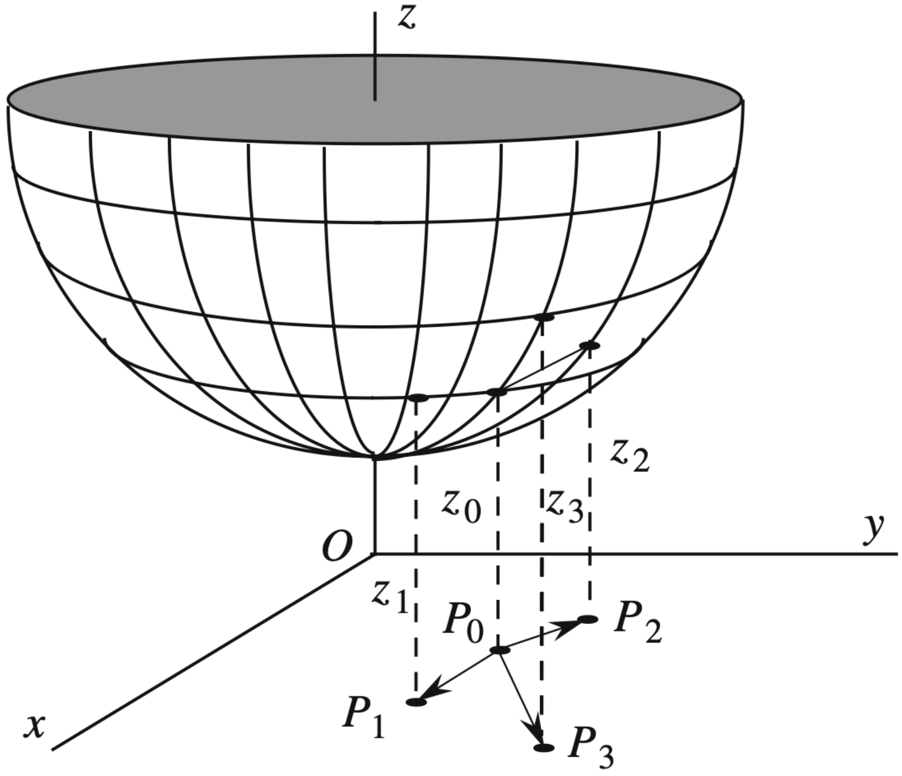


ข้อสังเกตคือมันไม่มีความกำกวมเรื่องทิศทางของการหาความเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนี้

ถ้าเราพิจารณาฟังก์ชัน(สนามสเกลาร์)ที่ขึ้นกับพิกัดคาร์ทีเซียนในสองมิติ $f(x, y)$ ในกรณีนี้เราจะเขียน differential ได้เป็น

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} dy$$

ซึ่งรูปสามารถเขียนได้ดังนี้



จากภาพเรามองความสูงเป็นค่าของฟังก์ชัน และสังเกตว่าการเปลี่ยนแปลงนี้ขึ้นกับทิศทางของ element vector

$$d\vec{r} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y$$

ดังนั้นถ้าเราเขียนปริมาณใหม่ ซึ่งนำไปทำดอทโปรดัคกับ element vector แล้วได้ differential นั่นคือ

$$df = \left(\vec{\nabla} f\right)_{P_0} \cdot d\vec{r}$$

เราจะเรียกปริมาณนี้ว่า เกรเดียนต์ (gradient)

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \hat{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \hat{e}_y$$

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่าค่าการเปลี่ยนแปลง (differential) df จะมีค่ามากที่สุดตอนที่______________
อยู่ในทิศทางเดียวกันกับ_____________________

ดังนั้นเกรเดียนต์จึงมีความหมายเป็นเวกเตอร์ที่บอกถึงทิศทางที่มีการเปลี่ยนแปลงสูงสุด

ในกรณีของพิกัดคาร์ทีเซียนสามมิติเราจะเขียนเกรเดียนต์เป็น

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

ตัวอย่าง ให้ศักย์ของแรงขึ้นกับรัศมี $V(x, y, z) = f(r)$ โดยที่ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ จงหาเกรเดียนต์ของศักย์นี้

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r$$

ซึ่งความหมายในทางฟิสิกส์คือ____________________มีทิศ________________

ให้สนามสเกลาร์ $f(x, y, z)$ เราสามารถหาพื้นผิวสองมิติซึ่งค่าของฟังก์ชันมีค่าคงที่ได้เสมอ นั่นคือถ้าให้ $f(x, y, z) = C$ จะมีพื้นผิว (ตำแหน่งในพิกัด x,y,z) ซึ่งสอดคล้องกับสมการนี้ เช่นเราอาจจะแก้สมการนี้เพื่อหา___ที่สอดคล้องกับค่าของ____และ___ซึ่งคือความหมายของพื้นผิวสองมิติ ถ้าเราพิจารณาจุดสองจุดเช่น P_1 และ P_2 บนพื้นผิว $f(x, y, z) = C$ เดียวกัน นั่นคือจุด P_1 มีพิกัด (x, y, z) และ P_2 มีพิกัด $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$

$$f(x, y, z) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + df$$

ดังนั้น

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0$$

ซึ่ง element vector มีทิศทาง_________________________ ดังนั้นเราสรุปว่าเกรเดียนต์มีทิศตั้งฉากกับผิวของ $f(x, y, z) = C$

เราอาจจะนิยามเครื่องหมาย $\vec{\nabla}$ โดยคิดว่าเป็นตัวกระทำการที่เป็นเวกเตอร์ หมายความว่า

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

เปลี่ยนเป็น

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ซึ่งเราจะเรียกตัวกระทำการเวกเตอร์นี้ว่า เดล หรือ นาบลา (del, nabla) ซึ่งสามารถใช้กระทำลงบนฟังก์ชันที่ต้องการได้

3.4) เกรเดียนต์และปัญหาค่าสูงสุด/ต่ำสุด (Gradient and Extremum Problems)

เช่นเดียวกันกับการหาอนุพันธ์ธรรมดา เกรเดียนต์ซึ่งคือรูปทั่วไปของอนุพันธ์ก็สามารถใช้แก้ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดได้ พิจารณาฟังก์ชัน $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ฟังก์ชันนี้จะมีค่าสูงสุด/ต่ำสุดที่จุด a เมื่อ_______________มีค่าเท่ากับ________สำหรับค่า $d\vec{x}$ ใดๆ นั่นคือ

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_a dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_a dx_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_a dx_n = \left(\vec{\nabla} f\right)_a \cdot d\vec{x} = 0$$

ซึ่งถ้าเราสามารถเปลี่ยนค่า__________ได้อย่างอิสระนั่นหมายความว่าโอกาสเดียวที่จะทำให้สมการบนเป็นจริงคือ

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_a = 0 \text{ หรือ } \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_a = 0 \text{ ทุกค่าของ } i = 1,2,\dots,n$$

ซึ่งคือรูปทั่วไปของการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดนั่นเอง

ในหลายๆครั้งการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดอาจจะต้องหาภายใต้เงื่อนไขบังคับ (constraints) บางประการ ซึ่งเราต้องใช้ตัวคูณลากรานจ์ในการช่วยแก้ปัญหา ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ สมมติให้จุด P_1, P_2, Q เป็นจุดในสามมิติใดๆ สมมติให้_____และ____ถูกตรึงไว้ แล้วจุด____เปลี่ยนตำแหน่งได้ จงหาตำแหน่งของจุด_____ที่ทำให้ระยะ_____________มีค่าสั้นที่สุด

วิธีในการทำคือกำหนดให้จุด P_1 มีพิกัดเป็น____________ จุด P_2 มีพิกัดเป็น____________ และจุด Q มีพิกัดเป็น____________ เราจะได้ระยะทางรวมซึ่งขึ้นกับพิกัด__________คือ

$$f(x,y,z) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$

ซึ่งถ้าเราใช้ $\left(\vec{\nabla} f\right)_a = 0$ สามสมการเพื่อแก้หา________เราจะพบว่า________________________ อย่างไรก็ดี ถ้าเราต้องการให้จุด Q อยู่บนทรงกลมที่มีรัศมี a เราจะต้องบังคับให้คำตอบ (x,y,z) สอดคล้องกับสมการ

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

ซึ่งวิธีการแก้ตรงๆคือ แก้หา_____จากสมการ______________ก่อนแล้วจึงแทนค่าเข้าไปในฟังก์ชั่น____________เพื่อใช้สมการ__________หาคำตอบอีกที วิธีนี้ค่อนข้างยุ่งยากและซับซ้อน เราจะใช้อีกวิธีที่สะดวกกว่า

ถ้าเราต้องการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ โดยที่ตำแหน่ง $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ต้องอยู่บนผิว $g(\vec{x}) = 0$ ดังนั้นเราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\vec{\nabla} f = 0$ เพราะเราไม่

สามารถเลือก $d\vec{x}$ ได้อย่างอิสระ แต่เนื่องจาก $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ต้องอยู่บนผิว $g(\vec{x}) = 0$ เราพบว่าเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวคือ $\vec{\nabla} g$ และถ้าเราต้องการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ บนผิวนี้แปลว่า $\vec{\nabla} f \cdot d\vec{x} = 0$ ซึ่งหมายความว่า______ตั้งฉากกับ______หรือ__________
ดังนั้นเราสรุปได้ว่าเวกเตอร์_____และ_____ต้องมีทิศทางเดียวกัน นั่นคือ

$$\vec{\nabla} f = -\lambda \vec{\nabla} g$$

โดยค่า λ เป็นค่าคงที่ไม่กำหนดค่า (arbitrary) เราเรียกปริมาณนี้ว่าตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange multiplier) ซึ่งสมการนี้เราสามารถแปลงให้อยู่ในรูป

$$\vec{\nabla}(f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})) = 0 \text{ และ } g(\vec{x}) = 0$$

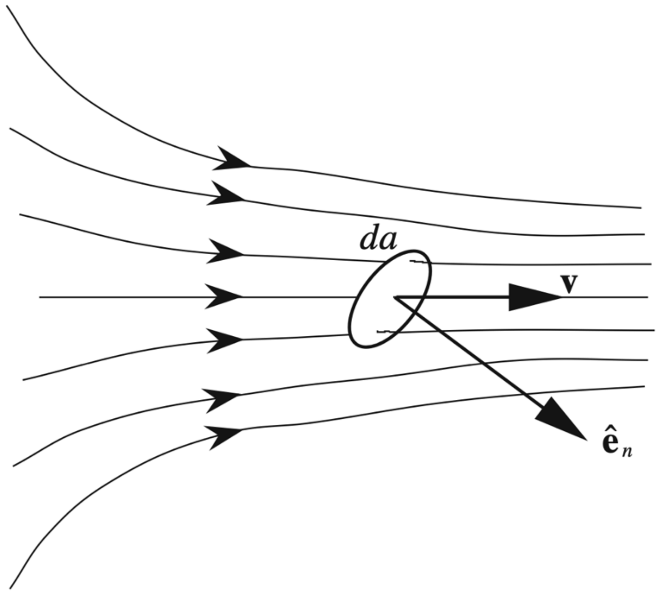
ซึ่งมีจำนวนสมการทั้งหมด____________สมการเพื่อแก้หาตัวแปรจำนวน___________ตัว
หรืออาจสร้างฟังก์ชั่น $F(\vec{x}; \lambda) \equiv f(\vec{x}) + \lambda\, g(\vec{x})$ แล้วหา

$$\vec{\nabla} F(\vec{x}; \lambda) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของกล่องที่ใหญ่ที่สุดซึ่งมีพื้นที่ผิวเท่ากับ 72 m^2
กำหนดให้กล่องมีมิติ x, y, z ฟังก์ชันของปริมาตรกล่องจะเป็น $f(x, y, z) = xyz$ และเงื่อนไขบังคับคือ $g(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx - 72 = 0$

3.5) ฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์ (Flux of vector fields)

สนามของเวกเตอร์มีทิศทางดังนั้นเราจึงมีวิธีในการหาอนุพันธ์มันได้อีกหลายแบบนอกเหนือจากเกรเดียนต์ที่เราได้ศึกษาไปแล้ว ตัวอย่างเช่นสนามเวกเตอร์สามารถทะลุผ่านพื้นผิวที่กำหนดได้ สมมติให้กระแสน้ำมีความเร็วของน้ำแต่ละจุดแทนด้วยสนามเวกเตอร์ $\vec{v}$ ผ่านพื้นผิวเล็กๆ Δa ซึ่งเวกเตอร์ตั้งฉากกับผิวนี้มีทิศ $\hat{e}_n$ ดังภาพ



ภายในเวลา Δt ปริมาตรที่ผ่านผิวนี้ไปมีค่าเท่ากับ________________________ดังนั้นเราจะได้ปริมาณน้ำที่ผ่านพื้นที่ผิวต่อหน่วยเวลาเป็น

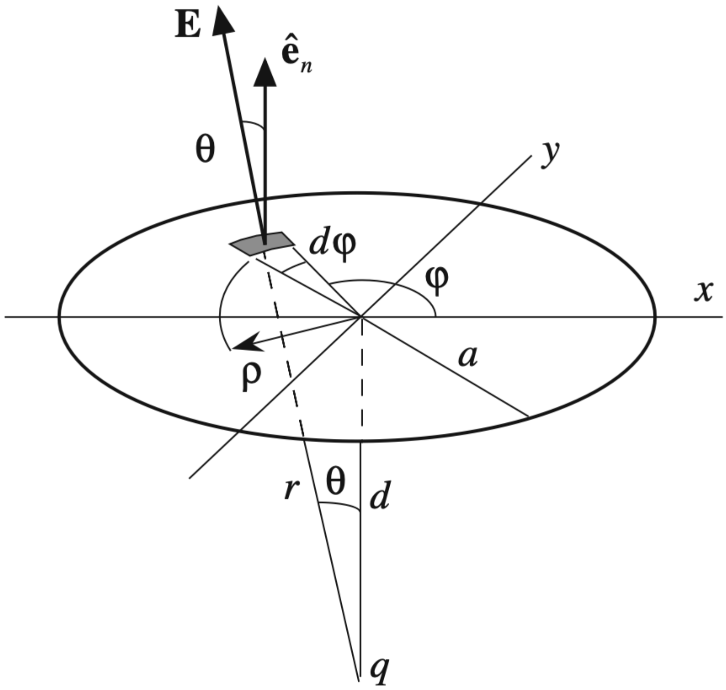
$$\Delta\phi = \vec{v}\cdot\hat{e}_n\Delta a = \vec{v}\cdot\Delta\vec{a}$$

ซึ่งเราจะเรียกปริมาณนี้ว่าฟลักซ์ (flux) (ในกลศาสตร์ของไหลเราเรียกปริมาณนี้ว่า flow ด้วย) ถ้าเราทำการรวมพื้นที่เล็กๆเหล่านี้เข้าด้วยกันเราใช้แนวคิดของการอินทิเกรตได้ นั่นคือฟลักซ์ผ่านพื้นที่ผิวใดๆมีค่าเท่ากับ

$$\phi = \lim_{N\to\infty}\sum_{i}^{N}\vec{v}_i\cdot\Delta\vec{a}_i = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{a}$$

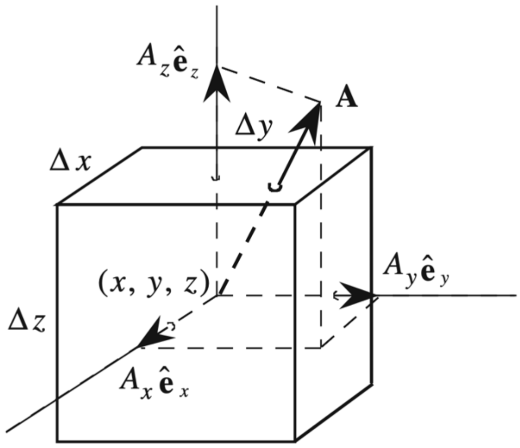
ข้อควรระวังคือทิศทางของพื้นที่นั้นสามารถนิยามได้สองทิศทางเสมอ

ตัวอย่าง จงหาฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าที่เกิดจากจุดประจุ q ที่ผ่านแผ่นวงกลมรัศมี a และอยู่ห่างจากประจุเป็นระยะ d ดังภาพ



3.6) ความหนาแน่นฟลักซ์: ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence)

เราจะเริ่มพิจารณาฟลักซ์รอบพื้นที่ปิดของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ เริ่มจากการพิจารณากล่องสี่เหลี่ยมปริมาณ V ที่จุดศูนย์กลาง P ซึ่งมีพิกัดเป็น (x, y, z) ถ้าให้ด้านของกล่องนี้มีค่าเป็น $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ดังภาพ



ถ้ากำหนดให้

- ฟลักซ์ $\Delta\phi_1$ คือฟลักซ์ที่ผ่านผิวที่ขนานกับแกน x ด้านบวกนั่นคือผิวที่มีค่าพิกัด $x + \frac{\Delta x}{2}$ และมีพื้นที่ $\Delta y \Delta z$
- ฟลักซ์ $\Delta\phi_2$ คือฟลักซ์ที่ผ่านผิวที่ขนานกับแกน x ด้านลบนั่นคือผิวที่มีค่าพิกัด $x - \frac{\Delta x}{2}$ และมีพื้นที่ $\Delta y \Delta z$

พิจารณา

$$\Delta\phi_1 = \vec{A}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot \hat{e}_x \Delta a = A_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y \Delta z$$

เราใช้การประมาณของ partial derivative

$$A_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

เราจะได้

$$\Delta\phi_1 = A_x(x, y, z)\Delta y \Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\Delta\phi_2 = \vec{A}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot (-\hat{e}_x)\Delta a = -A_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y \Delta z$$

$$A_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = A_x(x, y, z) - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

$$\Delta\phi_2 = -A_x(x,y,z)\Delta y\Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

ดังนั้น

$$\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

ถ้ากำหนดให้

- ฟลักซ์ $\Delta\phi_3$ คือฟลักซ์ที่ผ่านผิวที่ขนานกับแกน y ด้านบวกนั่นคือผิวที่มีค่าพิกัด $y + \frac{\Delta y}{2}$ และมีพื้นที่ $\Delta x\Delta z$
- ฟลักซ์ $\Delta\phi_4$ คือฟลักซ์ที่ผ่านผิวที่ขนานกับแกน y ด้านลบนั่นคือผิวที่มีค่าพิกัด $y - \frac{\Delta y}{2}$ และมีพื้นที่ $\Delta x\Delta z$
- ฟลักซ์ $\Delta\phi_5$ คือฟลักซ์ที่ผ่านผิวที่ขนานกับแกน z ด้านบวกนั่นคือผิวที่มีค่าพิกัด $z + \frac{\Delta z}{2}$ และมีพื้นที่ $\Delta x\Delta y$
- ฟลักซ์ $\Delta\phi_6$ คือฟลักซ์ที่ผ่านผิวที่ขนานกับแกน z ด้านลบนั่นคือผิวที่มีค่าพิกัด $z - \frac{\Delta z}{2}$ และมีพื้นที่ $\Delta x\Delta y$

เราจะได้

$$\Delta\phi_3 + \Delta\phi_4 = \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\Delta\phi_5 + \Delta\phi_6 = \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

และฟลักซ์รวมมีค่าเท่ากับ

$$\Delta\phi = \sum_i^6 \Delta\phi_i = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

นั่นคือความหนาแน่นฟลักซ์มีค่าเท่ากับ

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ถ้าเราให้ปริมาตรนี้เล็กๆ เราจะนิยามความหนาแน่นฟลักซ์จาก

$$\rho_\phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \equiv div\,\vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

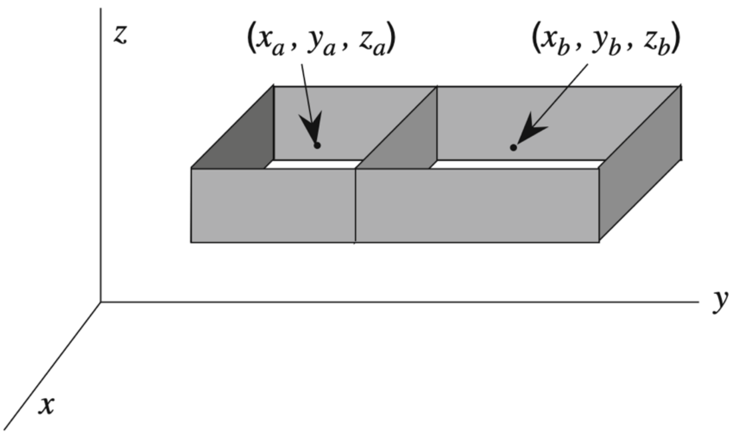
ซึ่งเรามองเป็นสัญลักษณ์ nabla ทำดอทโปรดัคกับสนามเวกเตอร์ได้

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

และเราเรียกปริมาณนี้ว่าไดเวอร์เจนซ์ (divergence)

3.7) ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์: กฎของเกาส์ (Divergence Theorem or Gauss's law)

ปริมาณความหนาแน่นฟลักซ์พยายามบอกเราว่าเราสามารถหาฟลักซ์รวมของปริมาตรใดๆได้โดยการอินทิเกรต เราจะเริ่มจากกล่องเล็กๆสองกล่องที่อยู่ติดกันดังภาพ



พิจารณาผิวที่กล่องสองกล่องนี้ติดกัน ฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์ที่ผ่านกล่อง a กับฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์ที่ผ่านกล่อง b ที่ผิวนี้มีค่าหักล้างกันเนื่องจาก________________________
ดังนั้น

ฟลักซ์ที่ผ่านผิวของกล่องใหญ่ $=$ ฟลักซ์ของกล่อง a $+$ ฟลักซ์ของกล่อง b

นั่นคือ

$$\Delta\phi = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)_a \Delta V_a + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)_b \Delta V_b$$

เมื่อเราขยายผลนี้ให้เป็นการรวมกล่องเล็กๆจำนวนมากเราจะได้

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)_i \Delta V_i$$

และเมื่อพิจารณาลิมิตที่กล่องมีจำนวนมากเราจะได้

$$\phi = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)_i \Delta V_i = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV$$

ซึ่งเมื่อรวมกับสูตรของฟลักซ์รอบพื้นที่ปิดใดๆ เราจะได้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์

ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์: ฟลักซ์(หรืออินทิกรัลพื้นผิว)ของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ รอบพื้นที่ปิด S ซึ่งล้อมรอบปริมาตร V จะมีค่าเท่ากับอินทิกรัลรอบปริมาตร V ของไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{A}$

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV$$

ตัวอย่าง พิจารณาสนามไฟฟ้าจากจุดประจุ q

$$\vec{E} = \frac{kq(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

ดังนั้นถ้าเราหาฟลักซ์บนพื้นที่ปิด S ใดๆเราจะได้

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iint_S \frac{kq(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot d\vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

ซึ่งถ้าเราใช้นิยามของมุมตันเราจะได้

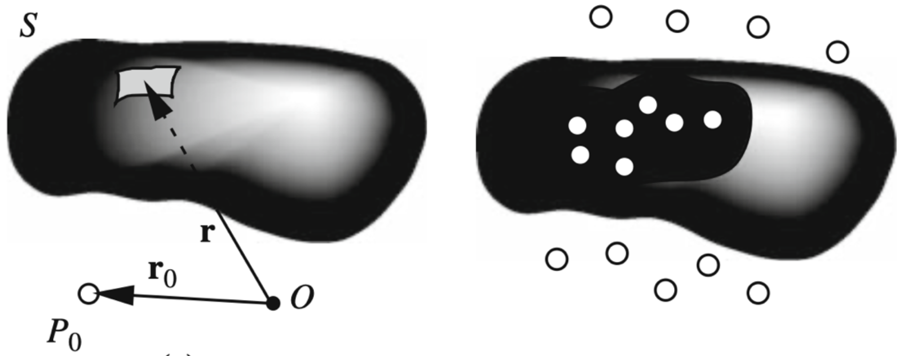
$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = kq\Omega$$

ซึ่งมุมตันของพื้นผิวปิดในกรณีที่จุดประจุอยู่ด้านในมีค่าเท่ากับ____________________

แล้วถ้าจุดประจุอยู่ด้านนอกมุมตันมีค่าเท่ากับ______เพราะ______________________

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \begin{cases} 4\pi kq, & \text{ถ้าจุดประจุอยู่ด้านใน} \\ 0, & \text{ถ้าจุดประจุอยู่ด้านนอก} \end{cases}$$

ดังนั้นถ้ามีจุดประจุ N จุด $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ ดังภาพ



(a) (b)

ฟลักซ์รอบพื้นที่ปิดใดๆ

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iint_S \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot d\vec{a} = 4\pi k \sum_{enclosed} Q_i = 4\pi k Q_{enclosed}$$

โดย $Q_{enclosed}$ คือประจุทั้งหมดที่ล้อมรอบพื้นที่ปิด เพราะประจุด้านนอกมี________________

เมื่อแทนค่าคงที่ของคูลอมบ์ด้วยสภาพะยอมทางไฟฟ้า $k = 1/4\pi\epsilon_0$ เราจะได้

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enclosed}}{\epsilon_0}$$

ซึ่งคือกฎของเกาส์ (Gauss's law)

และเมื่อเราใช้กฎของเกาส์ร่วมกับทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์เราพบว่า

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV$$

และ

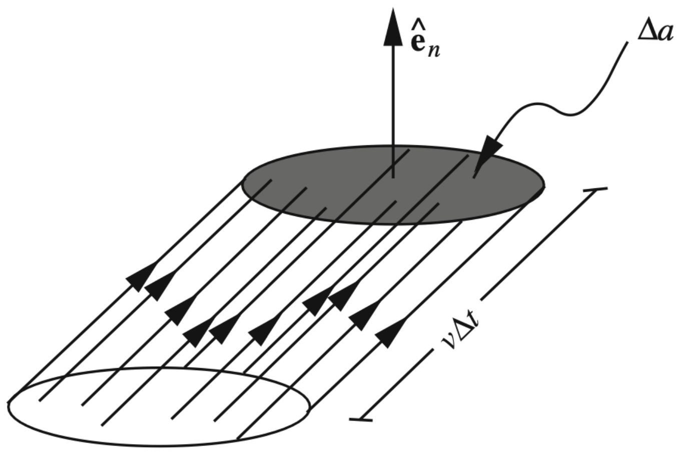
$$\frac{Q_{enclosed}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho_Q dV$$

นั่นคือกฎของเกาส์เขียนได้ในรูปไดเวอร์เจนต์คือ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_Q}{\epsilon_0}$$

<u>3.8) สมการความต่อเนื่อง</u>

เมื่อเราพิจารณาของไหลที่มีความหนาแน่น $\rho(x,y,z,t)$ และความเร็ว $\vec{v}(x,y,z,t)$ ซึ่งความหนาแน่นของไหลนี้อาจจะไปประยุกต์ใช้กับหลายสถานการณ์เช่น ประจุ มวล พลังงาน โมเมนตัม เราสนใจปริมาณสสารที่ผ่านพื้นที่ Δa ต่อหน่วยเวลา เราจะเรียกปริมาณนี้ว่า ΔM



จากภาพเราพบว่าถ้าให้เวลาผ่านไป Δt ปริมาตรของของไหลที่ผ่านไปมีค่าเท่ากับ

$$\Delta V = (\vec{v}\Delta t) \cdot \Delta\vec{a}$$

ดังนั้น

$$\Delta M = \frac{\rho\Delta V}{\Delta t} = \rho\vec{v} \cdot \Delta\vec{a}$$

เราจะเห็นได้ว่าถ้าเรามอง______เป็นสนามเวกเตอร์_______คือฟลักซ์ เราจึงเรียก $\rho\vec{v}$ ว่าความหนาแน่นกระแสซึ่งเรามักใช้

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

ซึ่งฟลักซ์ของกระแสของปริมาณใดๆคือ

$$\Delta\phi_Q = \left(\rho_Q\vec{v}\right) \cdot \Delta\vec{a} = \vec{J}_Q \cdot \Delta\vec{a}$$

ในกรณีของพื้นที่ทั่วไปเราต้องอินทิเกรต

$$\phi_Q = \iint_S \vec{J}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{a}$$

และถ้าพิจารณาพื้นที่ปิด S ใดๆ เราใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์จะได้

$$\phi_Q = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV$$

ภายในปริมาตร V ซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นที่ปิด S เราสามารถหาปริมาณสสารรวมของทั้งปริมาตรได้โดย

$$Q(t) = \iiint_V \rho_Q dV$$

ซึ่ง<u>เมื่อหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Q เทียบกับเวลามันจะมีค่าเท่ากับปริมาณสสารที่ผ่านพื้นที่ปิด S ต่อหน่วยเวลา</u> นั่นคือ

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV$$

สังเกตว่าเราใช้เครื่องหมายลบเพราะ____________________________________

ซึ่งสมการนี้เราเรียกว่าสมการความต่อเนื่องเพราะไม่มีการสูญเสียสสารไปในกระบวนการนี้

ในรูปแบบของอนุพันธ์สมการนี้เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho_Q(x,y,z,t)dV(x,y,z) = -\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dV$$

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_Q = 0$$

หรือในรูปของอนุพันธ์เทียบกับเวลา

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho_Q\vec{v}\right) = 0$$

$$\frac{d\rho_Q}{dt} + \rho_Q\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

Chapter 3: Vector Analysis

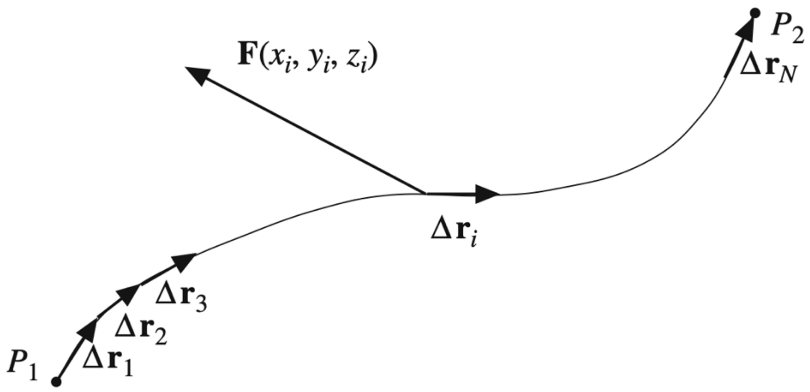
การหา divergence ที่เราศึกษาไปแล้วคือการหาสนามเวกเตอร์ที่ผ่านพื้นที่ผิว แต่ทิศทางของสนามเวกเตอร์สามารถเปลี่ยนไปได้ตามเส้นทางของเวกเตอร์ ดังนั้นในส่วนต่อไปเราจะศึกษาการเปลี่ยนแปลงของทิศทางของสนามเวกเตอร์ซึ่งจะทำให้เราต้องศึกษาอินทิเกรตและอนุพันธ์ชนิดอื่นเพิ่มเติม

3.9) อินทิกรัลตามเส้น (Line Integral)

ตัวอย่างที่เรารู้จักกันดีของอินทิกรัลตามเส้นคือแนวคิดของงาน พิจารณาสนามของแรง $\vec{F}(\vec{r})$ บนจุดอนุภาคและให้อนุภาคเคลื่อนที่ไปด้วยการกระจัด $\Delta\vec{r}$ งานที่เกิดจากแรงนี้มีค่าเท่ากับ

$$\Delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r}$$

ซึ่งเราประมาณว่าแรงนี้มีค่าคงที่ตลอดช่วงการเคลื่อนที่ $\Delta\vec{r}$ นี้



เพื่อคำนวณงานที่เกิดจากเส้นทาง $P_1 \rightarrow P_2$ ซึ่งเราสามารถแบ่งเป็นช่วงเล็กๆ (infinitesimal) ซึ่งมีจำนวนอนันต์ (infinity) $W = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

โดย C คือเส้นทางโค้งที่เกิดจากแรง และเริ่มต้นที่ P_1 สิ้นสุดที่ P_2 อินทิเกรตชนิดนี้เราเรียกว่าอินทิเกรตตามเส้น (Line integral)

วิธีการทั่วไปของคำนวณอินทิกรัลตามเส้นคือการใช้พารามิเตอร์ สมมติให้เส้นทาง C มีพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งเขียนในรูปของพารามิเตอร์ t ได้เป็น

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t)$$

ในกรณีที่เราคุ้นเคยกันดีก็คือ t คือตัวแปรบอกเวลา

ดังนั้นสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ จะเขียนในรูปของพารามิเตอร์ t ได้เช่นเดียวกัน

$$A_x(x,y,z) = A_x\big(f(t),g(t),h(t)\big) \equiv F(t)$$

$$A_y(x,y,z) = A_y\big(f(t),g(t),h(t)\big) \equiv G(t)$$

$$A_z(x,y,z) = A_z\big(f(t),g(t),h(t)\big) \equiv H(t)$$

และ line element คือ

$$d\vec{r} = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z = \left(\frac{df}{dt}\hat{e}_x + \frac{dg}{dt}\hat{e}_y + \frac{dh}{dt}\hat{e}_z\right)dt$$

ดังนั้นอินทิกรัลตามเส้นของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{t_1}^{t_2}\left(F(t)\frac{df}{dt} + G(t)\frac{dg}{dt} + H(t)\frac{dh}{dt}\right)dt$$

ซึ่ง $t = t_1$ และ $t = t_2$ คือตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายของเส้นทาง C

ตัวอย่าง พิจารณาสนามเวกเตอร์ซึ่งมีค่าตามพิกัดทรงกระบอกเป็น

$$\vec{A} = z\phi\hat{e}_\rho + \rho z\hat{e}_\phi + \rho\phi\hat{e}_z$$

จงหาค่าอินทิกรัลตามเส้นของสนามนี้ตามเส้นทางที่เป็นเกลียวซึ่งมีรัศมี a และมีระยะห่างระหว่างชั้นเป็น b โดยเส้นทางนี้กำหนดได้โดย

$$\rho(t) = a, \quad \phi(t) = t, \quad z(t) = \frac{bt}{2\pi}$$

สังเกตว่าความสูงเปลี่ยนไป________เมื่อวนกลับมาครบหนึ่งรอบ

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{t=2\pi}\big(z(t)\phi(t)\hat{e}_\rho + \rho(t)z(t)\hat{e}_\phi + \rho(t)\phi(t)\hat{e}_z\big)\cdot\big(\rho d\phi\hat{e}_\phi + dz\hat{e}_z\big)$$

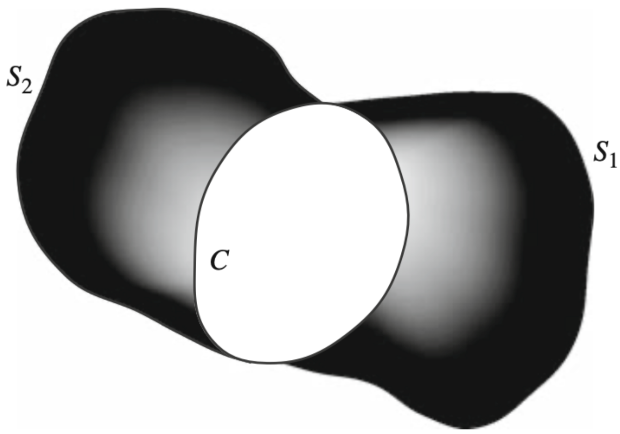
3.10) เคิร์ลของสนามเวกเตอร์และทฤษฎีบทของสโตกส์ (Curl of vector fields and Stokes theorem)

อินทิกรัลตามเส้นของเส้นทางปิด (closed path) ใดๆมีความพิเศษ ตัวอย่างเช่นถ้าเวกเตอร์ของความเร็วของของไหลมีอินทิกรัลตามเส้นไม่เท่ากับศูนย์ แปลว่าของไหลนี้มีการไหลย้อนกลับซึ่งแปลว่ามันมีน้ำวน (whirlpool) อยู่ภายในเส้นปิดนี้ เพื่อเป็นการแยกความแตกต่างระหว่างอินทิกรัลตามเส้นปรกติกับอินทิกรัลตามเส้นปิดเราจะนิยามอินทิกรัลตามเส้นปิดเป็น

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

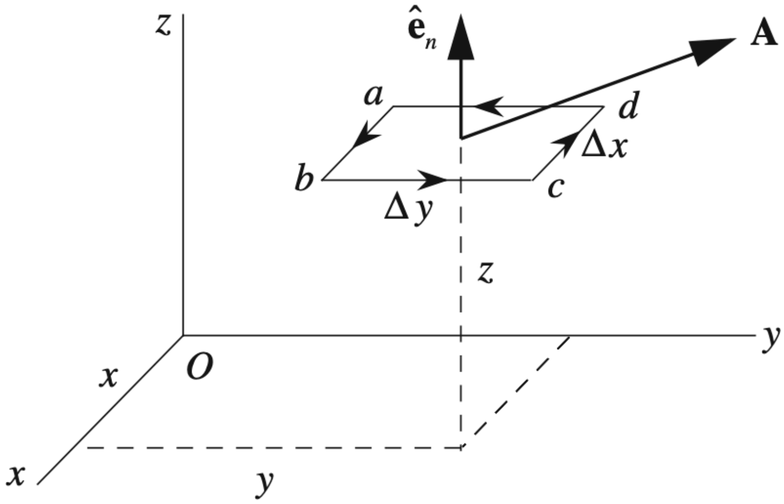
โดยวงกลมตรงกลางแสดงถึง_____________และ C แสดงถึง____________

ในลักษณะเดียวกันกับตอนที่เราพูดถึงฟลักซ์ในพื้นผิวปิด เรานิยามปริมาตรที่ล้อมรอบด้วยผิวปิดได้ ในกรณีของเส้นปิดเรามีวิธีนิยามพื้นที่ที่มีขอบเขตเป็นวงปิดนี้ได้หลายแบบดังภาพ



อย่างไรก็ตามทิศตั้งฉากกับพื้นผิวนี้เราจะใช้ข้อตกลงตามกฎมือขวานั่นคือถ้าเราใช้มือขวาไปตามทิศทางของ_____________นิ้ว_____________จะชี้เป็นทิศทางของ $\hat{e}_n$

เราจะเริ่มพิจารณาอินทิกรัลตามเส้นของพื้นที่เล็กๆ ซึ่งจุดกึ่งกลางอยู่ที่พิกัด (x, y, z) โดยให้การวนรอบเป็นสี่เหลี่ยม และเราเลือกให้พื้นที่นี้มีทิศไปทางแกน z ดังภาพ (พื้นที่อยู่ในระนาบเดียวกับระนาบ xy) และพื้นที่นี้มีความกว้าง Δx ความยาว Δy



อินทิกรัลตามเส้นของวงปิดจึงมีค่าเท่ากับ

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_c^d \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_d^a \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ซึ่งเราจะเริ่มพิจารณาส่วน $a \to b$ ก่อน

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{A} \cdot \hat{e}_x dx = \int_a^b A_x dx$$

ซึ่งในช่วงสั้นๆ Δx เราจะได้ค่าของสนามเวกเตอร์คงที่และอินทิกรัลส่วนนี้เป็น

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{r} \approx A_x \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \Delta x$$

โดยพิกัด $(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$ เกิดจากการที่เราพิจารณาที่จุดกึ่งกลางของด้าน ซึ่งเมื่อใช้ differential เราจะประมาณเวกเตอร์ที่ตำแหน่งนี้ได้เป็น

$$A_x \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) = A_x(x, y, z) + dA_x \approx A_x(x, y, z) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{r} \approx A_x(x, y, z)\Delta x - \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

ในทำนองเดียวกันส่วน $c \to d$ จะได้เป็น

$$\int_c^d \vec{A} \cdot d\vec{r} =$$

$$\int_c^d \vec{A} \cdot d\vec{r} \approx -A_x(x, y, z)\Delta x - \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

ดังนั้นเมื่อรวมทั้งสองด้านเข้าด้วยกันเราจะได้

$$\int_a^b \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_c^d \vec{A}\cdot d\vec{r} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta x\Delta y$$

อีกสองด้านเมื่อรวมกันจะได้

$$\int_b^c \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_d^a \vec{A}\cdot d\vec{r} \approx A_y\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)\Delta \mathrm{y} - A_y\left(x-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)\Delta \mathrm{y}$$

$$\int_b^c \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_d^a \vec{A}\cdot d\vec{r} = \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x\Delta y$$

เมื่อรวมทั้งสี่ด้านจะได้

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

สังเกตได้ว่าเราตีความปริมาณในวงเล็บได้จากครอสโปรดัคของ__________และ__________

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \det\begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

ซึ่งเราจะเห็นว่าในวงเล็บคือองค์ประกอบในแกน__________นั่นแปลว่า

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y = \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_z \Delta x\Delta y = \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\hat{e}_z\Delta a = \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\Delta\vec{a}$$

เราจะเรียกปริมาณ $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ว่าเคิร์ลของเวกเตอร์ $\vec{A}$ (curl of $\vec{A}$)

อย่างไรก็ตามปริมาณนี้ไม่ขึ้นกับระบบพิกัดและเราจะนิยามมันผ่านทางนิยามอินทิกรัลวงปิดต่อหน่วยพื้นที่

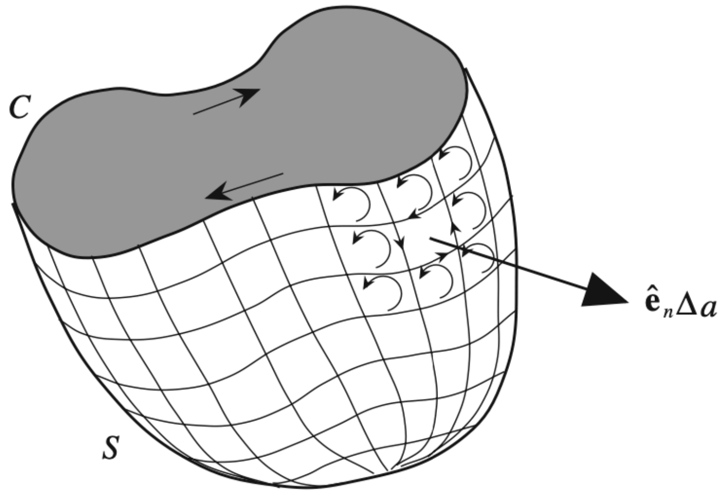
$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{e}_n \equiv \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{r}}{\Delta a}$$

โดยเวกเตอร์________คือทิศทางตาม________________

ข้อสังเกตคือเราจะใช้นิยามการทำครอสโปรดัคของเคิร์ลในกรณีที่เป็นพิกัดคาร์ทีเซียนเท่านั้น ในกรณีทั่วไปเราต้องมองเป็นอินทิกรัลของวงปิดต่อหน่วยพื้นที่ตามนิยามด้านบน

เมื่อขยายพื้นที่ให้ใหญ่ขึ้นเราสามารถทำการรวมเป็นอินทิกรัลได้เพราะพื้นที่ที่ติดกันอินทิกรัลตามเส้นของด้านที่ซ้อนทับกันหักล้างกัน

นั่นคืออินทิกรัลวงปิด C เกิดจากการรวมกันของอินทิกรัลวงปิดย่อย C_i



$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \sum_i^N \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i^N (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i \cdot \Delta\vec{a}_i$$

เมื่อทำให้พื้นที่ย่อยนี้มีจำนวนมากเป็นอนันต์เราจะได้การอินทิเกรตพื้นที่

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \lim_{N \to \infty} \sum_i^N (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i \cdot \Delta\vec{a}_i$$

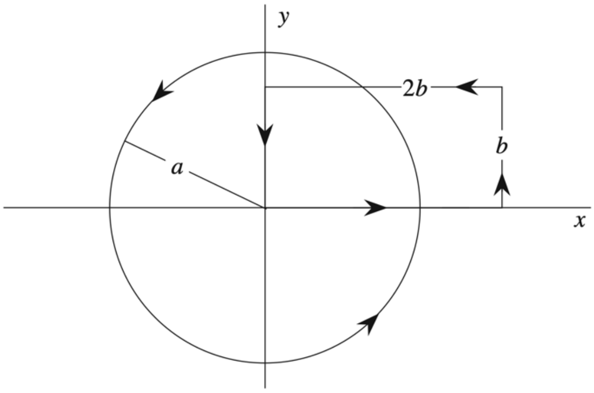
<u>ทฤษฎีบทของสโตกส์</u>

อินทิกรัลตามเส้นของสนามเวกเตอร์รอบวงปิด C จะมีค่าเท่ากับอินทิกรัลพื้นผิวของเคิร์ลของสนามเวกเตอร์บนผิวที่มีขอบเขตเป็นวงปิด C

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a}$$

ตัวอย่าง จงตรวจสอบทฤษฎีบทของสโตกส์ของสนามเวกเตอร์

$$\vec{A}(x,y) = x^2y\hat{e}_x + xy^2\hat{e}_y$$



1) รอบวงกลมรัศมี a

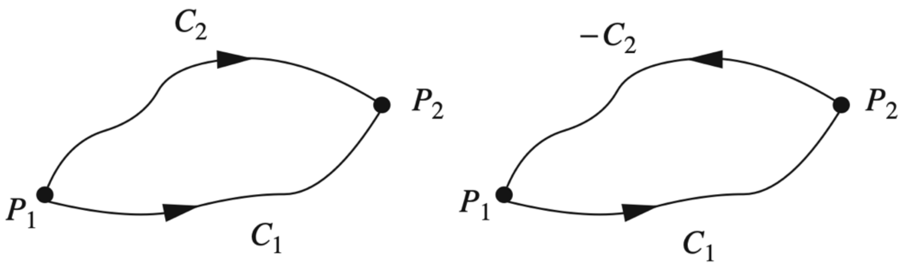
2) รอบกรอบสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง b ยาว $2b$

3.11) กฎการอนุรักษ์และสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ (Conservation law and Conservative vector fields)

สนามเวกเตอร์ชนิดหนึ่งที่สำคัญคือสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ (Conservative vector fields) ซึ่งเป็นหลักการที่สำคัญทางฟิสิกส์

สนามเวกเตอร์อนุรักษ์คือคือสนามเวกเตอร์ซึ่งอินทิกรัลตามเส้นปิดมีค่าเท่ากับศูนย์ทุกเส้นทางปิด

พิจารณาสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ $\vec{A}$ และคิดถึงเส้นทางจากจุด P_1 ถึงจุด P_2 สองเส้นคือ C_1 และ C_2 ดังนั้นถ้าเราสลับขอบเขตของเส้น C_2 เราจะเขียนเส้นนี้เป็นเส้น____________ดังภาพ



นั่นคืออินทิกรัลบน C_1 และต่อด้วย $-C_2$ เป็นเส้นทางปิด ดังนั้น

$$\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$$

เพราะ $\vec{A}$ เป็น________________________

ดังนั้นเมื่อเรากลับขอบเขตอีกครั้งเราจะได้

$$\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$$

นี่แปลว่า

$$\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

อินทิกรัลตามเส้นของสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ไม่ขึ้นกับเส้นทางเพราะเราสามารถเลือก________________________

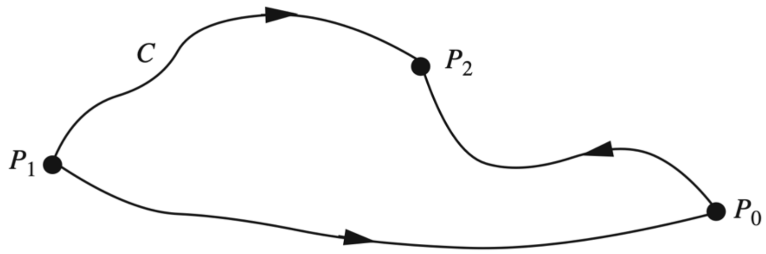
อินทิกรัลตามเส้นของสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ไม่ขึ้นกับเส้นทาง

และเนื่องจากมันไม่ขึ้นกับเส้นทางเราจะนิยามเส้นทางจาก $P_0 \rightarrow P_1$ เป็นฟังก์ชันศักย์ (Potential function)

$$\boxed{\Phi(x, y, z) \equiv -\int_{P_0}^{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{r}}$$

โดย (x, y, z) เป็นพิกัดของตำแหน่ง P_1 และเราพิจารณาตำแหน่ง P_0 เป็นตำแหน่งอ้างอิง (เครื่องหมายลบเป็นข้อตกลงที่เรามักใช้กัน)

เมื่อเราเลือกตำแหน่งอ้างอิงของฟังก์ชันศักย์แล้วเราสามารถคำนวณหาอินทิกรัลตามเส้นจากจุด P_1 ถึงจุด P_2 ใดๆได้โดยการเลือกเส้นทางให้ผ่านจุดอ้างอิง P_0 ดังภาพ



$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \Phi(x_1, y_1, z_1) - \Phi(x_2, y_2, z_2)$$

หรือเขียนได้เป็น

$$\Phi(x_2, y_2, z_2) - \Phi(x_1, y_1, z_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ซึ่งคือความต่างศักย์ระหว่างสองจุด ซึ่งเมื่อพิจารณาจุดใกล้ๆกันซึ่งอยู่ห่างกันเป็นระยะ $d\vec{r}$ ความต่างศักย์เล็กๆนี้มีค่าเท่ากับ

$$d\Phi = -\vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับนิยามของเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = \left(\vec{\nabla}\Phi\right) \cdot d\vec{r}$$

เราจะได้ว่า

$$\boxed{\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi}$$

ซึ่งตรงกับสนามไฟฟ้าหรือสนามโน้มถ่วงที่เราได้เรียนไปแล้ว

และถ้าเราใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์ของเส้นทางปิดเราจะได้

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{a} = 0$$

และเนื่องจากเวกเตอร์ของพื้นที่สามารถเลือกได้อย่างอิสระ แปลว่าสนามเวกเตอร์อนุรักษ์จะมีค่าเคิร์ลเท่ากับศูนย์เสมอ

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0}$$

(ข้อควรระวังคือเวกเตอร์ที่มีเคิร์ลเท่ากับศูนย์ไม่จำเป็นต้องเป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์เสมอไป เงื่อนไขเพิ่มเติมคือสนามเวกเตอร์นี้ต้องมีลักษณะต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ทุกจุด)

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าสนามเวกเตอร์นี้เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์

$$\vec{A}(x, y) = \frac{ky}{x^2 + y^2}\hat{e}_x - \frac{kx}{x^2 + y^2}\hat{e}_y$$

ตัวอย่าง จงหาศักย์ของสนามเวกเตอร์นี้

$$\vec{A}(x, y, z) = (2xy + 3z^2)\hat{e}_x + (x^2 + 4yz)\hat{e}_y + (2y^2 + 6xz)\hat{e}_z$$

3.12) อนุพันธ์อันดับสองของสนามเวกเตอร์ (Double del operation)

จากการที่เราสามารถพิจารณาตัวกระทำการเดลหรือนาบลา $\vec{\nabla}$ เป็นเวกเตอร์

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

เราทราบทันทีจากสมบัติการทำครอสโปรดัคว่าเคิร์ลของเกรเดียนต์เท่ากับศูนย์

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0}$$

เพราะ______________________________________

ซึ่งจากสมบัติของสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ เราจะได้ว่าถ้าสนามเวกเตอร์เขียนได้ในรูปของฟังก์ชันศักย์

$$\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi$$

แล้วเราจะได้

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla}\Phi\right) = 0$$

ซึ่งตรงกับสมบัติของสนามเวกเตอร์อนุรักษ์

ตัวอย่าง ในฟิสิกส์เรารู้จักสมการนี้ในรูปของแรงอนุรักษ์และพลังงานศักย์ หรือสนามและศักย์ของแรง ถ้าแรง $\vec{F}(x,y,z)$ เป็นแรงที่ขึ้นกับพิกัดแล้วแรงนี้จะเป็นแรงอนุรักษ์ก็ต่อเมื่อเราสามารถเขียนแรงในรูปของเกรเดียนต์ของพลังงานศักย์

$$\vec{F}(x,y,z) = -\vec{\nabla}U(x,y,z)$$

จากสมบัติด้านบนเราจะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

และอินทิกรัลตามเส้นของแรงนี้ (ในฟิสิกส์เราเรียกว่า____________) ไม่ขึ้นกับเส้นทางและเขียนได้จากผลต่างของพลังงานศักย์ที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -[U(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1)] = U(x_1,y_1,z_1) - U(x_2,y_2,z_2)$$

ซึ่งเมื่อใช้ร่วมกับสมการการเคลื่อนที่ของนิวตันเราจะได้สมการอนุรักษ์พลังงาน

ในทำนองเดียวกันสนามไฟฟ้าเกิดจากแรงที่ขึ้นกับตำแหน่งและมีฟังก์ชันของพลังงานศักย์ไฟฟ้า ดังนั้นเราสามารถเขียนสนามไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าจากสมการเดิมและหารด้วยประจุทดสอบ

$$\frac{\vec{F}_q(x,y,z)}{q} = -\frac{\vec{\nabla}U(x,y,z)}{q}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}V(x,y,z)$$

ซึ่งคือความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้าที่เราคุ้นเคยกันดี

อีกเอกลักษณ์หนึ่งที่สำคัญคือไดเวอร์เจนซ์ของเคิร์ลเท่ากับศูนย์

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0}$$

ที่ปริมาณนี้มีค่าเท่ากับศูนย์เพราะ____________________________________

ตัวอย่าง สนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ มีศักย์เวกเตอร์ $\vec{A}$ นิยามได้จาก

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

ซึ่งเราพบว่า

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0$$

สมการนี้คือกฎของเกาส์ของสนามแม่เหล็ก ซึ่งสอดคล้องกับความจริงที่ว่าแม่เหล็กขั้วเดียวไม่มีจริง

3.13) ลาปลาเซียน (Laplacian)

ไดเวอร์เจนซ์ของเกรเดียนต์เป็นตัวกระทำการที่สำคัญอีกตัวหนึ่งซึ่งเราพบได้บ่อย

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

เราเรียกตัวกระทำการนี้ว่าลาปลาเซียน (Laplacian) ซึ่งเราพบได้ในวิชาแม่เหล็กไฟฟ้า คลื่น และกลศาสตร์ควอนตัม สมการที่สำคัญเกี่ยวกับแม่เหล็กไฟฟ้าและแรงโน้มถ่วงคือ สมการปัวซอง (Poisson equation)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\Phi\right) = 4\pi k\,\rho_Q$$

$$\nabla^2\Phi = -4\pi k\,\rho_Q$$

ซึ่งค่า $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ ในกรณีของแม่เหล็กไฟฟ้า และ $k = -G$ ในกรณีของแรงโน้มถ่วง

ซึ่งสมการนี้คือสมการอนุพันธ์ซึ่งขึ้นกับศักย์ในแต่ละตำแหน่งในพิกัด ในการพิจารณาสมการนี้หลายๆครั้งเรามักจะสนใจในที่ว่างซึ่งไม่มีความหนาแน่นประจุ/มวลอยู่ สมการที่ฝั่งขวามีค่าเท่ากับศูนย์เราเรียกว่าสมการลาปลาซ

$$\nabla^2\Phi = 0$$

ตัวอย่าง ในบทที่แล้วเราพบว่า

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

เราสามารถหา

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

ซึ่งคือความสัมพันธ์ระหว่างลาปลาเซียนและเดลต้าฟังก์ชัน

3.14) สมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell’s equations)

ในช่วงปีค.ศ.1850 ความรู้เกี่ยวกับแม่เหล็กไฟฟ้าถูกพัฒนาไปจนมีกฎและสมการทั้งหมด 4 สมการที่มีความสำคัญคือ

กฎของเกาส์ของสนามไฟฟ้า

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

กฎของเกาส์ของสนามแม่เหล็ก

$$\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

กฎการเหนี่ยวนำของฟาราเดย์

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

กฎของแอมแปร์

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

ซึ่งเมื่อแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เราจะได้

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

ที่มาของกฎของเกาส์ทั้งสองข้อเราได้แสดงให้ดูไปแล้วในส่วนก่อนหน้า ในขณะที่กฎของฟาราเดย์และกฎของแอมแปร์สามารถใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์เพื่อแสดงได้ดังนี้

อย่างไรก็ตามสมการทั้งสี่นี้ยังไม่สมบูรณ์ เจมส์ แมกซ์เวลล์ (James C. Maxwell 1831-1879) ได้สังเกตสมการที่สองและสามนั้นสอดคล้องกัน แต่สมการที่หนึ่งและสี่นั้นมีบางอย่างขัดแย้งกัน เขาพบว่าถ้าเราทำไดเวอร์เจนซ์ของสมการที่สี่

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

ซึ่ง $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ ขัดแย้งโดยตรงกับ $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ซึ่งคือ______________________________

โดยถ้าเราพิจารณาสมการที่หนึ่งเราจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ซึ่งสิ่งนี้พยายามบอกเราว่าเพื่อให้มี $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ออกมาจากสมการที่สี่เราควรต้องมีพจน์ของ $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ด้วย นั่นคือสมการที่สี่เราจะเปลี่ยนเป็น

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

ซึ่งเมื่อหาไดเวอร์เจนซ์เราจะได้

ผลงานของแมกซ์เวลล์เป็นครั้งแรกในประวัติศาสตร์ของวงการวิทยาศาสตร์ที่เราได้กฎและสมการออกมาจากการให้เหตุผลเพียงอย่างเดียว (ในยุคก่อนหน้ากฎและสมการมาจากการทดลองเท่านั้น) ซึ่งจุดนี้เป็นรากฐานที่สำคัญในวิทยาศาสตร์สมัยใหม่ในเวลาต่อมา

ทำให้เราได้สมการแมกซ์เวลล์สี่สมการ

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{gathered}}$$

อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าแมกซ์เวลล์จะเพียง“แค่”เติมเทอมเข้าไปในสมการ แต่ผลลัพธ์ของเทอมนี้ทำให้แมกซ์เวลล์ทำนายการมีอยู่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งปฏิวัติวงการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจนมาถึงปัจจุบัน

ตัวอย่าง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

จงใช้เอกลักษณ์

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E}$$

เพื่อแสดงว่าสนามไฟฟ้าสอดคล้องกับสมการคลื่น

ตัวอย่าง การแปลงเกจของศักย์ไฟฟ้า Φ และศักย์เวกเตอร์ $\vec{A}$

จงแสดงว่าเรามีอิสระในการเลือกค่าศักย์ไฟฟ้าและศักย์เวกเตอร์ นั่นคือการเปลี่ยนศักย์เหล่านี้ด้วยฟังก์ชัน $\theta(\vec{r}, t)$

$$\vec{A} \to \vec{A}' + \vec{\nabla}\theta(\vec{r}, t)$$

$$\Phi \to \Phi' = \Phi + \frac{\partial \theta(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

ไม่เปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

ตัวอย่าง สมการคลื่นของศักย์ไฟฟ้า Φ และศักย์เวกเตอร์ $\vec{A}$
จงแสดงว่าถ้าเราเลือกเกจให้สอดคล้องกับสมการ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$

เราจะสามารถเขียนสมการคลื่นของศักย์ไฟฟ้าและศักย์แม่เหล็กได้เป็น

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3.15 ตัวกระทำการเดลหรือนาบลาในระบบพิกัดอื่น

ตัวกระทำการนาบลาที่เราได้ศึกษาในเรื่องเกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ และเคิร์ลนั้น เราได้ศึกษาในระบบพิกัดคาทีเซียนไปแล้ว การขยายผลของตัวกระทำการเหล่านี้ในพิกัดอื่นก็สามารถทำได้โดยการเขียนในรูปทั่วไปแล้วอ่านค่านั้นๆจากระบบพิกัดที่เราสนใจ

พิจารณาเส้นโค้งไพรมารีของระบบพิกัดใดๆ (q_1, q_2, q_3) เราเขียนได้เป็น

$$dl_1 = h_1(q_1, q_2, q_3)dq_1 \qquad dl_2 = h_1(q_1, q_2, q_3)dq_2 \qquad dl_3 = h_1(q_1, q_2, q_3)dq_3$$

โดย h_1, h_2, h_3 เป็นฟังก์ชันของพิกัด (q_1, q_2, q_3) ซึ่งมีค่าสำหรับพิกัดต่างๆดังตารางนี้

พิกัดใดๆ	คาร์ทีเซียน	ทรงกลม	ทรงกระบอก
q_1	x	r	ρ
q_2	y	θ	ϕ
q_3	z	ϕ	z
h_1	1	1	1
h_2	1	r	ρ
h_3	1	$r\sin\theta$	1

สำหรับเวกเตอร์การกระจัดเล็กๆ (line element) ในระบบพิกัดใดๆเราเขียนเป็น

$$\Delta\vec{r} \approx h_1\Delta q_1\hat{e}_1 + h_2\Delta q_2\hat{e}_2 + h_3\Delta q_3\hat{e}_3$$

ซึ่งเมื่อเราให้พิกัด q_2, q_3 คงที่เราจะได้

$$\hat{e}_1 \approx \frac{1}{h_1}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta q_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}$$

ซึ่งในพิกัดอื่นเราจะได้

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2,3$$

ตัวอย่าง จงหา $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ ในรูปของ $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$

เริ่มจาก

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = r sin\theta cos\phi \hat{e}_x + r sin\theta sin\phi \hat{e}_y + r cos\theta \hat{e}_z$$

<u>เกรเดียนต์ในพิกัดทั่วไป</u>

เพื่อที่จะหาเกรเดียนต์เราเริ่มจากดิฟเฟอเรนเชียลของ $f(q_1, q_2, q_3)$ ในพิกัดใดๆ และการกระจัดเล็กๆ

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} dq_3$$

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$$

เมื่อเทียบกับความหมายของเกรเดียนต์

$$df = (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla} f)_1 h_1 dq_1 + (\vec{\nabla} f)_2 h_2 dq_2 + (\vec{\nabla} f)_3 h_3 dq_3$$

เราจะได้

$$(\vec{\nabla} f)_1 h_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad (\vec{\nabla} f)_2 h_2 = \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad (\vec{\nabla} f)_3 h_3 = \frac{\partial f}{\partial q_3}$$

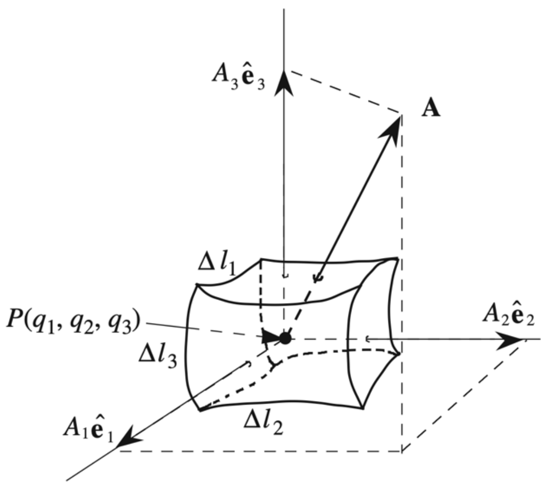
ดังนั้นเกรเดียนต์ของระบบพิกัดใดๆคือ

$$\vec{\nabla} f = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3}$$

ตัวอย่าง จงเขียนเกรเดียนต์ของระบบพิกัดทรงกลมและทรงกระบอก

ไดเวอร์เจนซ์ในพิกัดทั่วไป

เพื่อหาไดเวอร์เจนซ์ในพิกัดทั่วไป เราพิจารณากล่องที่เกิดจากเส้นโค้ง primary สามทิศทางดังภาพ



ถ้าให้สนามเวกเตอร์คือ

$$\vec{A}(q_1, q_2, q_3) = A_1(q_1, q_2, q_3)\ \hat{e}_1 + A_2(q_1, q_2, q_3)\ \hat{e}_2 + A_3(q_1, q_2, q_3)\ \hat{e}_3$$

ฟลักซ์ด้านหน้ามีค่าเท่ากับ

$$\Delta\phi_f = \vec{A}\cdot\hat{e}_1\Delta a_f = A_1\Delta l_{2f}\Delta l_{3f}$$

$$= A_1\left(q_1+\frac{\Delta q_1}{2},q_2,q_3\right)\times h_2\left(q_1+\frac{\Delta q_1}{2},q_2,q_3\right)\Delta q_2\times h_2\left(q_1+\frac{\Delta q_1}{2},q_2,q_3\right)\Delta q_2$$

$$\Delta\phi_f = \left\{A_1h_2h_3+\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1)\right\}\frac{\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3}{2}$$

และฟลักซ์ด้านหลังมีค่าเท่ากับ

$$\Delta\phi_b = -\left\{A_1h_2h_3-\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1)\right\}\frac{\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3}{2}$$

ดังนั้นฟลักซ์รวมสองด้านคือ

$$\Delta\phi_f+\Delta\phi_b = \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1)\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3$$

เช่นเดียวกันฟลักซ์รวมของด้านข้างคือ

$$\Delta\phi_l+\Delta\phi_r = \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3A_2)\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3$$

ฟลักซ์รวมของด้านบนล่างคือ

$$\Delta\phi_t+\Delta\phi_b = \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2A_3)\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3$$

เมื่อใช้ปริมาตรเล็กๆ

$$\Delta V = \Delta l_1 \Delta l_2 \Delta l_3 = h_1 h_2 h_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

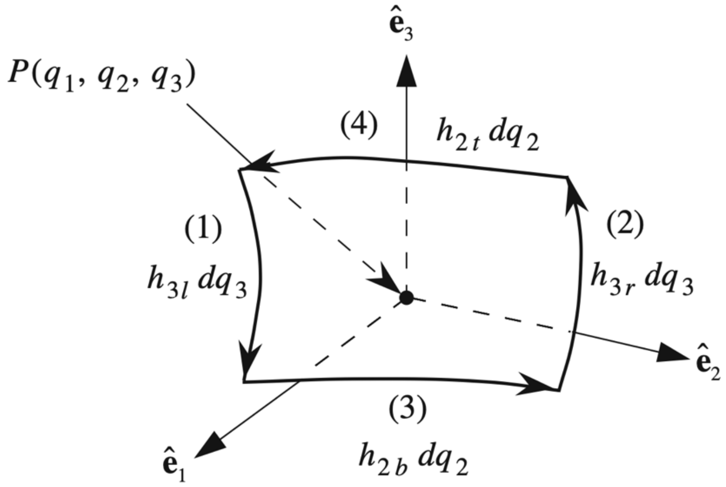
เราจะได้

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta \mathrm{V} \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_3) \right\}}$$

ตัวอย่าง จงเขียนเกรเดียนต์ในพิกัดทรงกลมและทรงกระบอก

เคิร์ลในพิกัดทั่วไป

เพื่อที่จะคำนวณเคิร์ลในพิกัดทั่วไปเราพิจารณาอินทิกรัลตามเส้นของวงปิดซึ่งมีทิศทางตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\hat{e}_1$ ดังภาพ



เราพบว่าอินทิเกรตตามเส้นของเส้นทาง 1 คือ

$$\int_1 \vec{A}\cdot d\vec{r} \approx \vec{A}\cdot(-\hat{e}_3 \Delta l_l) = -A_3\left(q_1, q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_3\right) h\left(q_1, q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_3\right)\Delta q_3$$

$$\int_1 \vec{A}\cdot d\vec{r} \approx -A_3 h_3 \Delta q_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 A_3)\frac{\Delta q_2}{2}\ \Delta q_3$$

เส้นทาง 2, 3, 4 คือ

$$\int_2 \vec{A}\cdot d\vec{r} \approx A_3 h_3 \Delta q_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 A_3)\frac{\Delta q_2}{2}\ \Delta q_3$$

$$\int_3 \vec{A}\cdot d\vec{r} \approx A_2 h_2 \Delta q_2 - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 A_2)\frac{\Delta q_3}{2}\ \Delta q_2$$

$$\int_4 \vec{A}\cdot d\vec{r} \approx -A_2 h_2 \Delta q_2 - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 A_2)\frac{\Delta q_3}{2}\ \Delta q_2$$

เมื่อรวมทั้งสี่เส้นเราจะได้อินทิกรัลรอบวงปิด

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} \approx \left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 A_2)\right\}\Delta q_2 \Delta q_3$$

เมื่อใช้พื้นที่

$$\Delta a = \Delta l_2 \Delta l_3 = h_2 h_3 \Delta q_2 \Delta q_3$$

เราได้

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\hat{e}_1 \equiv \lim_{\Delta a\to 0}\frac{\oint \vec{A}\cdot d\vec{r}}{\Delta a} = \frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2A_2)\right\}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\hat{e}_2 = \frac{1}{h_1h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3A_3)\right\}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\hat{e}_3 = \frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1A_1)\right\}$$

ซึ่งเมื่อทำในวงปิดทิศทางอื่นเราจะได้รูปแบบคล้ายเดิม ซึ่งเมื่อรวมกันเป็นเวกเตอร์เราสามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} \hat{e}_1h_1 & \hat{e}_2h_2 & \hat{e}_3h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง จงเขียนเคิร์ลของเวกเตอร์ในพิกัดทรงกลมและทรงกระบอก

ตัวอย่าง จงแสดงให้เห็นว่าตัวกระทำการลาปลาเซียนในพิกัดทั่วไปเขียนได้เป็น

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right\}$$

ตัวอย่าง จงหาลาปลาเซียนในพิกัดทรงกลมและพิกัดทรงกระบอก

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1) กำหนดให้สนามเวกเตอร์

$$\vec{A} = kx^2\hat{e}_z$$

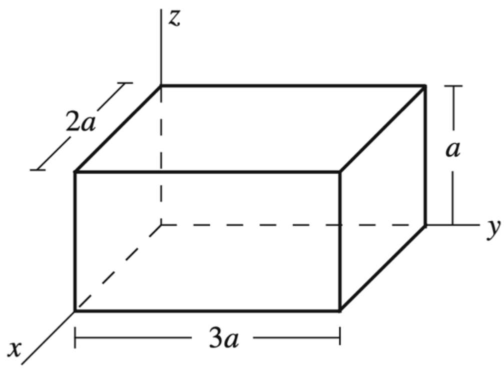
จงหาฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์นี้ผ่านครึ่งทรงกลมด้านบนรัศมี a ซึ่งอธิบายได้ด้วยสมการ

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

2) พิจารณา

$$\vec{A}(x, y, z) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

2.1) จงหาฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์ของกล่องปิดดังภาพ

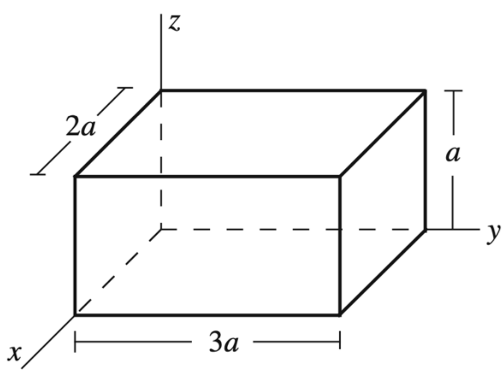


2.2) จงอินทิเกรตไดเวอร์เจนซ์ในปริมาตรของกล่องปิดนี้เพื่อแสดงทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์

3) พิจารณา

$$\vec{A}(x, y, z) = xy\hat{e}_x + yz\hat{e}_y + zx\hat{e}_z$$

3.1) จงหาฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์ของกล่องปิดดังภาพ



3.2) จงอินทิเกรตไดเวอร์เจนซ์ในปริมาตรของกล่องปิดนี้เพื่อแสดงทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์

4) สนามไฟฟ้าของประจุจำนวนหนึ่งมีศักย์ไฟฟ้าเขียนได้ตามฟังก์ชัน

$$\Phi(x,y,z) = \frac{V_0}{a^3} xyz\, e^{-\frac{(x+y+z)}{a}}$$

4.1) จงหาสนามไฟฟ้าของศักย์นี้

4.2) จงหาความหนาแน่นประจุ

4.3) จงหาประจุรวมของกล่องลูกบาศก์ที่มีความยาว a ที่มีจุดกึ่งกลางกล่องเป็นจุดกำเนิด

5) สนามไฟฟ้าของกลุ่มประจุเขียนได้ตามฟังก์ชัน

$$\vec{E} = \frac{E_0}{a^4} xyze^{-(x+y+z)/a}\vec{r}$$

จงหาความหนาแน่นประจุที่สร้างสนามไฟฟ้านี้

6) จงหาอินทิกรัลตามเส้นของสนามเวกเตอร์

$$\vec{A}(x,y,z) = x^2\hat{e}_x + y^2\hat{e}_y - z^2\hat{e}_z$$

ตามเส้นทาง

$$x = at^2, \qquad y = bt, \qquad z = c\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

จาก $t = [0,1]$

7) จงหาอินทิกรัลตามเส้นปิดของสนามเวกเตอร์

$$\vec{A}(x,y) = x\hat{e}_x + \frac{y^2}{b}\hat{e}_y$$

ตามเส้นทางปิดของวงรีซึ่งมีสมการเป็น

$$x = a\cos t\,, \qquad y = b\sin t$$

8) สนามเวกเตอร์

$$\vec{A}(x,y,z) = 2axe^{kz}\hat{e}_x + 2aye^{kz}\hat{e}_y + ka(x^2+y^2)e^{kz}\hat{e}_z$$

เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์หรือไม่ ถ้าใช่จงหาศักย์ของสนามนี้

9) จงใช้พิกัดทรงกลมเพื่อแสดงว่าสนามในรูปของ

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}$$

เป็นสนามอนุรักษ์เสมอ

Chapter 4: Series and Special Functions

ฟิสิกส์เป็นวิทยาศาสตร์ที่ใช้การประมาณเป็นหลัก ถึงแม้ว่ากฎทางฟิสิกส์จะเป็นค่าแท้จริง แต่อย่างไรก็ตามเมื่อเราประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ที่ซับซ้อน เราทำได้เพียงทำการประมาณเท่านั้น ซึ่งเราในบทนี้เราจะเรียนถึงการประมาณโดยใช้อนุกรมอนันต์ รวมไปถึงฟังก์ชันพิเศษที่พบบ่อยและเป็นประโยชน์ในวิชาฟิสิกส์

4.1) ลำดับและอนุกรม (Sequence and Series)

ลำดับอนันต์

ลำดับคือความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนธรรมชาติ (Natural number, N ซึ่งมีค่าคือ 0,1,2, ...) และจำนวนจริง นั่นหมายถึง

$$\{1,2,3,\dots,n,\dots\} \to \{s_1,s_2,s_3,\dots,s_n,\dots\}$$

ซึ่งทุกค่า $n \in N$ มีจำนวนจริง $s_n \in R$ ที่สอดคล้องอยู่เสมอ

ในกรณีทั่วไปเราอาจจะเขียนเป็นสูตรหรือความสัมพันธ์เช่น

$$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots\right\} \text{ หรือ } \left\{1,\frac{1}{2^3},\frac{1}{3^3},\frac{1}{4^3},\dots\right\}$$

เราจะเขียนเป็น

$$s_n = \qquad\qquad \text{หรือ } s_n =$$

หรือสำหรับลำดับที่เกิดจากการรวมกันเช่น

$$\left\{1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\dots\right\} \text{ หรือ } \left\{1,1+\frac{1}{2^3},1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3},1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3},\dots\right\}$$

เราจะได้

$$s_n = \qquad\qquad\qquad \text{หรือ } s_n =$$

การเขียน summation

ถึงแม้ว่าเราจะเจอเครื่องหมายผลรวม (summation) มาหลายครั้งแล้ว เราจะศึกษาสมบัติของมันเพิ่มเติม ทุกการทำ summation จะต้องมี dummy index ซึ่งต้องมีลิมิตล่างซึ่งเขียนใต้เครื่องหมายผลรวม และลิมิตบนซึ่งเขียนด้านบนของเครื่องหมายผลรวม ลิมิตล่างและบนไม่สามารถเปลี่ยนได้ แต่ dummy index สามารถเปลี่ยนได้ นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x^i =$$

เมื่อทำการบวกหรือลบ summation ซึ่งมีความยาวเท่ากันเราจะได้

$$\sum_{i=1}^{N} a_i + \sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)$$

เมื่อทำการคูณเราสามารถเขียนได้เป็น

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{M} b_j\right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} a_i b_j$$

สังเกตว่าการคูณกันนั้นต้องระวังไม่ให้ dummy index ซ้ำกันเพราะถ้าซ้ำกันความหมายจะไม่เหมือนเดิม เช่นถ้าใช้ซ้ำเราจะได้

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{M} b_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots \neq (a_1 + a_2 + \cdots)(b_1 + b_2 + \cdots)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $a_{ij} = a_{ji}$ (symmetric หรือมีสมมาตรภายใต้การสลับ index) และ $b_{ij} = -b_{ji}$ (antisymmetric หรือมีปฏิสมมาตรภายใต้การสลับ index) จงแสดงว่า

$$S = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} a_{ij} b_{ij} = 0$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series, $a_n = a_0 x^n$) มีค่าเท่ากับ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_0 x + a_0 x^2 + \ \ldots = \frac{1}{1-x}$$

เมื่อ $|x| < 1$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic series, $b_n = b_{n-1} + d$) มีค่าเท่ากับ

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{n}{2}(b_1 + b_n)$$

4.2) อนุกรมกำลัง (Power Series)

อนุกรมที่เขียนในรูปของเลขยกกำลังของตัวแปรไม่ทราบค่า x เราเรียกว่าอนุกรมกำลัง (Power series) โดยอนุกรมนี้พจน์ที่ n ใดๆเขียนได้เป็น $c_n(x-a)^n$ ซึ่ง c_n เป็นสัมประสิทธิ์ (coefficients) ที่มีค่าคงที่ (จำนวนจริง) อนุกรมกำลังนี้เราเขียนได้เป็น

$$\sum_{n}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

ในกรณีที่ $a = 0$ เราจะได้กรณีพิเศษคือ

$$\sum_{n}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

ในบางครั้งเราอาจจะใช้เลขชี้กำลังเป็นลบได้ แต่ในกรณีทั่วไปเรามักจะเริ่มจากเลขชี้กำลังเป็นศูนย์ก่อน

ถ้าเรามีอนุกรมกำลังสองอนุกรมซึ่งมีค่าเท่ากันสำหรับทุกค่าของ x และอนุกรมนี้มีค่าต่อเนื่อง นั่นคือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

เราจะได้ว่า

$$c_n = b_n\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

ตัวอย่าง จงเขียนปริมาณต่อไปนี้ในรูปของ summation

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)(d_1 x + d_2 x^2) =$$

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_N x^N)(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) =$$

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)\left(\frac{d_{-2}}{x^2} + \frac{d_{-1}}{x} + d_0 + d_1 x + d_2 x^2\right) =$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$\sum_{k=1}^{n} k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) z^k$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$x^2 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=2}^{n+2} a_{k-2} x^k$$

<u>4.3) อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)</u>

อนุกรมกำลังที่ค่าสัมประสิทธิ์เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งเป็นตัวแทนของอนุกรมนั้นเราจะเรียกว่า อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) สมมติให้ฟังก์ชันหนึ่งสามารถเขียนเป็นอนุกรมอนันต์ได้ นั่นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

ถ้าอนุกรมนี้ต่อเนื่องและหาค่าได้ทุกจุดเราจะพบว่า

$$f(a) = c_0$$

และเมื่อทำอนุพันธ์หนึ่งครั้งและแทนค่า $x = a$ เราจะได้

$$f'(a) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a} = \qquad\qquad = 1 \cdot c_1$$

เมื่อทำอนุพันธ์สองครั้งแล้วแทนค่า $x = a$ เราจะได้

$$f''(a) = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=a} = \qquad\qquad\qquad\qquad = 2 \cdot 1 \cdot c_2$$

เมื่อทำอนุพันธ์ n ครั้งแล้วแทนค่า $x = a$ เราจะได้

$$f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x=a} = \qquad\qquad\qquad\qquad = n! \cdot c_n$$

ดังนั้นอนุกรมเทย์เลอร์จะมีสัมประสิทธิ์เป็น

$$c_0 = f(a), \qquad c_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

นั่นคืออนุกรมเทย์เลอร์คือ

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

โดยปรกติแล้วเรามักใช้ค่า x และ a ที่ห่างกันไม่มาก เพื่อทำการประมาณนั่นคือเราใช้ $x - a = \Delta x$ เราจะได้

$$f(a+\Delta x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n$$

เนื่องจากเราใช้ค่า a เป็นค่าใดก็ได้ เรามักเขียนเป็น

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n$$

ซึ่งถ้าค่า Δx เล็กมาก พจน์ถัดไปมีค่าเล็กลงเสมอ นั่นคือเราจะคิดเป็นค่าประมาณ

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2$$

บางครั้งเราก็เขียนเป็น

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

เพื่อรวมเทอม________________________________

ในกรณีที่ค่าตั้งต้นคือ 0 เราจะเรียกอนุกรมนี้ว่าอนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin series)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชั่นต่อไปนี้

$$e^x, \cos(x), \sin(x), (1+x)^\alpha, ln(1+x)$$

ตัวอย่าง ฟังก์ชั่น Hyperbolic

$$\sinh x \equiv \sum_k^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh x \equiv \sum_k^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} = x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

จงแสดงว่า

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x, \frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x$$

4.4) อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

อนุกรมอีกประเภทคืออนุกรมของฟังก์ชัน

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

เช่น

$$f(x)=\ \sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln x)^k}{k+1}=1+\frac{\ln x}{2}+\frac{(\ln x)^2}{3}+\cdots$$

ในบรรดาอนุกรมฟังก์ชันต่างๆ อนุกรมฟูเรียร์เป็นอนุกรมที่มีการประยุกต์ใช้หลากหลายที่สุด สำหรับฟังก์ชันที่มีการซ้ำตัวเอง (periodic) บนช่วง (a,b) นั่นคือ

$$f(x+L)=f(x),\ \ L\equiv b-a$$

เราจะทำการกระจายฟังก์ชันนี้เป็นอนุกรมของฟังก์ชันที่มีการซ้ำตัวเองบนช่วงนี้ทั้งหมด นั่นคือฟังก์ชัน

$$\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),\ \ \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

เราจะพิจารณาอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right)$$

ซึ่งสังเกตได้ว่าเราแยกพจน์ที่มีค่า n=0 ออกมา เพื่อที่จะหาสัมประสิทธิ์ (a_0,a_n,b_n) เราจะใช้สมบัติการตั้งฉากกันของฟังก์ชัน sine cosine

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$\int_a^b \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx=\int_a^b \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx=\int_a^b \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx=0$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$\int_a^b \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & if\ m \neq n \\ \frac{L}{2} & if\ m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_a^b \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & if\ m \neq n \\ \frac{L}{2} & if\ m = n \neq 0 \end{cases}$$

เมื่อทำการอินทิเกรตฟังก์ชันนี้จาก a ถึง b เราจะได้

$$\int_a^b f(x)dx =$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)dx$$

ถ้าคูณฟังก์ชันนี้ด้วย $\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)$ แล้วอินทิเกรตจาก a ถึง b เราจะได้

$$\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)dx =$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์

$$a_m = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)dx$$

ในทำนองเดียวกันถ้าคูณฟังก์ชันนี้ด้วย $\sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)$ แล้วอินทิเกรตจาก a ถึง b เราจะได้

$$\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)dx =$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์

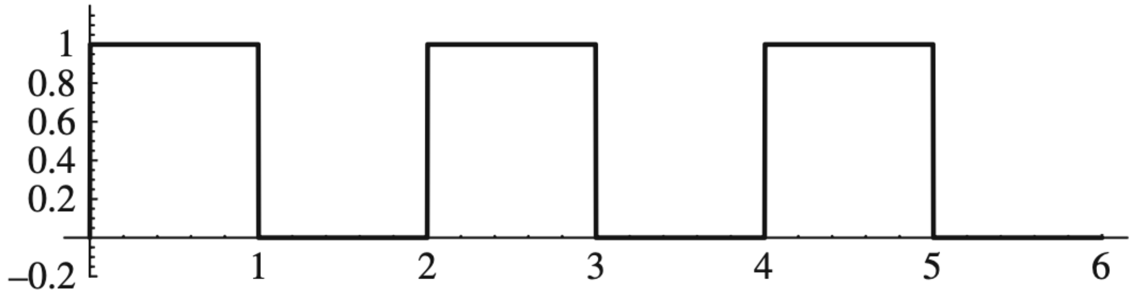
$$b_m = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)dx$$

เมื่อรวมสัมประสิทธิ์เหล่านี้เข้าด้วยกันในสมการของอนุกรมฟูเรียร์เราจะได้การกระจายฟูเรียร์ (Fourier series expansion)

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right) \\ a_0 = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)dx\,, a_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx\,, b_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx \end{gathered}}$$

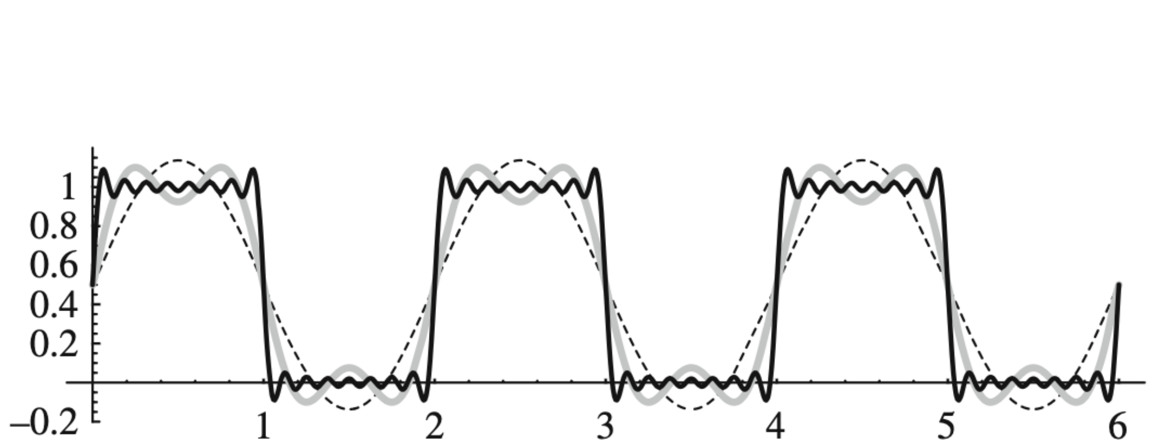
ตัวอย่าง ฟังก์ชันคลื่นสี่เหลี่ยม (square wave) ที่เขียนได้ด้วยฟังก์ชันซึ่งมีคาบเป็น $2T$

$$V(t) = \begin{cases} V_0, & if\ 0 \leq t < T \\ 0, & if\ T \leq t < 2T \end{cases}$$



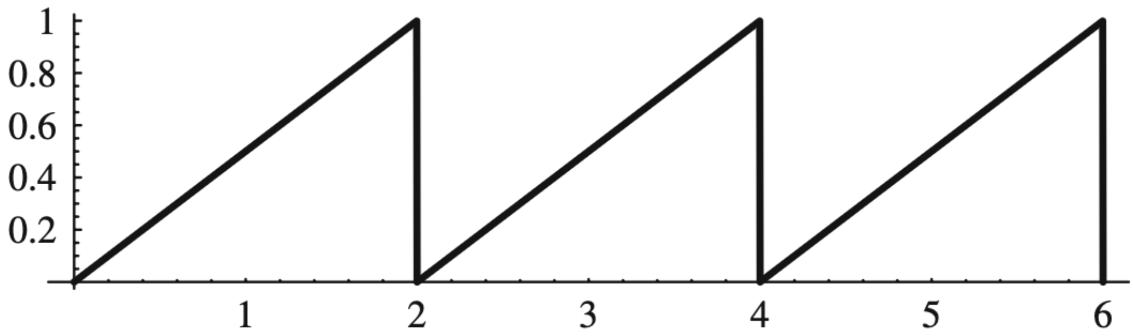
จงแสดงว่าการกระจายฟูเรียร์ของฟังก์ชันนี้มีค่าเท่ากับ

$$V(t) = \frac{V_0}{2}\left\{1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi t}{T}\right)\right\}$$



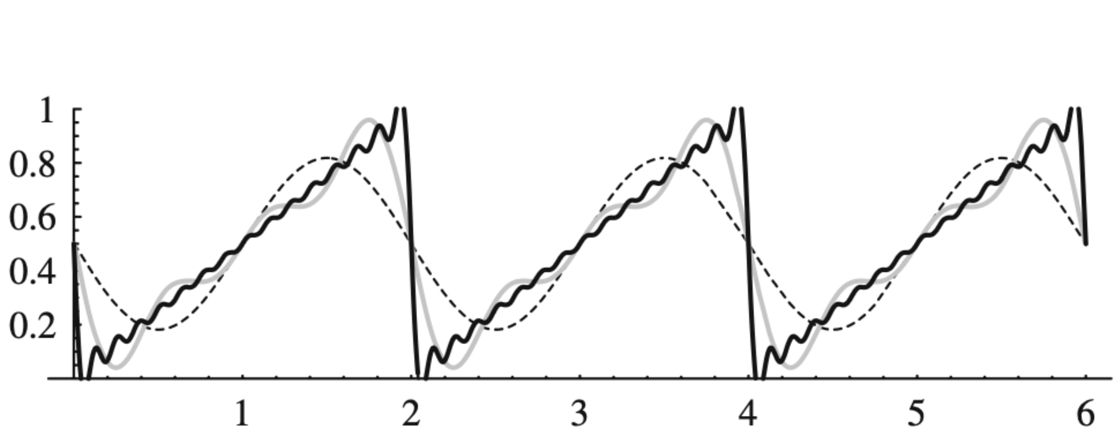
ตัวอย่าง ฟังก์ชันฟันเลื่อย (sawtooth) ซึ่งมีคาบเป็น T

$$V(t) = \frac{V_0 t}{T} \quad for\ 0 \le t < T$$



จงแสดงว่าการกระจายฟูเรียร์ของฟังก์ชันนี้มีค่าเท่ากับ

$$V(t) = \frac{V_0}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)\right\}$$



Chapter 4: Series and Special Functions

4.5) อนุกรมเทย์เลอร์ของหลายตัวแปร

ในกรณีทั่วไปเราสามารถเขียนฟังก์ชันสองตัวแปร $f(u,v)$ ในรูปของอนุกรมกำลังรอบจุด (u_0,v_0) ได้โดย

$$\begin{aligned} f(u,v) = a_{00} &+ a_{10}(u-u_0) + a_{01}(v-v_0) + a_{20}(u-u_0)^2 + a_{02}(v-v_0)^2 \\ &+ a_{11}(u-u_0)(v-v_0) + a_{30}(u-u_0)^3 + a_{21}(u-u_0)^2(v-v_0) \\ &+ a_{12}(u-u_0)(v-v_0)^2 + a_{03}(v-v_0)^3 + \cdots \end{aligned}$$

โดยค่าคงที่ a_{ij} ทำหน้าที่บอกกำลังของ $(u-u_0)$ และ $(v-v_0)$

เช่นเดียวกับการหาอนุกรมเทย์เลอร์ของตัวแปรเดียว เราสามารถทำอนุพันธ์เทียบกับ u และ v เพื่อได้ค่าคงที่ a_{ij} เหล่านี้

$$\frac{\partial}{\partial u} f(u_0,v_0) =$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(u_0,v_0) =$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} f(u_0,v_0) =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(u_0,v_0) =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} f(u_0,v_0) =$$

ดังนั้นเราจะเขียน

$$f(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\,(u-u_0)^i(v-v_0)^j$$

โดยที่

$$a_{ij} = \frac{1}{i!\,j!}\frac{\partial^j}{\partial v^j}\frac{\partial^i}{\partial u^i} f(u_0,v_0)$$

ตัวอย่าง จงหาการกระจายเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $e^x \sin y$

4.6) แกมม่าฟังก์ชั่น (Gamma function)

อินทิกรัลเป็นเครื่องมือที่ง่ายที่สุดในการเขียนฟังก์ชันใหม่ๆ ดังในตัวอย่างของบทก่อนที่เราเขียนอินทิกรัลเป็นฟังก์ชันของขอบเขต ในบทนี้เราจะมาเรียนรู้ฟังก์ชันพิเศษที่สำคัญซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปของอินทิกรัล

พิจารณาอินทิกรัล

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่าแกมม่าฟังก์ชัน (Gamma function)

ในการบ้านของบทก่อนเราได้แสดงให้ดูไปแล้วว่าฟังก์ชันนี้มีความเกี่ยวข้องกับแฟคทอเรียล (factorial) ในที่นี้เราจะแสดงให้ดูอีกวิธีหนึ่งนั่นคือการใช้ integration by part

ถ้าให้ $u = t^{x-1}$ และ $dv = e^{-t}dt$ เราจะได้

$$\Gamma(x) = uv - \int vdu$$

นั่นคือ

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

ซึ่งเป็น recurrence relation ถ้าเราพิจารณา x เป็นจำนวนเต็มบวก n เราจะได้

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdot(n-2)\cdots 1\cdot\Gamma(1)$$

ซึ่งถ้าเราใช้ข้อสังเกตที่ว่า $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

หรือ

$$\Gamma(n+1) = n!$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก

ในกรณีของ $n = 0$ เราพบว่า

$$\Gamma(0) = \lim_{x\to 1}\Gamma(x-1) = \lim_{x\to 1}\frac{\Gamma(x)}{(x-1)} \to \infty$$

ในกรณีของจำนวนเต็มลบ เราพบว่า

$$\Gamma(-1) = \lim_{x\to 0}\Gamma(x-1) = \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x)}{(x-1)} \to \frac{\Gamma(0)}{-1} \to \infty$$

นั่นแปลว่าแกมม่าฟังก์ชันของเลขจำนวนเต็มลบมีลิมิตเป็นอนันต์เสมอ

ตัวอย่าง จงแสดงว่าค่าของ Gaussian integral คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}$$

ตัวอย่าง จงคำนวณหา $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

4.7) เบต้าฟังก์ชั่น (Beta function)

ถ้าเราเอาแกมม่าฟังก์ชันสองตัวคูณกัน

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}ds$$

ถ้าเราใช้การเปลี่ยนตัวแปร $u \equiv t + s$ เราจะได้

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty du \int_0^u dt\ t^{x-1}(u-t)^{y-1}e^{-u}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนตัวแปรอีกครั้งโดยใช้ $t = uw$ และ $dt = udw$ (เราให้ u เป็นค่าคงที่ในการอินทิเกรต t) เราจะได้

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty du\ e^{-u}\ u^{x+y-1} \int_0^1 dw\ w^{x-1}(1-w)^{y-1}$$

เราจะนิยามเบต้าฟังก์ชัน (Beta function) จาก

$$B(x,y) \equiv \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 dt\ t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

4.8) ฟังก์ชันข้อผิดพลาด (Error Function)

เราได้แสดงไปก่อนหน้านี้แล้วว่า

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

ตัวอินทิแกรนด์นี้คือฟังก์ชันที่ใช้อธิบายการกระจายตัวแบบเกาส์ (Gaussian distribution) ซึ่งมีความสำคัญในการวิเคราะห์ทางสถิติ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนหรือความผิดพลาด (error analysis) ดังนั้นเราจะนิยามฟังก์ชันข้อผิดพลาดเป็น

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

โดยเราจะเห็นว่า $\mathrm{erf}(\infty) =$ ______________________

และฟังก์ชันนี้มีความหมายคือพื้นที่ใต้กราฟของการกระจายความน่าจะเป็นภายในช่วง -x ถึง x

4.9) ฟังก์ชั่นวงรี (Elliptic Functions)

หนึ่งในอินทิกรัลที่ทำได้ยากที่สุดคือการอินทิเกรตตามเส้นรอบวงของวงรี

พิจารณาเส้นรอบวงรีซึ่งเขียนได้ด้วย line element

$$d\vec{l} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y$$

โดยที่ $x(\theta) = a\cos(\theta)$ และ $y(\theta) = b\sin(\theta)$

เราจะได้ความยาวของ line element เป็น

$$\left|d\vec{l}\right| = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

ดังนั้นความยาวตามเส้นรอบวงของวงรีจึงเขียนเป็นอินทิกรัลได้เป็น

$$L(\phi) = b\int_0^{\phi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

โดยที่ k = ______________

เราไม่สามารถใช้เทคนิคใดๆกับอินทิกรัลนี้เพื่อหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) ได้เลย เราจึงนิยามฟังก์ชัน

$$E(\phi, k) \equiv \int_0^{\phi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

ว่าเป็นฟังก์ชันอินทิกรัลวงรีชนิดที่สอง (Elliptic integral of the second kind)

และนิยามฟังก์ชันอินทิกรัลวงรีชนิดที่หนึ่ง (Elliptic integral of the first kind) ว่า

$$F(\phi, k) \equiv \int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}$$

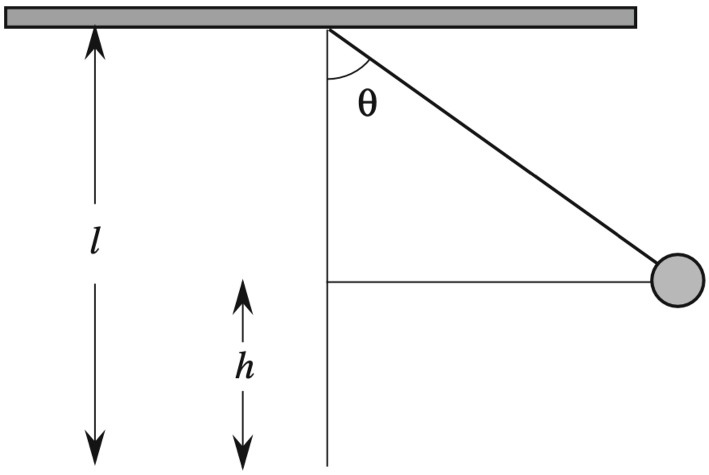
และเราจะนิยามอินทิกรัลวงรีสมบูรณ์ชนิดที่หนึ่งและสอง (complete elliptic integral of the first and second kind) ว่า

$$K(k) \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}$$

$$E(k) \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

ตัวอย่าง จงใช้ทฤษฎีงาน-พลังงาน เพื่อแสดงว่าการสั่นของลูกตุ้มที่เริ่มแกว่งจากมุมใดๆ θ_m มีรูปเป็น

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



ตัวอย่าง จากสถานการณ์ในข้อที่แล้ว จงแสดงว่าคาบของการแกว่งนี้คือ

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\theta_m}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\ K\left(\sin\frac{\theta_m}{2}\right)$$

ตัวอย่าง จงใช้การกระจายเทย์เลอร์ของฟังก์ชันอินทิกรัลวงรีสมบูรณ์ชนิดที่หนึ่งเพื่อแสดงว่า

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{9}{64}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \cdots\right)$$

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1). จงเขียน 5 เทอมแรกของอนุกรมต่อไปนี้

1.1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 4\cdots 2n}$

1.2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

1.3). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}(n+1)^2}{(x-n)^n}$

1.4). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$

2). จงหาอนุกรมเทย์เลอร์(หรือแมคคลอริน)รอบ x = 0 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1). $\frac{\sin(x)}{x}$

2.2). $e^{-x}\sin(x)$

2.3). $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

2.3). $e^{x}(x-\ln(1+x))$

3). พลังงานศักย์โน้มถ่วงที่ผิวโลก

3.1) จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของพลังงานศักย์โน้มถ่วงที่ผิวโลก

$$V(h) = -\frac{GMm}{R+h} + C$$

เมื่อ h คือความสูงจากผิวโลก R คือรัศมีโลก C คือค่าคงที่จากการอินทิเกรต

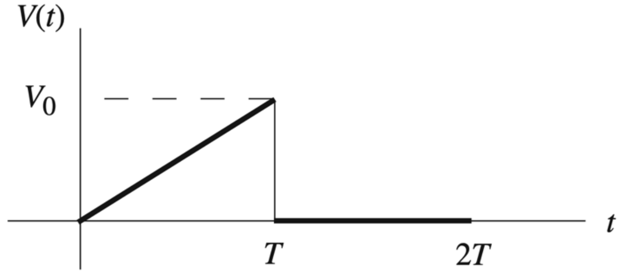
3.2) ถ้าพิจารณาให้ $\frac{h}{R} \ll 1$ จงประมาณพลังงานศักย์โน้มถ่วงให้ถึงเทอม $O\left(\left(\frac{h}{R}\right)^2\right)$

4). พลังงานของจุดอนุภาคในสัมพัทธภาพพิเศษเขียนได้เป็น

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของพลังงานในรูปของตัวแปร $\frac{v}{c}$ และพิจารณาในลิมิตที่ $\frac{v}{c} \ll 1$

5). พิจารณาฟังก์ชันที่ซ้ำตัวเองเป็นคาบทุกๆเวลา $2T$ ดังภาพ



5.1). จงเขียนฟังก์ชันนี้ในช่วง $0 \leq t \leq 2T$

5.2). ถ้าให้ฟังก์ชันนี้ซ้ำตัวเองเป็นคาบเวลา $2T$ จงกระจายอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันนี้

6). พิจารณาฟังก์ชันซึ่งซ้ำตัวเองทุกๆ T

$$V(t) = V_0 \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right), \quad 0 \leq t \leq T$$

6.1) จงวาดกราฟของฟังก์ชันนี้จากช่วง $t = 0$ ถึง $t = 3T$ (ระวังว่าไม่ใช่กราฟ sine ปรกติ)

6.2) จงกระจายอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันนี้

7). สปริงที่ไม่เป็นไปตามกฎของฮุกส์

พิจารณาสปริงที่มีพลังงานศักย์เป็น

$$V(x) = kx^p$$

โดยค่า $p > 0$ และค่า $k > 0$ เป็นค่านิจของสปริง

7.1) ถ้าดึงมวล m ให้ยืดออกจากระยะปรกติเป็นระยะ x_0 จงแสดงว่าเราสามารถใช้สมการพลังงานเพื่อหาคาบได้เป็น

$$T = \sqrt{\frac{m}{2kx_0^p}} \int_0^{x_0} \left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^p\right]^{-1/2} dx$$

7.2) ถ้าเปลี่ยนตัวแปร $u = \left(\frac{x}{x_0}\right)^p$ จงแสดงว่าเราสามารถเขียนคาบนี้ในรูปของเบต้าหรือแกมม่าฟังก์ชันได้เป็น

$$T = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{m}{2kx_0^{p-2}}} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{m\pi}{2kx_0^{p-2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right)}$$

Chapter 5: Differential Equations

หลังจากที่เราได้เรียนการกระจายอนุกรมอนันต์ในบทที่แล้วไปแล้ว เราจะศึกษาการประยุกต์ใช้อนุกรมอนันต์กับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ รวมไปถึงเราจะศึกษาในลิมิตที่อนุกรมเหล่านี้มีลักษณะต่อเนื่อง นั่นคือเราจะใช้อินทิกรัลเป็นเครื่องมือในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เช่นกัน

5.1) การแก้สมการอนุพันธ์โดยการอินทิเกรต

เราจะเริ่มจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ง่ายที่สุดคืออนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

ซึ่งเราจะได้คำตอบจากการอินทิเกรตโดยตรงดังนี้

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชันบอกความเร็วและตำแหน่งของการเคลื่อนที่ 1 มิติที่มีความเร่งคงที่ นั่นคือพิจารณาสมการ

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = a$$

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชันบอกความเร็วของการเคลื่อนที่ 1 มิติที่มีแรงต้านอากาศ นั่นคือพิจารณาสมการการเคลื่อนที่

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\beta\frac{dx(t)}{dt} + mg$$

ซึ่งเขียนในรูปความเร็วเป็น

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\beta v(t) + mg$$

5.2) การแก้สมการอนุพันธ์เชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

โดยปรกติแล้วในวิชาฟิสิกส์เราจะเจอสมการอนุพันธ์ที่ง่ายที่สุดคือมีลักษณะเป็นเชิงเส้น (linear) และเอกพันธ์ (homogeneous) นั่นคือ

$$\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \ a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}y + \cdots + a_1\frac{d}{dx}y + a_0y = 0$$

ความเป็นเชิงเส้นสังเกตได้จากการเป็นผลรวมเชิงเส้นของอนุพันธ์อันดับต่างๆของตัวแปร ในขณะที่ความเป็นเอกพันธ์หมายถึงถ้า $y_{soln}(x)$ เป็นคำตอบของสมการนี้แล้ว $ky_{soln}(x)$ จะเป็นคำตอบของสมการนี้ด้วย

โดยที่เรานิยมเขียนตัวดำเนินการ

$$\boldsymbol{D} \equiv \frac{d}{dx}$$

แทนที่การทำอนุพันธ์เทียบกับ x
นั่นคือเราสามารถนิยามตัวดำเนินการรวมเป็น

$$\boldsymbol{D^n}y + a_{n-1}\boldsymbol{D^{n-1}}y + a_{n-2}\boldsymbol{D^{n-2}}y + \cdots + a_1\boldsymbol{D}y + a_0 y \equiv \boldsymbol{L}[y] = 0$$

สมการอนุพันธ์นี้มีสมบัติที่สำคัญคือ
ถ้า $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ ต่างเป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ $\boldsymbol{L}[y] = 0$ นั่นคือ

$$\boldsymbol{L}[f_1(x)] = 0,\ \boldsymbol{L}[f_2(x)] = 0$$

เราจะได้ว่าผลรวมเชิงเส้นของคำตอบสองคำตอบนี้เป็นคำตอบของสมการนี้ด้วยนั่นคือ

$$\boldsymbol{L}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = 0$$

การหาคำตอบของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นแบบเอกพันธ์ทำได้โดยพิจารณาจากการแทน

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

ในสมการ $\boldsymbol{L}[y] = 0$ เราจะได้

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$$

และจะทำให้สมการนี้เป็นจริงเมื่อ λ เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

ซึ่งเราถ้าเราได้คำตอบเป็น $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_m, \dots, \lambda_m$ เราสามารถแยกตัวประกอบตามคำตอบได้ดังนี้

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

สังเกตว่าคำตอบ λ_i มีคำตอบซ้ำกันทั้งหมด k_i ราก
ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียนตัวดำเนินการรวมในรูปของพหุนามนี้ได้

$$\boldsymbol{L}[y] = (\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n}} + a_{n-1}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n-1}} + a_{n-2}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{n-2}} + \cdots + a_1\boldsymbol{D} + a_0)y = p(\boldsymbol{D})y = 0$$

เนื่องจากตัวดำเนินการอนุพันธ์นี้สลับที่ได้ เราจึงเขียนเป็นการแยกตัวประกอบได้เป็น

$$p(\boldsymbol{D})y = [(\boldsymbol{D} - \lambda_1)^{k_1}(\boldsymbol{D} - \lambda_2)^{k_2} \dots (\boldsymbol{D} - \lambda_m)^{k_m}]\, y(x) \ = 0$$

คำตอบของ $y(x)$ ชุดแรกที่เห็นได้ชัดคือ

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}$$

เนื่องจาก

$$(\boldsymbol{D} - \lambda_i)e^{\lambda_i x} = (\lambda_i - \lambda_i)e^{\lambda_i x} = 0$$

อย่างไรก็ตามยังมีคำตอบอื่นๆอีกเช่นถ้า $k_i = 2$

$$(\boldsymbol{D} - \lambda_i)^2(xe^{\lambda_i x}) = (\boldsymbol{D} - \lambda_i)\left(e^{\lambda_i x} + \lambda_i e^{\lambda_i x} - \lambda_i e^{\lambda_i x}\right) = (\boldsymbol{D} - \lambda_i)e^{\lambda_i x} = 0$$

ในขณะที่ $(\boldsymbol{D} - \lambda_i)^2\left(x^2 e^{\lambda_i x}\right) \neq 0$ ดังนั้นด้วยหลักการเดียวกันเราจึงหาคำตอบของสมการนี้ได้ทั้งหมดเป็น

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาการเคลื่อนที่ของสปริงตามสมการ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาการเคลื่อนที่ของสปริงภายใต้แรงหน่วงตามสมการ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

ในกรณีที่

- Underdamped: $\beta^2 < 4\omega^2$
- Critically damped: $\beta^2 = 4\omega^2$
- Overdamped: $\beta^2 > 4\omega^2$

5.3) การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ด้วยอนุกรมกำลัง (วิธีของโฟรบีเนียส – Frobenius Method)

อนุกรมกำลังที่มีลักษณะลู่เข้า (convergent) และสามารถหาอนุพันธ์ได้ (differentiable) สามารถเป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ได้เสมอ โดยวิธีการหาคำตอบนี้ทำได้โดยการ

- แทนค่าอนุกรมกำลังลงไปในสมการตรงๆ
- แก้เพื่อหาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ด้านหน้า
- ใช้ความสัมพันธ์วนซ้ำนั้นในการหารูปทั่วไป เพื่อจะได้คำตอบของอนุกรมกำลังในรูปของค่าคงที่ตั้งต้น

โดยเราจะเริ่มจากตัวอย่างที่ง่ายที่สุดเพื่อความเข้าใจในการประยุกต์ใช้

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ

$$\frac{dx}{dt} = bx$$

เราจะเริ่มจากการสมมติว่าคำตอบคืออนุกรมกำลัง

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าลงไปในสมการเราจะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = b \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

เมื่อทำการเปลี่ยน dummy index แล้วเลื่อนให้กำลังเท่ากันแล้วเราจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} t^n = b \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

นั่นคือเราจะได้

$$a_{n+1} = \frac{b}{n+1} a_n$$

ซึ่งสมการนี้เป็นสมการวนซ้ำ (recurrence relation) เมื่อเราเริ่มจากสัมประสิทธิ์ตัวแรก เราจะหาสัมประสิทธิ์ตัวที่สองได้จากตัวแรก นั่นคือ

$$a_1 = \frac{b}{1} a_0$$

เมื่อทำซ้ำเราจะได้

$$a_2 = \frac{b}{2} a_1 = \frac{b^2}{2 \cdot 1} a_0$$

$$a_3 = \frac{b}{3} a_2 = \frac{b^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} a_0$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์ใดๆจะมีค่าเป็น

$$a_n = \frac{b^n}{n!} a_0$$

ดังนั้นเมื่อแทนลงไปในอนุกรมกำลังตั้งต้นเราจะได้

$$x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bt)^n}{n!} = a_0 e^{bt}$$

ซึ่งเป็นคำตอบที่เราสามารถตรวจสอบได้โดยการแทนค่ากลับในสมการ

ข้อสังเกต

1) สมการเชิงอนุพันธ์นี้มีอันดับเท่ากับ 1 (อนุพันธ์สูงสุด) นั่นแปลว่าเราต้องการค่าคงที่จำนวน 1 ตัวเพื่อหาคำตอบ ซึ่งค่าคงที่หาได้จากการแทนค่าตั้งต้นเช่น

2) สมการนี้ไม่จำเป็นต้องแก้ด้วยวิธีนี้เนื่องจากมีวิธีที่ง่ายกว่า วิธีการใช้อนุกรมกำลังนี้เหมาะกับการแก้สมการที่มีความซับซ้อน

ตัวอย่าง จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของ Simple Harmonic Oscillation ด้วยอนุกรมกำลัง

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

เราจะเริ่มจากการสมมติว่าคำตอบคืออนุกรมกำลัง

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าลงไปในสมการเราจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \frac{k}{m}\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n = 0$$

ความสัมพันธ์วนซ้ำคือ

$$a_{n+2} = -\frac{k/m}{(n+2)(n+1)}a_n$$

สังเกตว่าเราจะต้องเริ่มจากค่าตั้งต้นสองค่า เพราะความสัมพันธ์นี้ทำให้สัมประสิทธิ์แยกเป็นสองชุด คือสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับ a_0

$$a_2 = \frac{-\frac{k}{m}}{2\cdot 1}a_0$$

$$a_4 = \frac{-\frac{k}{m}}{4\cdot 3}a_2 = \frac{\left(-\frac{k}{m}\right)^2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a_0$$

$$a_{2i} = \frac{\left(-\frac{k}{m}\right)^i}{(2i)!}a_0$$

และสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นกับ a_1

$$a_3 = \frac{-\frac{k}{m}}{3\cdot 2}a_1$$

$$a_5 = \frac{-\frac{k}{m}}{5\cdot 4}a_3 = \frac{\left(-\frac{k}{m}\right)^2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_1$$

$$a_{2i+1} = \frac{\left(-\frac{k}{m}\right)^i}{(2i+1)!}a_1$$

ซึ่งตรงกับความจริงที่ว่าสมการนี้มีอันดับเท่ากับ______นั่นคือเราต้องการค่าคงที่จำนวน______ค่า เมื่อแทนกลับเราจะได้

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty}a_{2i}t^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty}a_{2i+1}t^{2i+1}$$

เมื่อใช้การกระจายเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน sine cosine เราจะได้

$$x(t) = a_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{a_1}{\sqrt{k/m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

5.4) ลาปลาเซียนและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Laplacian and Partial Differential Equation)

สมการที่ฟิสิกส์ใช้บ่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) ทั้งหมดเช่น

สมการปัวซอง

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

สมการลาปลาซ

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = 0$$

สมการความร้อน

$$\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = k^2 \vec{\nabla}^2 \mathrm{T}(\vec{r},t)$$

สมการคลื่น

$$\vec{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

สมการโชรดิงเงอร์

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi + V(\vec{r})\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

สังเกตว่าสมการส่วนใหญ่ใช้ตัวดำเนินการลาปลาเซียนซึ่งประกอบไปด้วยการหาอนุพันธ์อันดับสองของแต่ละพิกัด และการหาอนุพันธ์ย่อยของเวลา สมการเหล่านี้สามารถแก้ได้ด้วยกระบวนการแยกตัวแปร (Separation of variables) ซึ่งเราจะยกตัวอย่างสมการโชรดิงเงอร์ด้วยกระบวนการแยกตัวแปรเราจะสมมติให้ฟังก์ชันคลื่นมีลักษณะแยกออกเป็นแฟคเตอร์

$$\Psi(\vec{r},t) = R(\vec{r})T(t)$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2 R + V(\vec{r}) = i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}$$

สังเกตว่า____ดังนั้นสมการนี้จะเป็นจริงได้เมื่อทั้งสองฝั่งของสมการมีค่าเท่ากับค่าคงที่

$$-\frac{1}{R}\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2 R + V(\vec{r}) = \alpha$$

$$i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \alpha$$

ซึ่งสมการทั้งสองนี้จะกลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ปรกติทันที โดยสมการด้านบนคือสมการโชรดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (time-independent Schrodinger equation) โดยเราสามารถเปลี่ยนสมการนี้ให้อยู่ในรูปของสมการปัวซองแบบเอกพันธ์ (Homogeneous Poisson Equation) เป็น

$$\vec{\nabla}^2\Psi + f(\vec{r})\Psi = 0$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าการแยกสมการลาปลาซในพิกัด Cartesian ทำให้ได้สมการ

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha_1 X = 0, \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} + \alpha_2 Y = 0, \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} - (\alpha_1 + \alpha_2)Z = 0$$

ตัวอย่าง จงแสดงการแยกสมการของสมการโชรดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาของอนุภาคอิสระในพิกัด Cartesian

$$\vec{\nabla}^2\Psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\,\Psi = 0$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวแปรของสมการปัวซองแบบเอกพันธ์ในพิกัดเชิงทรงกระบอก โดยที่ $f(\vec{r}) = \lambda$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \lambda\Psi = 0$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \lambda_1 Z = 0, \qquad \frac{d^2S}{d\phi^2} - \mu S = 0$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) + \left\{(\lambda_1 + \lambda)\rho + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\right\}R = 0$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวแปรของสมการปัวซองแบบเอกพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\right\} + f(r)\Psi = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[f(r) - \frac{\alpha}{r^2}\right]R = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \beta\Phi = 0$$

5.5) สมการเชิงอนุพันธ์ที่ให้ฟังก์ชั่นพิเศษในฟิสิกส์

เราจะเริ่มศึกษาตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ปรากฏบ่อยในฟิสิกส์และให้คำตอบเป็นฟังก์ชัน พิเศษซึ่งเราจะนิยามได้จากอนุกรมกำลัง

Legendre Polynomials

สมการที่เราสนใจคือ

$$(1-x^2)\frac{d^2P(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP(x)}{dx} + l(l+1)P(x) = 0$$

ซึ่งสมการนี้ออกมาจากส่วนของมุมในสมการโชรดิงเงอร์ (Schrodinger's equation) ของ Hydrogen atom เมื่อแทน

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

เราพบว่าสมการคือ

ซึ่งทำให้เราได้ความสัมพันธ์วนซ้ำเป็น

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

ซึ่งความน่าสนใจคือถ้าให้ $n > l$ จะทำให้____

ดังนั้นเพื่อให้อนุกรมนี้มีค่าลู่เข้าในกรณีที่ $x \to 1$ จะต้องบังคับให้__________________________

และทำให้ a_n เมื่อ $n > l$ มีค่า____

ซึ่งเป็นที่มาของการหาเลขควอนตัมของโมเมนตัมเชิงมุมรวมของอิเลกตรอนรอบไฮโดรเจน อะตอม

Bessel Polynomials

สมการที่เราสนใจคือ

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\left(l^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0$$

ซึ่งออกมาจากลาปลาเซียนในพิกัดทรงกระบอก เมื่อเปลี่ยนตัวแปรโดยใช้ $x = l\rho$ เราจะได้

$$x^2\frac{d^2R(x)}{dx^2}+x\frac{dR(x)}{dx}+(x^2-m^2)R(x)=0$$

เราแทนค่าด้วยอนุกรมกำลัง

$$R(x) = x^s\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k = \sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+s}$$

ที่เราคูณด้วย x^s เพราะสมการตั้งต้นมีเทอม__________ซึ่งจะทำให้สมการหาค่าไม่ได้ถ้าไม่มี x^s

เมื่อแทนค่าลงไปเราจะได้อนุกรม

$$c_0(s^2-m^2)x^s+c_1((s+1)^2-m^2)x^{s+1}+\sum_{k}^{\infty}(c_{k+2}((k+2+s)^2-m^2)+c_k)x^{k+2+s}$$
$$=0$$

โดยที่เราจะสมมติให้ $c_0 \neq 0$ เราจะได้ข้อสรุปว่า

$$s^2=m^2$$
$$c_1((s+1)^2-m^2)=0$$
$$c_{k+2}((k+2+s)^2-m^2)+c_k=0$$

ซึ่งเมื่อแทน $s = \pm m$ ลงไปในสมการที่สองเราจะได้

$$c_1(1+2s)=0 \rightarrow c_1=0 \text{ หรือ } m=\pm\frac{1}{2}$$

ซึ่งกรณีที่ m ไม่เป็นจำนวนเต็มคือกรณีที่เราไม่สนใจ (เพราะสมการนี้มาจาก $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

และความสัมพันธ์วนซ้ำคือ

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2+s)^2 - m^2}$$

เมื่อหาค่า

$$c_2 = -\frac{1}{2(2s+2)} c_0$$

$$c_4 =$$

$$c_6 =$$

เราจะได้กรณีทั่วไปเป็น

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2k \cdot (2k-2) \cdots 2} \frac{1}{(2s+2k)(2s+2k-2) \cdots (2s+2)} c_0$$

นั่นคือ

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{s!}{2^{2k} k!\,(s+k)!} c_0$$

ดังนั้นคือตอบของสมการนี้คือ

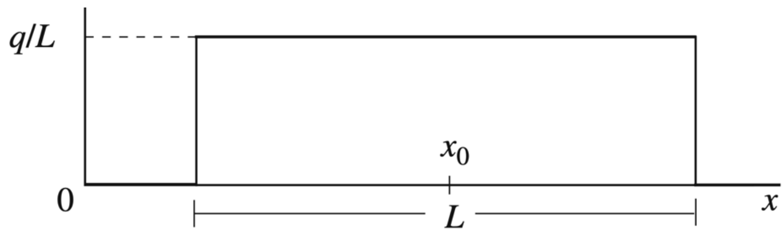
$$R(x) = c_0 s!\, x^s \sum_k^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(s+k)!} x^{2k} = c_0 s!\, 2^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_k^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(s+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

ถ้าเราไม่สนใจค่าคงที่ด้านหน้า เราจะได้พหุนามเบสเซล หรือเบสเซลฟังก์ชันอันดับ s (Bessel function of order s)

$$J_s(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_k^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(s+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

5.6) ดิแรกเดลต้าฟังก์ชัน (Dirac Delta Function)

พิจารณาเส้นประจุความยาว L มีประจุ q กระจายอยู่อย่างสม่ำเสมอ ความหนาแน่นประจุเชิงเส้นนี้มีค่าเท่ากับ_______________ ดังนั้นถ้าเราวาดกราฟแสดงความหนาแน่นประจุเชิงเส้นเราจะได้กราฟเป็น



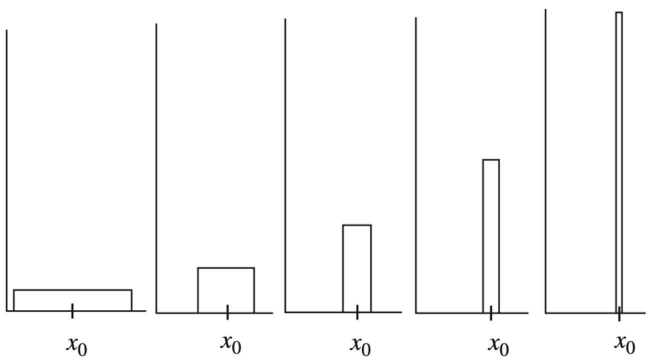
$\lambda(x, x_0) =$

เมื่อเราหดความยาวนี้ลงเป็น 2 เท่าโดยที่ให้ประจุคงเดิมเราจะได้

$\lambda(x, x_0) =$

เมื่อเราหดความยาวนี้ลงเป็น n เท่าโดยที่ให้ประจุคงเดิมเราจะได้

$\lambda(x, x_0) =$



เมื่อเราให้ $\lambda(x, x_0) = q\ \delta_n(x, x_0)$

$$\delta_n(x, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x < x_0 - L/2n \\ n/L & \text{ถ้า } x_0 - L/2n\ <\ x\ <\ x_0 + L/2n \\ 0 & \text{ถ้า } x < x_0 - L/2n \end{cases}$$

สังเกตว่าเนื่องจากประจุมีค่า_______________ดังนั้นพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันนี้มีค่าเท่ากับ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x, x_0)\, dx = 1$$

ไม่ว่าค่า n จะมีค่าเป็นเท่าไรก็ตาม ดังนั้นถ้าเราให้ $n \to \infty$ เราจะได้ดิแรกเดลต้าฟังก์ชัน

$$\delta(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x, x_0)$$

ในบางครั้งเราจะนิยามเป็น

$$\delta(x, x_0) \equiv \delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{ถ้า } x - x_0 = 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นค่าอื่น} \end{cases}$$

เนื่องจากฟังก์ชันนี้มีค่าเฉพาะตำแหน่ง $x = x_0$ ทำให้เราได้สมบัติที่สำคัญของดิแรกเดลต้าฟังก์ชันเป็น

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos y\ \ \delta(y - \pi)\, dy =$$

$$\int_{-\infty}^{0} \ln y\ \ \delta(y - e)\, dy =$$

$$\int_{2}^{3} \ln t\ \ \delta(t - e)\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \delta(x)\, dx =$$

สมมติให้มีฟังก์ชัน $g(x)$ ซึ่งมี zero อยู่ที่ $x\ =\ c$ นั่นคือ $g(c)\ =\ 0$ เมื่อทำการอินทิเกรตของเดลต้าฟังก์ชันที่มี g(x) เป็น argument เราจะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(g(x)\big)dx = \frac{1}{|g'(c)|}$$

เมื่อ $g'(x) \equiv \frac{dg(x)}{dx}$

ถ้าฟังก์ชัน $g(x)$ ซึ่งมี zero อยู่ที่ $x = c_1, c_2, \ldots, c_n$ เราจะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(g(x)\big)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|g'(c_k)|}$$

เดลต้าฟังก์ชันในรูปของอินทิกรัล

พิจารณา

$$D_T(x - x_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{i(x-x_0)t} dt$$

เมื่อทำการอินทิเกรตเราจะพบว่า

$$D_T(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\big(T(x - x_0)\big)}{x - x_0}$$

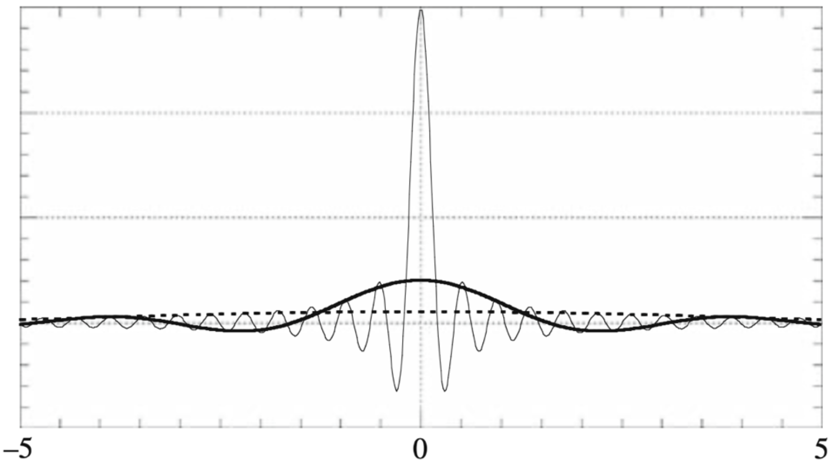
ซึ่งเราหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันนี้ได้เป็น

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_T(x - x_0)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\big(T(x - x_0)\big)}{x - x_0} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy$$

อินทิกรัลสุดท้ายหาได้จาก $I(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{sy}} \sin y}{y} dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_T(x - x_0)\, dx = 1$$

ซึ่งมีลักษณะคล้ายเดลต้าฟังก์ชันเมื่อ T มีค่ามาก



นั่นคือ

$$\delta(x-x_0) = \lim_{T\to\infty} D_T(x-x_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(T(x-x_0)\right)}{x-x_0}$$

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x_0)t}dt$$

5.7) การแปลงอินทิกรัล (Integral Transformation)

ต่อไปเราจะสนใจการประยุกต์ใช้การแปลงอินทิกรัลเพื่อหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งเราสามารถมองการแปลงอินทิกรัลนี้เป็นลิมิตที่ต่อเนื่องของ Frobenius method ได้ โดยเราเริ่มจากการแปลงอินทิกรัลในกรณีทั่วไปนั่นคือ เราจะเปลี่ยนฟังก์ชัน $u(x)$ เป็น $v(t)$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)\, v(t)dt$$

โดย $K(x,t)$ เราเรียกว่าเคอเนล (Kernel) ของการแปลงอินทิกรัลนี้
หลักการของการใช้การแปลงอินทิกรัลนี้คือเราทำการเปลี่ยนฟังก์ชันนี้อย่างเหมาะสมในลักษณะที่สมการของ $v(t)$ สามารถหาคำตอบได้โดยง่าย

การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transformation)

การแปลงฟูเรียร์มีเคอเนลอยู่ในรูป $K(x,t) = e^{itx}$ และช่วง $(a,b) = (-\infty,\infty)$
นั่นคือการแปลงนี้คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}dk$$

เมื่อเทียบกับ

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right)$$

$$f(x) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n - ib_n)e^{2in\pi x/L} + (a_n + ib_n)e^{-2in\pi x/L}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n e^{2in\pi x/L} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}dk$$

โดยที่

$$A_n =$$

นั่นคือเราสามารถมอง $\tilde{f}(k)$ เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจายอนุกรมฟูเรียร์ในกรณีที่โหมดมีความต่อเนื่องได้

ในทำนองเดียวกันการแปลงกลับฟูเรียร์ (Inverse Fourier Transform) เขียนได้เป็น

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าการแปลงกลับฟูเรียร์ของฟังก์ชันยกระดับ (square bump function)

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{ถ้า } |x| \le a, \\ 0 & \text{ถ้า } |x| > a \end{cases}$$

มีค่าเท่ากับ

$$\tilde{f}(k) = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ka}{a}$$

เมื่อพิจารณาลิมิตที่ $a \to \infty$ เราจะได้ฟังก์ชันยกระดับเป็นฟังก์ชันคงที่และ

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi} b\ \delta(k)$$

และในลิมิตที่ $b \to \infty, a \to\ 0$ เราจะได้ฟังก์ชันยกระดับเป็นเดลต้าฟังก์ชันและ

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันคงที่และเดลต้าฟังก์ชันผ่านการแปลงฟูเรียร์นั้นเกี่ยวข้องกับความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์กโดยตรง ซึ่งเราจะได้เรียนในรายละเอียดในวิชากลศาสตร์ควอนตัม

ตัวอย่าง จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(t) = A\cos(\omega t)$ และ $f(t) = A\sin(\omega t)$

5.8) การประยุกต์ใช้การแปลงฟูเรียร์ในสมการเชิงอนุพันธ์

การแปลงฟูเรียร์มีประโยชน์มากในการแก้สมการอนุพันธ์ ลองพิจารณาสมการอนุพันธ์อันดับสองที่ไม่เป็นเอกพันธ์ (Nonhomogeneous second-order differential equation)

$$C_2 \frac{d^2x}{dt^2} + C_1 \frac{dx}{dt} + C_0 x = f(t)$$

ถ้าเราแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

เมื่อแทนในสมการเราจะได้

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-C_2\omega^2 + iC_1\omega + C_0}$$

ซึ่งเราสามารถหา $\tilde{f}(\omega)$ จากการทำการแปลงฟูเรียร์ และเราสามารถหา $x(t)$ ได้จาก

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}}{-C_2\omega^2 + iC_1\omega + C_0} d\omega$$

ตัวอย่าง จงแก้สมการเพื่อหาประจุที่ขึ้นกับเวลาของวงจร RLC ที่ต่อด้วยความต่างศักย์แบบกระแสสลับซึ่งมีสมการเป็น

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathrm{V}_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$Q(t) = V_0\, Re\left(\frac{e^{i\omega_0 t}}{-L\omega_0^2 + iR\omega_0 + 1/C}\right)$$

และเมื่อหากระแสเราจะได้

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = V_0 \frac{-\left[\frac{1}{C} - L\omega_0^2\right]\omega_0 \sin(\omega_0 t) + R\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)}{\left[-L\omega_0^2 + \frac{1}{C}\right]^2 + R^2\omega_0^2}$$

ซึ่งเราจะเห็นว่าปรากฏการณ์ resonance (กระแสมีค่าสูง) จะเกิดขึ้นเมื่อ $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

5.9) กรีนฟังก์ชัน (Green function)

พิจารณาสมการอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์ (Nonhomogeneous differential equation)

$$\hat{D}_x y(x) = f(x)$$

โดยที่ $y(x)$ คือคำตอบที่เราต้องการหา $f(x)$ คือ driving function ซึ่งกำหนดให้จากสถานการณ์ และ $\hat{D}$ คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ เช่น $\hat{D}_x = A\frac{d^3}{dx^3} + B\frac{d^2}{dx^2} + C\frac{d}{dx} + D$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์ $\hat{D}_x = D_x\left(\frac{d}{dx}\right)$

การแก้สมการนี้ทำได้โดยการเริ่มจากการแก้สมการ

$$\hat{D}_x G(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

เมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ และใช้นิยามของเดลต้าฟังก์ชัน

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k) e^{ik(x-x_0)} dk$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$$

เราจะได้ว่า

$$\tilde{G}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{D_x(k)}$$

เนื่องจาก

$$D_x\left(\frac{d}{dx}\right)e^{ik(x-x_0)}=D_x(k)e^{ik(x-x_0)}$$

ดังนั้นเราจะได้

$$G(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x_0)}}{D_x(k)}dk$$

ฟังก์ชันนี้เราเรียกว่ากรีนฟังก์ชัน (Green function) ซึ่งเราสามารถนำฟังก์ชันนี้ไปใช้แก้สมการอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธ์ในรูปทั่วไปของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์นี้ได้ นั่นคือสมการ

$$\widehat{D}_x y(x)=f(x)$$

จะมีคำตอบเป็น

$$y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x_0)\,f(x_0)dx_0$$

เราสามารถตรวจสอบการเป็นคำตอบได้โดยการแทนค่ากลับ

$$\widehat{D}_x y(x)=\widehat{D}_x\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x_0)\,f(x_0)dx_0=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,f(x_0)dx_0=f(x)$$

ซึ่งเป็นจริงเนื่องจากนิยามของกรีนฟังก์ชัน

ตัวอย่าง จงแสดงว่าตัวดำเนินการลาปลาเซียนมีกรีนฟังก์ชันเป็น

$$G(\vec{r}-\vec{r}_0)=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}}{\vec{k}^2}d^3k$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$G(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}}{\vec{k}^2}d^3k = -\frac{1}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสมการในบทก่อน

$$\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1). จงใช้การ integrate เพื่อการแก้ปัญหาวงจร RC ซึ่งมีสมการเป็น

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

โดยมีค่าตั้งต้นเป็น $Q(t=0)=Q_0$

2). จงแทนค่า $Q(t)=e^{\lambda t}$ เพื่อแก้สมการวงจร RLC ซึ่งมีสมการเป็น

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

จากนั้นให้วิเคราะห์คำตอบในกรณีที่ $R^2<4\frac{L}{C}$, $R^2=\ 4\frac{L}{C}$ และ $R^2>4\frac{L}{C}$

3). จงใช้อนุกรมกำลังแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้

$$\frac{dx}{dt}+2tx=0$$

โดย $x(t=0)=1$

4). จงใช้อนุกรมกำลังแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้

$$\frac{dx}{dt}+3t^2x=0$$

โดย $x(t=0)=2$

5). จากสมการคลื่นใน 1 มิติ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

จงใช้การแยกตัวแปรเพื่อแยกสมการนี้ออกเป็นสองสมการพร้อมทั้งบอกคำตอบทั่วไปของสมการ

6). จากสมการโชรดิงเงอร์ของตัวกวัดแกว่งฮาร์โมนิค (Harmonic Oscillator) ใน 1 มิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

6.1) จงใช้การแยกตัวแปรเพื่อแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ของตำแหน่งและเวลาคือ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi=0$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{iE}{\hbar} T$$

6.2) จงแสดงให้เห็นว่าคำตอบของสมการส่วนของเวลาคือ

$$T = Ae^{iEt/\hbar}$$

6.3) จงแสดงให้เห็นว่าที่ $x \to \infty$ คำตอบของสมการส่วนของตำแหน่งคือ

$$\psi \sim e^{\pm\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

6.4) จงแสดงให้เห็นว่าถ้ากำหนดให้เปลี่ยนตัวแปร

$$\psi(x) = H(y)e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad y \equiv x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

เราจะได้สมการ

$$\frac{d^2H}{dy^2} - 2y\frac{dH}{dy} + \lambda H = 0, \quad \lambda \equiv \frac{2E}{\hbar\omega} - 1$$

ซึ่งคำตอบนี้คือฟังก์ชันเฮอร์ไมท์ (Hermite function)

6.5) จงใช้อนุกรมกำลัง

$$H(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k y^k$$

เพื่อแสดงว่าความสัมพันธ์วนซ้ำคือ

$$c_{k+2} = \frac{2k - \lambda}{(k+1)(k+2)}\, c_k$$

7) พิจารณาการสั่นแบบหน่วงซึ่งเขียนได้ด้วยฟังก์ชัน

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\gamma t}e^{i\omega_0 t} & \text{เมื่อ } t \geq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } t < 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่าการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันนี้มีขนาดเป็น

$$\tilde{x}(\omega)\tilde{x}^*(\omega) = |\tilde{x}(\omega)| = \pm\frac{A}{2\pi}\,\frac{1}{((\omega-\omega_0)^2+\gamma^2)}$$

8) พิจารณาการสั่นแบบหน่วงที่มีแรง $f(t)$ เป็นแรง driving force ซึ่งมีสมการอนุพันธ์เป็น

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) = \frac{f(t)}{m}$$

จงใช้การแปลงฟูเรียร์เพื่อแสดงให้เห็นว่าคำตอบของสมการนี้คือ

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}d\omega$$