

แบบฝึกหัด กลศาสตร์ท้องฟ้า

อบรมโอลิมปิกดาราศาสตร์ค่าย 2 ศูนย์มหาวิทยาลัยขอนแก่น

14 มีนาคม พ.ศ. 2560

กำหนดค่า $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$, $M_{\text{solar}} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, $M_{\text{Earth}} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$

1. จงแสดงว่า สมการเส้นทาง

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos \theta + 1} \quad (1)$$

มีลักษณะเป็นวงกลมเมื่อ $e = 0$, วงรีเมื่อ $0 < e < 1$, พาราโบลาเมื่อ $e = 1$ และ ไฮเพอร์โบลาเมื่อ $e > 1$

2. ดาวหางเริ่มตกเข้าสู่ดวงอาทิตย์ จากห้วงอวกาศที่ระยะ 10 ปีแสง ดาวหางนี้จะมีความเร็วเท่าใดตอนที่มันกำลังวิ่งผ่านวงโคจรของโลก กำหนดให้โลกมีระยะห่างจากดวงอาทิตย์ 8 นาที่แสง และ ความเร็วแสงเท่ากับ $3 \times 10^8 \text{ m/s}$

3. ดาวเทียมค้างฟ้า (Geosynchronous satellite): จงหาค่าความสูงของดาวเทียมจากพื้นโลกที่ทำให้ผู้สังเกตจากพื้นโลกเห็นดาวเทียมอยู่ที่ตำแหน่งเดิมตลอดเวลาเมื่อเทียบกับดาวพื้นหลัง และจงหาอัตราส่วนความเร็วของดาวเทียมและอัตราเร็วของผู้สังเกตเมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย กำหนดให้ $R_{\text{Earth}} = 6371 \text{ km}$

4. ดาวหางฮัลเลย์มีคาบการโคจร 76 ปี และระยะใกล้สุดถึงดวงอาทิตย์ (perihelion) เท่ากับ 0.6 a.u. (a.u. = astronomical unit $\approx 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$) ดาวหางฮัลเลย์จะมีระยะห่างจากดวงอาทิตย์ได้มากที่สุดเท่าไรพร้อมทั้งหาค่าความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ของวงโคจร

5. ในวงโคจรวงรี จงหาจุดที่มีค่าการเปลี่ยนแปลงรัศมี ($\frac{dr}{dt}$) มีค่าสูงสุด และจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงรัศมีเป็นศูนย์ ($\frac{dr}{dt} = 0$)

6. ให้จุดใกล้สุดและจุดไกลสุดของดาวเทียมดวงหนึ่ง (perigee, apogee) ห่างเป็นระยะ 200 km และ 500 km จากพื้นโลกตามลำดับ จงหาโมเมนตัมเชิงมุมของดาวเทียม และความเร็วของดาวเทียมที่จุดใกล้สุดและจุดไกลสุด

7. ดวงจันทร์แกนีมีด (Ganymede) ของดาวพฤหัสบดี มีคาบการโคจร 7 วัน 3 ชม 43 นาที และรัศมีการโคจรมีขนาดเป็น 15.3 เท่าของรัศมีดาวพฤหัสบดี ดวงจันทร์ของโลกมีคาบการโคจร 27 วัน 7 ชม 43 นาที และรัศมีการโคจรมีขนาดเป็น 60.3 เท่าของรัศมีโลก จงใช้แค่ข้อมูลข้างต้นหาความหนาแน่นของดาวพฤหัสบดีเทียบกับความหนาแน่นของโลก

8. ดาวหางดวงหนึ่งมีระยะเป็น R เท่าของ 1 a.u. และมีความเร็วเป็น V เท่าของความเร็วเฉลี่ยของวงโคจรโลก จงหาเงื่อนไขที่ทำให้ดาวหางดวงนี้มีวงโคจรเป็น ไฮเพอร์โบลา, พาราโบลา หรือ วงรี

9. ระบบดาวคู่พลัสเก็ต (Plaskett's binary system) มีวงโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลซึ่งอยู่ระหว่างดาวฤกษ์ทั้งสองดวงพอดี ให้ความเร็ววงโคจรของดาวแต่ละดวงเท่ากับ 220 km/s และมีคาบ 14.4 วัน จงหามวลของดาวฤกษ์แต่ละดวงเมื่อเทียบกับดวงอาทิตย์

10. ดาวนิวตรอนเป็นวัตถุที่มีความหนาแน่นสูงซึ่งเกิดจากซูเปอร์โนวา ส่วนใหญ่หมุนรอบตัวเองด้วยความเร็วสูง ถ้าให้มวลของดาวนิวตรอนดวงหนึ่งมีขนาดเป็นสองเท่าของดวงอาทิตย์ และมีรัศมีเพียง 10 km จงหาโมเมนตัมเชิงมุมสูงสุดที่เป็นไปได้ที่ทำให้วัตถุที่บนพื้นของดาวนิวตรอนถูกยึดได้ด้วยแรงโน้มถ่วงของดาวนิวตรอน

11. G. K. Oniell ในปี ค.ศ. 1974 เสนอโมเดลอาณานิคมในอวกาศ โดยการสร้างท่อรูปทรงกระบอกที่มีรัศมี 6 km และความยาว 30 km และสร้างเมืองภายในผิวในของทรงกระบอก ทุกอย่างถูกยึดไว้ด้วยแรงเหวี่ยงจากการหมุนของทรงกระบอกนี้ จงหาความเร็วเชิงมุมของอาณานิคมนี้เพื่อที่จะให้มีแรงโน้มถ่วงเทียมเท่ากับแรงโน้มถ่วงบนผิวโลก

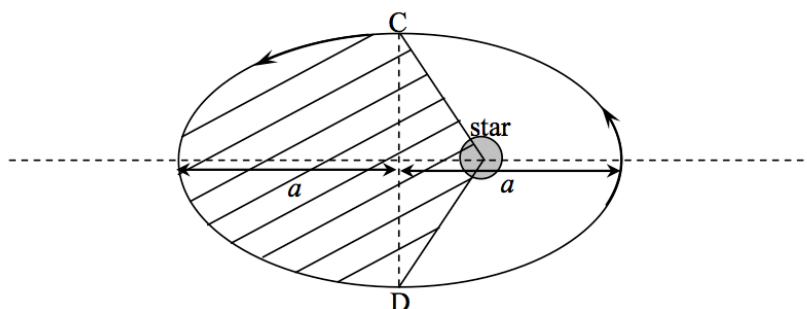
12. ดาวเทียมสำรวจพื้นโลกดวงหนึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแถบเส้นศูนย์สูตรของโลก ถ้าดาวเทียมดวงนี้เคลื่อนที่สวนทางกับผิวโลกและสามารถเก็บข้อมูลของผิวโลกได้ครบภายใน 1 ชม จงหาอัตราส่วนของรัศมีวงโคจรของดาวเทียมและรัศมีโลก

13. วัตถุชิ้นหนึ่งถูกยิงออกจากโลกด้วยความเร็วต้น $2.00 \times 10^4 \text{ m/s}$ เมื่อไม่คำนึงถึงแรงต้านอากาศและการหมุนของโลก วัตถุชิ้นนี้จะมีความเร็วเท่าใดเมื่อเคลื่อนที่ไปไกลจากโลกมากๆ

14. ยานอวกาศเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบโลกที่รัศมีวงโคจร r ถ้ายานอวกาศนี้สามารถเพิ่มความเร็วเป็น k เท่าจากความเร็วเดิมได้อย่างทันทีทันใดและไม่เปลี่ยนทิศทาง จงหาค่า k น้อยที่สุดที่ทำให้ยานอวกาศหนีออกจากสนามโน้มถ่วงของโลกได้พอดี

15. ดาวเทียมดวงหนึ่งโคจรรอบโลกเป็นวงกลมด้วยรัศมี 7 เท่าของรัศมีโลก ประมวลให้โลกเป็นทรงกลม หอสังเกตการณ์ตัดสินใจปรับวงโคจรของดาวเทียมให้เป็นวงรีเพื่อให้ดาวเทียมตกลงสู่พื้นโลกที่ผิวฝั่งตรงข้ามกับตำแหน่งที่ปรับวงโคจรพอดี จงหาช่วงเวลาที่ดาวเทียมใช้ในการตกสู่พื้นโลก (ข้อสอบทฤษฎีปี 2551)

16. ดาวเคราะห์ดวงหนึ่งโคจรรอบดาวฤกษ์มวลมาก เป็นวงโคจรรูปวงรีที่มีค่าครึ่งแกนเอกเป็น a ถ้าเวลาในการโคจรจากจุด C ไปถึง D ดังรูปมีค่าเป็น 66% ของคาบการโคจร จงหาค่าเยื้องศูนย์กลางของวงโคจรนี้ (ข้อสอบทฤษฎีปี 2551)



17. (ข้อสอบทฤษฎีปี 2551) สะเก็ดดาวโคจรเข้ามาจากระยะอนันต์เข้าเฉียดโลกโดยมีวงโคจรเป็นพาราโบลา และไม่มี การหมุนรอบตัวเอง ในขณะที่อยู่ใกล้โลกที่สุดจะอยู่ห่างจากโลกเป็นระยะทาง a ซึ่งมากกว่ารัศมีของโลก ถ้า ณ จุดใกล้สุด นี้อยู่ใกล้โลกเพียงพอที่แรงไทดัล (tidal force) เอาชนะแรงยึดเหนี่ยวในสะเก็ดดาวได้พอดี ทำให้สะเก็ดดาวแตกออกเป็น สองส่วนเท่าๆกัน โดยมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ห่างกันเป็นระยะ 2ϵ และอยู่เป็นแนวเดียวกับจุดศูนย์กลางของโลกใน ขณะแตก กำหนดให้มวลโลกเป็น M_E มวลสะเก็ดดาวก่อนแตกเป็น $2m$ และ $M_E \gg 2m$ และ $\epsilon \ll a$

- จงคำนวณหาอัตราเร็วของสะเก็ดดาวในขณะที่อยู่ใกล้โลกที่สุดนี้
- จงคำนวณหาผลต่างของแรงโน้มถ่วงที่โลกกระทำต่อก้อนมวลทั้งสองส่วน
- จงคำนวณหาผลต่างของแรงหนีศูนย์กลางที่กระทำต่อก้อนมวลทั้งสองส่วน
- จงคำนวณหาแรงโน้มถ่วงระหว่างก้อนมวลทั้งสอง กำหนดให้แรงโน้มถ่วงของสะเก็ดดาวเป็นเสมือนแรงโน้มถ่วง ของจุดมวลที่อยู่ห่างกันเป็นระยะ 2ϵ
- ถ้าคิดว่าแรงยึดเหนี่ยวภายในสะเก็ดดาวมาจากแรงโน้มถ่วงเท่านั้น จงคำนวณหาค่าของ a ที่จำเป็นให้เกิดการ แตกตัวนี้
- หลังการแตกตัว สะเก็ดดาวแต่ละชิ้นจะมีพลังงานเป็นอย่างไร และมีทางการเคลื่อนที่เป็นรูปใด (ไฮเปอร์โบลา พาราโบลา หรือวงรี) จะมีชิ้นใดตกถึงโลกหรือไม่

