

## กลศาสตร์ท้องฟ้าและฟิสิกส์ทั่วไป

ดวงจันทร์โคจรรอบโลกเป็นวงรีด้วยค่า eccentricity เท่ากับ 0.0549 จงหาอัตราส่วนระหว่างเส้นผ่านศูนย์กลางเชิงมุมเมื่อดวงจันทร์มีขนาดใหญ่ที่สุดและเล็กที่สุด

แสงจากกาแล็กซีอันไกลโพ้นกาแล็กซีหนึ่งมีค่า redshift  $z = 0.0033$  กาแล็กซีนี้อยู่ห่างจากเรากี่ปีแสง

ถ้าเรามองหลุมรูปวงกลมบนดวงจันทร์ที่มีความกว้าง 520 กิโลเมตรด้วยตาเปล่า เราจะสามารถมองเห็นขอบหลุมทั้งสองด้านแยก (resolve) ออกจากกันได้หรือไม่ พร้อมแสดงการคำนวณประกอบ

Asteroid มวล  $2m$  ดวงหนึ่ง กำลังโคจรตามแนววงกลมรัศมี  $R$  และขณะที่กำลังมีความเร็ว  $v$  เทียบกับดวงอาทิตย์ มันถูกทำให้ระเบิดเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันเป็นส่วน A กับส่วน B โดยที่ A มีความเร็วเป็น  $2v$  ในทิศเดิม ทันทีหลังระเบิด จงวิเคราะห์หา

- 4.1) ความเร็วของ B ทันทีหลังระเบิดเทียบกับดวงอาทิตย์
- 4.2) ขนาดของ  $v$  เป็นเท่าไรในเทอมของ  $R$ ,  $G$  และมวล  $M$  ของดวงอาทิตย์

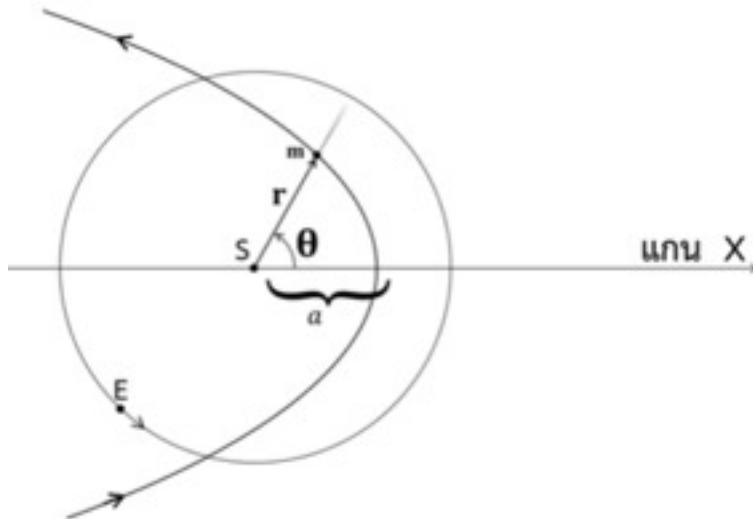
กำหนดว่าเส้นทางโคจรของ A ใน polar coordinates  $(r, \theta)$  เป็น

$$r(\theta) = \frac{C}{1+e \cos \theta}$$

เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงที่,  $e$  เป็น eccentricity ของเส้นทางโคจร และ

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{C e \sin \theta}{(1+e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{e \sin \theta}{C} \right) \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

- 4.3) มุม  $\theta$  ที่ใหญ่ที่สุดมีค่าเท่าไร ตอบในเทอมของ  $e$
- 4.4) ใช้หลักอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมเพื่อหาขนาดของความเร็วของ A เมื่อ  $r$  มีค่ามาก ๆ ตอบในเทอมของ  $v$  และ  $e$
- 4.5) ใช้หลักอนุรักษ์พลังงานเพื่อหาขนาดของความเร็วของ A เมื่อ  $r$  มีค่ามาก ๆ ตอบในเทอมของ  $v$
- 4.6) หาค่าของ  $e$  พร้อมระบุว่าเส้นทางโคจรรูปแบบใด



S เป็นดวงอาทิตย์ มวล  $M$   
 E เป็นโลก ห่างจาก S 1 AU  
 m เป็นดาวหางมวล  $m$  มีหางยาว  $l$  AU  
 โคจรบนระนาบเดียวกันกับโลก  
 โดย  $l < (1 - a)$  และมีค่าไม่  
 เปลี่ยนแปลงเมื่อเข้าใกล้ดวงอาทิตย์

กำหนดให้  $r = \frac{A}{1 + e \cos \theta}$   
 เมื่อ  $A$  เป็นค่าคงตัว  
 และ  $e$  เป็นค่าความเยื้องศูนย์กลาง  
 (eccentricity)

ดาวหาง  $m$  เคลื่อนที่เข้ามาภายในวงโคจรของโลก (E) ด้วยระยะ perihelion เท่ากับ  $a$  AU และด้วยวงโคจรที่เป็นรูป parabola จงวิเคราะห์หาต่อไปนี้ :

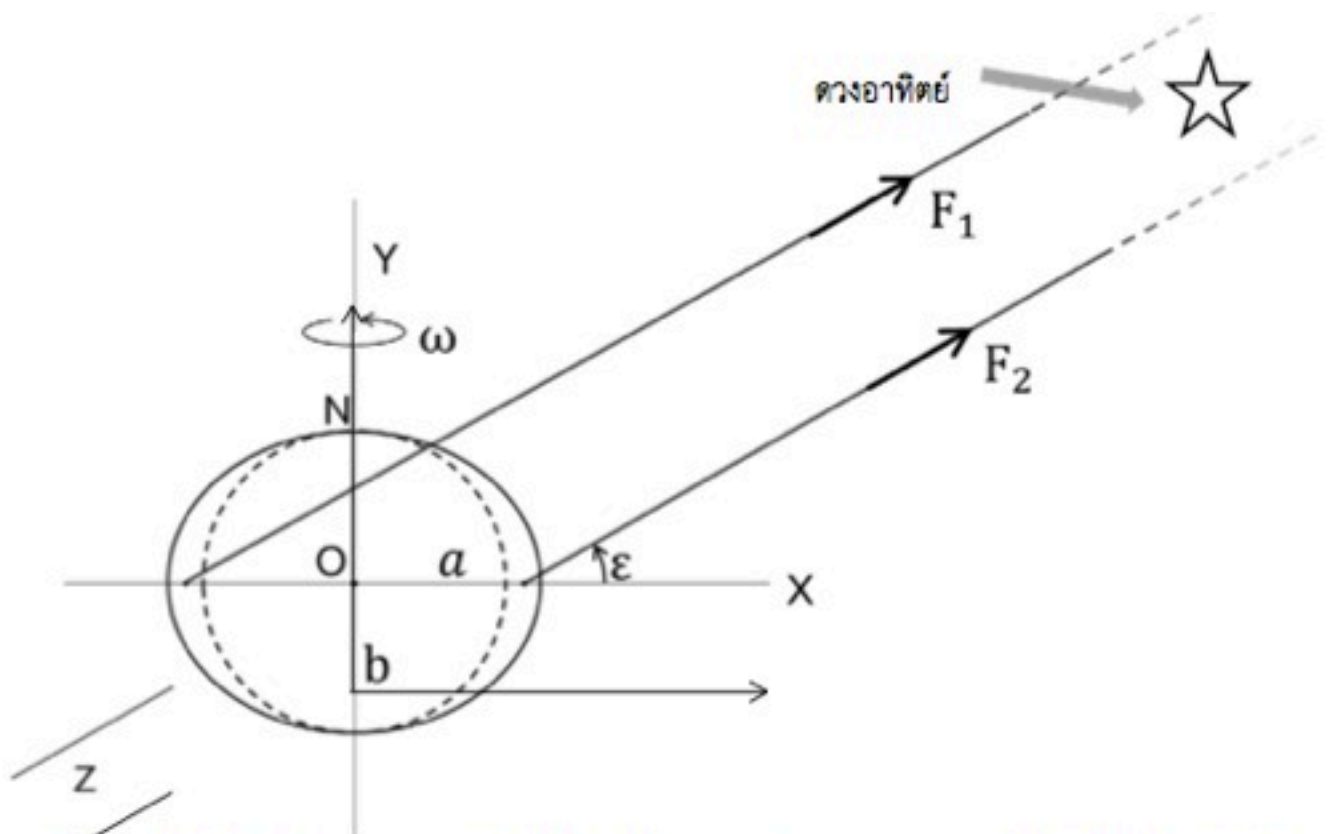
- 3.1) ค่า  $e$  และ  $A$  ของดาวหางดวงนี้เป็นเท่าไร
- 3.2) หาเงื่อนไขที่ดาวหางนี้ (หัวหรือหางมันก็ได้) มีโอกาสชนกับโลก ให้เขียนเงื่อนไขเป็นสมการหรือสมการเชื่อมโยง  $r$  กับ  $l$
- 3.3) ค่าของช่วงมุม  $\theta$  เป็นเท่าไร ที่ดาวหางนี้มีโอกาสชนกับโลกได้
- 3.4) จงหาค่าของโมเมนตัมเชิงมุมของดาวหางในเทอมของ  $G, M, m$  และ  $a$
- 3.5) ดาวหางใช้เวลาานเท่าไรในการเคลื่อนที่ผ่านช่วงที่มีโอกาสชนกับโลก

กำหนดว่า 
$$\int \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2} + C$$

1.3) แหล่งกำเนิดรังสีเอ็กซ์ มีกำลังส่องสว่าง (luminosity)  $10^{30}$  วัตต์ และมีค่าความยาวคลื่นที่ให้ความเข้มของการแผ่รังสีสูงสุดแบบวัตถุดำเป็น 0.3 nm แหล่งกำเนิดนี้มีรัศมีเท่าใด

1.4) ระบบดาวหนึ่ง มีดาวทั้งหมดสามดวง ค่าโชติมาตรปรากฏรวม (total apparent magnitude) คือ 0.0 ในขณะที่สมาชิกสองดวงแรกมีความสว่างคิดเป็นค่าโชติมาตรปรากฏได้ว่าเป็น 1.0 และ 2.0 ตามลำดับ ดวงที่สามมีโชติมาตรปรากฏเท่าใด

1.5) กล้องโทรทรรศน์ขนาด 2.4 เมตร สามารถสังเกตดาวที่มีโชติมาตรปรากฏต่ำสุดเท่าใด เมื่อเทียบกับตามนุษย์ (กำหนดให้รูม่านตามีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 มิลลิเมตร)



โลกมีรูปร่างแป้น มีผิวตามสมการ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$  โดยที่  $a > b$  หมุนรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุม  $\omega$  แรงโน้มถ่วงโดยดวงอาทิตย์ต่อมวลในปริมาตรส่วนที่เกินจากทรงกลมรัศมี  $b$  แต่ละซีกมีค่าเป็น  $F_1$  และ  $F_2$  ทำให้เกิดทอร์กรอบแกน  $Z$  เป็นผลให้แกนหมุนของโลกหมุนควงอย่างช้า ๆ จงพิจารณาแบบจำลองนี้ตามลำดับ:

4.1) กำหนดให้  $m'$  คือ มวลที่เกินจากผิวทรงกลมรัศมี  $b$  จงหาว่า  $m'$  แต่ละซีกมีค่าเท่าไร ตอบในเทอมของ  $a$ ,  $b$ , และมวล  $m$  ของโลก ทั้งนี้ให้ถือว่าโลกมีความหนาแน่นสม่ำเสมอทั้งลูก (ทรงกลมนี้นี้มีปริมาตรเท่ากับ  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ )

4.2) แต่ละแรงโน้มถ่วง  $F_1$ ,  $F_2$  มีค่าประมาณเท่าไร ตอบในเทอมของ  $G$ ,  $M$ ,  $m'$ ,  $b$ ,  $D$  และมุม  $\epsilon$  ทั้งนี้อาจใช้การประมาณ  $(1 + \alpha)^{-2} \approx 1 - 2\alpha$

4.3) ทอร์กลัพธ์ ( $\tau$ ) เนื่องจากแรง  $F_1$ ,  $F_2$  รอบแกน  $Z$  มีขนาดเป็นเท่าไร ตอบในเทอมของ  $G$ ,  $M$ ,  $m'$ ,  $b$ ,  $D$  และ  $\epsilon$

4.4) ทอร์กนี้ทำให้แกนหมุนของโลกส่ายด้วยอัตราเร็วเชิงมุม  $\Omega$  ตามสมการ

$$\Omega \omega = \frac{\tau}{I} \quad \text{และ} \quad I \approx \frac{2}{5} m a^2$$

เขียนสูตรสำหรับคำนวณค่า  $\Omega$  ในเทอมของ  $\omega$ ,  $G$ ,  $M$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $D$  และ  $\epsilon$

4.5) กำหนดว่าสำหรับโลกเรา  $\frac{b}{a} = 0.997$  และคาบการหมุนรอบตัวเองของโลก คือ  $23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 4^{\text{s}} \approx 24$  ชั่วโมง

จงหาคาบการหมุนควงของแกนหมุนของโลกว่าเป็นกี่ปี ( $1 \text{ ปี} \approx 3.156 \times 10^7$  วินาที,  $\epsilon \approx 23^\circ.5$ )



1.6) ดาวเคราะห์  $m$  และดาวฤกษ์  $M$  ต่างก็โคจรเป็นแนววงกลมรอบจุดศูนย์กลางมวลและมีรัศมีของวงโคจรและอัตราเร็วรอบจุดศูนย์กลางมวลเป็น  $r, R, v, V$  ตามลำดับ จงหาระยะห่างระหว่างดาว ในรูปของค่าคงที่โน้มถ่วงสากล  $G$  มวล  $m, M$  และอัตราเร็ว  $v, V$

ดาวสองดวงมีระยะห่างเชิงมุม  $5^{\circ} 15'$  โดยที่ค่าความยาวคลื่นที่ให้ความเข้มของการแผ่รังสีสูงสุดแบบวัตถุดำของดวงแรกเป็น  $450 \text{ nm}$  และดวงที่สองเป็น  $500 \text{ nm}$  โดยดาวดวงแรกมีรัศมีเป็น  $0.34$  เท่าของดวงที่สอง และมี magnitude สูงกว่าดวงที่สองอยู่  $1.2$

จงหาระยะห่างที่แท้จริงระหว่างดาวทั้งสอง โดยกำหนดให้ดาวดวงแรกอยู่ห่างจากโลก  $23.4 \text{ pc}$

ก. ดาวเคราะห์น้อย (Asteroid) ดวงหนึ่งถูกตรวจพบที่ตำแหน่ง  $2.6 \text{ AU}$  จากดวงอาทิตย์ และ  $1.9 \text{ AU}$  จากโลก จากข้อมูลในช่วงความยาวคลื่นอินฟราเรดพบว่า แอลบีโด (albedo) มีค่าเท่ากับ  $10\%$  และพบว่าปริมาณ flux ที่สะท้อนจากดาวเคราะห์น้อยและวัตถุที่โลกนั้นมีค่า  $1 \times 10^{-16} \text{ watt/m}^2$  จงใช้ข้อมูลทั้งหมดนี้คำนวณขนาดของดาวเคราะห์น้อย

ข. ถ้าดาวเคราะห์น้อยดวงนี้วิ่งเข้ามาเฉียดโลก เราจะสามารถตรวจพบดาวเคราะห์น้อยดวงนี้ด้วยกล้องโทรทรรศน์อินฟราเรดที่มี Resolution limit เท่ากับ  $5 \times 10^{-3}$  เรเดียน เมื่อดาวเคราะห์น้อยอยู่ห่างจากผิวโลกเท่าไร

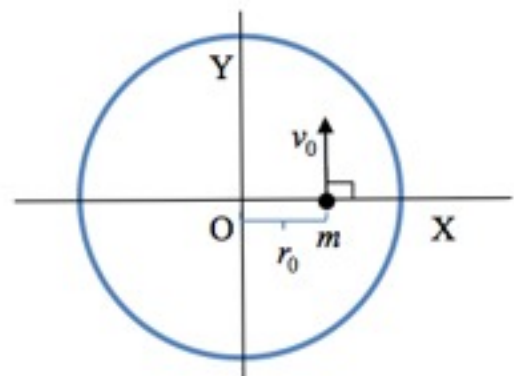
1.10) วัตถุมวล  $m$  กำลังเคลื่อนที่ภายในกลุ่มก๊าซทรงกลมความหนาแน่นคงที่เท่ากับ  $\rho$  มวล  $m$  เคลื่อนที่ในระนาบ  $XY$  ซึ่งมีจุดกำเนิด (origin,  $O$ ) อยู่ที่ศูนย์กลาง โดยมีรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ของมวล  $m$  ในแนวแกน  $X$  และ  $Y$  เป็น

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad y(t) = B \sin(\omega t)$$

ที่เวลาดังต้นวัตถุอยู่ห่างจากศูนย์กลาง  $r_0$  และมีความเร็ว  $v_0$  ใน

แนวแกน  $Y$

จงหาค่าคงที่  $\omega$  ค่าคงที่  $A$  ค่าคงที่  $B$  และค่าความรี (eccentricity) ของวงโคจร



สมมติว่าดาวดวงหนึ่งมีวิวัฒนาการจนมีโชติมาตรเพิ่มขึ้น 3.1 มันทันทีลดลง 20% โดยระหว่างนั้นเสียมวลไปน้อยมาก  
อุณหภูมิตอนหลังเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของอุณหภูมิที่เริ่มต้นเป็นเคลวิน

1.1) ยานอวกาศที่กำลังเคลื่อนที่ตรงเข้าหาดวงอาทิตย์จากระยะไกลด้วยอัตราเร็ว 100 กิโลเมตร/วินาที  
และผู้สังเกตบนยานอวกาศสามารถตรวจพบแสงเลเซอร์ที่มาจากโลก  
หากเส้นทางของยานอวกาศอยู่ในระนาบเดียวกับวงโคจรของโลก  
แล้วความยาวคลื่นต่ำสุดและสูงสุดที่สามารถสังเกตได้จากยานอวกาศมีค่าเท่าไร  
(กำหนดค่าความยาวคลื่นแสงเลเซอร์จากแหล่งกำเนิดบนโลกเป็น 700 นาโนเมตร  
และไม่ต้องคำนึงถึงการหมุนรอบตัวเองของโลก)

1.4) กลุ่มก๊าซความหนาแน่นสูงโคจรรอบหลุมดำในกาแล็กซีกัมมันต์ NGC 4258 ด้วยความเร็ว 1,000 km/s  
ด้วยรัศมีวงโคจร 0.49 ปีแสง จงประมาณมวลของหลุมดำที่เป็นจุดศูนย์กลาง ในหน่วย kg และ solar mass

1.10) วัตถุ A และวัตถุ B เป็นวัตถุดำ ถ้าวัตถุ A  
มีค่าสูงสุดของสเปกตรัมแม่เหล็กไฟฟ้าในช่วงอัลตราไวโอเลตที่ความยาวคลื่น 200 นาโนเมตร วัตถุ B  
มีค่าสูงสุดของสเปกตรัมแม่เหล็กไฟฟ้าในช่วงสีแดงที่ความยาวคลื่น 650 นาโนเมตร แล้ววัตถุ A  
มีอุณหภูมิสูงกว่าวัตถุ B กี่เท่า และพลังงานที่ส่งออกมาต่อหน่วยพื้นที่ต่อเวลามากกว่ากันกี่เท่า

1.2) ดาวเคราะห์ดาวหนึ่งมีรัศมี  $R$  และมีอัลบิโดพื้นผิว (surface albedo)  $\alpha$  โคจรรอบดาวฤกษ์ที่มีความสว่าง  
 $L$  และมีรัศมีวงโคจรเท่ากับ  $D$  ในที่นี้ประมาณว่า ณ จุดสมดุล  
พลังงานทั้งหมดที่ดาวเคราะห์ดูดกลืนเข้ามาจะถูกปลดปล่อยเสมือนกับการแผ่รังสีของวัตถุดำ (blackbody  
radiation) จงหาอุณหภูมิพื้นผิวของดาวเคราะห์ซึ่งหันด้านหนึ่งเข้าหาดาวฤกษ์ตลอดเวลา  
(คิดด้านที่หันเข้าหาดาวฤกษ์)

1.3) กลุ่มก๊าซขนาดใหญ่มีรัศมี 10 pc มีมวล  $10^3$  เท่าของดวงอาทิตย์ มีอุณหภูมิ 10 เคลวิน  
จงวิเคราะห์ว่ากลุ่มก๊าซนี้มีโอกาสเป็นดาวฤกษ์หรือไม่ (อัตราเร็วเฉลี่ยของก๊าซ  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ )

1.4) จงหารัศมี Schwarzschild ของหลุมดำที่มีมวล 10 เท่าของดวงอาทิตย์



1.3) ดาวนิวตรอนมีรัศมี  $10^4$  m ที่ระยะเท่ากับ 1 kpc ฟลักซ์จากดาวนิวตรอนวัดได้  $9 \times 10^{-15}$  W/m<sup>2</sup> จงหาอุณหภูมิยังผลของดาวนิวตรอนดวงนี้

1.5) กระจุกดาวทรงกลมกระจุกหนึ่งมีวงโคจรรูปวงรี ( $e = 0.9$ ) รอบจุดศูนย์กลางดาราจักรและมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมากที่สุดเท่ากับ 20 kpc จงหาระยะใกล้สุดจากศูนย์กลาง

1.8) ดั๊กกาเล็กซี่ YKY มีความเร็วที่หมุนรอบตัวเอง 230 km/s ณ ตำแหน่งที่ขอบที่อยู่ห่างจากศูนย์กลาง 9.6 kpc กำหนดให้กาเล็กซี่มีการกระจายมวลอย่างสม่ำเสมอเป็นทรงกลม และดาวแต่ละดวงมีมวลเฉลี่ยเท่ากับมวลดวงอาทิตย์

- ก. จงหามวลของกาเล็กซี่ YKY ที่อยู่ภายในรัศมี 9.6 kpc
- ข. จงหาจำนวนโดยประมาณของดาวในกาเล็กซี่ YKY นี้

1.9) ถ้ากล้องดูดาวขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 เมตรที่มีความสามารถในการรับแสงในหนึ่งชั่วโมงได้ค่าหนึ่ง แล้วกล้องขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 เมตร จะใช้เวลาเท่าไรในการรับแสงเท่ากันนี้

1.10) กล้องโทรทรรศน์ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 นิ้ว จะส่องดูดาวสีเขียวที่มีความยาวคลื่น 532 นาโนเมตร 2 ดวง ที่มีระยะเชิงมุมอย่างน้อยที่สุดเป็นมุมเท่าใดจึงจะสามารถมองเห็นดาวทั้งสองดวงแยกกัน

ดาวฤกษ์มีอุณหภูมิที่ผิว 8000 K มีรัศมี 0.5 เท่าของดวงอาทิตย์ และมีมวลประมาณเท่ากับดวงอาทิตย์  
มีดาวเคราะห์ดวงหนึ่งกำลังโคจรเป็นวงกลมรอบดาวฤกษ์ดวงนี้ โดยมีรัศมีของวงโคจร เท่ากับ 4.5 AU  
ดาวเคราะห์มีรัศมีเท่ากับ  $1.64 \times 10^8$  m

กำหนดให้ดาวเคราะห์หมุนรอบตัวเองเร็วพอที่จะทำให้อุณหภูมิบนพื้นผิวของดาวเคราะห์สม่ำเสมอตลอดวง

- ก. จงคำนวณหาอุณหภูมิผิวของดาวเคราะห์ โดยพิจารณาว่าดาวทั้งสองเป็นวัตถุดำ
- ข. ความยาวคลื่นของสเปกตรัมที่ดาวฤกษ์และดาวเคราะห์แผ่ออกมาสูงสุดเท่าใด
- ค. จงคำนวณค่าความแตกต่างของโชติมาตรโบลเมตริก (absolute bolometric magnitude) ของดาวฤกษ์กับของดาวเคราะห์ โดยไม่พิจารณาว่าดาวเคราะห์สะท้อนแสงดาวฤกษ์
- ง. ถ้าระบบดาวเคราะห์นี้ถูกตรวจพบด้วยวิธี transit นักดาราศาสตร์จะพบว่าระบบดาวเคราะห์นี้มีคาบการโคจรเท่าไร

**ในสถานการณ์ใดที่พบว่าระบบดาวนี้มีโชติมาตรสูงสุดและต่ำสุด**

และโชติมาตรสูงสุดและต่ำสุดที่สังเกตได้นี้มีค่าต่างกันเท่าไร เมื่อกำหนดให้

ระนาบการโคจรของดาวเคราะห์ขนานกับแนวสายตา และระบบดาวเคราะห์นี้อยู่ห่างออกไป 10 pc

1.1) ดาวฤกษ์ดวงหนึ่งอยู่ห่างจากโลก 200 ปีแสง จะต้องมีอัตราเร็วตามขวาง (เมื่อสังเกตจากโลก) อย่างน้อยที่สุดเป็นเท่าใด เราจึงจะสามารถสังเกตเห็นการเคลื่อนที่เฉพาะ (proper motion) ของดาวฤกษ์นี้ได้จากการสังเกตเป็นเวลาห่างกันหนึ่งปีด้วยกล้องโทรทรรศน์ที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 8 นิ้ว [กำหนดให้ว่า ขีดจำกัดการแยก (resolving power) ของกล้อง หรือ Dawes limit คือ  $\theta_{\min} = \frac{4.56}{D}$  โดยหน่วยของ  $D$  เป็นนิ้ว และหน่วยของ  $\theta$  เป็นฟิลิปดา (arcseconds)]

1.6) ดาวเคราะห์น้อยดวงหนึ่งมีระยะ perihelion และ aphelion เป็น 2 AU และ 4 AU ตามลำดับ จงหาค่า  
(ก) semi-major axis,  $a$       (ข) orbital period,  $T$       (ค) eccentricity,  $e$

1.8) กล้องโทรทรรศน์ใช้กระจกขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 เมตร

สามารถแยกภาพของดาวคู่ด้วยแสงสีเหลืองความยาวคลื่น 550 นาโนเมตรได้พอดี ดาวคู่นี้อยู่ห่างจากโลก  $3.1 \times 10^{19}$  เมตร จงหาระยะห่างระหว่างดาวคู่นี้



1.1) กาแล็กซีหมุนรอบตัวเอง วัด redshift parameters ที่ขอบกาแล็กซีได้ค่าต่ำสุดและสูงสุดเป็น 1.99 และ 2.01 จงหาระยะห่างไปยังกาแล็กซีนี้

1.5) ดาวดวงหนึ่งเคลื่อนที่เชิงมุมได้ 4ฟิลิปดา ในเวลา 1 ปี ดาวนี้อยู่ห่าง 2.4 pc และมีความเร็วตามแนวรัศมีเท่ากับ 80 km/s จงหาขนาดของความเร็วลัพธ์ของดาวนี้

1.3) ถ้าสมมุติว่าดวงอาทิตย์เป็นทรงกลมที่มีมวล  $M$  สมำเสมอรัศมี  $R$  และมีพลังงานรวมเป็น  $-\frac{3}{10} \frac{GM^2}{R}$  หากดวงอาทิตย์แผ่พลังงานในอัตรา  $3.826 \times 10^{26}$  J/s จงหาอัตราการหดตัวของดวงอาทิตย์

1.4) ดวงอาทิตย์โคจรเป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางของกาแล็กซีทางช้างเผือกด้วยรัศมี  $R = 2.6 \times 10^{20}$  m ให้กาแล็กซีมีมวล  $M_G = 7 \times 10^{11} M_\odot$  จงหาคาบการโคจรรอบกาแล็กซีของดวงอาทิตย์

- 1.5)
- ก. จงหาความเร็วหลุดพ้น (escape velocity) ของวัตถุที่จะสามารถเคลื่อนที่หลุดออกจากผิวของดวงอาทิตย์
  - ข. ไฮโดรเจนไฮโดรเจน ณ อัตราเร็ว rms (root mean square speed) ที่ผิวของดวงอาทิตย์ต้องมีอุณหภูมิเท่าใดจึงจะสามารถหลุดออกจากผิวดวงอาทิตย์ได้ โดยปกติในสภาวะสมดุลเชิงความร้อน ไฮโดรเจนจะสามารถหลุดได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
  - ค. ความเร็วหลุดพ้นที่ผิวดวงอาทิตย์เป็นกี่เท่าของความเร็วหลุดพ้นที่ผิวโลก

1.7) หากดาว Aldebaran มี proper motion เท่ากับ  $0''.20$  ต่อปี และพารัลแลกซ์มีค่ากับ  $0''.048$  โดยที่ดาวมีเส้นสเปกตรัมของเหล็กที่ตรวจวัดได้มีค่า  $\lambda = 440.579$  nm (เหล็กมีความยาวคลื่นปกติ  $\lambda = 440.500$  nm) ค่าของ radial velocity, tangential velocity และ total velocity เท่ากับเท่าใด



**ข้อ 2. (15 คะแนน)**

**ตอนที่ 1** ดาวเทียมมวล  $m$  โคจรรอบโลกมวล  $M$  เป็นแนววงกลมรัศมี  $R$  ด้วยอัตราเร็ว  $u$  จงวิเคราะห์เพื่อหา

- (1ก) ค่า  $u$  ในรูปของ  $R, M, G$
- (1ข) คาบของวงโคจรนี้ในรูปของ  $R, M, G$
- (1ค) พลังงานรวมของดาวเทียมในรูปของ  $m, R, M, G$
- (1ง) โมเมนตัมเชิงมุมของดาวเทียมเทียบกับศูนย์กลางโลกในรูปของ  $m, R, M, G$

**ตอนที่ 2** ต่อมาดาวเทียมถูกชนโดยขยะอวกาศในแนวตั้งฉากกับระนาบการโคจรเดิม

ทำให้มีองค์ประกอบของความเร็วนั้นในแนวตั้งฉากกับระนาบเดิมขนาด  $\beta u$  (กำหนดว่า  $\beta < 1$ ) จงวิเคราะห์เพื่อหา

- (2ก) ความเร็วทันทีหลังถูกชนมีขนาดเท่าใด ในรูปของ  $R, M, G$  และ  $\beta$
- (2ข) ค่าความรี (eccentricity  $e$ ) ของวงโคจรใหม่ซึ่งเป็นวงรีและบรรยายได้ด้วยสมการ  $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  ซึ่ง  $\theta$  เป็นมุมที่แนวระหว่างโลกกับดาวเทียมกวาดไปจากตำแหน่งที่ดาวเทียมถูกชน ตอบในรูปของ  $\beta$
- (2ค) ระยะไกลสุดจากศูนย์กลางโลกของดาวเทียมในวงโคจรใหม่เป็นเท่าใด ในรูปของ  $R, \beta$
- (2ง) อัตราเร็วของดาวเทียมที่จุดไกลสุดนี้ ในรูปของ  $R, M, G$  และ  $\beta$

**ตอนที่ 3** (สำหรับกรณี  $\beta > 1$ )

- (3ก) จงแสดงโดยใช้หลักอนุรักษ์พลังงานว่า ในกรณีที่  $\beta > 1$   
นั้นดาวเทียมสามารถหลุดพ้นจากวงโคจรรอบโลกไปถึงอนันต์ได้
- (3ข) ดาวเทียมมีอัตราเร็วเท่าใดที่อนันต์ ตอบในรูปของ  $R, M, G$  และ  $\beta$
- (3ค) จงหามุมระหว่างความเร็วที่ตำแหน่งอนันต์กับความเร็วตั้งต้นในทันทีก่อนถูกชนขยะอวกาศ

กลุ่มก๊าซที่เหลือจากการเกิด supernova คงเหลือกำลังขยายตัวเป็นทรงกลมด้วยอัตราเร็ว  $1000 \text{ km s}^{-1}$  และเปล่งแสง  $H\alpha$  (ความยาวคลื่นในห้องทดลองเท่ากับ  $656.3 \text{ nm}$ )

ผู้สังเกตที่สังเกตสเปกตรัมเปล่งออกของก๊าซนี้ในแนวใกล้ศูนย์กลางพบว่ามีการเปล่งออกของสเปกตรัม 2 เส้นใกล้กัน

จงหาผลต่างของความยาวคลื่นเปล่งออกมาจาก supernova นี้

ความสว่างของดาวแปรแสง Cepheid มีการเปลี่ยนแปลงแมกนิจูดเท่ากับ 2 ถ้าอุณหภูมิยังผล (effective temperature) ของดาวขณะที่สว่างมากที่สุดเป็น 6000 K และสว่างน้อยที่สุดเป็น 5000 K จงหาว่ารัศมีของดาวในช่วงที่มีความสว่างมากที่สุดเป็นร้อยละเท่าใดของขณะที่มีความสว่างน้อยที่สุด

ถ่ายภาพดาว Magnitude-1 ด้วยกล้องขนาด  $4'' f/10$  ต้องใช้เวลาในการถ่ายภาพ 0.1 s ถ้าต้องการถ่ายภาพดาวที่มี Magnitude-6 ด้วยกล้องขนาด  $6'' f/15$  ต้องถ่ายภาพนานเท่าใด เพื่อให้ภาพมีความเข้มเท่าเดิมเมื่อใช้ฟิล์มที่มีความไวแสงเท่ากัน

**ข้อ 3** ในแบบจำลองสสารมืด (dark matter) ที่ง่ายที่สุด เราสมมติให้สสารมืดมีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอเป็นทรงกลมที่มีศูนย์กลางที่ใจกลางของกระจุกกาแล็กซี ในปัญหานี้เราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของมวลทดสอบซึ่งอยู่ภายในสสารมืดที่เป็นทรงกลมขนาดเล็ก รัศมี  $R$  มีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอด้วยความหนาแน่น  $\rho$  โดยไม่คำนึงถึงผลของมวลอื่นๆ เช่น ดาวฤกษ์อื่นๆ ในกาแล็กซีเพื่อให้สามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ได้ง่ายที่สุด เราต้องการหาว่ามวลทดสอบมวล  $m$  จะมีการเคลื่อนที่เป็นเส้นทางอย่างไรในทรงกลมสสารมืดนี้

สมมติให้มวลทดสอบเริ่มเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งโดยมีความเร็วต้น  $v_0$  ในทิศตั้งฉากกับแนวเชื่อมระหว่างมวลทดสอบกับจุดศูนย์กลางของทรงกลมสสารมืด และสมมติให้ระยะทางจากมวลทดสอบถึงจุดศูนย์กลางของทรงกลมสสารมืดมีค่า  $r_0$  ให้สมมติว่าไม่มีแรงเสียดทานที่มาจากการถ่ายเทโมเมนตัมระหว่างมวลทดสอบกับอนุภาคของสสารมืดระหว่างการเคลื่อนที่

**ข้อ 3.1** จงหาแรงที่มวลทดสอบถูกกระทำ ที่ระยะ  $r$  ใดๆ โดยคิดเฉพาะมวลภายในเสมือนว่ามีมวลอยู่ที่จุดศูนย์กลางเท่านั้นที่มีผล [1 คะแนน]



**ข้อ 3.2** จงหาพลังงานศักย์ของมวลทดสอบ โดยพลังงานศักย์นี้มีค่าเป็นศูนย์ที่ระยะอนันต์ [1 คะแนน]

**ข้อ 3.3** จงเขียนค่าของโมเมนตัมเชิงมุม  $L$  ของมวลทดสอบ ณ ตำแหน่งใดๆ  $L$  เป็นปริมาณที่มีค่าคงที่ตลอดการเคลื่อนที่หรือไม่ ด้วยเหตุผลอย่างไร [2 คะแนน]  
กำหนดให้  $v_r = \frac{dr}{dt}$  และ  $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$

**ข้อ 3.4** จงเขียนรูปของพลังงานรวม  $E$  ในรูปที่ขึ้นกับ  $u$ ,  $\theta$ , และ  $\frac{du}{d\theta}$  โดย  $u \equiv \frac{1}{r}$   
(และความสัมพันธ์ที่ใช้ได้ คือ  $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ ) [2 คะแนน]

**ข้อ 3.5** การแก้สมการอนุพันธ์หาเส้นทางการเคลื่อนที่ของมวลทดสอบยุ่งยากเกินไป

แต่อาจจะพิสูจน์ได้ว่าการเคลื่อนที่เป็นวงรี โดยมีรูปสมการ  
(สำหรับ  $\theta = 0$  ที่จุดตั้งต้น) ดังนี้ คือ

$$r^2 = \frac{1}{u^2} = \frac{P^2}{1 + Q \cos 2\theta}$$

จงแสดงว่าสมการนี้เป็นวงรีและจงหาระยะครึ่งแกน  $a$  และ  $b$  (ในรูปของ  $P$  และ  $Q$ )  
[2 คะแนน]

**ข้อ 3.6** การคาบของวงโคจรเป็นเท่าใด [2 คะแนน]

การสังเกตทางดาราศาสตร์ได้รับผลกระทบโดยตรงจากการดูดกลืนพลังงานของแสงในชั้นบรรยากาศ เราสมมติว่าบริเวณเหนือศีรษะของผู้สังเกตมีชั้นบรรยากาศหนา  $t$  คุณสมบัติที่ชั้นบรรยากาศนั้นดูดกลืนแสงจะไม่ต่างกันมากที่ความสูงเท่ากัน ดังนั้นเราจะแยกศึกษาชั้นบรรยากาศที่ความสูง  $h$  ชั้นดังกล่าวให้มีความหนาน้อยมากๆ  $\delta h$  ในชั้นบรรยากาศดังกล่าวคุณสมบัติการดูดกลืนเกือบสม่ำเสมอ ให้ชั้นล่างสุดของบรรยากาศเป็นระดับที่  $h = 0$  และบรรยากาศชั้นสูงที่สุดเป็นระดับที่  $h = t$  แสงจากท้องฟ้าตกกระทบระดับ  $h = t$  ก่อน สมมติว่าสัดส่วนความเข้มของแสงที่ลดลงจะแปรผันตรงกับระยะที่แสงต้องผ่านอากาศค่าคงที่การแปรผันเป็น  $\alpha(h)$  ที่ความสูงแถบนั้น ให้พิจารณาผลดังกล่าวเท่านั้น (Atmospheric extinction)

**ข้อ 4.1** ให้  $I(h)$  เป็นความเข้มของแสงที่ตกกระทบบรรยากาศความสูง  $h$  และ  $I(h - \delta h)$  เป็นความเข้มที่มีหลังจากผ่านชั้นบรรยากาศนั้นและจะไปตกกระทบในชั้นถัดลงมา จงหา  $I(h - \delta h)$  ในรูป  $I(h)$  ในกรณีที่แสงตกกระทบชั้นบรรยากาศโดยตรงในแนวตั้ง และกรณีให้แสงตกลงเฉียงๆนั้นโดยทำมุม zenith distance =  $z$  กับแนวตั้ง (ถ้า  $z$  ไม่มากเกินไป) [2 คะแนน]

**ข้อ 4.2** จงแสดงว่าอัตราส่วน  $\frac{I(0)}{I(t)} = e^{-A_\alpha \sec(z)}$  เมื่อ  $I(0)$  คือ ความเข้มของแสงที่  $h = 0$  และ

$I(t)$  คือ ความเข้มของแสงที่  $h = t$  และ  $A_\alpha$  คือพื้นที่ใต้กราฟของ  $\alpha(h)$  กับ  $h$  (หรือ  $A_\alpha = \int_0^t \alpha(h) dh$ ) ในกรณีที่แสงตกเฉียงโดยมีมุม zenith distance =  $z$  โดยไม่คิดผลการหักเหของชั้นบรรยากาศ (อาจใช้ความสัมพันธ์  $1 - x \approx e^{-x}$ ) [4 คะแนน]

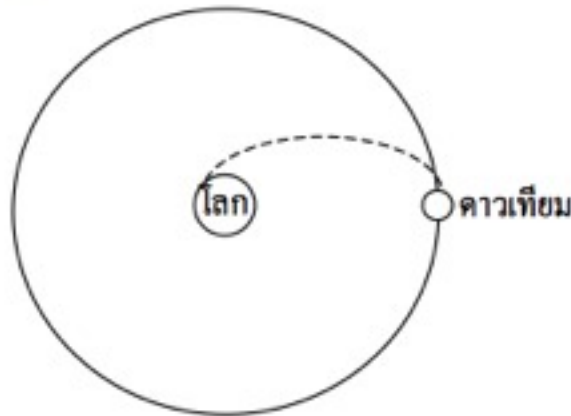
**ข้อ 4.3** ถ้าการสังเกตดาวเดียวกันที่มุม zenith distance  $30^\circ$  และ  $45^\circ$  ให้แมกนิจูดปรากฏต่างกัน 0.2 จงหาว่าแมกนิจูดปรากฏของดาวดวงนั้นจริงแล้วเป็นเท่าใด ถ้าที่ zenith distance  $30^\circ$  มีแมกนิจูดปรากฏ 4.5 [2.5 คะแนน]

**ข้อ 4.4** สมมติว่าความเข้มแสงลดลงเหลือ 99.5% ทุกๆ หนึ่งกิโลเมตรของชั้นบรรยากาศ จงหาความหนาชั้นบรรยากาศ [1.5 คะแนน]

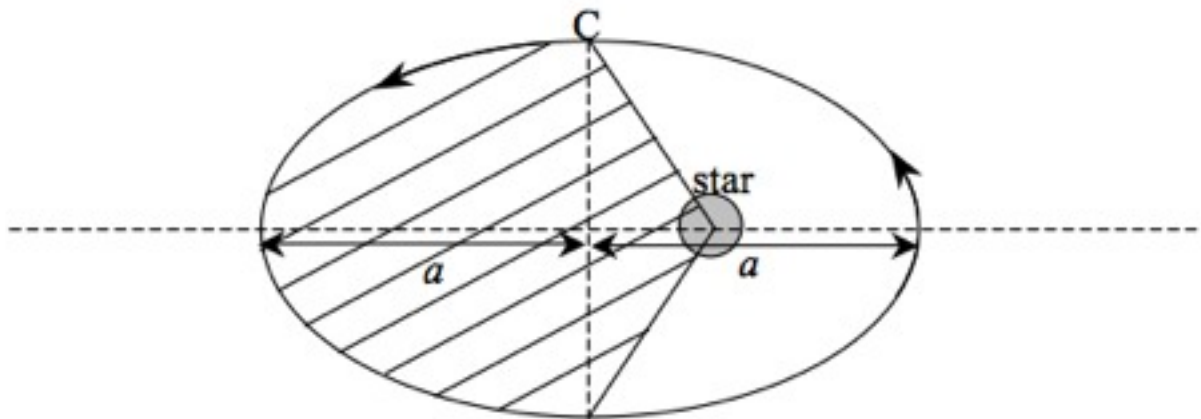


1.1 ดาวเทียมดวงหนึ่งโคจรรอบโลกเป็นวงกลมด้วยรัศมี 7 เท่าของรัศมีโลก สมมติให้โลกเป็นทรงกลม

หอบังคับการตัดสินใจปรับวงโคจรของดาวเทียมให้เป็นวงรีเพื่อให้ดาวเทียมตกลงสู่พื้นโลกที่ผิวฝั่งตรงข้ามกับตำแหน่งที่ปรับวงโคจรพอดี จงหาช่วงเวลาที่ดาวเทียมใช้ในการตกสู่พื้นโลก (ตอบเป็นตัวเลขในหน่วยชั่วโมง)



1.2 ดาวเคราะห์ดวงหนึ่งโคจรรอบดาวฤกษ์มวลมาก (มากกว่าดาวเคราะห์มากๆ) เป็นวงโคจรรูปวงรีดังรูป ถ้าเวลาในการโคจรจากจุด C ไปถึง D มีค่าเป็น 66% ของคาบการโคจร จงหาค่าความรีของวงโคจรนี้



1.3 ถ้าค่าความรีของวงโคจรดาวพุธเป็น 0.2

จงหาอัตราส่วนของแรงผลักดันต่อดาวพุธที่มาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ที่จุด aphelion และ perihelion ของวงโคจร

1.5 ดาวฤกษ์ดวงหนึ่งสามารถวัดอุณหภูมิได้ 10,000 เคลวิน

ดาวฤกษ์ดวงนี้กำลังเคลื่อนที่ออกไปด้วยอัตราเร็ว 200 กิโลเมตรต่อวินาที  
จงหาความยาวคลื่นของแสงที่มีความเข้มสูงสุดที่สังเกตได้ของดาวฤกษ์ดวงนี้

1.7 เส้นมืด (Absorption) Y ของดวงอาทิตย์มีความยาวคลื่นเท่ากับ 400 nm เมื่อวัดเส้นนี้ของ Quasar B ซึ่งเคลื่อนที่ห่างออกจากโลกปรากฏว่ามีความยาวคลื่นเท่ากับ 1,400 nm ซึ่งทำให้เกิดค่า redshift  
จงหาว่า Quasar B เคลื่อนที่ห่างออกจากโลกด้วยความเร็วเป็นกี่เท่าของความเร็วแสง

1.8 ซูเปอร์โนวาที่ระยะ 10,000 พาร์เซก โดยแก๊สที่ห่อหุ้มกระจายตัวออกด้วยความเร็วเฉลี่ย 1,000 กิโลเมตรต่อวินาที เส้นผ่านศูนย์กลางเชิงมุม (angular diameter) เพิ่มขึ้นกี่ฟิลิปดาใน 1 ปี

1.9 ถ้ากาแล็กซีมี red shift 15% จงหาอายุของเอกภพและระยะห่างของกาแล็กซีนี ถ้ากำหนดให้  $H_0 = 70 \text{ km/(s Mpc)}$

1.13 ดาวฤกษ์ในแถบลำดับหลักดวงหนึ่ง มีอุณหภูมิผิว 25,000 เคลวิน และมีรัศมี  $10R_\odot$   
ถ้าในช่วงที่ดาวฤกษ์ดวงนี้วิวัฒนาการไปเป็นดาว supergiant สีเหลือง-ส้ม  
ซึ่งอุณหภูมิของดาวลดลงเหลือ 5,000 เคลวิน โดยกำลังส่องสว่างเหมือนเดิม ถ้าวัดรัศมีของดาว supergiant จะเป็นเท่าใด

1.14 ถ้าโบโลเมตริกแมกนิจูดสัมบูรณ์ (absolute bolometric magnitude) ของดาววิกาเท่ากับศูนย์  
ขณะที่ดวงอาทิตย์มีค่าโบโลเมตริกแมกนิจูดสัมบูรณ์ ( $M_{bol}$ ) เท่ากับ +4.72  
จงหารัศมีของดาววิกาในหน่วยของรัศมีของดวงอาทิตย์ เมื่ออุณหภูมิยังผลของดาววิกาเท่ากับ 9600 เคลวิน และอุณหภูมิยังผลของดวงอาทิตย์ เท่ากับ 6000 เคลวิน



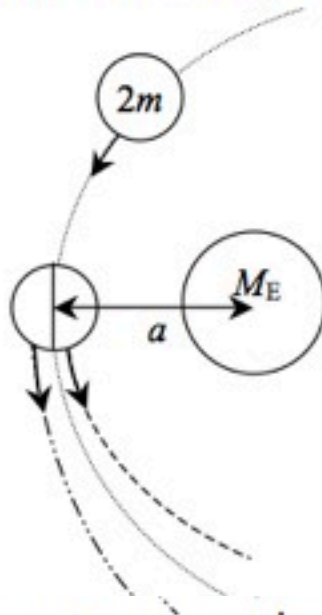
2.

สะเก็ดดาวโคจรเข้ามาจากระยะอนันต์เข้าเฉียดโลกโดยมีวงโคจรเป็นวงโคจรหลุดพ้นจากแรงโน้มถ่วงพหุติ (พาราโบลา) และไม่มีการหมุนรอบตัวเอง

ในขณะที่อยู่ใกล้โลกที่สุดจะอยู่ห่างจากโลกเป็นระยะทาง  $a$  มากกว่ารัศมีของโลก ถ้า ณ จุดใกล้สุดนี้อยู่ใกล้โลกเพียงพอก็แรงไทดัล (tidal force)

เอาชนะแรงยึดเหนี่ยวในสะเก็ดดาวได้พหุติ ทำให้สะเก็ดดาวแตกออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กัน โดยมีจุดศูนย์กลางมวลข้อย่อยห่างกันเป็นระยะ  $2\varepsilon$

และอยู่เป็นแนวเดียวกันกับจุดศูนย์กลางมวลของโลกในขณะที่แตก กำหนดให้มวลของโลกเป็น  $M_E$ , มวลสะเก็ดดาวก่อนแตกเป็น  $2m$  และ  $M_E \gg 2m$ ,  $\varepsilon = a$



- ก. จงคำนวณหาอัตราเร็วของสะเก็ดดาวในขณะที่อยู่ใกล้โลกที่สุดนี้ (2 คะแนน)
- ข.
  - (1) จงคำนวณหาผลต่างของแรงโน้มถ่วงที่โลกกระทำต่อก้อนมวลทั้งสองส่วน (1 คะแนน)
  - (2) จงคำนวณหาผลต่างของแรงหนีศูนย์กลางที่กระทำต่อก้อนมวลทั้งสองส่วน (1 คะแนน)
  - (3) จงคำนวณหาแรงโน้มถ่วงของก้อนมวลทั้งสอง

ในการวิเคราะห์เพื่อตอบคำถามข้างล่างให้ถือว่าแรงโน้มถ่วงของสะเก็ดดาวเป็นเสมือนแรงโน้มถ่วงของจุดมวลที่อยู่ห่างกันเป็นระยะ  $2\varepsilon$  (1 คะแนน)

  - (4) ถ้าคิดว่าแรงยึดเหนี่ยวภายในสะเก็ดดาวมาจากแรงโน้มถ่วงเท่านั้น จงคำนวณหาค่าของ  $a$  ที่จำเป็นที่ทำให้เกิดการแตกตัวนี้ (2 คะแนน)
- ค. หลังการแตกตัวสะเก็ดดาวแต่ละชิ้นจะมีพลังงานเป็นอย่างไร และมีทางการเคลื่อนที่เป็นรูปใด (ไฮเพอร์โบลา พาราโบลา หรือวงรี) จะมีชิ้นใดตกถึงโลกหรือไม่ (3 คะแนน)

3. การเคลื่อนที่กลับไปกลับมาของดวงอาทิตย์รอบระนาบของกาแล็กซี (galactic midplane) ปัจจุบันดวงอาทิตย์กำลังเคลื่อนที่ขึ้นลงสัมพันธ์กับระนาบของกาแล็กซีด้วยความเร็ว

$$v_0 = 7 \text{ km s}^{-1} \text{ และอยู่เหนือระนาบกลางเป็นระยะทาง 30 pc}$$

การเคลื่อนที่นี้ถูกหน่วงด้วยแรงโน้มถ่วงเข้าหาระนาบกลางตลอดเวลา

ทั้งนี้ถือว่ากาแล็กซีทางช้างเผือกของเรามีรัศมีโตกว่าความหนาของมันมากพอที่จะประมาณได้ว่าโตเป็นอนันต์

คำแนะนำ เราสามารถแสดงได้ว่าแผ่นมวลราบที่โตเป็นอนันต์ที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่เป็น  $\sigma$

กิโลกรัมต่อตารางเมตร จะดึงดูดมวล  $m$  เหนือมันด้วยแรงโน้มถ่วง  $F = 2\pi G\sigma m$

แรงนี้ไม่ขึ้นกับระยะห่างของมวล  $m$  จากแผ่นมวลราบนี้

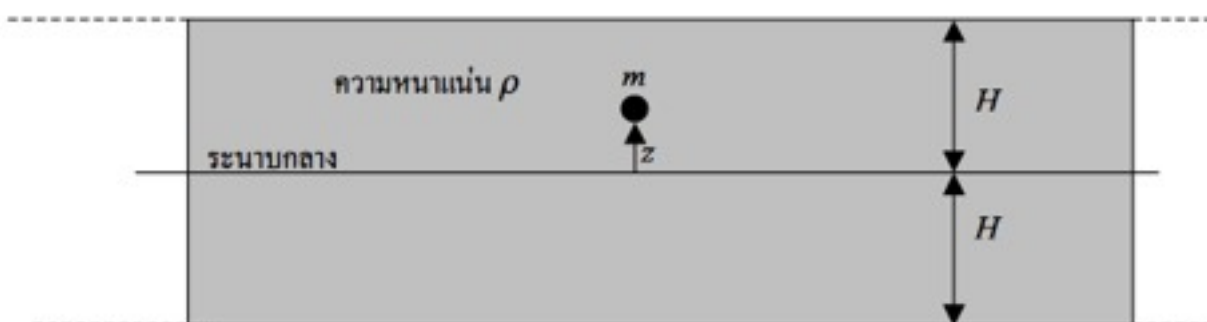
จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. มวล  $m$  กิโลกรัม กำลังอยู่เหนือแผ่นมวลราบที่มีความหนา  $D$  เมตร และมีความหนาแน่นเชิงปริมาตร  $\rho$  กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร จงหาขนาดและทิศทางของแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อ  $m$  โดยแผ่นราบนี้ (ตอบในรูป  $G, \rho, D$  และ  $m$ ) (2 คะแนน)

●  $m$



ข.



รูปนี้แสดงมวล  $m$  กำลังอยู่ที่ตำแหน่งความสูง  $z$  เหนือระนาบกลางของแผ่นมวลใหญ่มากซึ่งมีความหนา  $2H$  จงหาขนาดและทิศทางของแรงที่กระทำต่อมวล  $m$  (4 คะแนน)



ค. จงใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันเพื่อแสดงว่าความเร่ง  $a$  ของมวล  $m$  เป็นตามสมการ  $ma = -Cz$  จงหาค่าของ  $C$  ในรูปของ  $\rho, G$  และจงหาค่าคาบของการสั่นของ  $m$  ด้วยในรูปของ  $\rho, G, m$  (2 คะแนน)

คำแนะนำ ซึ่งสมการ  $ma = -Cz$  จะเป็นสมการของการสั่นแบบซิมเปิลฮาร์โมนิก ที่มีค่า  $\omega^2 = \frac{C}{m}$  เมื่อ  $\omega$  เป็นความถี่เชิงมุมของการสั่น

ง. กำหนดว่าความหนาแน่นของมวลสารในกาแล็กซีตรงบริเวณที่ดวงอาทิตย์ของเราอยู่เป็น  $\rho = 0.15 M_\odot (pc)^{-3}$  จงหาค่าคาบของการสั่นขึ้นลงของดวงอาทิตย์ออกมาในหน่วย “ล้านปี” (2 คะแนน)