



เอกสารประกอบการสอนวิชา
Optics (ทัศนศาสตร์)
SC513116

ชาคริต พงษ์กิติวนิชกุล

สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

แสงเชิงเรขาคณิต 1

1. บทนำ

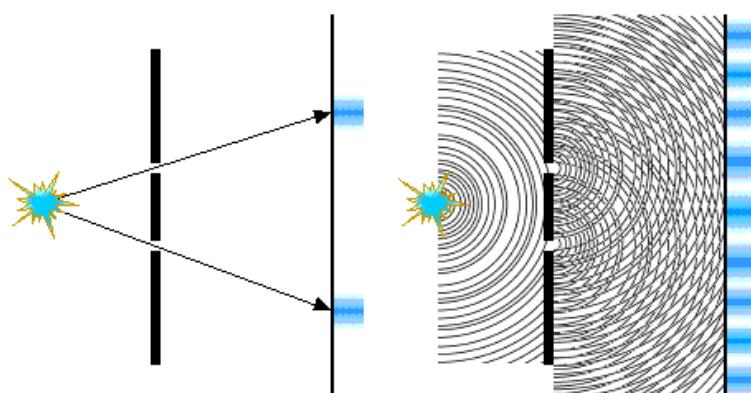
ในวิชานี้เราจะได้เรียนรู้ถึงพฤติกรรมและปรากฏการณ์ของแสงในแง่มุมต่างๆ โดยคร่าวๆ วิชาทัศนศาสตร์จะแบ่งการศึกษาออกเป็นสองกลุ่มใหญ่ๆ คือ แสงเชิงเรขาคณิต (geometrical optics) และแสงเชิงคลื่น (physical optics or wave optics)

ไอแซค นิวตัน (Isaac Newton) เชื่อว่าปรากฏการณ์ของแสงสามารถอธิบายได้ด้วยอนุภาคที่ถูกปลดปล่อยมาจากการแผ่ร่องรอยแสง โดยการแทนแสงด้วยเส้นตรงทำให้เราสามารถอธิบายปรากฏการณ์การสะท้อน (reflection) และการหักเห (refraction) ได้ โดยก้อนพลังงานของอนุภาคที่อธิบายปรากฏการณ์ของแสงถูกเรียกว่า โฟตอน (photon)

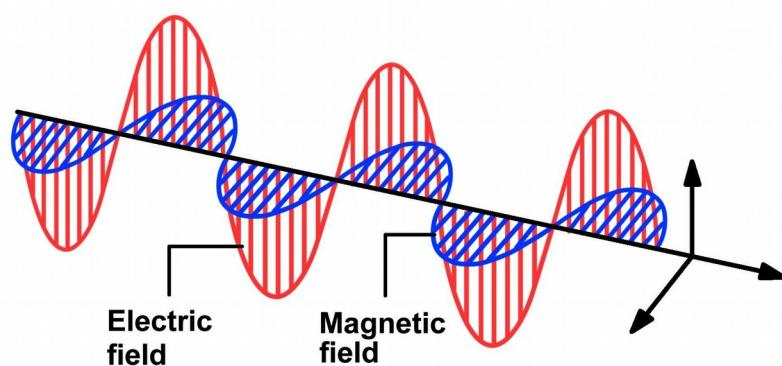
แต่อย่างไรก็ได้ การอธิบายแสงในลักษณะนี้นั้นไม่สามารถอธิบาย ปรากฏการณ์ของการแทรกสอด (interference) และการเลี้ยวเบน (diffraction) ได้ (ปรากฏการณ์นี้ถูกค้นพบจากการทดลองสิลิคุ่ของโรเมส ยัง) เนื่องจากว่า _____

The Two Logical Possibilities

1. If light consists of particles. 2. If light consists of waves.



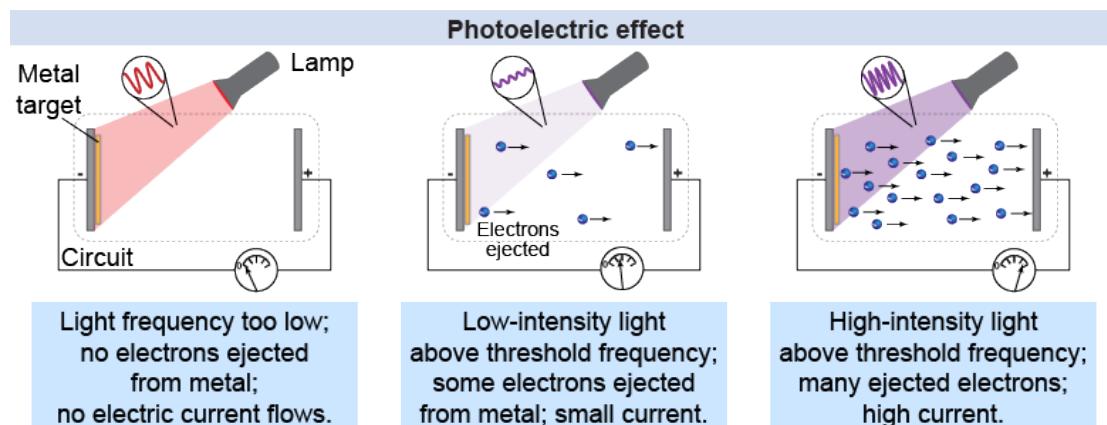
ต่อมาในศตวรรษที่ 19 James C. Maxwell ได้แสดงให้เห็นว่าแสงคือ _____



ซึ่งสมบัติของคลื่นอธิบายปรากฏการณ์ _____

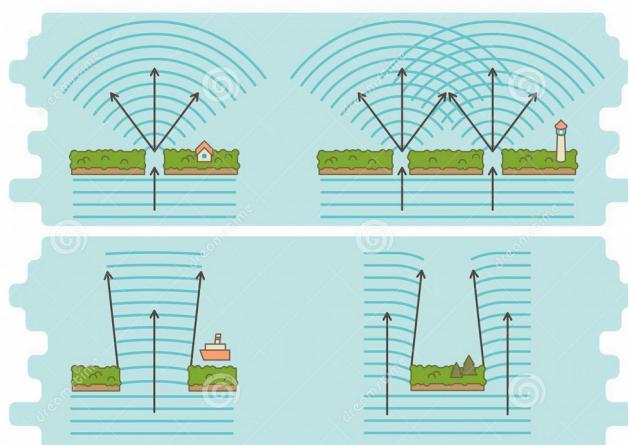
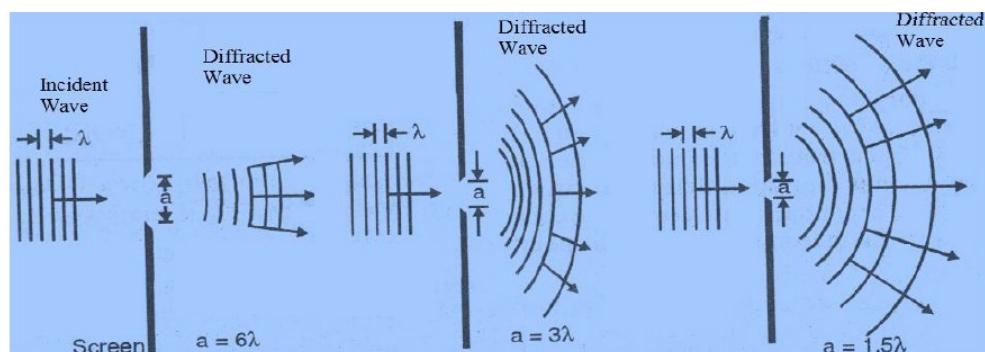
ได้อย่างสมบูรณ์ เนื่องจากหลักการซ้อนทับของคลื่นทำให้เกิดปรากฏการณ์ _____

แต่อย่างไรก็ดีฟิสิกส์หลังปี ค.ศ. 1900 ปรากฏการณ์เช่น photoelectric effect/Compton scattering ก็ทำให้แบบจำลองที่ใช้คลื่นในการอธิบายแสงมีปัญหา และจุดนี้เองก็เป็นจุดเริ่มต้นของทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัมในเวลาต่อมาด้วย



ทำให้เราสรุปได้ว่าแสงเป็นทั้ง

เราจะแยกสมบัติของแสงเชิงเรขาคณิตและแสงเชิงคลื่น(เชิงกายภาพ)ได้จาก



2. สมบัติเบื้องต้นของแสง

ความพยายามในการวัดความเร็วแสงทำให้เราทราบว่าแสงมีอัตราเร็ว _____
ในตัวกลางที่เป็น _____ โดยมีอัตราเร็ว _____

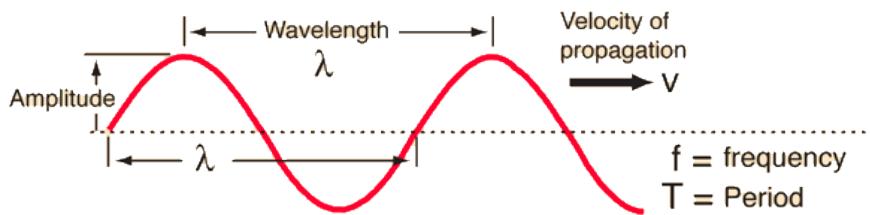
$$c = 2.9979 \times 10^8 \frac{m}{s} \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

ซึ่งนับได้ว่าเป็นค่าคงตัวของธรรมชาติ การที่อัตราเร็วแสงมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิงเนื่อยของผู้สังเกตใดๆ ทำให้เกิดวิชา _____

การเคลื่อนที่ของแสงในตัวกลางนั้นมีอัตราเร็วที่ _____ อัตราเร็วแสงในสัญญากาศโดยมีค่าดังนี้หากเห็นตัวบวก ซึ่งมีนิยามว่า

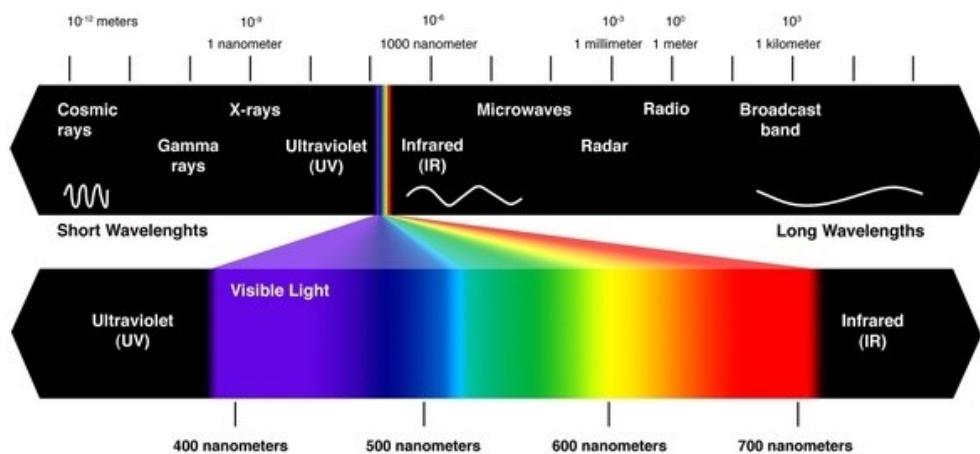
$$v = \frac{c}{n}$$

ตามความสัมพันธ์ของคลื่นทั่วไป เรายาบว่า



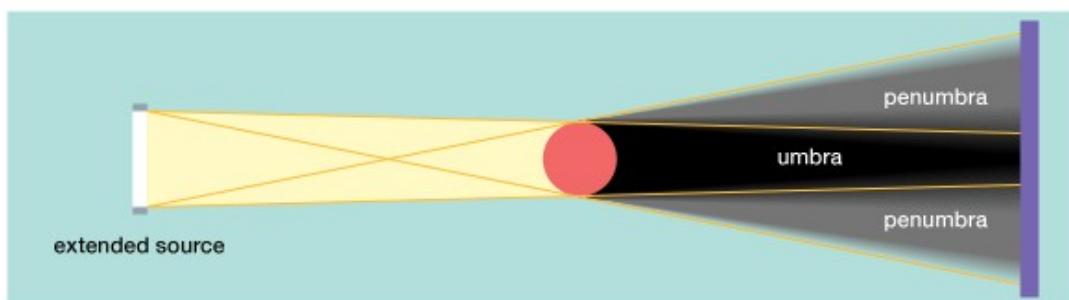
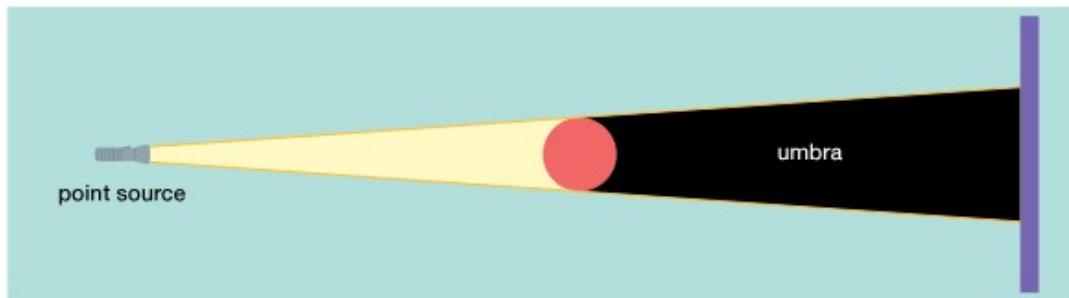
$$v = f\lambda = \frac{\lambda}{T}$$

เช่นแสงสีแดงมีความยาวคลื่น _____ มีความถี่เท่ากับ _____
เช่นแสงสีน้ำเงินมีความยาวคลื่น _____ มีความถี่เท่ากับ _____



3. แสง

เนื่องจากในแสงเชิงเรขาคณิต แสงเดินทางเป็น _____ ถ้ามีแหล่งกำเนิดแสงแบบจุด วัตถุที่มีความทึบจะสร้างเงาบนฉากดังภาพ ในขณะที่ถ้าแหล่งกำเนิดแสงมีขนาดจะทำให้เกิด



ตัวอย่าง

แหล่งกำเนิดแสงมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 ซม. ส่องแสงไปยังวัตถุทึบเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 ซม.

ถ้าบนฉากซึ่งห่างจากแหล่งกำเนิดแสง 6 เมตร มีเงามีดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 16 ซม. จงหา

ก. ระยะทางระหว่างแหล่งกำเนิดแสงและวัตถุทึบแสงนี้

ข. ความกว้างของเงาม้ว

4. ระยะเชิงแสง

เรารู้ว่าดัชนีหักเหของตัวกลางมีค่ามากกว่า 1 ($n > 1$)

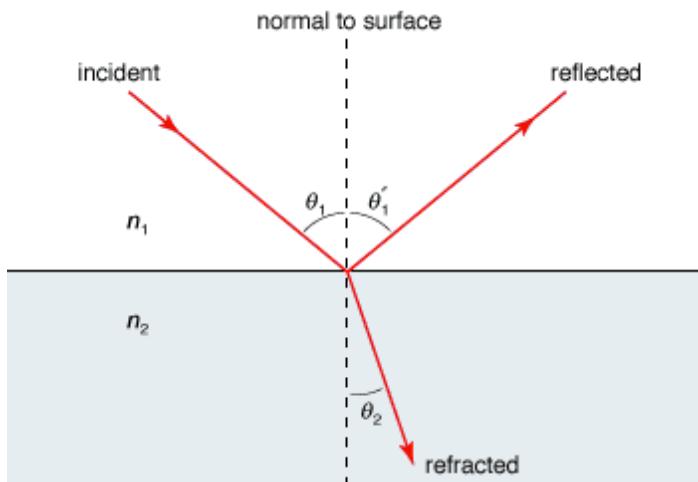
ในตัวกลางแสงเดินทาง _____ แสงในสุญญาการ หมายความว่าในระยะทางที่เท่ากัน แสงจะใช้เวลา _____ เมื่อเทียบกับแสงในสุญญาการ
ดังนั้นถ้าสมมติว่าแสงเดินทางด้วยความเร็ว c ในตัวกลาง ระยะทางจะต้องเพิ่มขึ้น ดังนั้นเราจะนิยาม
ระยะทางเชิงแสง S ว่า

$$S = nL$$

เมื่อ n เป็นดัชนีหักเห และ L เป็นระยะทางจริง

5. การสะท้อนและหักเห

เมื่อแสงเดินทางจากตัวกลางชนิดที่ 1 ไปต่อกรูบทบนผิวอยู่ต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองชนิดดังภาพ
แสงบางส่วนจะสะท้อนกลับออกมานอกลักษณะ (เดินทางกลับไปในตัวกลางที่ 1) และ แสงบางส่วนจะหักเหเข้าไป
ในตัวกลางที่ 2



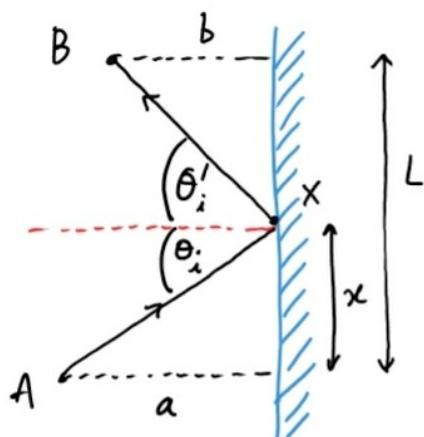
เส้นตั้งฉาก (normal line) คือเส้นที่ตั้งฉากกับผิวของรอยต่อ โดยมุมทั้งหมดถูกวัดจากเส้นตั้งฉาก
โดยมุม θ_i คือมุมตกกระทบ (incident angle) โดยวัดจาก _____
โดยมุม θ'_i คือมุมตกสะท้อน (reflected angle) โดยวัดจาก _____
โดยมุม θ_r คือมุมหักเห (refracted angle) โดยวัดจาก _____

6. หลักการของแฟร์มาต์ (Fermat's principle)

แสงจะ "เลือก" ทางเดินที่ใช้เวลาน้อยที่สุดเสมอ

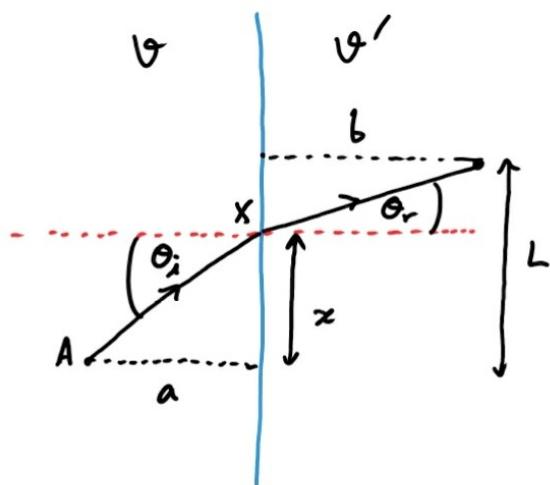
เราสามารถแสดงได้ว่า การสะท้อนและหักเหเป็นไปตามหลักการนี้

6.1 การสะท้อน (reflection)



$$\theta_i = \theta_i'$$

6.2 การหักเห (refraction)



$$n \sin \theta_i = n' \sin \theta_r$$

6.3 มุมวิกฤติ (critical angle)

จาก $\frac{n'}{n} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r}$ ดังเดาว่าถ้า $n' > n$ หรือ $v' > v$ และ _____

เมื่อเพิ่มนุ่มตั้งแต่มากขึ้นเรื่อยๆจนกระทั่ง $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ เราจะพบว่ามุมหักเหลี่ยมีค่า _____

ในทางกลับกันถ้า $n' < n$ หรือ $v' < v$ และ _____

เมื่อเพิ่มนุ่มตั้งแต่มากขึ้นเรื่อยๆจนถึงค่าหนึ่ง จะพบว่ามุมหักเหลี่ยมค่าสุดที่ _____ และค่ามุ่งตั้งแต่นั้นมาค่าเท่ากับ _____

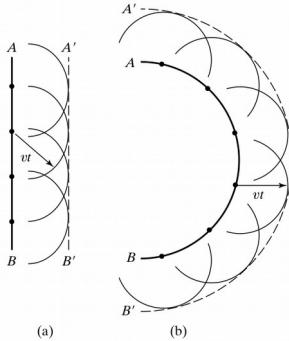
แสงเชิงเรขาคณิต 2

7. หลักการของหอยเกนส์

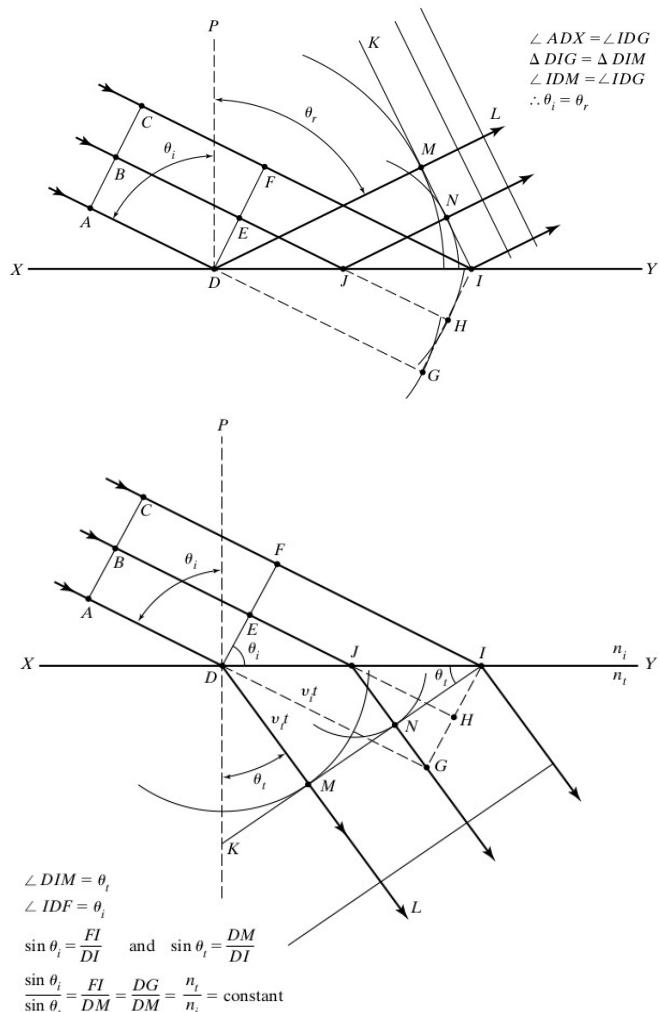
คือการใช้แสงเป็นคลื่นในการอธิบายการหักเหและการสะท้อนบอรอยต่อของตัวกลางสองตัว

ทุกจุดของหน้าคลื่นจะทำตัวเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่

การคิดเช่นนี้ทำให้เราสามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของคลื่นแสงได้ทั้งในกรณีหน้าคลื่นเป็นเส้นตรงและคลื่นวงกลม(หรือทรงกลม)ดังภาพ

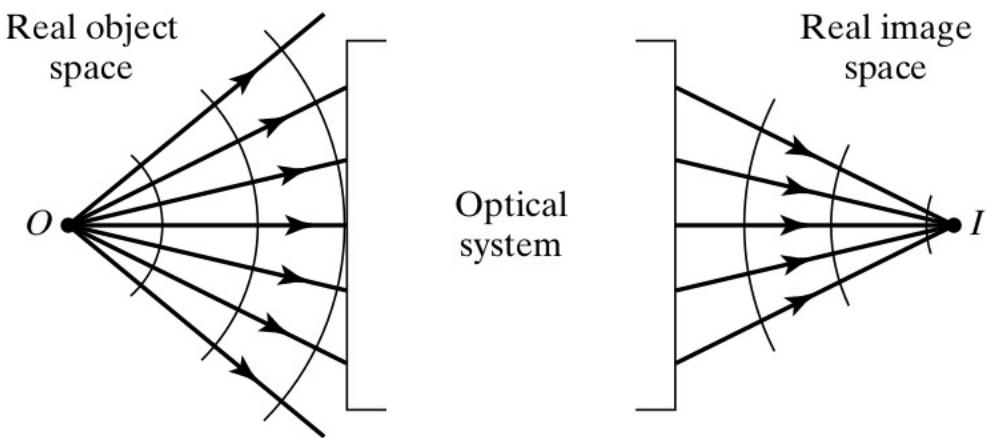


การสะท้อนและหักเหที่สามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกัน



8. ระบบเชิงแสง

ทางเดินของแสงคือเส้นที่ลาก _____ กับหน้าคลื่น ซึ่งบอกทิศทางการเคลื่อนที่ของแสง
 ตำแหน่งภาพถูกนิยามด้วย _____
 และตำแหน่งวัตถุถูกนิยามด้วย _____

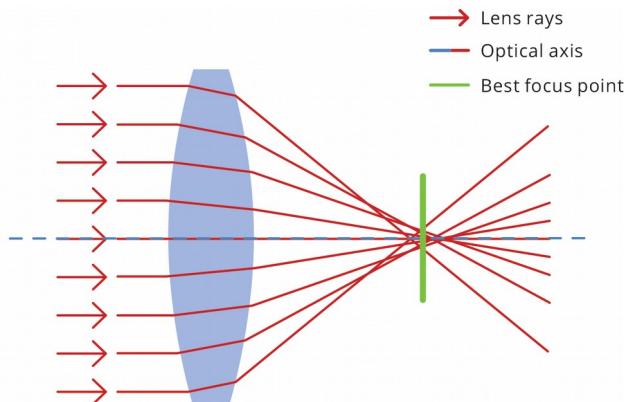


โดยจุด _____ และจุด _____ เป็นจุด _____ ซึ่งกันและกัน

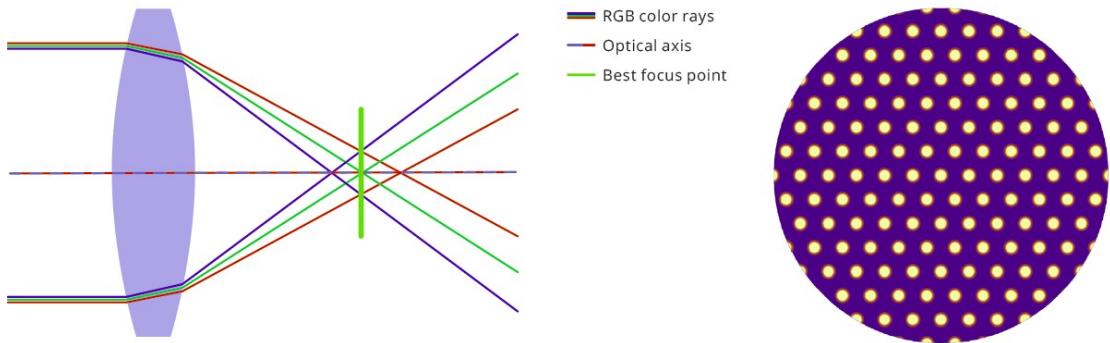
ภาพที่เกิดขึ้นอาจจะไม่สมบูรณ์เนื่องจากหลายสาเหตุ เช่น การกระเจิงของแสง, ความคลาด (aberration), และการเลี้ยวเบน (diffraction)

ความคลาด

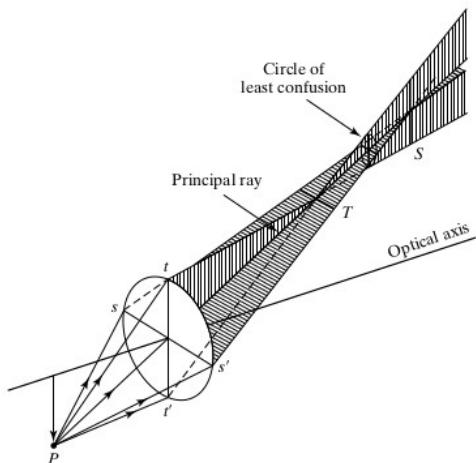
ความคลาดทรงกลม (Spherical Aberration) เกิดจากการที่ผิวทรงกลมของเลนส์มีสมบัติไม่ร่วม แสงไปที่จุดๆเดียว แต่ในกรณีที่วัตถุใกล้แกนแสงเราจะเห็นว่า _____



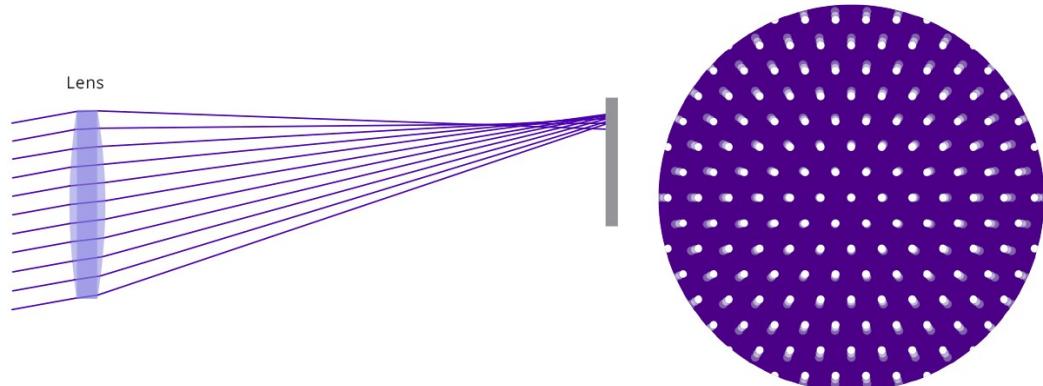
ความคลาดสี (Chromatic Aberration) เกิดจากการที่ดัชนีหักเหของแสงสำหรับแต่ละความยาวคลื่นมีค่าแตกต่างกัน ทำให้การหักเหของระบบเชิงแสงมีจุดรวมแสงซึ่งกับความยาวคลื่น



ความคลาดเอียง (astigmatism aberration) เกิดจากการณ์ที่จุดรวมแสงสำหรับแสงในแต่ละแนวไม่เป็นจุดเดียวกัน (ปรากฏการณ์นี้เกิดได้ในกรณีที่ผิวเลนส์โค้งอย่างไม่สม่ำเสมอในแต่ละแนว ตัวอย่าง เช่นผู้ที่มีภาวะสายตาเอียงเป็นตน)

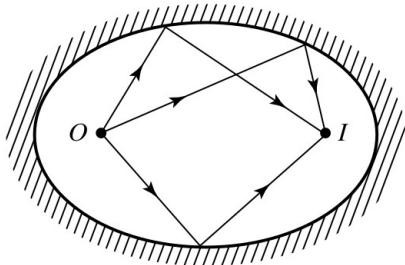


ความคลาดโคมา (Coma) คือการที่แสงไม่รวมที่จุดเดียวกันในกรณีที่วัตถุไม่อยู่ในแนวเดียวกับแกนเชิงแสง ทำให้ภาพมีลักษณะเป็นดาวหาง



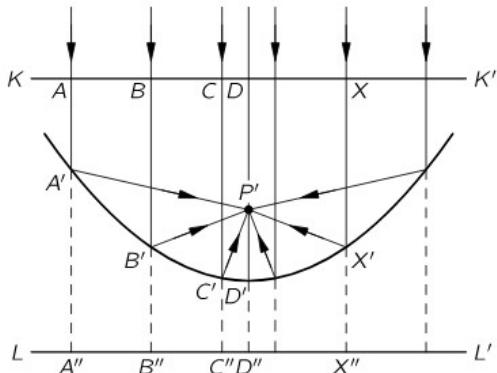
พื้นผิวcarที่เชี่ยน คือพื้นผิวของระบบเชิงแสงที่ทำให้ภาพเกิดได้อย่างสมบูรณ์แบบ

ในกรณีของกระบอกผิววงรี จากหลักการของแฟร์มาต์ทำให้เราทราบว่าจุดสังยุค (conjugate points) ต้องอยู่ในตำแหน่ง _____ ของวงรี เนื่องจากสมบัติของวงรีที่บอกว่า _____

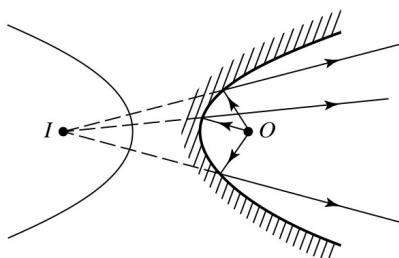


(a) Ellipsoid

ในกรณีของผิวพาราโบล่า จุดรวมแสงต้องอยู่ในตำแหน่งไฟกัสซึ่งความสามารถแสดงได้จากหลักการของแฟร์มาต์ดังนี้ เนื่องจากสมบัติของพาราโบล่าที่บอกว่า _____



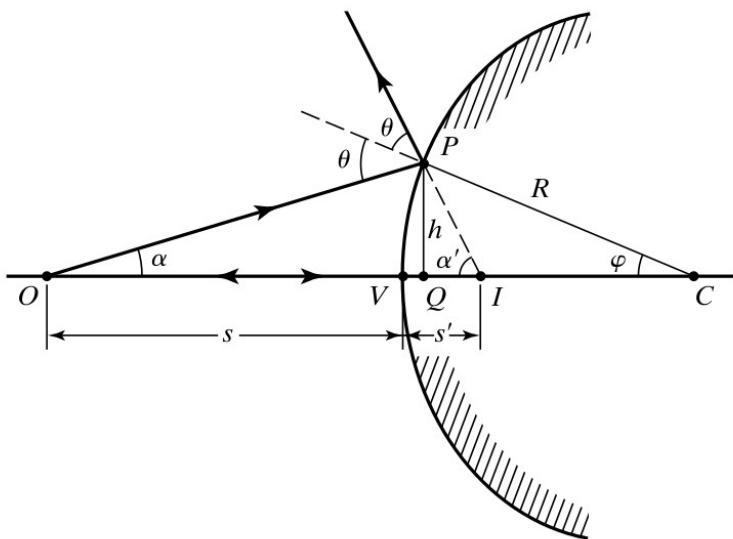
แบบฝึกหัด ผิวโค้งแบบไสเปอร์โนล่าเป็นผิวcarที่เชี่ยนอีกชนิดหนึ่ง จะใช้หลักการของแฟร์มาต์ในการพิสูจน์ว่าจุดสังยุคอยู่ที่จุดไฟกัส (คำแนะนำ – วัดวงกลมรัศมี R ซึ่งมีจุด | เป็นจุดศูนย์กลางดังภาพ)



(b) Hyperboloid

9. การสะท้อนผ่านกระจกผิวโค้ง

กระจกโค้งบาน (convex) คือกระจกที่ _____
 กระจกโค้งเว้า (concave) คือกระจกที่ _____



จากภาพ ระยะภาพคือ _____
 ระยะวัตถุคือ _____

การประมาณโดยการทำ Taylor expansion ของฟังก์ชันตรีгонมิตริทำได้โดย

$$\sin(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots$$

ถ้าเราต้องการความแม่นยำของระยะภาพและระยะวัตถุโดยที่สมการขึ้นกับรัศมีเท่านั้น เราจำเป็นต้องทำการประมาณให้มุมตกรอบ, มุมสะท้อน และมุมหักเหลี่ยมค่าน้อย นั้นคือทางเดินของแสงมีลักษณะเกือบวนไปกับแกนเชิงแสง การประมาณนี้จึงมักเรียกว่า Paraxial Approximation หรือ Gauss approximation

$$\frac{h}{s} - \frac{h}{s'} = \frac{-2h}{R}$$

ถ้าเปลี่ยนผิวนี้เป็นกระจกเว้า ความสัมพันธ์จะกลายเป็น

$$\frac{h}{s} + \frac{h}{s'} = -\frac{2h}{R}$$

ซึ่งทำให้เราสรุปสูตรทั่วไปได้เป็น

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R} \equiv \frac{1}{f}$$

โดยที่ ระยะวัตถุเป็นบวกเมื่อ _____

ระยะวัตถุเป็นลบเมื่อ _____

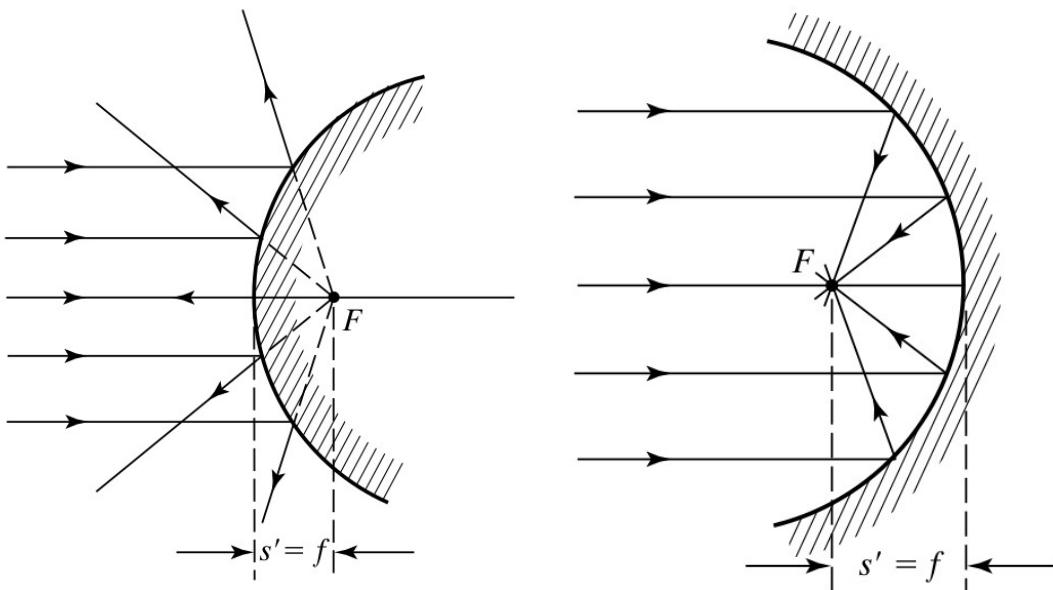
ระยะภาพเป็นบวกเมื่อ _____

ระยะภาพเป็นลบเมื่อ _____

รัศมีความโค้งเป็นบวกเมื่อ _____

รัศมีความโค้งเป็นลบเมื่อ _____

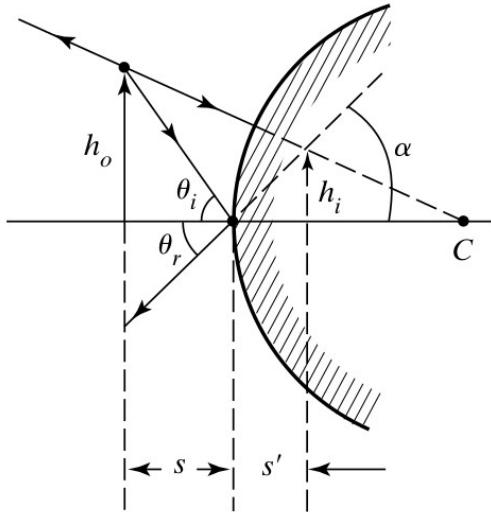
เมื่อพิจารณาระยะภาพหรือระยะวัตถุที่ระยะอนันต์ เราพบว่าความยาวโฟกัส f มีความหมายว่าเป็น _____



นั่นคือ ความยาวโฟกัสเป็นบวกเมื่อ _____

และความยาวโฟกัสเป็นลบเมื่อ _____

กำลังขยาย เมื่อพิจารณาวัตถุที่มีขนาดดังภาพ เรายพบว่า



$$\frac{h_0}{s} = \frac{h_i}{s'}$$

กำลังขยายถูกนิยามให้เป็นอัตราส่วนระหว่าง _____

$$|m| = \frac{h_i}{h_0} = \frac{s'}{s}$$

เมื่อพิจารณาเครื่องหมายด้วยข้อตกลงดังนี้

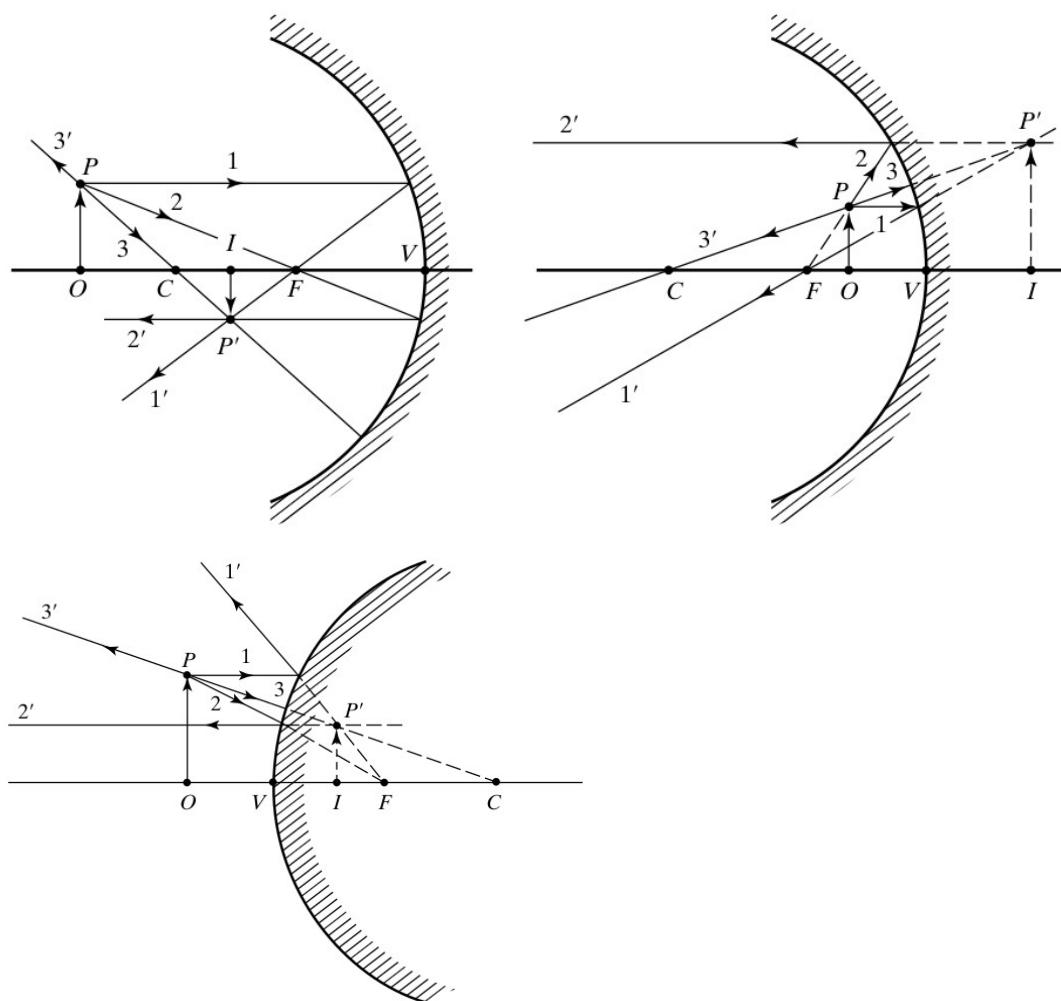
เรานิยามให้เครื่องหมายของกำลังขยายเป็นบวกเมื่อภาพมีทิศทางเดียวกันกับวัตถุ (ภาพหัวตั้ง)
และนิยามให้เครื่องหมายของกำลังขยายเป็นลบเมื่อภาพมีทิศทางตรงกันข้ามกับวัตถุ (ภาพหัวกลับ)
ดังนั้นสูตรของกำลังขยายจะเป็น

$$m = \frac{-s'}{s}$$

ตัวอย่าง

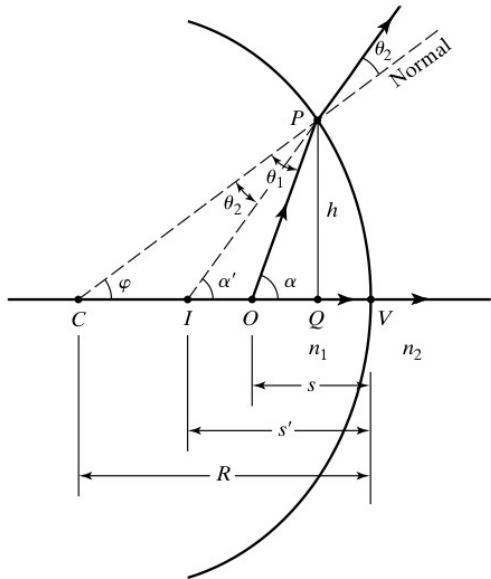
วัตถุขนาด 3 cm ถูกวางเป็นระยะ 20 cm ข้างหน้า a) กระจกโค้งมน b) กระจกโค้งเว้า ซึ่งมีความยาวโฟกัส 10 cm จงหาว่าภาพจะเกิดขึ้นที่ใด และภาพมีขนาดและลักษณะอย่างไร ในแต่ละกรณี

การวัดภาพเพื่อหาตำแหน่ง/ลักษณะภาพ



10. การหักเหผ่านรอยต่อโค้ง

เมื่อใช้กฎของสเนลโดยการประมาณ paraxial จะได้ว่า $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$



$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

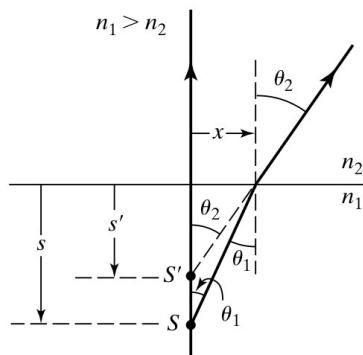
ซึ่งเมื่อใช้ข้อตกลงเดียวกันกับกระเจิง (ตามภาพคือระยะภาพติดลบและรัศมีความโค้งติดลบ) ทำให้เราได้สูตรทั่วไปของการหักเหผ่านรอยต่อผิวโค้งเป็น

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

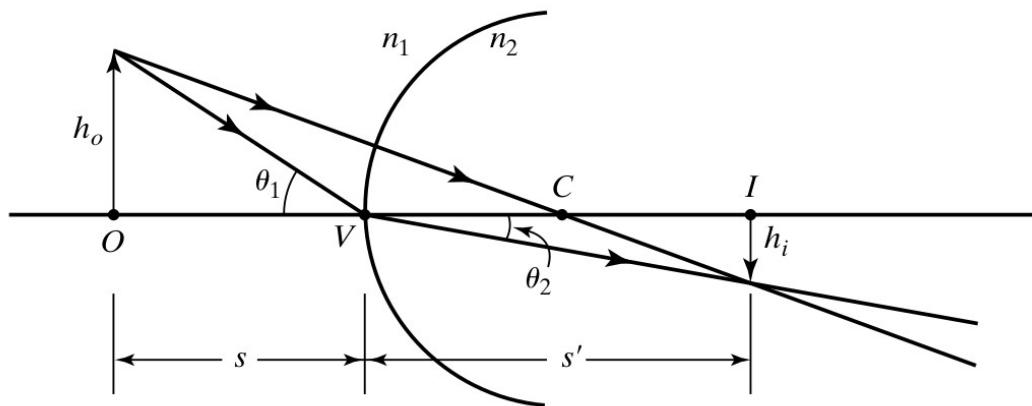
ซึ่งทำให้สูตรนี้สามารถใช้กับกรณีผิวโค้งนูนเข่นเดียวกัน โดยใช้ข้อตกลงเดียวกันกับกระเจิงในกรณีที่ผิวมีลักษณะเป็นเส้นตรง นั่นคือรัศมีความโค้งมีค่า _____ เราจะได้ว่า

$$s' = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)s$$

ซึ่งสอดคล้องกับกฎของสเนลจากภาพ



กำลังขยาย



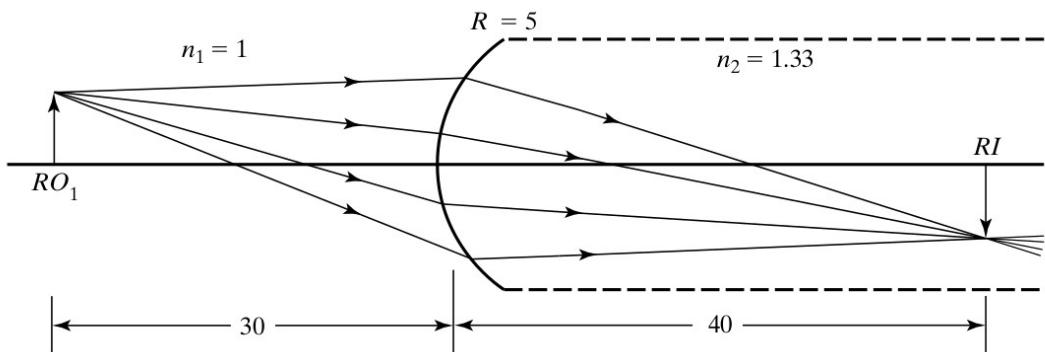
จากภาพเราจะได้ว่า

$$n_1 \left(\frac{h_o}{s} \right) = n_2 \left(\frac{h_i}{s'} \right)$$

ดังนั้นสูตรกำลังขยายคือ

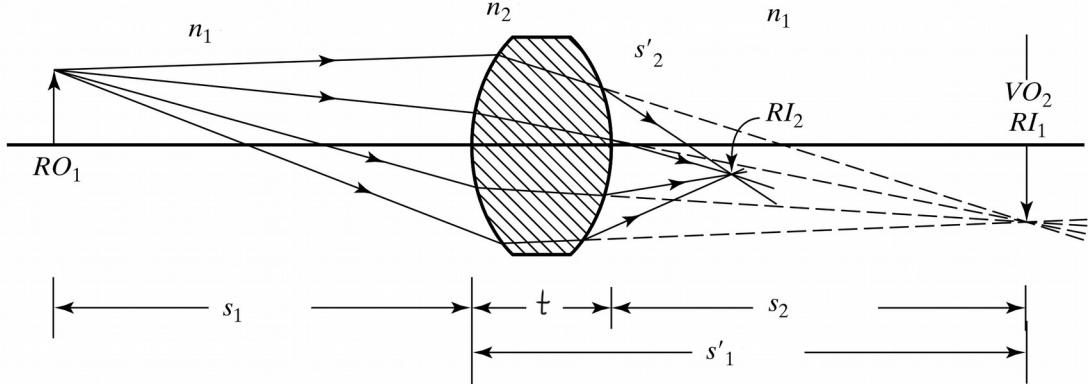
$$m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{-n_1 s'}{n_2 s}$$

ตัวอย่าง วัตถุมีขนาดชั้นหนึ่งถูกวางหน้าแก้วมนที่มีรัศมีความโค้ง 5 cm เป็นระยะ 30 cm ดังภาพ
จงหาระยะภาพและกำลังขยาย



11. เลนส์บาง

เราจะใช้สูตรการหักเหผ่านรอยต่อโค้งเพื่อทำการหาสมการของเลนส์บางโดยพิจารณารูปต่อไปนี้



ที่ผ่านเราได้สมการ

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

ที่ผ่านที่สอง

$$\frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s'_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

สังเกตว่าระยะภาพของการหักเหครั้งแรก s'_1 กับระยะวัตถุที่การหักเหครั้งที่สอง s_2 สัมพันธ์กันโดย

$$s_2 = t - s'_1$$

ในการณีของเลนส์บางเราจะได้

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s'_2} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะระยะวัตถุแรก $s = s_1$ และระยะภาพสุดท้าย $s' = s'_2$ เราจะได้สมการเป็น

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

เมื่อเรานิยามให้ระยะไฟก์สคือระยะภาพเมื่อวัตถุอยู่ที่ระยะอนันต์ เราจะได้ว่า

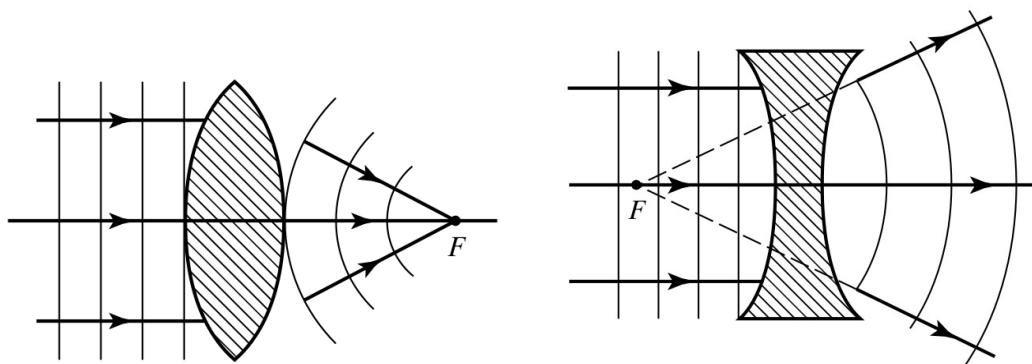
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

สมการนี้เรียกว่าสมการซ่างทำเลนส์ และทำให้เราได้สมการเลนส์บาง

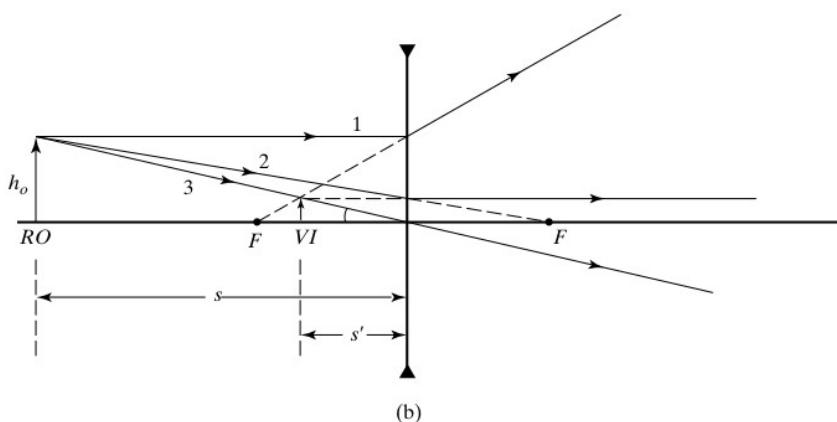
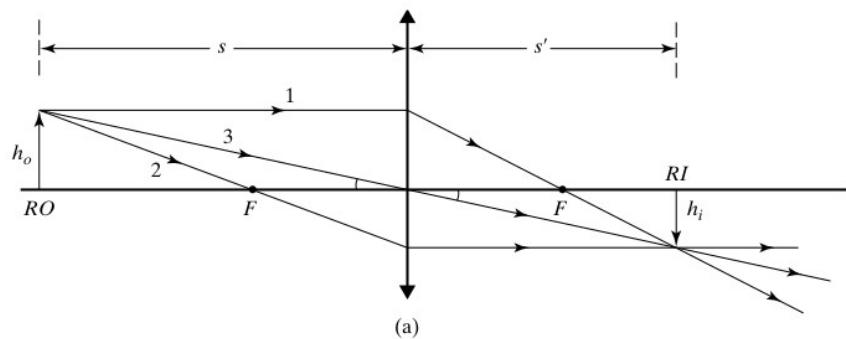
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

โดยค่าความยาวโฟกัสมีค่าเป็นบวกเมื่อ _____

และมีค่าเป็นลบเมื่อ _____



การวาดภาพเพื่อหาตำแหน่ง/ลักษณะภาพ



กำลังขยาย

จากรูปด้านบนเราพบว่า

$$\frac{h_0}{s} = \frac{h_i}{s'}$$

ตั้งนั้นกำลังขยาย (โดยไม่มีคิดถึงเครื่องหมาย)

$$|m| = \left| \frac{h_i}{h_0} \right| = \left| \frac{s'}{s} \right|$$

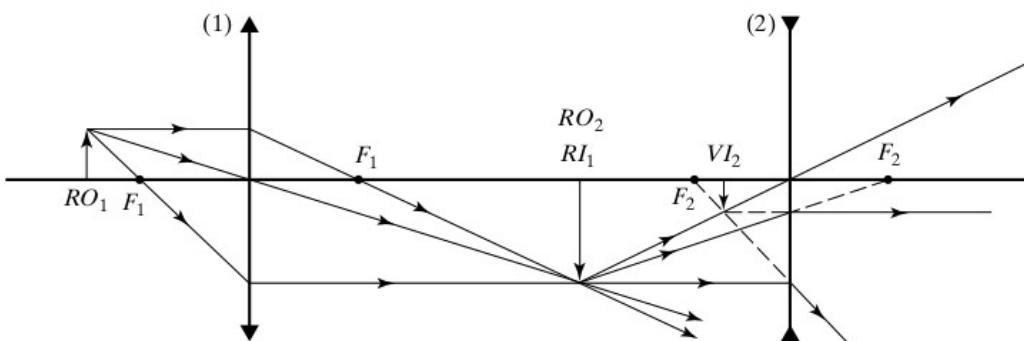
ในกรณีที่ห้องวัดถูกและระยะภาพเป็นบวกเราพบว่า _____

แต่ถ้าระยะวัตถุเป็นบวกและระยะภาพเป็นลบเราพบว่า _____

ดังนั้นเราจะให้นิยามกำลังขยายเป็น

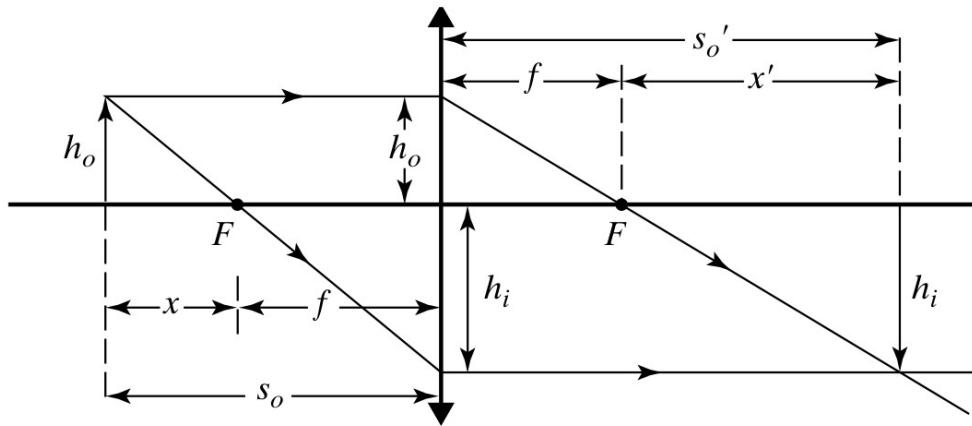
$$m = \frac{-s'}{s}$$

ตัวอย่าง จงหาตำแหน่งและลักษณะของภาพระหว่างกลางและภาพสุดท้ายของระบบของเลนส์บางสองอันดังรูปด้านล่าง โดยที่ระยะโฟกัสของเลนส์แรกคือ 15 cm และระยะโฟกัสของเลนส์ที่สองคือ -15 cm และระยะห่างระหว่างเลนส์ทั้งสองคือ 60 cm กำหนดให้วัตถุอยู่ห่างจากเลนส์แรกเป็นระยะ 25 cm



12. สมการเลนส์บางของนิวตัน

ที่ผ่านมาเรานิยมระบวยัตถุ/ระยะภาพจากการวัดตำแหน่งเทียบกับผิวเลนส์ ถ้าเราต้องการเปลี่ยนวิธี การวัดระยะยัตถุ/ระยะภาพเป็นการวัดเทียบกับจุดโฟกัสแทน เราจะได้ความสัมพันธ์ใหม่ โดยเริ่มจาก การพิจารณารูปด้านล่าง



เมื่อพิจารณาสามเหลี่ยมคล้ายเราพบว่า

$$\frac{h_o}{x} = \frac{h_i}{f} \quad \text{และ} \quad \frac{h_i}{x'} = \frac{h_o}{f}$$

เมื่อจัดรูปสมการเราพบว่า

$$xx' = f^2$$

สมการนี้เรียกว่าสมการเลนส์บางของนิวตัน

แบบฝึกหัด 1

- นักประดาน้ำคนหนึ่งสังเกตดวงอาทิตย์จากใต้น้ำเป็นมุนปราภู 45 องศา จงหามุมจริงที่ดวงอาทิตย์ทำกับผิวน้ำ ให้ดัชนีหักเหของน้ำเท่ากับ 1.333
- รังสีแสงตกกระทบก้อนแก้วสีเหลี่ยมซึ่งมีความหนา 2 ซม. และดัชนีหักเห $n = 1.5$ โดยทำมุมตกกระทบ 30 องศา จงคำนวณมุมของรังสีแสงที่ตกกระทบและหักเหของแต่ละพื้นผิว พร้อมทั้งภาพประกอบ
- จากภาพที่ 1 จงแสดงให้เห็นว่ารังสีของแสงที่ออกจากผิวที่สองของนานกับรังสีตกกระทบ และจงหาค่า d

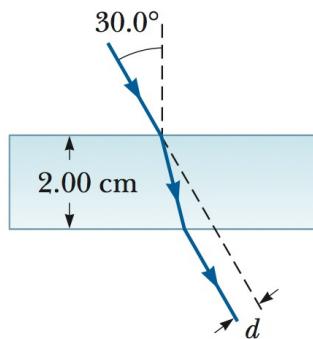


Figure 1

- กำหนดให้ลำแสงหนึ่งเดินทางจากอากาศไปยังแก้วซึ่งมีดัชนีหักเห n_g ตกกระทบด้วยมุม Θ_1 ดังภาพที่ 2 ถ้าเราพบว่าลำแสงที่สะท้อนและลำแสงที่หักเหตั้งฉากกันพอดี จงหาค่ามุม Θ_1

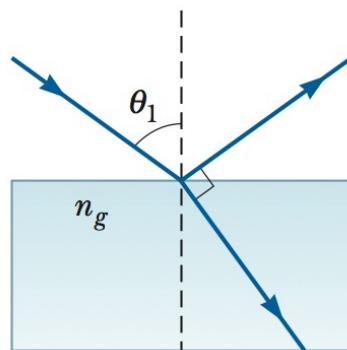


Figure 2

- ทันตแพทย์มักใช้กระเจ蔻ดึงเพื่อขยายภาพฟันของผู้ป่วย ถ้าฟันอยู่ด้านหน้ากระเจ蔻เป็นระยะ 1 ซม. และภาพที่ทันตแพทย์เห็นอยู่หลังกระเจ蔻 10 ซม. จงหาค่าความโค้งและกำลังขยายของกระเจกนี้
- กระเจกเว้าชิ้นหนึ่งสร้างภาพหัวกลับมีขนาดเป็น 4 เท่าของวัตถุ ถ้าระยะระหว่างภาพและวัตถุห่างกัน 0.6 เมตร จงหาความยาวโฟกัสของกระเจก
- กระเจกนูนชิ้นหนึ่งสร้างภาพหัวตั้งมีขนาดเป็น 0.5 เท่าของวัตถุ ถ้าระยะระหว่างภาพและวัตถุห่างกัน 0.6 เมตร จงหาความยาวโฟกัสของกระเจก

8. ลูกแก้วทรงกลม $n = 1.50$ มีรัศมี 15 ซม. มีพองอากาศเล็กๆอยู่ที่ระยะ 5 ซม. จากจุดศูนย์กลาง เมื่อมองพองอากาศนี้ในแนวตรง(เห็นพองอากาศอยู่ตรงกลางลูกแก้ว) จะหาระยะประกายเมื่อมองพองอากาศนี้
9. ถ้าภาพที่เกิดจากเลนส์ชิ้นหนึ่งอยู่ห่างจากวัตถุเป็นระยะ 20 ซม. และมีกำลังขยายเท่ากับ $+0.5$ จงบอกชนิดของเลนส์ชิ้นนี้และความยาวโฟกัส
10. เลนส์และกระจกถูกวางดังภาพที่ 3 โดยที่ระยะห่างจากวัตถุถึงเลนส์และเลนส์ถึงกระจกเป็น 1 เมตร ถ้าเลนสมีความยาวโฟกัส 80 ซม และกระจกมีความยาวโฟกัส -50 ซม จงหาภาพสุดท้ายซึ่ง เกิดจากแสงที่ผ่านเลนส์สองครั้ง หากำลังขยายและพิจารณาว่าภาพหัวตั้งหรือหัวกลับ

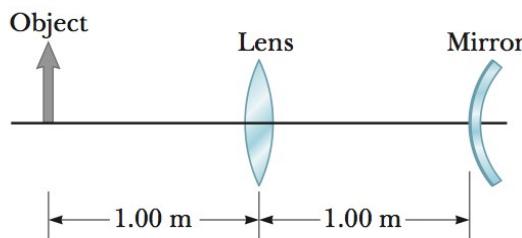


Figure 3

11. วัตถุชิ้นหนึ่งอยู่ห่าง 20 ซม. ห่างจากเลนส์ที่วางเรียงลำดับกัน 3 อัน ความยาวโฟกัส 10 ซม. 15 ซม. และ 20 ซม. ตามลำดับ เลนส์ 2 อันแรกห่างกัน 30 ซม. เลนส์ที่สองห่างจากเลนส์สุดท้าย 20 ซม. จงหา ระยะภาพ เทียบกับเลนส์อันสุดท้าย เมื่อ ก) เลนส์ทั้งสามเป็นเลนส์นูน ข). เลนส์ที่หนึ่งและสามเป็นเลนส์นูน แต่เลนส์ที่สองเป็นเลนส์เว้า ค). เลนส์ที่หนึ่งและสามเป็นเลนส์เว้า แต่เลนส์ที่สองเป็นเลนส์นูน
12. ในการเกิดภาพของวัตถุบนฉากจากเลนส์ที่ตั้งอยู่กับที่ เมื่อลื่อนวัตถุและฉากไปยังตำแหน่งต่างๆ พบร่วม ก จึงแสดงว่าความยาวโฟกัสของเลนส์คือ $f = (s_2 - s_1)/(1/m_1 - 1/m_2)$
13. เลื่อนเลนส์ไปตามแนวแกนเชิงแสง (principal axis) โดยตั้งวัตถุและฉากรับภาพไว้กับที่ เมื่อระยะวัตถุ และระยะภาพห่างกัน $L > 4f$ พบร่วมตำแหน่งที่ภาพโฟกัสบนฉากมีขนาดของภาพโตกว่าวัตถุ และตำแหน่งขนาดของภาพเล็กกว่าวัตถุ ถ้าตำแหน่งทั้งสองห่างกัน D ดังภาพที่ 4 จงแสดงว่าความยาวโฟกัสของเลนส์เท่ากับ $f = (L^2 - D^2)/4L$

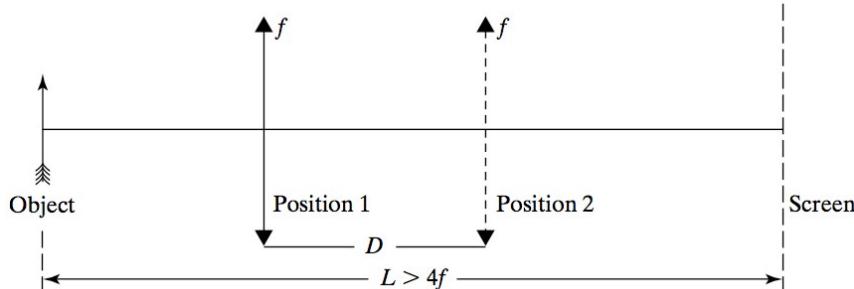


Figure 4

อุปกรณ์เชิงแสง

1. ตัวกันช่องเปิด (Aperture stop)

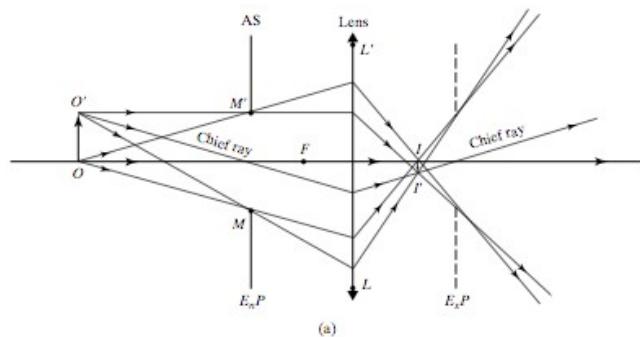
เป็นวัสดุที่บีบตัวกัดแสงแค่เพียงบางส่วนให้เข้าไปสู่ระบบ ซึ่งอาจเป็นช่องเปิดกลมหนาเลนส์ (iris diaphragm) หรืออาจจะเป็นขนาดของเลนส์ ตัวกันช่องเปิดมักอยู่ด้านหน้าของระบบเชิงแสง มีหน้าที่จำกัดปริมาณของแสงที่เข้าไปสู่ระบบและสามารถช่วยปรับความลึกของโฟกัสออกด้วย ถ้าระบบประกอบไปด้วยหลายตัวกัน ให้พิจารณาตัวกันที่ทำมุมเปิดน้อยที่สุดเป็นตัวกันช่องเปิด

1.1 รูม่านตาทางเข้า (Entrance pupil)

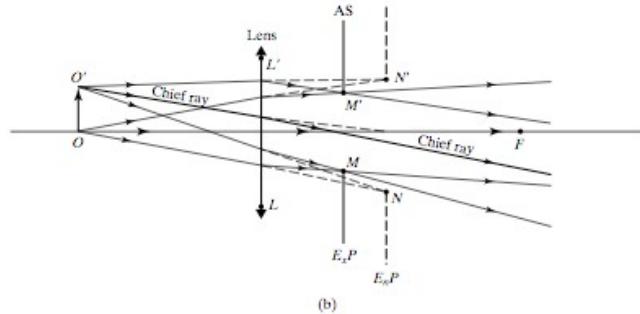
เป็นภาพของตัวกันช่องเปิดที่แสงมองเห็น สามารถหาขนาดและตำแหน่งได้จากการที่เกิดจากตัวกันช่องเปิดในทิศทางย้อนกลับกับทางเดินของแสง โดยรังสีที่ผ่านจุดกึ่งกลางของรูม่านตา ทางเข้า เรียกว่า รังสีสำคัญ (chief ray)

1.2 รูม่านตาทางออก (Exit pupil)

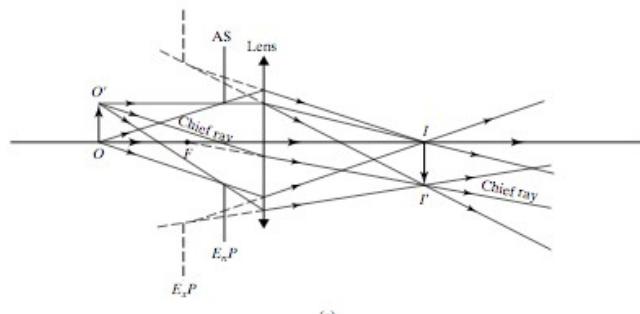
เป็นภาพของตัวกันช่องเปิดที่ผู้สังเกตมองเห็น สามารถหาขนาดและตำแหน่งได้จากการที่เกิดจากตัวกันช่องเปิดในทิศทางไปทางเดียวกับทางเดินของแสง



(a)



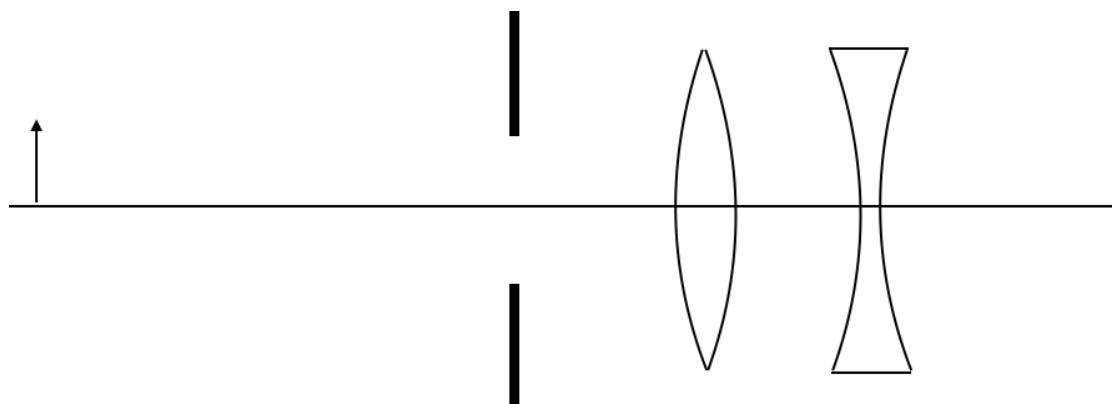
(b)



(c)

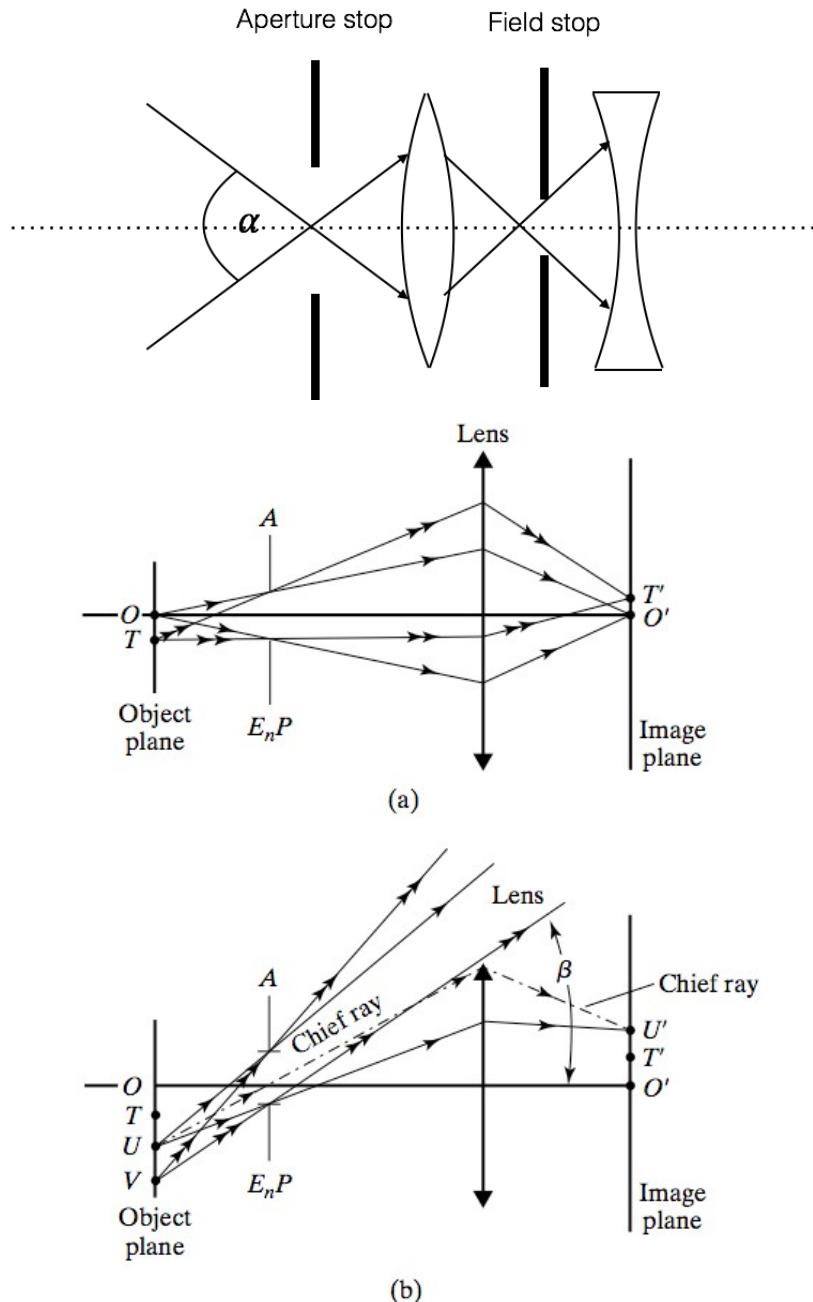
ตัวอย่าง ระบบเชิงทัศนศาสตร์ประกอบไปด้วยอุปกรณ์ดังภาพ โดยมี ตัวกันนีซ่องเปิดเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 ซม เลนส์นูนเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 ซม ความยาวโฟกัส 6 ซม และเลนส์เว้า เส้นผ่านศูนย์กลาง 6 ซม ความยาวโฟกัส -4 ซม ถ้ามีวัตถุอยู่ห่างจากตัวกันเป็นระยะ 10 ซมและตัวกันห่างจากเลนส์นูน 2 ซม และเลนส์นูนห่างจากเลนส์เว้า 1 ซม จะหาว่า

1. ตัวกันซ่องเปิด (aperture stop) สำหรับวัตถุนี้อยู่ที่ตำแหน่งใดและมีขนาดเท่าไร?
2. รูม่านตาทางเข้า (entrance pupil) อยู่ที่ตำแหน่งใดและขนาดเท่าไร?
3. รูม่านตาทางออก (exit pupil) อยู่ที่ตำแหน่งใดและขนาดเท่าไร?
4. ภาพสุดท้ายของวัตถุผ่านระบบเชิงแสงนี้อยู่ที่ตำแหน่งใด



2. ตัวกั้นสนามการมอง (Field stop)

เป็นวัสดุที่บีบจำกัดขนาดมุมของสนามการมอง (field of view) มักอยู่ในระยะยาวของภาพ โดยตัวกั้นสนามการมองไม่มีผลต่อปริมาณแสง แต่มีผลต่อการมุมของสนามการมอง (angular field of view) ซึ่งหาได้จากมุมของรังสีสำคัญ (Chief ray) ที่มากที่สุดซึ่งผ่านตัวกั้นสนามการมอง

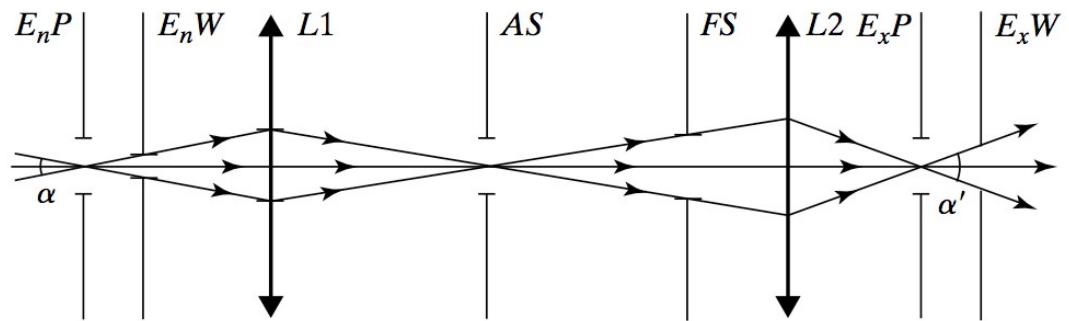


2.1 หน้าต่างทางเข้า (Entrance window)

เป็นภาพของตัวกั้นสนามการมองที่แสงมองเห็น โดยสามารถหาขนาดและตำแหน่งได้จากภาพที่เกิดจากตัวกั้นสนามในทิศทางย้อนกลับกับทางเดินของแสง

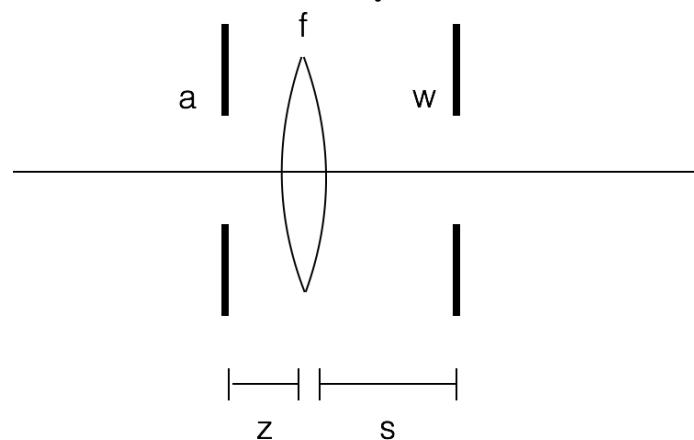
2.2 หน้าต่างทางออก (Exit window)

เป็นภาพของตัวกั้นสนามการมองที่ผู้สังเกตมองเห็น โดยสามารถหาขนาดและตำแหน่งได้จากภาพที่เกิดจากตัวกั้นสนามในทิศทางเดียวกันกับทางเดินของแสง



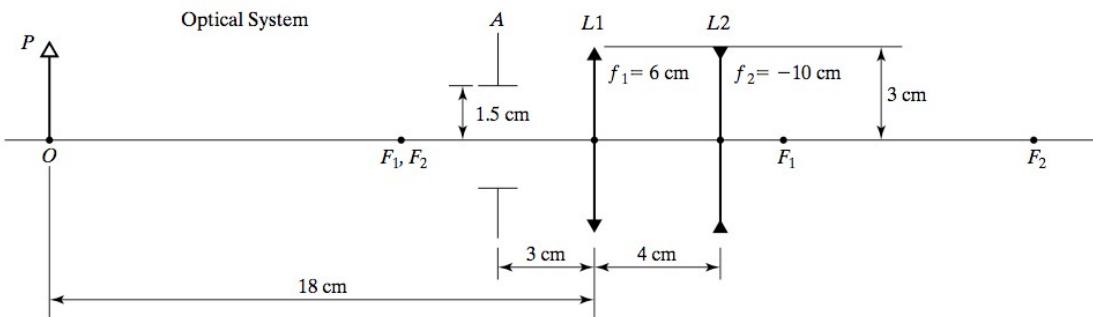
ตัวอย่าง

จงหาตำแหน่งและขนาดของ Aperture stop, entrance pupil, exit pupil, field stop, entrance window และ exit window ในระบบเลนส์เดียวดังรูป



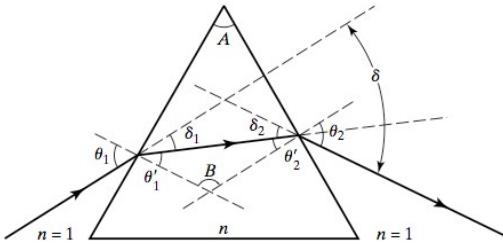
ตัวอย่าง ระบบเชิงแสงดังภาพด้านล่างประกอบไปด้วยเลนส์สองชั้น L1 ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 cm และความยาวโฟกัส 6 cm และเลนส์เว้าบาง L2 ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 cm และความยาวโฟกัส -10 cm และช่องเปิด A ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 3 cm โดยช่องเปิด A วางหน้าเลนส์ L1 เป็นระยะ 3 cm และเลนส์ L1 วางอยู่หน้าเลนส์ L2 เป็นระยะ 4 cm วัตถุขนาด 3 cm ถูกวางอยู่หน้า L1 18 cm จงตอบคำถามต่อไปนี้

- จงพิจารณาว่าองค์ประกอบใด (A , L_1 , L_2) เป็นตัวกั้นช่องเปิด (Aperture Stop)
- จงหาตำแหน่งและขนาดของรูม่านตาทางเข้าและรูม่านตาทางออก
- จงหาตำแหน่งและขนาดของภาพที่เกิดจากการหักเหผ่านเลนส์ L_1
- จงหาตำแหน่งและขนาดของภาพที่เกิดจากการหักเหผ่านเลนส์ทั้งคู่



3. ปริซึม

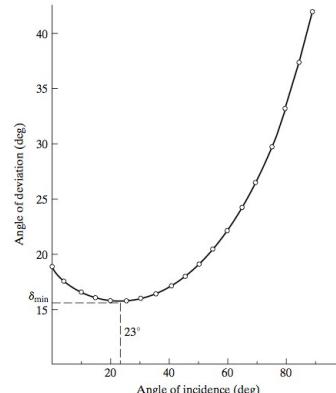
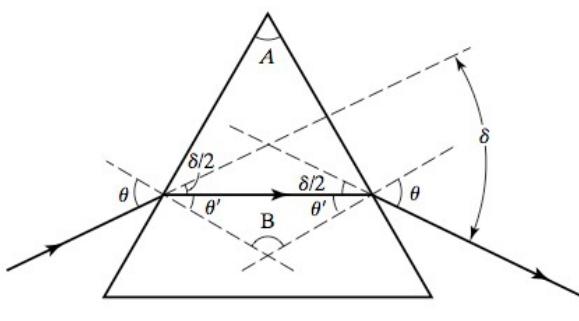
ปริซึมคือวัสดุ (มักใช้แก้ว) ที่มีหน้าตัดเป็นรูปทรงสามเหลี่ยม โดยมีมุมยอดของปริซึม A และด้านนี้หักเห n เป็นตัวกำหนดคุณลักษณะ สิ่งที่เรามักสนใจจากการหักเหของแสงผ่านปริซึมคือมุมเบี่ยง เป็น δ ซึ่งถูกนิยามให้เป็นมุมของลำแสงหักเหสุดท้ายและลำแสงตกกระทบแรกดังภาพ



จากภาพด้านบนถ้าเราทำ variation (เปลี่ยนค่ามุมตกกระทบแรก θ_1) จะกระทำทั้งค่ามุมเบี่ยง δ มีค่าน้อยที่สุดจะทำให้ความสามารถของปริซึมได้ ตัวอย่าง เช่นการคำนวณโดยใช้ปริซึมแก้วที่มีมุมปริซึม $A = 30$ องศา และค่าด้านนี้หักเหเท่ากับ $n = 1.50$ ได้ผลดังกราฟด้านล่าง

เพื่อที่จะหาสูตรมุมเบี่ยงบนน้อยที่สุดความสามารถใช้แคลคูลัสในการหามุมน้อยที่สุดนี้ได้ แต่ในขั้นนี้เราจะใช้เพียงเหตุผลง่ายๆในการพิจารณา ในเงื่อนไขที่ทำให้เกิดมุมเบี่ยงบนน้อยที่สุดนั้น ถ้าเราลองสมมุติให้มุมตกกระทบแรกและมุมหักเหสุดท้ายไม่เท่ากัน $\theta_1 \neq \theta_2$ ในกรณีนี้ถ้าเราเปลี่ยนมุมตกกระทบแรกให้มีค่าเท่ากับมุมหักเหสุดท้าย เราจะพบว่ามุมหักเหสุดท้ายก็จะกลับเป็นมุมตกกระทบแรก (เพราะนี่คือการย้อนลำแสงกลับจากเหตุการณ์แรก) ดังนั้นแปลว่าในกรณีนี้มุมเบี่ยงบนจะสามารถเมื่อส่องค่าที่มีค่าไม่เท่ากัน ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขของการมีมุมเบี่ยงบนน้อยที่สุด ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงข้อขัดแย้งนี้เราจึงสรุปได้ว่า จังหวะที่เกิดมุมเบี่ยงบนน้อยที่สุดจะมีมุมตกกระทบแรกและมุมหักเหสุดท้ายเท่ากัน $\theta_1 = \theta_2$ ดังแสดงในภาพด้านล่าง เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของมุมเราจะได้ว่า

$$n = \frac{\sin [(A+\delta)/2]}{\sin (A/2)}$$



การหามุมเบี่ยงบนของปริซึมมีประโยชน์ในการหาด้านนี้หักเหของวัสดุใดๆ (ตัวอย่างเช่นปฏิบัติการฟิสิกส์พื้นฐานที่นักศึกษาเคยผ่านมาแล้ว)

การกระจายแสงของปริซึม (Dispersion)

เราได้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างมุมเบี่ยงเบนน้อยที่สุดของปริซึมกับดัชนีหักเหไปแล้ว อย่างไรก็ได้ในการทดลองจริงทราบว่ามุมเบี่ยงเบนที่ออกมานั้นมีค่าต่างกันไปในแต่ละความยาวคลื่น เมื่อส่องแสงขาวซึ่งประกอบจากแสงหลายๆ ความยาวคลื่น จึงเกิดการกระจายแสงในแต่ละสีขึ้น (เราพบความจริงข้อนี้ในสมัยของนิวตัน) การกระจายแสงของปริซึมนั้นมีที่มาจากการดัชนีหักเหที่ไม่เท่ากัน ของแต่ละความยาวคลื่น (สมบัติการตอบสนองต่อสนา�แม่เหล็กไฟฟ้าของวัสดุใดๆ มีค่าแตกต่างกันไป ในแต่ละความยาวคลื่นเนื่องจากสมบัติทางความต้านทานของผลึกหรือโมเลกุลนั้นๆ)

ความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีหักเหและความยาวคลื่นนั้นนั้นกับสมบัติของแต่ละตัวกลางซึ่งยกต่อการใช้ประโยชน์โดยตรง โดยที่นำไปรวมกับสูตร empirical (เชิงประภูมิการณ์) ด้วยการประมาณในค่าความยาวคลื่น และเขียนในรูปของตัวแปร A, B, C ดังนี้

$$n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

สูตรนี้เรียกว่าสูตรของโคชี Cauchy's formula

ดังนั้นเมื่อพิจารณากฎของสเนลล์ $nsin\theta_i = n_\lambda sin\theta_r$ จะได้ว่ามุมหักเหขึ้นกับความยาวคลื่น ด้วย จากระดับนั้นเมื่อความยาวคลื่นมีค่ามากเข่นแสงสี _____ จะสังเกตว่าดัชนีหักเหมีค่า _____ ส่งผลให้มุมหักเหมีค่า _____ ทำให้ในรูปตราสัมภพเด็นแสงสี _____ อุบัติ _____



การกระจายแสง (dispersion) นิยามเป็น $\frac{dn}{d\lambda}$ ซึ่งจากความสัมพันธ์ด้านบนสามารถประมาณโดย พิจารณาเฉพาะเพอมแกรกได้เป็น _____

ในการทดลองค่า A, B (คิดเฉพาะสองเพอมแกรกในสูตรของโคชี) สามารถหาได้จากการทำการทดลองเพื่อหาดัชนีหักเหของแสงสองความยาวคลื่นแล้วแก้สมการสองตัวแปรเพื่อหาค่าคงที่ เช่น เดียวกันถ้าต้องการค่า A, B, C ต้องทำการทดลองเพื่อหาดัชนีหักเหของแสงสามความยาวคลื่นแล้วแก้สมการสามตัวแปรเพื่อหาค่าคงที่ ซึ่งค่าความยาวคลื่นมาตรฐานที่ใช้นั้นมักกำหนดเป็นตำแหน่งที่มีความยาวคลื่นมากสุด, น้อยสุดและตรงกลางที่สุดของแสงที่เรามองเห็นได้ (visible light) เส้นเหล่านี้เรียกว่าเส้นฟรันไฮเฟอร์ (Fraunhofer lines) และค่าดัชนีหักเหของแก้วชนิดต่างๆ บนเส้นฟรันไฮเฟอร์มีค่าดังตารางด้านล่าง

λ (nm)	Characterization	n	
		Crown glass	Flint glass
486.1	F, blue	1.5286	1.7328
589.2	D, yellow	1.5230	1.7205
656.3	C, red	1.5205	1.7076

กำหนดให้ดัชนีหักเหของแสงสีน้ำเงินเป็น n_F ดัชนีหักเหของแสงสีเหลืองเป็น _____ ดัชนีหักเหของแสงสีแดงเป็น _____

กำลังการกระจาย (dispersive power) ถูกนิยามเป็น

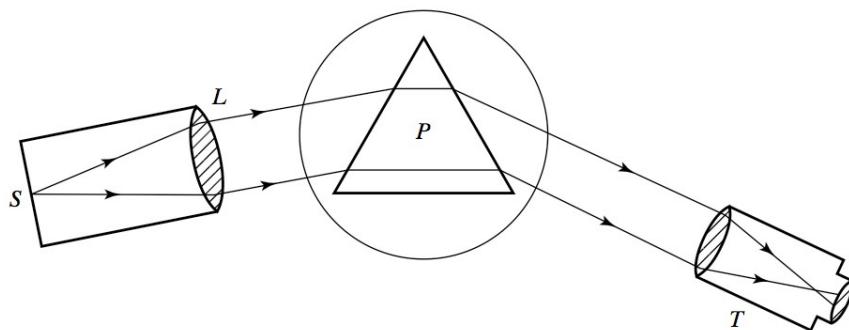
$$\Delta = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

โดยส่วนกลับของกำลังการกระจาย $1/\Delta$ ถูกเรียกว่า Abbe number (เลขแอบบี)

จากตารางดังกล่าวเราหากำลังการกระจายของแก้วพลินที่ได้เป็น _____
และกำลังการกระจายของแก้วครานน์ได้เป็น _____

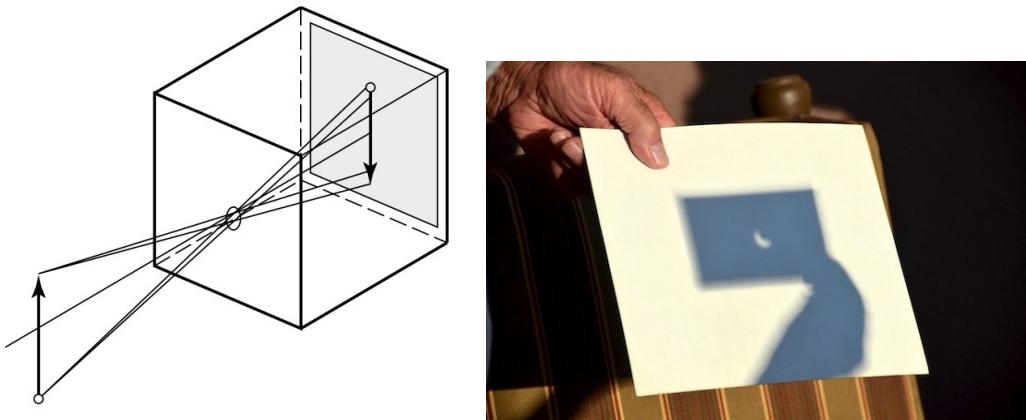
ปริซึมสเปคต์โรเมเตอร์ (Prism spectrometer)

เพราะสมบัติการกระจายแสงของปริซึมทำให้เราสามารถนำปริซึมมาใช้ในการแยกแสงองค์ประกอบของแสงจากแหล่งกำเนิดได้ว่าแสงนั้นมีความยาวคลื่นใดเป็นองค์ประกอบบ้าง ซึ่งมีประโยชน์มากเมื่อต้องการวิเคราะห์สมบัติของสาร เพราะสมบัติการเปลี่ยนขั้นพลังงานของอิเล็กตรอนของวัสดุ/สาร/ธาตุให้แสงที่มีความยาวคลื่นแตกต่างกัน ทำให้เราศึกษาองค์ประกอบและพิสิกส์ภายในของวัสดุนั้นๆได้ ส่วนประกอบของปริซึมสเปคต์โรเมเตอร์มีดังภาพ



4. กล้องถ่ายรูป (Camera)

Camera มีรากศัพท์จากภาษาลาตินที่แปลว่าห้อง กล้องชนิดแรกของโลกจึงเป็นเพียงห้องปิดที่มีรูเล็กๆให้แสงเข้ามาดังภาพ (และพวงเร้ารู้จักกล้องชนิดนี้กันในชื่อกล้องรูเข็ม)



เนื่องจากภาพที่เกิดขึ้นมีการซ้อนทับของ _____
 การทำให้รูเปิดมีขนาดเล็กๆเพื่อที่จะทำให้ภาพ _____
 แต่ว่าถ้ารูเปิดมีขนาดเล็กเกินไปก็จะทำให้ภาพ _____ เนื่องจากผลของ _____
 สังเกตได้ว่าภาพจากกล้องรูเป็นไม่มีความยาวโฟกัสเข้ามาเกี่ยวข้อง ดังนั้นภาพที่เกิดขึ้นจากวัตถุ ทั้งที่อยู่ใกล้และไกลจะอยู่ในโฟกัสพร้อมๆกัน แต่ข้อเสียของกล้องรูเป็นก็คือปริมาณแสงที่เข้ามายัง ดังนั้นถ้าเราใช้ฟิล์มเพื่อรับภาพ ทำให้ต้องปิดหน้ากล้องเป็นเวลานานๆ เพื่อที่จะได้ภาพที่สมบูรณ์ (และเป็นเหตุผลที่เราต้องปิดด้านอื่นให้สนิทเพื่อที่จะไม่ให้แสงจากด้านอื่นรบกวน)

กล้องถ่ายภาพสมัยใหม่ก็ใช้หลักการเดียวกันกับกล้องรูเป็นโดยนำเลนส์สูบมาแทนที่ช่องเปิด เพื่อที่ จะได้ปริมาณแสงที่เพิ่มขึ้นและมีความคมชัดมากขึ้นแต่ว่าข้อเสียคือภาพที่ได้จะมีระยะงโฟกัสที่จำกัด จึงต้องมีการปรับระบบเชิงแสงของเราเพื่อที่จะให้วัตถุที่เราสนใจอยู่ในระยะโฟกัส

4.1 กล้องถ่ายรูป

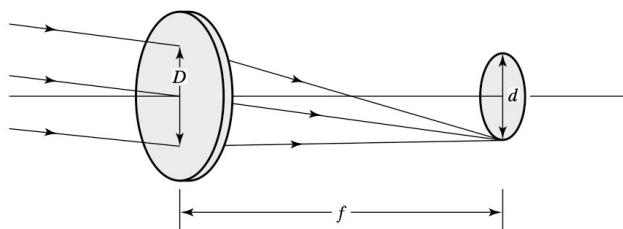
ลองพิจารณารูปที่วัตถุอยู่ที่ระยะไกลมากๆ จนสามารถประมาณให้แสงจากวัตถุเป็น _____ เพื่อที่จะให้ภาพมีความคมชัด ฟิล์มที่ใช้ต้องอยู่ที่ระยะ _____ ถ้าเราไม่สามารถเลื่อนระยะฟิล์มกับเลนส์สูบได เมื่อเลื่อนวัตถุเข้ามาใกล้มากขึ้น จะทำให้ภาพที่เกิดอยู่ที่ _____ ของแผ่นฟิล์ม

โดยที่ว่าไปเราจะแก้ไขโดยการขยายตัวเลนส์ข้าอกอเพื่อปรับให้ตำแหน่งของภาพตรงกับแผ่นฟิล์ม อย่างไรก็ต้องเลื่อนเลนส์เพื่อให้ภาพคมชัดก็ยังมีข้อจำกัดซึ่งมาจากขนาดของกล้องเอง ในบางครั้งเราก็ต้องแก้ไขโดยการเปลี่ยนเลนส์ให้เป็นเลนส์ที่มีโฟกัสสั้นลง

ความกว้างของช่องเปิดก็เป็นส่วนสำคัญของกล้องถ่ายรูป ในกล้องที่ว่าเป็นน้ำความกว้างของช่องเปิดมักสัมพันธ์กับความเร็วชัตเตอร์เพื่อที่จะควบคุมปริมาณแสงที่ตกรอบบนแผ่นฟิล์ม กำลังของแสงต่อพื้นที่ที่ตกรอบแผ่นฟิล์ม (irradiance - ความรับ光รังสีนิหน่วยเป็น วัตต์ต่อตารางเมตร W/m^2) ซึ่งขึ้นกับพื้นที่ช่องเปิดและพื้นที่ของภาพดังสมการ

$$E_e \propto \frac{\text{area of aperture}}{\text{area of image}} = \frac{D^2}{d^2}$$

โดยที่ D เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของช่องเปิด และ d เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของขนาดภาพ



ในการนี้ที่ภาพวัตถุใกล้กว่าระยะโฟกัสมากๆ เราจะได้ว่า ขนาดของภาพขึ้นกับกำลังขยายขึ้นกับความยาวโฟกัส

$$m = \frac{-s'}{s} = \frac{f}{s-f} \propto f$$

ดังนั้น

$$E_e \propto \frac{D^2}{f^2}$$

เรอนิยามปริมาณ

$$A \equiv \frac{f}{D}$$

ว่าเป็น relative aperture (ขนาดช่องเปิดสัมพัทธ์) โดยที่ในบางครั้งเราเรียกปริมาณนี้ในรูปแบบของ f-number (f/A) ตัวอย่างเช่น เลนส์ที่มีความยาวโฟกัส 4 ซม. และมีความกว้างช่องเปิดเท่ากับ 0.5 ซม. จะมีขนาดช่องเปิดสัมพัทธ์เท่ากับ $A = 4/0.5 = 8$ และเรียกว่าโดยใช้ f-number ว่าช่องเปิดนี้มี $f/8$ ซึ่งถูกใช้บ่อยในกล้องถ่ายรูป (บางทีก็เรียกว่า focal ratio, f-ratio หรือ f-stop) ซึ่ง irradiance จะแปรผกผันกับขนาดช่องเปิดสัมพัทธ์กำลังสอง

$$E_e \propto \frac{1}{A^2}$$

กล้องส่วนใหญ่มักมีตัวเลือกของช่องเปิดซึ่งมีค่า relative aperture ที่ทำให้ irradiance ลดลงเป็น ขั้นๆ ทีละ 2 เท่าดังตาราง

$A = f\text{-number}$	$(A = f\text{-number})^2$	E_e
1	1	E_0
1.4	2	$E_0/2$
2	4	$E_0/4$
2.8	8	$E_0/8$
4	16	$E_0/16$
5.6	32	$E_0/32$
8	64	$E_0/64$
11	128	$E_0/128$
16	256	$E_0/256$
22	512	$E_0/512$

โดยหลักการเลือกขนาดของช่องเปิดของกล้องมักขึ้นกับความเร็วชัตเตอร์ (เวลาที่เปิดหน้ากล้อง) เพราะว่าค่าการเปิดรับแสงหรือ exposure (J/m^2) คือปริมาณของพลังงานแสงที่ตกบนฟิล์ม ดังนั้น exposure (J/m^2) มีค่าเท่ากับ irradiance ($J/m^2/s$) คูณกับเวลาที่เปิดชัตเตอร์ (s)

$$\text{exposure} = \text{irradiance} \times \text{time}$$

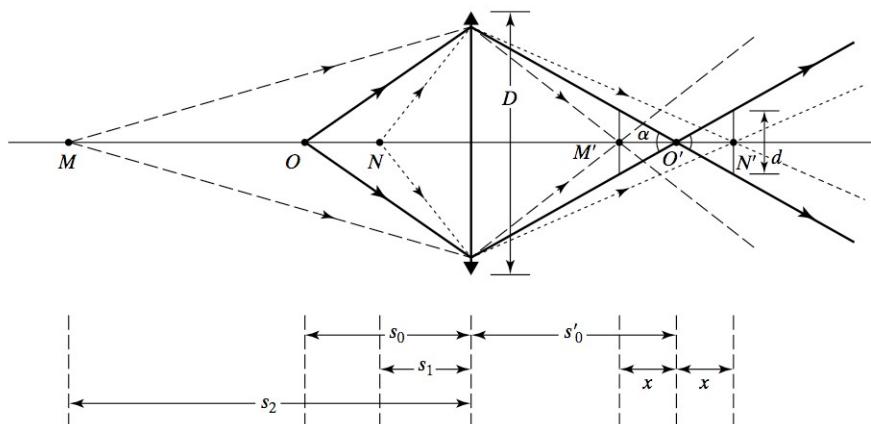
ตัวอย่าง ถ้าเดิมมีช่องเปิดซึ่งมี f-number เป็น $f/2.8$ โดยที่มีความเร็วชัตเตอร์เป็น $1/50$ s ถ้าเราต้องการเปลี่ยนไปใช้ช่องเปิด $f/4$ เราต้องปรับความเร็วชัตเตอร์ให้เป็น _____ เพื่อให้มีค่าการเปิดรับเท่าเดิม ซึ่งส่งผลให้คุณภาพของภาพมีค่าเท่าเดิม และถ้าเราต้องการเปลี่ยนไปใช้ช่องเปิดที่มีค่าเล็กลง เช่น $f/2$ เราต้องปรับความเร็วชัตเตอร์ให้เป็น _____ เพื่อให้มีค่าการเปิดรับเท่าเดิม และมีคุณภาพของภาพเท่าเดิม

อีกตัวแปรนึงที่นักถ่ายภาพใช้คือ ISO ซึ่งเอาไว้บอกร่วมกับฟิล์มของเรานั้นมีความไวแสงเท่าไหร่ เช่น ISO 200 มีความไวแสงต่ำกว่า ISO 1600 ซึ่งหมายถึงว่า ที่ความเร็วชัตเตอร์เท่ากัน (เวลาที่เปิดหน้ากล้องล้องเท่ากัน) ISO สูงกว่าจะรับแสงได้สูงกว่า ดังนั้นเมื่อเลือกใช้ ISO สูงจึงไม่จำเป็นต้องเปิดหน้ากล้องนาน หรือในทางกลับกัน ISO สูงจะถูกใช้ในการถ่ายภาพในสภาพแสงน้อย



4.2 ความลึกของสนาม (the depth of field)

การเลือกขนาดของเปิดนอกจากส่งผลต่อปริมาณแสงแล้ว (ซึ่งเราสามารถควบคุมได้จากความเร็วชัตเตอร์และเลข ISO) ขนาดของช่องเปิดยังส่งผลต่อความชัดลึกชัดตื้นของโฟกัสอีกด้วย พิจารณาระบบเลนส์บูนเดียร์วิวัตถุที่จุด M, O, และ N ตามลำดับ



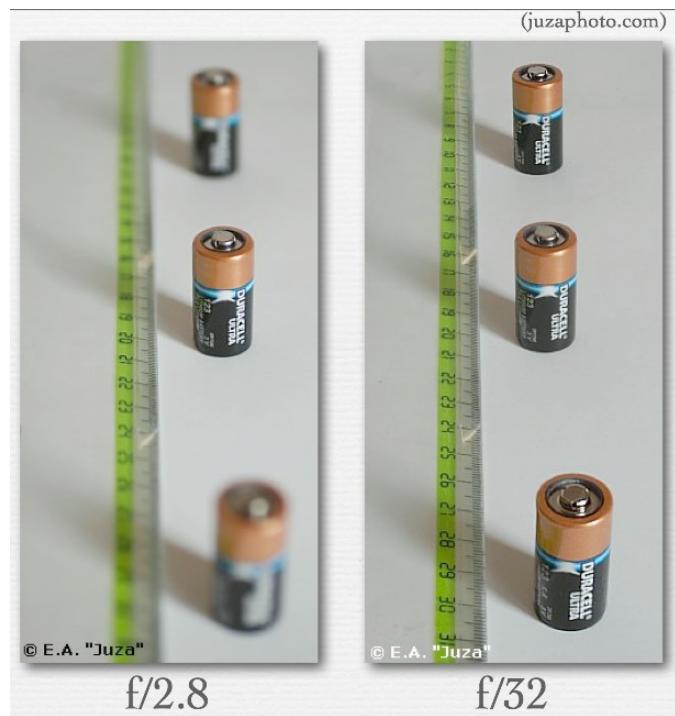
ถ้ากำหนดให้ฟิล์มหรือจักษุอยู่ที่จุด O' เราจะพบว่าวัตถุที่จุด O จะสร้างภาพที่ _____ ในขณะที่จุด M และ N _____

ซึ่งเกิดเป็นวงกลมของความสับสน circle of confusion และมีลักษณะภาพที่ไม่คมชัดเท่าจุด O' ถ้ากำหนดให้ฟิล์มสามารถแยกแยะได้ว่าแสงสองเส้นที่ห่างกันอย่างน้อยที่สุด d มาจากคนละที่กัน นั่นคือถ้าแสงห่างกันน้อยกว่าค่า d แสงสองเส้นนี้จะสร้างภาพซึ่งอยู่ในโฟกัส เรามาสามารถนิยามความลึกของสนาม (depth of field) ซึ่งคือระยะวัตถุซึ่งสร้างภาพได้ชัดเจนภายใน circle of confusion ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง d ซึ่งมีค่าเท่ากับ $s_2 - s_1$ ได้จาก

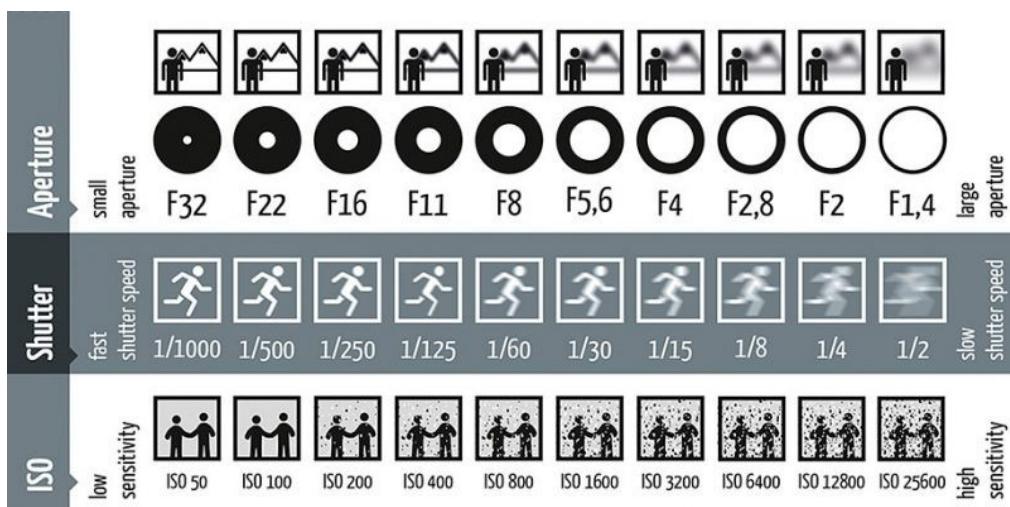
จะได้ว่า

$$\text{depth of field} = s_2 - s_1 = \frac{2Ad s_0(s_0-f)f^2}{f^4 - A^2 d^2 s_0^2}$$

สังเกตว่าเมื่อค่า relative aperture มีค่ามากขึ้นจะทำให้ความลึกของสนานมีค่ามากขึ้นด้วย



จากหลักการทำางานของกล้องถ่ายรูปทั้งหมดสามารถสรุปเป็นภาพดังนี้



ตัวอย่าง เลนส์ความยาวโฟกัส $+5\text{ cm}$ ซึ่งมีช่องเปิด $f/16$ ถูกใช้ถ่ายภาพวัตถุที่ห่างออกไป 2.75 m ถ้าเลือกให้วงกลมของความสับสนมีค่าเท่ากับ $d = 0.04\text{ mm}$ จงหาตำแหน่งชัดใกล้ ชัดไกล และความลึกของสนามในกรณีนี้

แบบฝึกหัด 2

1. จากแสดงว่าโดยการใช้สูตรเลนส์บาง

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

เรารสามารถพิสูจน์สูตรเลนส์บางของนิวตัน

$$x x' = f^2$$

เมื่อ f คือความยาวโฟกัส x คือระยะวัตถุถึงจุดโฟกัสผ่องวัตถุ และ x' คือระยะภาพถึงจุดโฟกัสผ่องภาพ

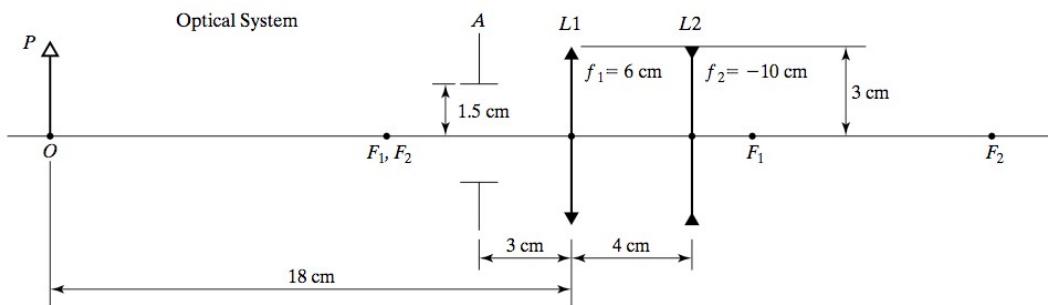
2. ระบบเชิงแสงประกอบด้วยเลนส์นูนบาง เลนส์เว้าบางและช่องเปิด ดังแสดงในรูป เลนส์นูนบาง L_1 เส้นผ่านศูนย์กลาง 6 ซม. ความยาวโฟกัส f_1 เท่ากับ 6 ซม. เลนส์เว้าบาง L_2 เส้นผ่านศูนย์กลาง 6 ซม. ความยาวโฟกัส f_2 เท่ากับ -10 ซม. ช่องเปิด A มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 3 ซม. วางอยู่ห่างจากเลนส์นูน 3 ซม. เลนส์นูนอยู่ห่างจากเลนส์เว้า 4 ซม. วัตถุสูง 3 ซม. และถูกวางอยู่ห่างจากเลนส์นูน 18 ซม.

จงหา

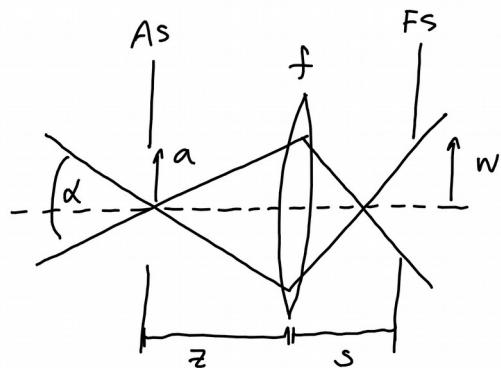
2.1 อุปกรณ์แสงขึ้นได้ทำหน้าที่เป็นตัวกั้นช่องเปิด (aperture stop)

2.2 ขนาดและตำแหน่งของรูม่านตาทางเข้าและรูม่านตาทางออก (entrance pupil and exit pupil)

2.3 ขนาดและตำแหน่งของภาพที่เกิดจากวัตถุซึ่งหักเหผ่านระบบเชิงแสงนี้



3. จากภาพ จงแสดงว่ามุมของสนามการมองมีค่าเท่ากับ



$$\alpha = \frac{2fw}{sz - sf - zf}$$

4. ปริซึมรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ใช้ในスペคโตรสโคปี ทำจากแก้วชนิดหนึ่งซึ่งมีดัชนีหักเหตามตาราง

λ nm	n
656.3	1.52322
589.2	1.52881
486.1	1.54234

จงหา

3.1 ค่าคงตัว A (ไม่มีหน่วย) และ B (nm^2) และ C (nm^4) จากสมการ Cauchy*

$$n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

(*อนุญาตให้ใช้เครื่องคิดเลขหรือโปรแกรมช่วยคำนวณ แต่ต้องแสดงที่มาของโปรแกรม เช่น ใช้โปรแกรมอะไร ใช้คำสั่งใดบ้าง)

3.2 กำลังการกระจายแสง Δ ของปริซึมนี้

3.3 มุมเบี่ยงเบนน้อยที่สุดของแสงโซเดียมซึ่งมีความยาวคลื่น 589.2 nm

3.4 จากสูตรของ Cauchy จงหาการกระจายแสง $\frac{dn}{d\lambda}$ ของแสงที่มีความยาวคลื่น 656.3 nm และ 486.1 nm

5. กล้องที่มีเลนส์ความยาวโฟกัส 5 ซม มีช่องเปิด f/16 ถูกใช้ถ่ายภาพตั้งที่มีระยะห่างไป 2.75 เมตร ถ้าให้ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมของความสับสน (circle of confusion) มีขนาด 0.04 มม จงหาจุดไกลสุดและจุดใกล้สุดของความลึกของสนาม (depth of field)

6. เลนส์ของกล้องถ่ายรูป ความยาวโฟกัส 5 ซม และปรับช่องเปิดไว้ที่ f-number เท่ากับ f/4 ใช้ถ่ายภาพตั้งที่ห่างออกไป 20 เมตร ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมของความสับสน (circle of confusion) มีขนาด 0.05 มม จงหาความลึกของสนามภาพ (depth of field)

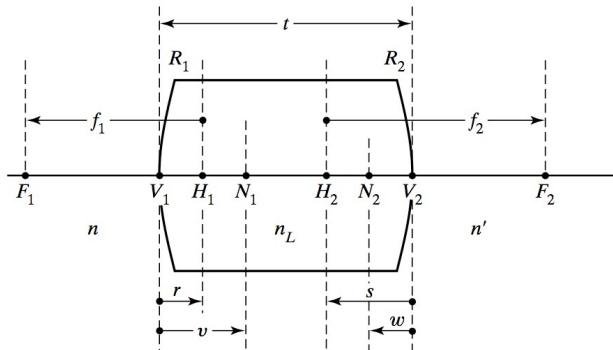
วิธีแมทริกซ์ (Matrix method)

วิธีแมทริกซ์คือการวิเคราะห์ระบบเชิงแสงโดยใช้แมทริกซ์และเวคเตอร์เป็นตัวช่วยในการพิจารณา ซึ่งสามารถใช้ได้ในกรณีทั่วไป และเป็นประโยชน์มากในกรณีที่เลนส์ที่เราพิจารณาไม่มีขนาด (เลนส์หนา)

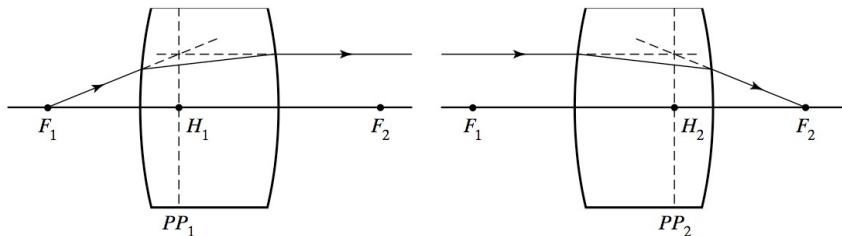
1. เลนส์หนา

มีจุดสำคัญ 6 จุด

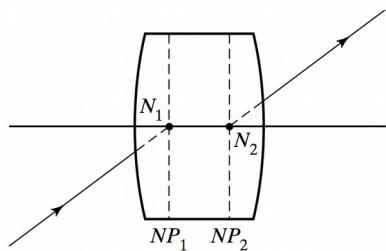
1. จุดโฟกัสที่ 1 (1st focal point) คือ _____
2. จุดโฟกัสที่ 2 (2nd focal point) คือ _____
3. จุดมุขสำคัญที่ 1 (1st principal point) คือ _____
4. จุดมุขสำคัญที่ 2 (2nd principal point) คือ _____
5. จุดโนดัลที่ 1 (1st nodal point) คือ _____
6. จุดโนดัลที่ 2 (2nd nodal point) คือ _____



โดยจุดมุขสำคัญคือจุดที่ _____ และ ระนาบมุขสำคัญ (principal planes) คือระนาบที่ _____.



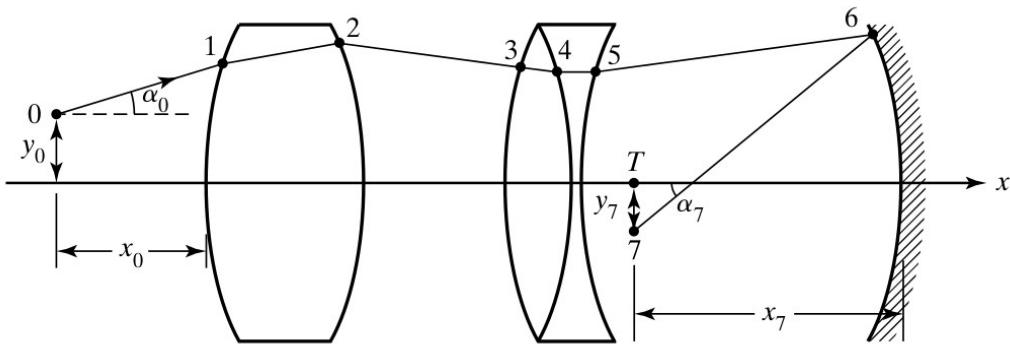
โดยจุดโนดัลคือจุดที่ _____



2. วิธีแม่ทริกซ์

ในกรณีที่ระบบเชิงแสงของเราประกอบไปด้วยหลายองค์ประกอบ เช่นเลนส์หรือห้าชิ้นในกล้อง เราจำเป็นต้องมีระเบียบวิธีในการศึกษาระบบที่แล่นนั้น วิธีแม่ทริกซ์นี้เป็นการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของมุมและความสูงของทางเดินของแสงที่เกิดขึ้นจากการผ่านองค์ประกอบเชิงแสงต่างๆ โดยเราจะจำกัดการศึกษาอยู่ในการประมาณ paraxial เท่านั้น

เมื่อพิจารณารูปด้านล่าง เราพบว่าที่ทำແเน่งต่างๆ เช่นที่จุดเริ่มต้น 0 จุดที่เกิดการหักเห และเกิดการสะท้อน 6 และจุดสุดท้าย 7 ความสูงและมุมที่ทำเทียบกับแกนเชิงทัศนศาสตร์ (optical axis) เกิดการเปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการเดินทางของแสง การหักเห และการสะท้อน



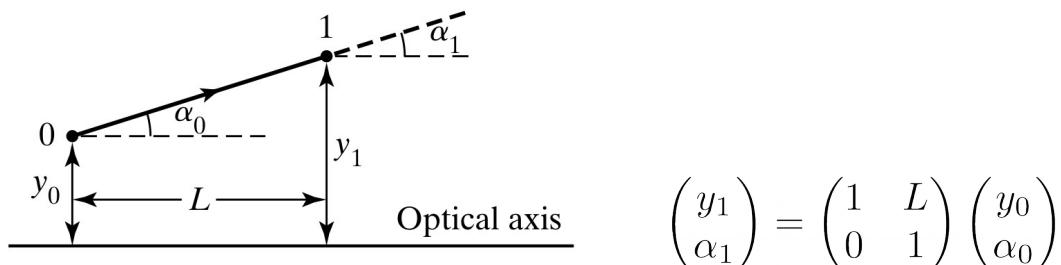
เราจะนิยามเวคเตอร์แนวหลัก (column vector) ซึ่งเป็นตัวแทนทำແเน่งของทางเดินแสงในแต่ละจุด ของแกนเชิงแสง โดยเวคเตอร์นี้มีองค์ประกอบเป็นความสูง y และมุม α และเขียนได้ดังนี้

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

โดยการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์นี้เนื่องจากการเดินทางของแสง การหักเหหรือการสะท้อน จะมีค่าเท่ากับการคูณเวคเตอร์นี้ด้วยแม่ทริกซ์ขนาด 2×2 ที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงนั้นๆ เพราะการทำเช่นนั้นคือการแปลงเวคเตอร์ตัวแรกไปเป็นเวคเตอร์อีกตัวหนึ่ง ด้วยหลักการนี้เราจะเริ่มต้นหาแม่ทริกซ์ที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงแต่ละประเภทดังต่อไปนี้

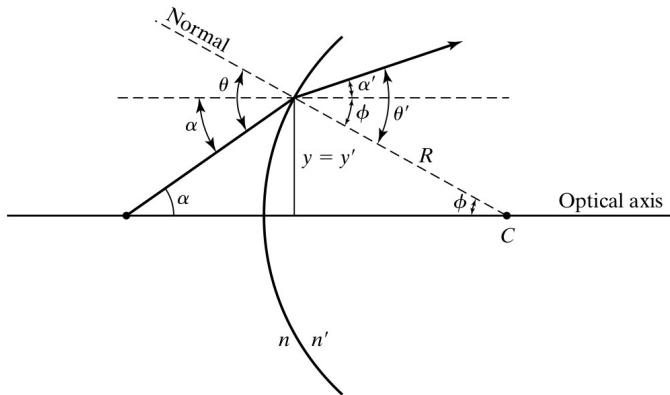
แม่ทริกซ์ของการเลื่อนทำແเน่ง

การเลื่อนทำແเน่งนั้นมีการเปลี่ยนแปลงความสูงเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ดังนั้นเมื่อพิจารณาจากภาพ เราจะได้ $\alpha_1 = \alpha_0$ และ $y_1 = y_0 + L \tan \alpha$ นั่นคือ



แมทริกซ์ของการหักเห

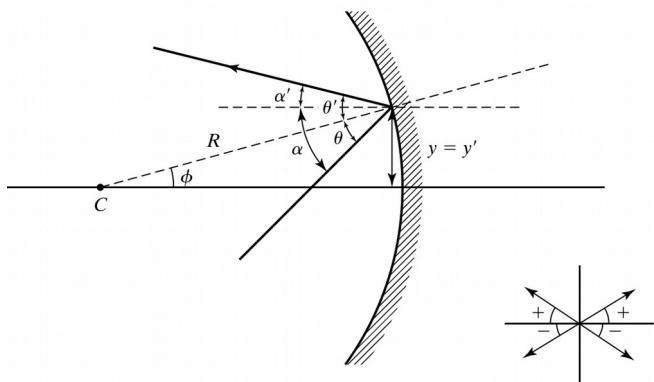
เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการหักเหเพียงอย่างเดียวเราจะเห็นว่าความสูงไม่มีการเปลี่ยนแปลง (พิจารณาว่าเป็นตำแหน่งหน้าผิวและตำแหน่งที่ด้านหลังผิวซึ่งห่างกันเล็กๆ) การเปลี่ยนแปลงของมุมจากการหักเหสามารถใช้กฎของสเนลล์เพื่อพิจารณาแมทริกซ์การหักเหได้ดังนี้



$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

แมทริกซ์การสะท้อน

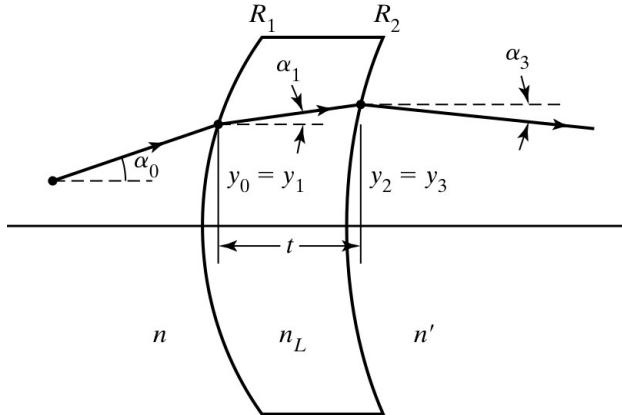
เข่นเดียวกันกับการหักเห การสะท้อนเพียงอย่างเดียวจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงความสูง เมื่อเราใช้ข้อตกลงเรื่องเครื่องหมายของมุมดังภาพ เราจะได้ว่า



$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

แม่ทริกซ์ของเลนส์หนาและเลนส์บาง

เราจะสร้างแม่ทริกซ์ที่เป็นตัวแทนของระบบเชิงแสงของเลนส์หนาโดยการพิจารณาเฉพาะช่วงการหักเหเข้า, การเลื่อนตำแหน่งในเนื้อเลนส์ และการหักเหออก เมื่อพิจารณาตามภาพ



สำหรับการหักเหครั้งแรกเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} =$$

สำหรับการเลื่อนตำแหน่งเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} =$$

สำหรับการหักเหครั้งที่สองเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} =$$

เมื่อร่วมความสัมพันธ์เหล่านี้เข้าด้วยกันเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้นเลนส์หนาจึงมีแม่ทริกซ์รวมเป็น $M = M_3 M_2 M_1$ สังเกตว่าการคูณแม่ทริกซ์นั้นไม่มีสมบัติการสลับที่ เพราะฉะนั้นเพื่อพิจารณาระบบเชิงแสงเราจะต้องเขียนแม่ทริกซ์รวมในรูปของผลคูณของแม่ทริกซ์ประกอบโดยเขียนໄเล่ย้อนทางเดินแสงเสมอ

เมื่อใช้แม่ทริกซ์การหักเหและแม่ทริกซ์เลื่อนตำแหน่งเราจะเขียนแม่ทริกซ์ของเลนส์หนาจากรูปข้างต้นได้เป็น

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n'}{n' R_2} & \frac{n_L}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_L R_1} & \frac{n}{n_L} \end{pmatrix}$$

ในกรณีของเลนส์บางคือ $t = 0$ เราสามารถลดรูปแมทริกซ์ได้ดังนี้

และเมื่อใช้สมการซ่างทำเลนส์เราจะได้ว่า

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

ตัวอย่าง จะใช้แมทริกซ์ของเลนส์บางเพื่อพิสูจน์สมการเลนส์บาง

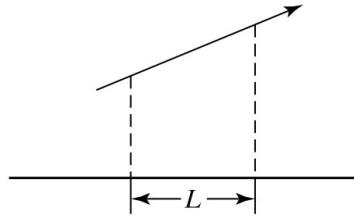
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

ตัวอย่าง จงหาแมทริกซ์ระบบของเลนส์หนาที่มีค่า $R_1 = 45 \text{ cm}$, $R_2 = 30 \text{ cm}$, $t = 5 \text{ cm}$, $nL = 1.60$ และ $n = n' = 1$

ตารางสรุปของแมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงเป็นดังนี้

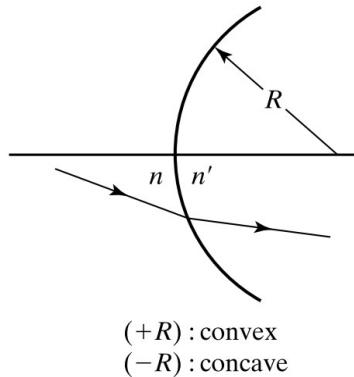
Translation matrix:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{T}$$



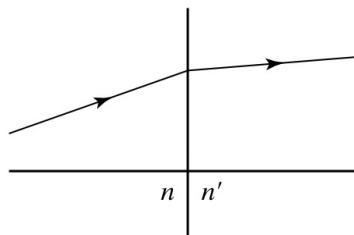
Refraction matrix,
spherical interface:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \frac{n - n'}{Rn'} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix} = \mathfrak{R}$$



Refraction matrix,
plane interface:

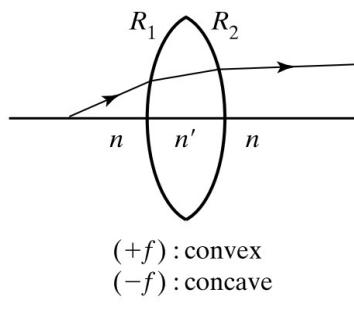
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$



Thin-lens matrix:

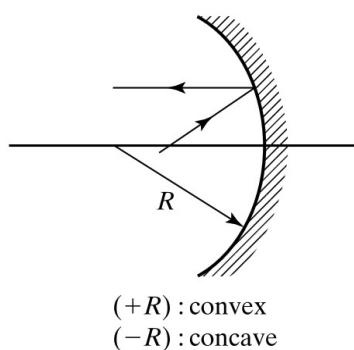
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n' - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



Spherical mirror
matrix:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$



3. เมทริกซ์ระบบ

เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์ของระบบเชิงแสงมีรูปแบบโดยทั่วไปดังนี้

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ซึ่งเกิดจากการคูณเมทริกซ์อย่างต่อเนื่องของเมทริกซ์การหักเห เมทริกซ์การเลื่อนและเมทริกซ์การสะท้อน (เขียนโดยพิจารณา y-อันทางเดินแสง)

$$M = M_1 M_2 \dots M_n$$

โดยสมบัติที่สำคัญของการเมทริกซ์นี้คือเมื่อพิจารณา \det ของเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงทุกชนิดเราพบว่า

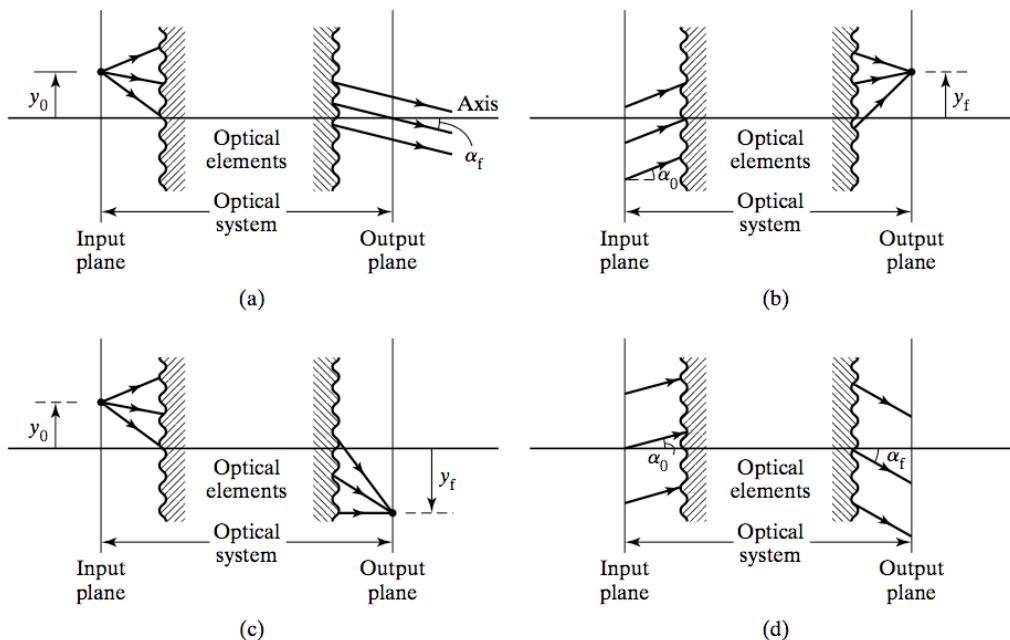
จากสมบัติของ \det ของผลคูณเมทริกซ์เราจะได้ว่า

นั่นคือ

$$\det(M) = \frac{n_0}{n_f}$$

เมื่อ n_0 คือดัชนีหักเหของตัวกลางหน้าระบบ และ n_f คือดัชนีหักเหของตัวกลางหลังระบบ

ในเมทริกซ์ระบบเรามารถหาความหมายของค่า A, B, C, D ได้จากการนีดังภาพด้านล่าง



โดยกรณี a) วัตถุถูกวางไว้ที่ตำแหน่งโฟกัสของระบบเชิงแสงดังภาพ
 เราเห็นว่าในขาเข้าค่า _____ มีค่าคงที่ ส่วนขาออกค่า _____ มีค่าคงที่ นั่นแปลว่า
 ค่า _____ ไม่เข้ากับมุมขาเข้า นั่นคือค่า _____ ต้องมีค่าเท่ากับ 0 เพราะ

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

และเราจะได้ความสัมพันธ์

โดยในกรณี b) วัตถุถูกวางไว้ที่ระยะอนันต์ทำให้ภาพเกิดที่ระยะโฟกัสดังภาพ
 เราเห็นว่าในขาเข้าค่า _____ มีค่าคงที่ ส่วนขาออกค่า _____ มีค่าคงที่ นั่นแปลว่า
 ค่า _____ ไม่เข้ากับตำแหน่งขาเข้า นั่นคือค่า _____ ต้องมีค่าเท่ากับ 0 เพราะ

$$\begin{pmatrix} y_f \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

และเราจะได้ความสัมพันธ์

โดยในกรณี c) วัตถุถูกวางไว้ที่ระยะวัตถุทำให้ภาพเกิดที่ระยะภาพโดย
 เราเห็นว่าในขาเข้าค่า _____ มีค่าคงที่ ส่วนขาออกค่า _____ มีค่าคงที่ นั่นแปลว่า
 ค่า _____ ไม่เข้ากับมุมขาเข้า นั่นคือค่า _____ ต้องมีค่าเท่ากับ 0 เพราะ

$$\begin{pmatrix} y_f \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

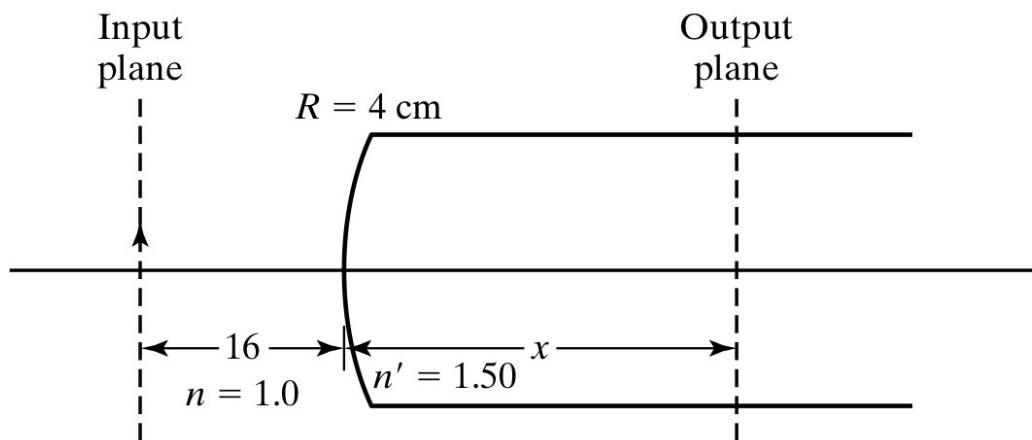
และเราจะได้ความสัมพันธ์ซึ่งตีความได้ว่ากำลังขยายมีค่าเท่ากับ

โดยในกรณี d) วัตถุถูกวางไว้ที่ระยะอนันต์และทำให้ภาพเกิดที่ระยะอนันต์เข่นเดียวกัน
 เราเห็นว่าในขาเข้าค่า _____ มีค่าคงที่ ส่วนขาออกค่า _____ มีค่าคงที่ นั่นแปลว่า
 ค่า _____ ไม่เข้ากับมุมตำแหน่งขาเข้า นั่นคือค่า _____ ต้องมีค่าเท่ากับ 0 เพราะ

$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

และเราจะได้ความสัมพันธ์ซึ่งตีความได้ว่ากำลังขยายเชิงมุมมีค่าเท่ากับ

ตัวอย่าง เมื่อวางวัตถุขึ้นเล็กๆทางด้านซ้ายเป็นระยะ 16 cm จากแท่งพลาสติกใสที่มีปลา yal โค้งรัศมี 4 cm แสดงดังภาพด้านล่าง ถ้ากำหนดให้ดัชนีหักเหของพลาสติกนี้มีค่าเท่ากับ 1.50 และวัตถุขึ้นนี้อยู่ในอากาศ จะใช้วิธีแมทริกซ์หาระยะภาพและกำลังขยายที่เกิดขึ้นจากการหักเหผ่านผิวเรียบต่อหน้า

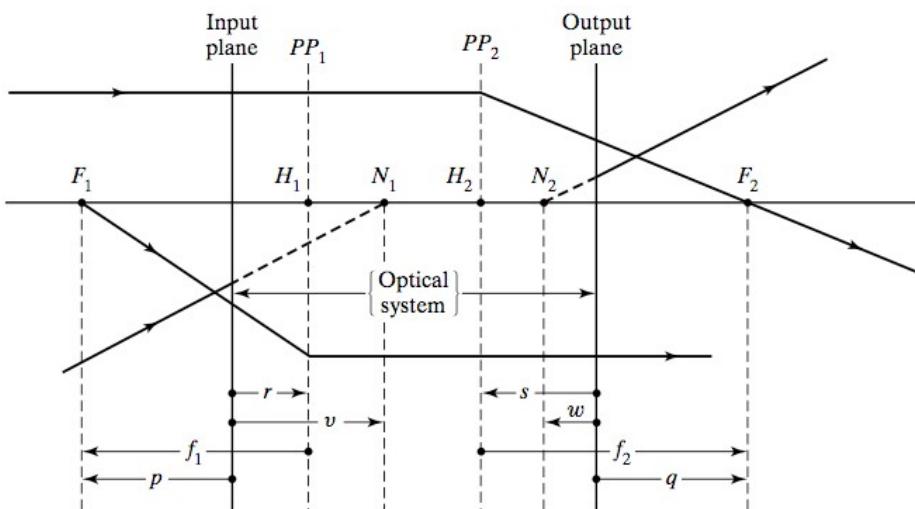


4. การหาตำแหน่งของจุดหลักในเลนส์หนา

ด้วยการใช้วิธีแมทริกซ์เรารสามารถหาตำแหน่งของจุดหลักในเลนส์หนาทั้งหมดได้ เมื่อกำหนดให้แมทริกซ์ของเลนส์หนามีรูปแบบดังนี้

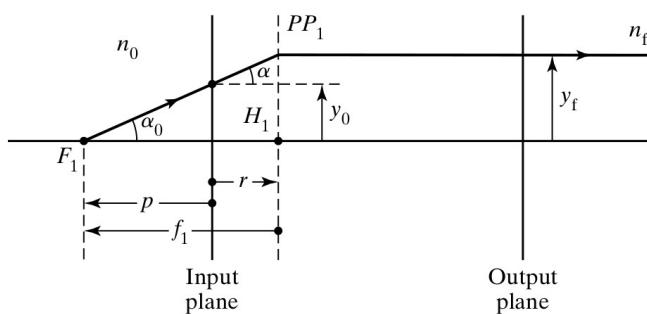
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

เรานิยามระยะของตำแหน่งต่างๆดังภาพ



ตำแหน่งโฟกัส

พิจารณาวัตถุที่ตำแหน่ง F_1 ดังภาพ



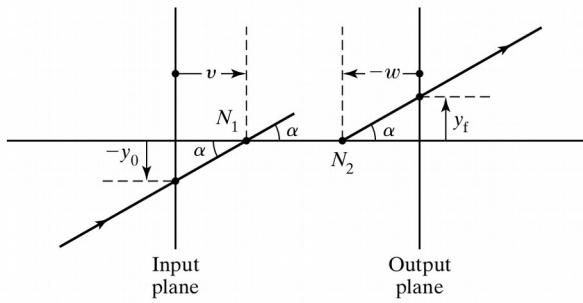
เมื่อพิจารณาแมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

ทำให้เราหาระยะสำคัญได้ว่า

$$p = \frac{D}{C}, \quad f_1 = \frac{AD}{C} - B = \left(\frac{n_0}{n_f} \right) \frac{1}{C}$$

ตำแหน่งของภาพที่ได้จากการพด้านล่าง



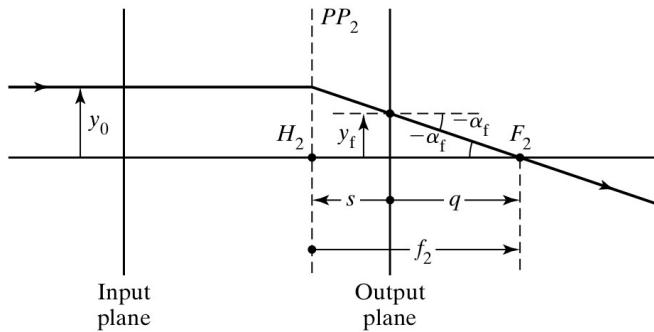
เมื่อพิจารณาแม่ทริกซ์การเปลี่ยนแปลงจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_f \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ทำให้เราหาระยะสำคัญได้

$$v = \frac{D - 1}{C}, \quad w = \frac{(n_0/n_f) - A}{C}$$

ตำแหน่งโฟกัส F₂ หาได้ในทำองเดียวกันโดยพิจารณาภาพด้านล่าง



ชี้งะยะที่สำคัญต่างๆ ก็สรุปไว้ในตารางดังนี้

$p = \frac{D}{C}$	F_1	}
$q = -\frac{A}{C}$	F_2	
$r = \frac{D - n_0/n_f}{C}$	H_1	
$s = \frac{1 - A}{C}$	H_2	
$v = \frac{D - 1}{C}$	N_1	
$w = \frac{n_0/n_f - A}{C}$	N_2	

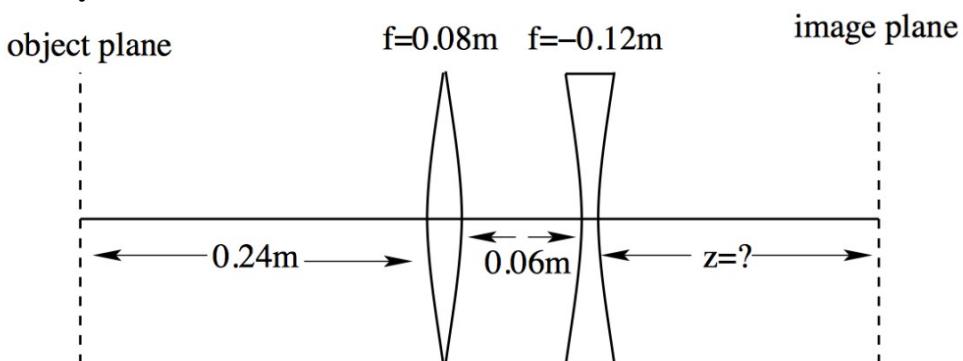
Located relative to input (1) and output (2) reference planes

$f_1 = p - r = \frac{n_o/n_f}{C}$	F_1	}
$f_s = q - s = -\frac{1}{C}$	F_2	

Located relative to principal planes

แบบฝึกหัด 3

1. เลนส์หนา 5 ซม. มีลักษณะเป็นผิวโค้งออกสองด้าน โดยทั้งสองด้านมีรัศมีความโค้ง 40 ซม. และวัสดุที่ใช้ทำเลนส์มีดัชนีหักเห 1.60 เมื่อใช้เลนส์นี้มองวัตถุซึ่งอยู่ในตัวกลางที่เป็นอากาศ จงหาความยาวโฟกัสสมมูล (effective focal length) พร้อมทั้งหาดภาพแสดงจุดหลักทั้ง 6 (จุดโฟกัส จุดมุขสำคัญ และจุดโนดล)
2. เลนส์ญูนออกสองด้านมีรัศมีความโค้ง 10 ซม. เท่ากันทั้งสองด้าน ดัชนีหักเห 1.61 มีความหนา 2 ซม. วางอยู่ระหว่างตัวกลางอากาศกับน้ำ ($n = 1.33$) วัตถุสูง 5 ซม. วางอยู่ในอากาศด้านหน้าของเลนส์และห่างจากเลนส์ 60 ซม. จงหาตำแหน่งของจุดหลัก (จุดโฟกัส จุดมุขสำคัญ และจุดโนดล) ตำแหน่งและขนาดของภาพ
3. แก้วรูปครึ่งทรงกลมรัศมีความโค้ง 5 ซม. ดัชนีหักเห 1.5 เมื่อกำหนดให้แสงขนานตกกระทบผิวราบทองแก้ว รูปครึ่งทรงกลมที่ความสูง 1 ซม. จากแกนมุขสำคัญ ($y = 1 \text{ cm}$, $\alpha = 0$) จงใช้เมทริกซ์ระบบคำนวณความสูงและมุมของแสงเมื่อวิงผ่านผิวอีกด้านของแก้ว
4. แก้วทรงกลมขนาดใหญ่ซึ่งมี เส้นผ่านศูนย์กลาง 80 ซม. ดัชนีหักเห 1.50 จงหาตำแหน่งของจุดหลัก (จุดโฟกัส จุดมุขสำคัญและจุดโนดล) และถ้าแสงจากดวงอาทิตย์ส่องผ่านแก้วนี้จะถูกรวมไว้ที่จุดใด
5. เลนส์ญูนบางความยาวโฟกัส 10 ซม. อยู่ห่างจากเลนส์เว้าบาง 5 ซม. ซึ่งมีความยาวโฟกัส -10 ซม. จงหาความยาวโฟกัสสมมูลของเลนส์ประกอบชุดนี้ และหาตำแหน่งของจุดหลักโดยการใช้วิธีเมทริกซ์
6. เลนส์แก้วความหนา 3 ซม. มีดัชนีหักเห 1.5 ผิวด้านซ้ายเป็นโค้งนูนรัศมีความโค้ง 5 ซม. ผิวด้านขวาเป็นผิวโค้งนูนรัศมีความโค้ง 2 ซม. ถ้าผิวด้านซ้ายต่อ กับอากาศและผิวด้านขวาต่อ กับตัวกลางชนิดหนึ่งซึ่งมีดัชนีหักเห 1.4 จงหาเมทริกซ์ระบบ
7. จงหาระยะภาพของระบบเชิงแสงดังรูปด้านล่าง โดยใช้วิธีการหาเมทริกซ์ของระบบ จำนวนเปรียบเทียบระยะภาพที่ได้กับสูตรเลนส์บางปกติ ($1/f = 1/s' + 1/s$)



ทบทวนคลื่น

1. สมการคลื่น

คลื่นคือการส่งผ่านพลังงาน โดยมีสมการคลื่นเขียนได้ดังรูป

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

คำตอบของสมการคลื่นเรียกว่าฟังก์ชันคลื่น โดยเรามักสนใจเฉพาะคลื่นซึ่งมีลักษณะการเคลื่อนที่ของตัวกลางที่เป็นคงและมีฟังก์ชันคลื่นโดยทั่วไปดังนี้

- $f(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t)$ หรือ $A \cos(kx \pm \omega t)$

- $f(x, t) = A \sin(k(x \pm vt))$ หรือ _____

- $f(x, t) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)\right)$ หรือ _____

ซึ่งมีคลื่นนี้มีความเร็ว

$$\frac{dx}{dt} = \mp v = \underline{v}$$

ซึ่งปริมาณที่อยู่ด้านในฟังก์ชันไซน์และкос เราระบุว่า เพส
ในกรณีที่เราสามารถบวกเพสตั้งต้นของคลื่นด้วยเป็น

$$f(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi_0)$$

ตัวอย่าง คลื่นเชือกเส้นหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยฟังก์ชันคลื่น

$$y(x, t) = 0.35 \sin(3\pi x - 10\pi t + \pi/4)$$

โดยที่ x และ t มีหน่วยเป็นเมตรและวินาทีตามลำดับ จงหาความเร็วของคลื่นนี้ เพสตั้งต้น และความสูง ของ เชือกที่ตำแหน่ง $x = 10$ m และ $t = 0$

2. การบรรยายคลื่นด้วยจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนถูกเขียนในรูปส่วนจริงและส่วนจินตภาพดังสมการ

$$z = a + ib$$

โดยที่

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

ถ้าให้ $a = |z| \cos \theta$ และ $b = |z| \sin \theta$

เราสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปของขนาดและเฟสได้

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}$$

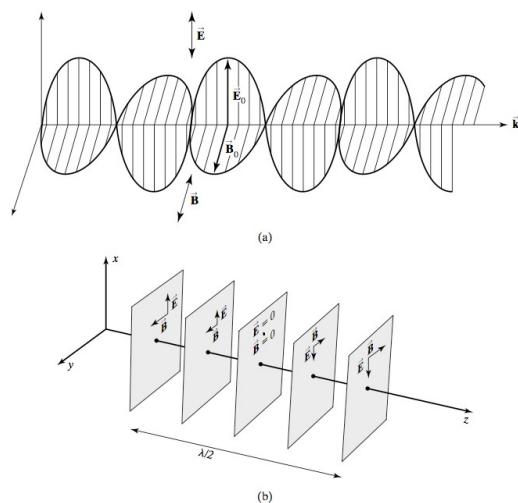
จากความสัมพันธ์ดังกล่าวเราสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นในรูปจำนวนเชิงซ้อนได้ว่า

$$\tilde{f} = A e^{i(kx - \omega t)}$$

โดยที่หากต้องการปริมาณที่เป็นจำนวนจริง เราเพียงแค่หาส่วนจริงหรือส่วนจินตภาพจากฟังก์ชันคลื่นเชิงซ้อน $f = \Re(\tilde{f}) = A \cos(kx - \omega t)$ หรือ $f = \Im(\tilde{f}) = A \sin(kx - \omega t)$

3. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

แสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งมีที่มาจากการแมกซ์เวล (Maxwell's equations) สำหรับคลื่น แม่เหล็กไฟฟ้าที่มีทิศทางการเคลื่อนที่แสดงด้วยเวคเตอร์ \vec{k} สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะตั้งฉาก ซึ่งกันและกัน และตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่นดังภาพ



โดยฟังก์ชันคลื่นของไฟฟ้าและแม่เหล็กสามารถเขียนได้ว่า

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

4. ผลรวมของคลื่น

4.1. หลักการซ้อนทับ (superposition principle)

หลักการซ้อนทับกล่าวว่า ถ้ามีคลื่นสองขบวนที่ผ่านจุดเดียวกันในเวลาเดียวกันคลื่นลัพท์เกิดจาก ผลรวมของคลื่นทั้งสองขบวน ตัวอย่างเช่นถ้าให้ ψ_1 และ ψ_2 เป็นฟังก์ชันคลื่น คลื่นลัพท์มีค่าเท่ากับ

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

เช่นเดียวกันกับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

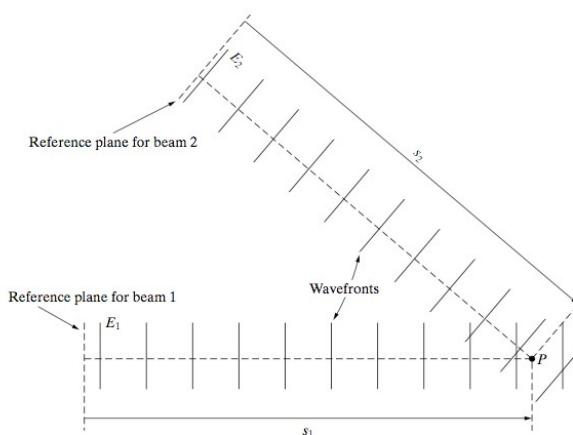
4.2. การซ้อนทับของคลื่นที่มีความถี่เดียวกัน

เมื่อพิจารณาการรวมกันของคลื่นที่มีความถี่เดียวกันที่ทำแน่ง P ห่างจากตำแหน่งอ้างอิง s1 และ s2 สำหรับคลื่นที่หนึ่งและคลื่นที่สองตามลำดับ

$$E_1 = E_{01} \cos(k s_1 - \omega t + \varphi_1)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(k s_2 - \omega t + \varphi_2)$$

โดยเราจะกำหนดให้ทิศทางของสนามไฟฟ้ามีทิศทางเดียวกัน (มีโพลาเรชันแนวเดียวกัน)



ให้ $\alpha_1 = k s_1 + \varphi_1$, $\alpha_2 = k s_2 + \varphi_2$ เราจะได้ว่า

$$E_t = E_{01} \cos(\alpha_1 - \omega t) + E_{02} \cos(\alpha_2 - \omega t)$$

ซึ่งจะเกิดการแทรกสอดแบบเสริมกันก็ต่อเมื่อ

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n$$

และหักล้างกันก็ต่อเมื่อ

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (2n+1)\pi$$

และในกรณีที่ว่าไป เราสามารถใช้เลขจำนวนเชิงซ้อนในการหาคลื่นลับพหุได้

$$E_t = \Re(E_{01} e^{i(\alpha_1 - \omega t)} + E_{02} e^{i(\alpha_2 - \omega t)}) = \Re(E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2})$$

เมื่อนิยามให้

$$E_0 e^{i\alpha} = E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2}$$

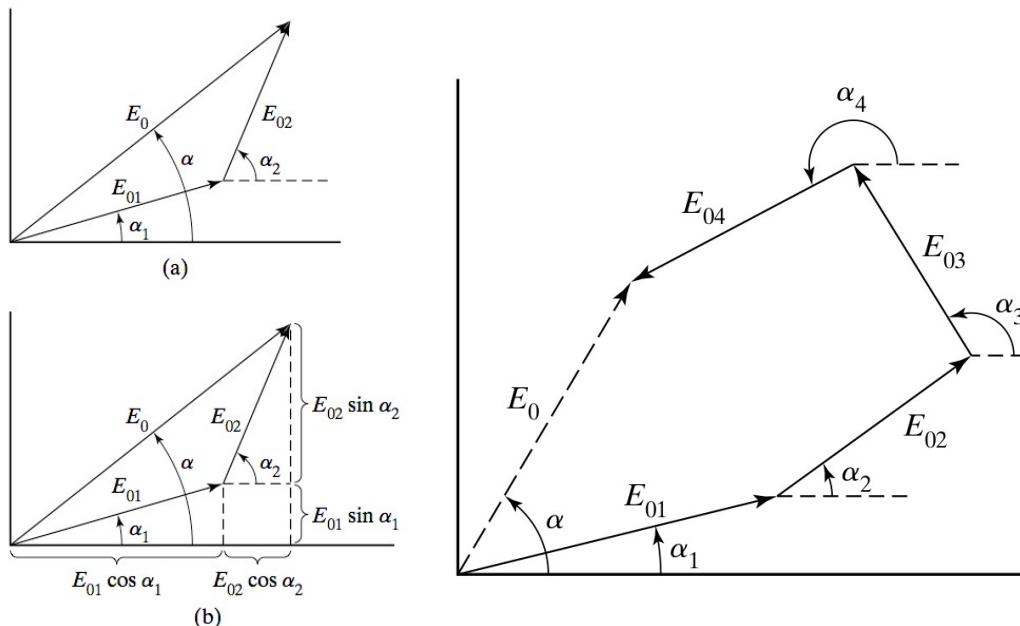
เราจะได้คลื่นลับพหุ

$$E_t = \Re(E_0 e^{i(\alpha - \omega t)}) = E_0 \cos(\alpha - \omega t)$$

โดยค่าของ E_0 และ α หาได้จากการบวกกันของเวคเตอร์ในระนาบจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือหาได้จาก

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan \alpha = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2}$$



ในกรณีที่ว่าไปเราหาการบวกกันของเวคเตอร์หลายตัวในระนาบจำนวนเชิงซ้อนได้โดย

$$E_0^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_{0i} \sin \alpha_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos \alpha_i \right)^2$$

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^N E_{0i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos \alpha_i}$$

5. คลื่นนิ่ง

ในกรณีที่มีคลื่นซึ่งวิ่งสวนทางกันในตัวกลางเดียวกัน คลื่นจะเกิดการแทรกสอดกันเป็นคลื่นนิ่ง

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t + kx)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t - kx - \varphi_2)$$

เมื่อใช้หลักการซ้อนทับกันของคลื่นและเอกลักษณ์ตรีgonometric

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

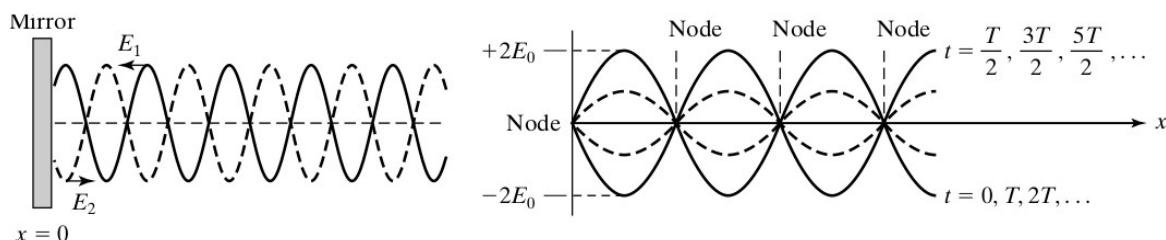
เราจะหาคลื่นรวมได้เป็น

เมื่อให้เฟสตั้งต้นของคลื่นที่สองเกิดจากการสะท้อนกลับเราจะได้ว่า $\varphi_2 = \pi$ และคลื่นนิ่งมีพังค์ชั่นเป็น

$$E_t = 2E_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

ซึ่งมีตำแหน่งบัฟ (nodes) อยู่ที่ _____
และมีตำแหน่งปฏิกูลบัฟ (antinodes) อยู่ที่ _____

สังเกตว่าตำแหน่งบัฟที่อยู่ติดกันจะห่างกัน _____ เสมอ



6. การเกิดบีตส์

เมื่อมีคลื่นสองขบวนที่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อยและเคลื่อนที่ไปในทางเดียวกัน จะเกิดปรากฏการณ์บีตส์ขึ้น

$$E_1 = E_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$E_2 = E_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

ถ้าให้

$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad k_p = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\omega_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad k_g = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

เราจะได้ว่า

$$E_t = 2 E_0 \cos(k_p x - \omega_p t) \cos(k_g x - \omega_g t)$$

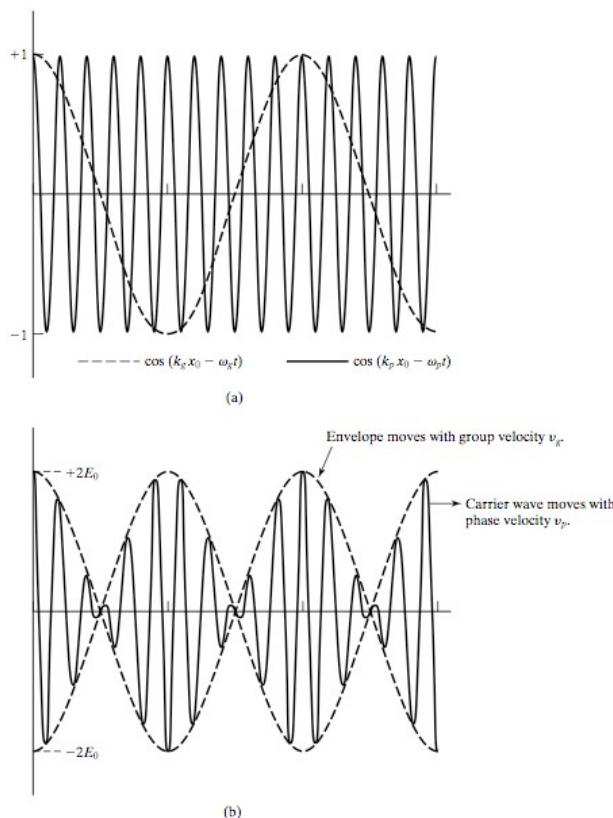
ในกรณีที่ความถี่ใกล้กันมาก เราจะได้ว่า

$$\omega_p \gg \omega_g$$

ทำให้การเปลี่ยนแปลงของส่วนที่มี ω_g เป็นความถี่จะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยจนสามารถคิดได้ว่าแอมเพลจูด ที่ตำแหน่งใดๆ ก็ได้ การเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ และมีค่าเท่ากับ

$$A = 2 E_0 \cos(k_p x - \omega_p t)$$

และมีคลื่นล้ำพห์ดังภาพ



และมีความถี่บีตส์เป็น

$$\omega_b = 2\omega_g = \omega_1 - \omega_2$$

7. ค่าเฉลี่ยตามเวลาของฟังก์ชัน

คลื่นแสงที่ตามองเห็นมีความถี่ที่สูงมากทำให้ความเข้มที่ปรากฏต่อเรานั้นขึ้นกับค่าเฉลี่ยต่อเวลาของฟังก์ชันตรีโภณมิติ โดยเรานิยามค่าเฉลี่ยต่อเวลาของฟังก์ชันที่มีคาบ T ว่า

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

ทำให้เราได้ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันตรีโภณมิติดังนี้

$$\langle \sin(\omega t) \rangle = \underline{\textcolor{red}{i}}$$

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \underline{\textcolor{red}{i}}$$

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \underline{\textcolor{red}{i}}$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \underline{\textcolor{red}{i}}$$

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = \underline{\textcolor{red}{i}}$$

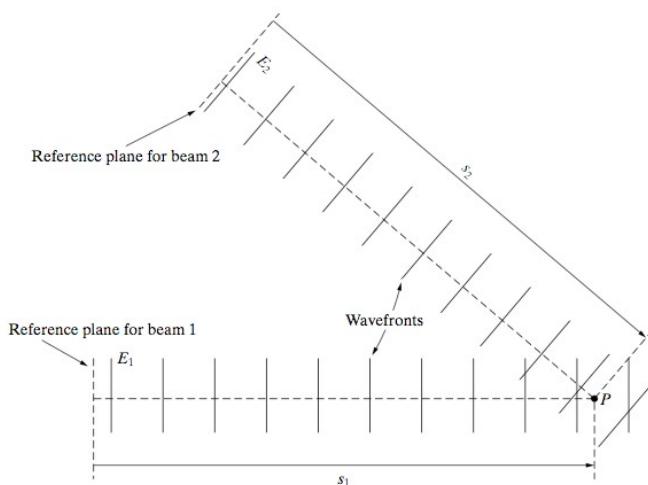
การแทรกสอดของแสง

1. การแทรกสอดของแสงสีเดียว

พิจารณาคลื่นแสงสองขบวนที่มีความยาวคลื่นเท่ากัน วิ่งในตัวกล่างเดียวกัน

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(k s_1 - \omega t + \varphi_1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(k s_2 - \omega t + \varphi_2)$$



เมื่อให้ $\alpha_1 = k s_1 + \varphi_1$, $\alpha_2 = k s_2 + \varphi_2$ เราจะได้ว่า

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{01} \cos(\alpha_1 - \omega t) + \vec{E}_{02} \cos(\alpha_2 - \omega t)$$

ซึ่งเราสังเกตเห็นความเข้มของแสงที่นิยามจาก

$$I = \epsilon_0 c \langle |\vec{E}|^2 \rangle$$

ทำให้เราได้ความเข้มของแสงรวมมีค่าเท่ากับ

$$I = \frac{\epsilon_0 c |\vec{E}_{01}|^2}{2} + \frac{\epsilon_0 c |\vec{E}_{02}|^2}{2} + 2 \epsilon_0 c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos(\alpha_1 - \omega t) \cos(\alpha_2 - \omega t) \rangle$$

ถ้าอนุญาตความเข้มแสงตามเหตุผลต่างๆดังสมการ

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

เหตุผล _____ แสดงถึงพฤติกรรมคลื่น เพราะว่า _____
โดยจะมีค่าเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ _____ หรือ _____

พิจารณาค่าเฉลี่ยโดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$$\langle 2 \cos(\alpha_1 - \omega t) \cos(\alpha_2 - \omega t) \rangle = \textcolor{red}{\delta}$$

เพราะว่าค่าเฉลี่ยตามเวลาของฟังก์ชัน \cos มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะได้ว่า

$$I_{12} = \epsilon_0 c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos \delta \rangle$$

โดยที่

$$\delta = k(s_2 - s_1) + \phi_2 - \phi_1$$

ถ้าทิศทางของสนามไฟฟ้า (โพลาไรเซชันของแสง) ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันความเข้มแสงรวมจะมีค่าเท่ากับ

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \delta \rangle$$

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติแล้วแหล่งกำเนิดคลื่นที่มีเฟสตั้งต้นที่มีค่าคงที่เป็นไปได้ยากมาก (เกิดขึ้นเฉพาะในแสงเลเซอร์ ที่มีคุณภาพสูง) เราจึงกำหนดให้เฟสตั้งต้นให้มีลักษณะขึ้นกับเวลาดังนี้

$$\delta(t) = k(s_2 - s_1) + \phi_2(t) - \phi_1(t)$$

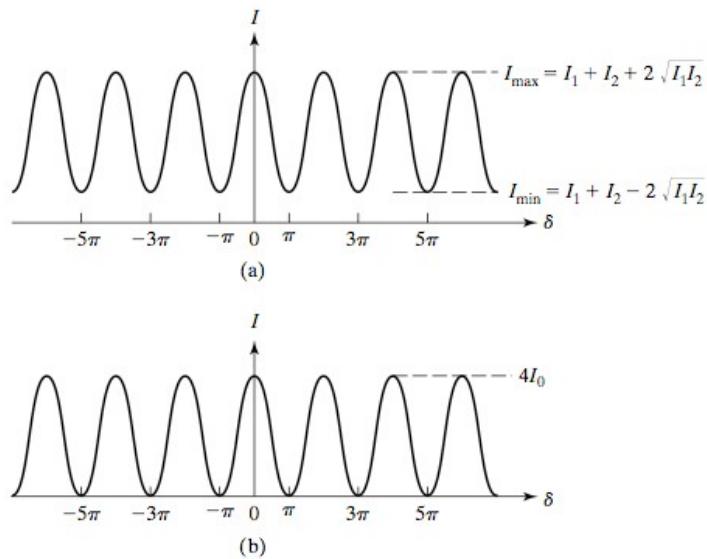
ถ้าแสงสองแหล่งที่มีค่าเฉลี่ยในเวลาของความต่างเฟสตั้งต้นเท่ากับศูนย์เราเรียกว่าแสงทั้งสองนี้เป็น **incoherent** กัน (ไม่อพันธ์) นั่นคือ แสงที่ incoherent กันจะไม่เกิดการแทรกสอดให้เราสังเกตเห็นได้ในกรณีนี้

$$I = I_1 + I_2$$

และถ้าแสงสองแหล่งมีค่าเฉลี่ยในเวลาของความต่างเฟสตั้งต้นเป็นค่าคงที่ เราเรียกแสงทั้งสองนี้ว่าเป็น **coherent** กัน (อพันธ์) นั่นคือแสงที่เป็น coherent กันจะเกิดการแทรกสอดกันได้ เพราะว่า

$$\langle \cos(k(s_2 - s_1) + \phi_2(t) - \phi_1(t)) \rangle = \cos(k(s_2 - s_1) + \phi_2 - \phi_1)$$

ทำให้ $I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta$ โดยค่าของ δ จะทำให้เกิดการแทรกสอดเพราะว่าค่าความเข้มจะลดลง เมื่อ _____ และค่าความเข้มจะเพิ่มขึ้นเมื่อ _____



ความต่างของแผลบมีดสว่างถูกนิยามเป็นค่าทัศนวิสัย (visibility)

$$\text{visibility} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

ซึ่งค่านี้จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $I_1 = I_2 = I_0$ และความเข้มแสงมีสูตรเป็น

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

ตัวอย่าง พิจารณาแสงซึ่งมีสนามไฟฟ้าในทิศเดียวกันและมีรูปแบบคลื่นดังนี้

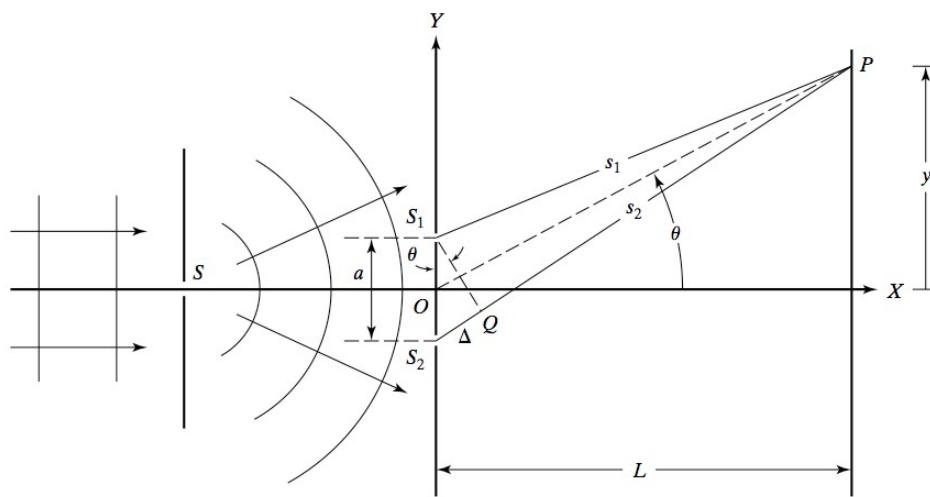
$$E_1 = 2 \cos(k s_1 - \omega t) kV/m$$

$$E_2 = 5 \cos(k s_2 - \omega t) kV/m$$

กำหนดให้ $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C/Vm$ และ $c = 3 \times 10^8 m/s$ จะหาค่าความเข้มสูงสุดและ ความเข้มต่ำสุด

2. การทดลองสลิตคู่ของยัง

วิธีการสร้างแหล่งกำเนิดสองชิ้นที่เป็น (coherent) อาพันธ์กันอย่างที่ง่ายที่สุดคือการนำจากที่มีสองรู (สลิตคู่) ไปวางด้านหลังกระจกเดี่ยว (สลิตเดี่ยว) ดังภาพ แสงที่ออกมากจากตำแหน่ง S จะทำตัวเหมือนแหล่งกำเนิดเดี่ยว (หลักการของอยogen's) เมื่อวางสลิตคู่ไว้ด้านหลังกระจกอันแรกแบบตั้งฉาก ตำแหน่ง S_1 และ S_2 จึงทำตัวเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่ซึ่งมีเฟสตรงกันตลอดเวลา (ห่างจากแหล่งกำเนิดคลื่นแบบจุดเป็นระยะเท่ากัน ทำให้อยู่บนหน้าคลื่นเดียวกันเสมอ) นั่นคือ S_1 และ S_2 เป็นแหล่งกำเนิด coherent (อาพันธ์)



การแทรกสอดจึงสามารถเกิดขึ้นได้ โดยผลต่างเฟสรวมขึ้นกับระยะห่างระหว่างจุด S_2 ถึงตำแหน่ง P ได้จาก และจุด S_1 ถึงตำแหน่ง P ตามสมการ

$$\delta = k(s_2 - s_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(s_2 - s_1)$$

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขการแทรกสอดที่ทำให้ความเข้มสูงสุด (แทรกสอดแบบเสริมกัน)

$$\delta = 2m\pi, \quad m=0,1,2,\dots$$

เราจะได้ว่า

$$(s_2 - s_1) = m\lambda$$

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขการแทรกสอดที่ทำให้ความเข้มต่ำสุด (แทรกสอดแบบหักล้างกัน)

$$\delta = (2m+1)\pi, \quad m=0,1,2,\dots$$

เราจะได้ว่า

$$(s_2 - s_1) = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

เมื่อประมาณให้จากที่รับอยู่ไกลมากและพิจารณาเฉพาะแอบส่วนที่ใกล้จุดกึ่งกลางนั่นคือ $L \gg y$ เราจะประมาณได้ว่า

$$(s_2 - s_1) = a \sin \theta \approx \frac{ay}{L}$$

เมื่อใช้เงื่อนไขการแทรกสอดแบบเสริมกัน ระยะห่าง y จากจุดกึ่งกลางจะเป็นแอบส่วนเมื่อ

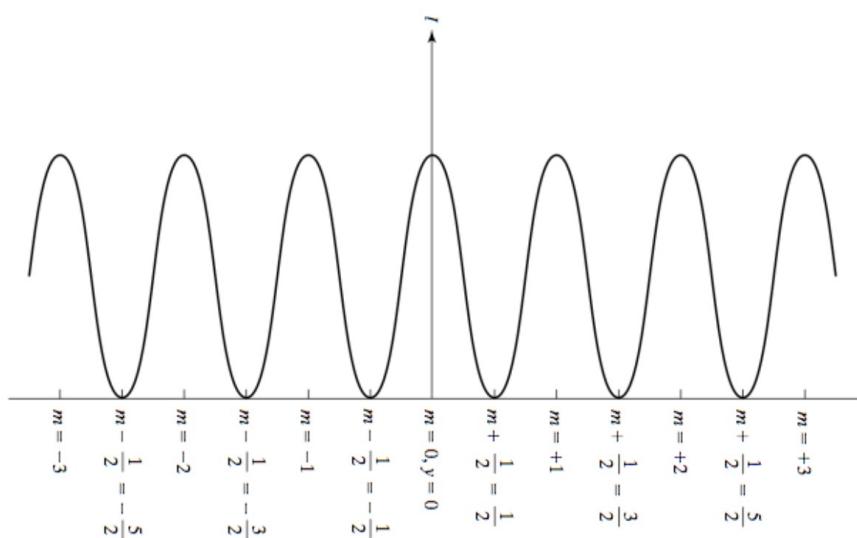
$$y = \frac{m\lambda L}{a}$$

และจะเป็นแอบมีดเมื่อ

$$y = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda L}{a}$$

ระยะห่างระหว่างแอบส่วน(หรือแอบมีด)คือ

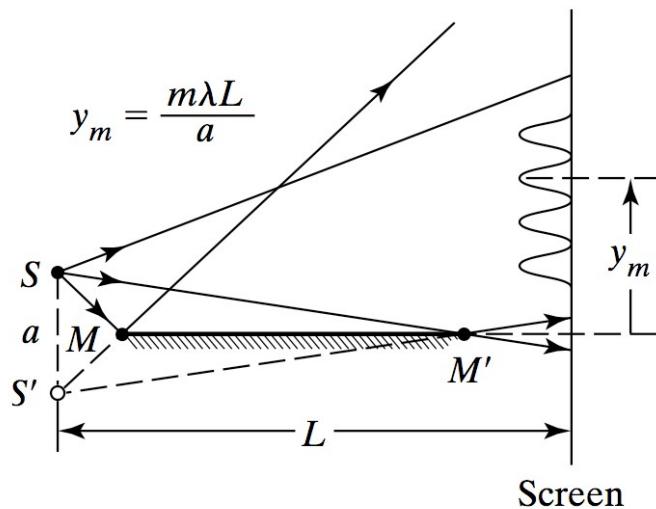
$$\Delta y = \frac{\lambda L}{a}$$



ตัวอย่าง แสงเลเซอร์ผ่านสลิตคู่ซึ่งมีระยะห่างระหว่างสลิต 0.2 มม. แอบการแทรกสอดปรากฏบนฉากซึ่งอยู่ห่างออกไป 1 เมตร แอบส่วนอยู่ห่างกัน 3.29 มม. จงหาความยาวคลื่น

3. กระเจกลอยด์

อีกวิธีในการสร้างแหล่งกำเนิด相干光 (coherent) โดยการใช้แหล่งกำเนิดเดี่ยวคือการใช้กระเจก เพื่อ
มาสะท้อนแหล่งกำเนิดแบบจุด เพราะว่าเฟสของแสงมีค่าเปลี่ยนไป _____ เมื่อมีการสะท้อน



ทำให้เงื่อนไขของการแทรกสอดเปลี่ยนเป็น

$$\delta = k(s_2 - s_1) + \pi$$

และเงื่อนไขของแอบสว่างเปลี่ยนเป็น

$$(s_2 - s_1) = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

$$y = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda L}{a}$$

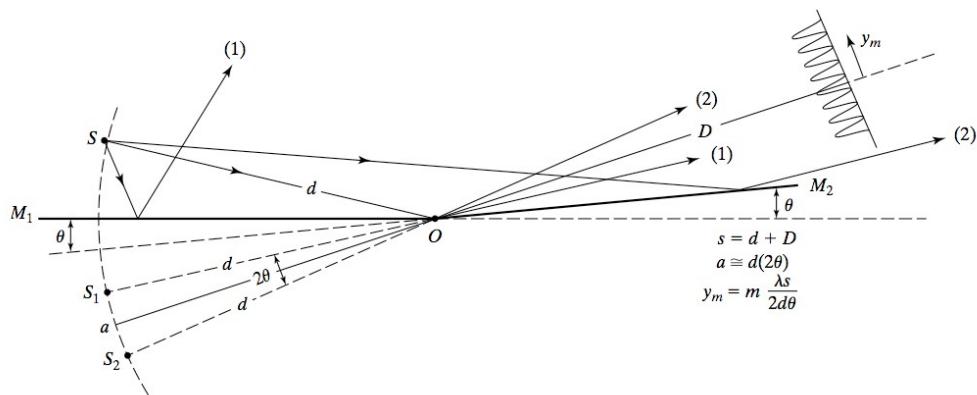
และแอบมืดเปลี่ยนเป็น

$$(s_2 - s_1) = m\lambda$$

$$y = \frac{m\lambda L}{a}$$

4. กระเจเจนเนล

คือการใช้กระเจเจสองแผ่น M_1 และ M_2 ซึ่งทำมุมกัน θ แสงจากแหล่งกำเนิด S ที่สะท้อนกลับร้อยต่อ (จุด O) จะสร้างแหล่งเส้นที่ 1 และ S_2 ซึ่งเกิดจากการสะท้อนแสงจากกระเจเจคนละแผ่นดังภาพ โดยแสงเส้นที่ 1 และแสงเส้นที่ 2 จะทำมุมกัน 2θ (เพราะว่ามุมตากกระเจเจลดลง θ ทำให้มุมสะท้อนลดลง θ ด้วยและแสงเส้นที่ 2 ทำมุมลดลงจากเดิมไป 2θ) จากภาพการแทรกสอดเนื่องจากแหล่งเส้นที่ 1 และแหล่งเส้นที่ 2 ทำมุมลดลงจากเดิมไป 2θ จึงได้干涉 coherent โดยเฟสของแสงทั้งสองตรงกัน (สะท้อนกระเจเจทั้งคู่ทำให้เฟสเปลี่ยนไป π ทั้งคู่) เราได้เงื่อนไขการแทรกสอดเป็น

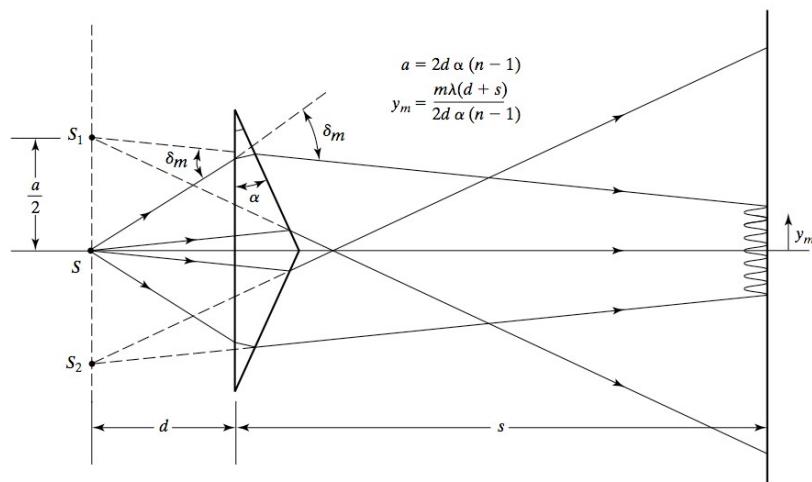


$$2\theta = \frac{a}{d}$$

$$y = \frac{m \lambda (d+D)}{2d\theta}$$

5. ปริซึมเพนเนล

เป็นอีกวิธีในการสร้างแสงอาพาณิชโดยการใช้การหักเหผ่านปริซึมดังภาพ



จากสมการของปริซึมเมื่อพิจารณาอนุमูลึกๆ

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \approx \frac{\alpha + \delta_m}{\alpha}$$

แล้ว

$$\frac{a}{2} = d \delta_m$$

ทำให้เราได้ว่า

$$\alpha = \frac{a}{2d(n-1)}$$

และเงื่อนะะนักที่ทำให้เกิดแบบส่วนร่วมคือ

$$y = \frac{m \lambda (d+s)}{2d \alpha (n-1)}$$

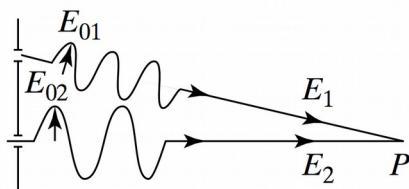
แบบฝึกหัด 4

1. แหล่งกำเนิด相干光 (coherent) ซึ่งมีสนามไฟฟ้าขนานกันถูกอธิบายโดย

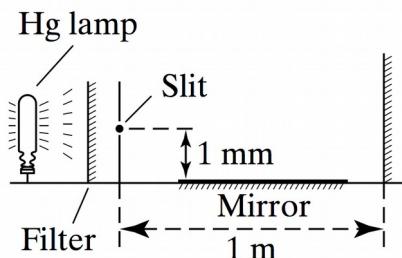
$$E_1 = 3 \cos\left(k s_1 - \omega t + \frac{\pi}{5}\right) kV/m$$

$$E_2 = 4 \cos\left(k s_2 - \omega t + \frac{\pi}{6}\right) kV/m$$

โดยที่แสงทั้งสองแทรกสอดกันที่จุด P ดังภาพ จงหาความเข้มของ干涉คลื่นแสง และความเข้มเนื้องจาก การแทรกสอด

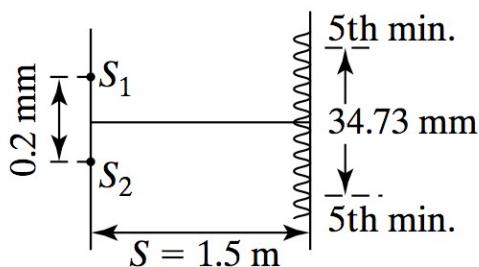


2. แสงจากหลอดปรอทผ่านเข้าไปยังตัวกรองแสงซึ่งอนุญาตให้แสงที่มีความยาวคลื่น 546.1 nm (สีเขียว) ผ่าน เมื่อนำสลิตเดี่ยวไว้ทางกันไว้โดยมีระยะจากงานตั้งภาพ จะเกิดริ้วรอยบนกระจกขึ้น จงอธิบายริ้วรอยบนกระจกนี้ พร้อมทั้ง แสดงการคำนวณประกอบ



3. สลิตคู่อันหนึ่งถูกส่องสว่างด้วยแสงหนึ่งซึ่งประกอบไปด้วยสองความยาวคลื่น โดยเราทราบแค่ความยาวคลื่น หนึ่งซึ่งเป็นสีเขียว 436 nm ถ้าบนกระจกมีตำแหน่งซึ่งมีความเข้มต่ำสุดอันดับที่สี่ของแสง 436 nm ซ้อนทับพอดีกับตำแหน่งความเข้มสูงสุดอันดับที่สาม ของแสงอีกสีหนึ่ง จงหาความยาวคลื่นอันนี้

4. ในการทดลองของสลิตคู่ของยังมีระยะห่างระหว่างสลิตคู่เท่ากับ 0.2 mm โดยใช้แสงความยาวคลื่นเดียว และตั้งฉากห่างออกไป 1.5 m ดังภาพ ถ้าระยะห่างระหว่างจุดมีดอันดับที่ห้าจากทางซ้ายและทางขวาห่างกัน 34.73 mm จงหาความยาวคลื่นแสงนี้

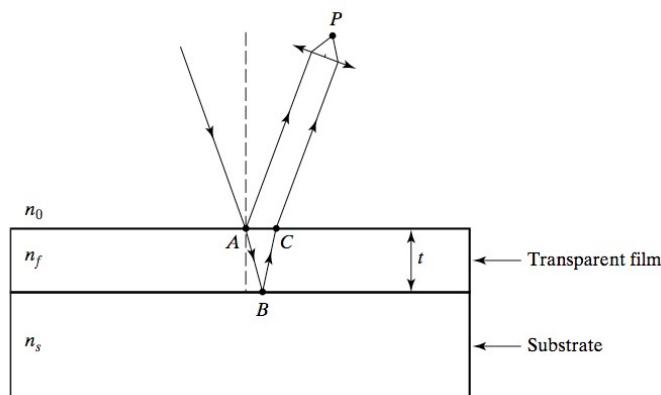


การแทรกสอดของแสง 2

6. การแทรกสอดในฟิล์มบาง



ภาพด้านบนคือตัวอย่างของการแทรกสอดของแสงที่สะท้อนออกมาจากฟิล์มบาง จากราฟคือน้ำมันที่ลอยอยู่บนน้ำ (ซึ่งอยู่บนพื้นถนน) รีวอร่อยของแสงสะท้อนที่เป็นสีต่างๆเกิดจากปรากฏการณ์แทรกสอดของแสงที่ตกลงกระแทบบนแผ่นฟิล์มของน้ำมันบนผิวน้ำ



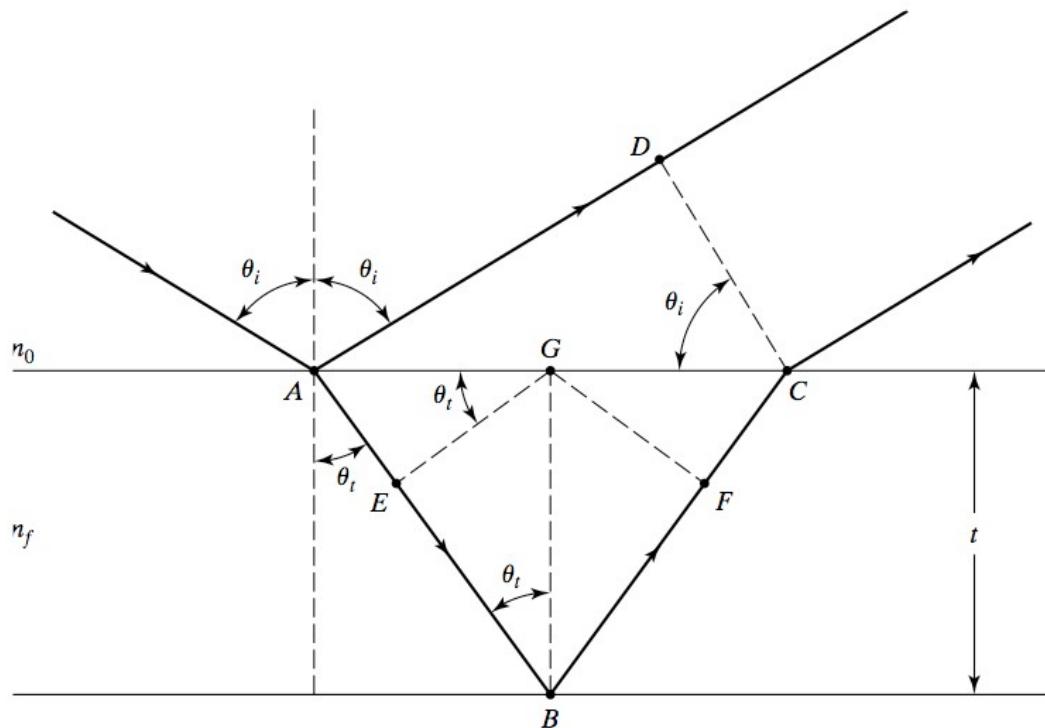
ในการพิจารณาการแทรกสอดจากฟิล์มบางเราต้องคำนึงถึงเฟสของแสงในตัวกลางไดๆและการสะท้อนของแสงบนผิวของรอยต่อ

แสงที่เดินทางในตัวกลางซึ่งมีดัชนีหักเห n จะมีความเร็วแสงในตัวกลางเท่ากับ _____
 เพราะว่าความถี่ไม่เปลี่ยนในตัวกลางไดๆ เราจะได้ความยาวคลื่นใหม่เป็น _____
 หรืออาจจะเขียนในรูปเลขคลื่นได้ว่า _____

แสงที่กระทบผิวของรอยต่อเป็นการแยกแยะพลิจูดของแสงออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่ _____
 และ _____

โดยการสะท้อนที่เกิดจากแสงซึ่งวิ่งจากตัวกลางที่มีดัชนีหักเหต่ำไปกระทบกับตัวกลางที่มีดัชนีหักเหสูง
 เช่นที่ตำแหน่ง A เมื่อ $(n_0 < n_f, v_0 > v_f)$ เราจะพบว่าคลื่นของแสงสะท้อนมีเฟสเปลี่ยนไป π ในขณะที่

ถ้าการสะท้อนเกิดจากแสงซึ่งวิ่งจากตัวกลางที่มีดัชนีหักเหสูงไปกระทบกับตัวกลางที่มีดัชนีหักเหต่ำ เช่นที่ตำแหน่ง B เมื่อ ($n_f > n_s, v_f < v_s$) เราจะพบว่าคลื่นของแสงสะท้อนมีเฟสไม่เปลี่ยนแปลง



เมื่อพิจารณาเฟสของแสงจาก $\delta(t) = k_2 s_2 - k_1 s_1 + \phi_2 - \phi_1$

ถ้าแสงวิ่งในตัวกลางซึ่งมีดัชนีหักเห _____ จะมี $k' s = k$ (*optical path*) ซึ่งเราสามารถนิยาม optical path เป็น _____

ดังนั้นเมื่อพิจารณาส่วนต่างของเฟสแนวพาราเบอลิก เราจะได้

$$\delta_p = \frac{2\pi}{\lambda} \times (2n_f t \cos \theta_i)$$

เมื่อนิยามให้ δ_r เป็นความต่างเฟสที่เกิดจากการสะท้อนทั้ง A และจุด B เราจะได้ว่าเงื่อนไขการแทรกสอด

$$\begin{aligned}\delta_p + \delta_r &= 2m\pi \\ \delta_p + \delta_r &= (2m+1)\pi\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}\Delta_p + \Delta_r &= m\lambda \\ \Delta_p + \Delta_r &= \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\end{aligned}$$

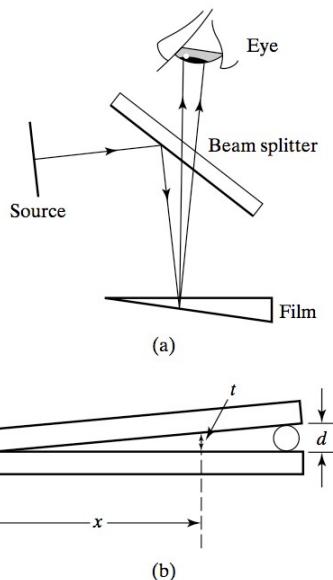
โดยที่

$$\begin{aligned}\Delta_p &= \frac{\delta_p \lambda}{2\pi} = 2n_f t \cos \theta_t \\ \Delta_r &= \frac{\delta_r \lambda}{2\pi}\end{aligned}$$

ในกรณีที่การสะท้อนทั้งคู่เปลี่ยนเฟสไปเท่ากัน (หรือไม่เปลี่ยนทั้งคู่) ซึ่งเกิดขึ้นในกรณีที่ดัชนีหักเหเป็น _____ เราจะได้เงื่อนไขของการแทรกสอดเป็น

ในกรณีที่การสะท้อนทั้งคู่เปลี่ยนเฟสไม่เท่ากัน (ผิวนี้เปลี่ยนไป _____ ในขณะที่อีกผิวไม่เปลี่ยน) ซึ่งเกิดขึ้นในกรณีที่ดัชนีหักเหเป็น _____ เราจะได้เงื่อนไขของการแทรกสอดเป็น

7. แบบของการแทรกสอดซึ่งมีความหนาเท่ากัน (รีวอรอยฟิზ)



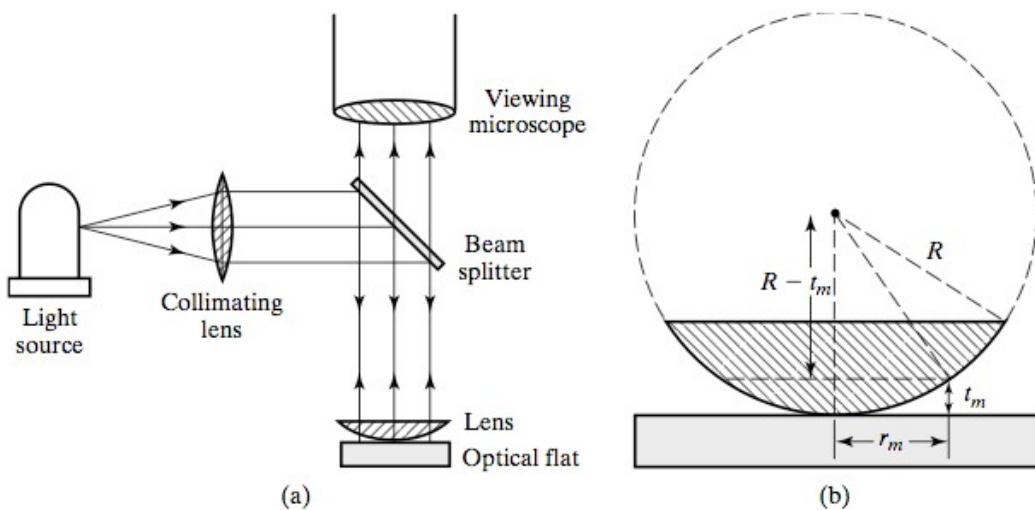
เมื่อพิจารณาฟิล์มที่มีลักษณะเป็นรูปลิม ถ้ามองจากแนวตรงเราจะพบว่าที่ระยะต่างๆจะมีความสูงของฟิล์มเปลี่ยนไป และมีเงื่อนไขการแทรกสอดเป็น

$$2n_f t + \Delta_r = m\lambda \text{ และสว่าง}$$

$$2n_f t + \Delta_r = (m + \frac{1}{2})\lambda \text{ และมืด}$$

โดยค่า Δ_r มีค่าเป็น $\lambda/2$ หรือ 0 ขึ้นกับการกลับเฟสของการสะท้อนทั้งสองผิว

8. วงแหวนของนิวตัน



จากความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยม

$$R^2 = r_m^2 + (R - t_m)^2$$

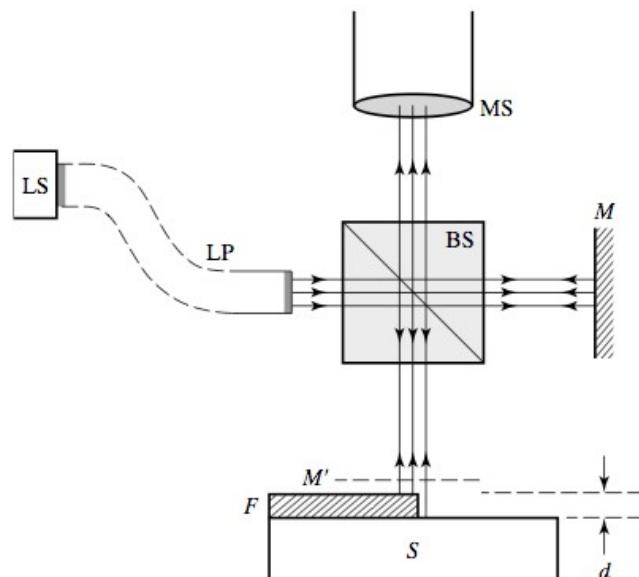
เนื่องจากการกลับเฟสของการสะท้อนบนผิว _____ และฟิล์มนี้เป็นฟิล์มอากาศ ทำให้เราได้เงื่อนไขของริ้วสว่างของวงแหวนนิวตันคือ

$$2t_m = \frac{r_m^2 + t_m^2}{R} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

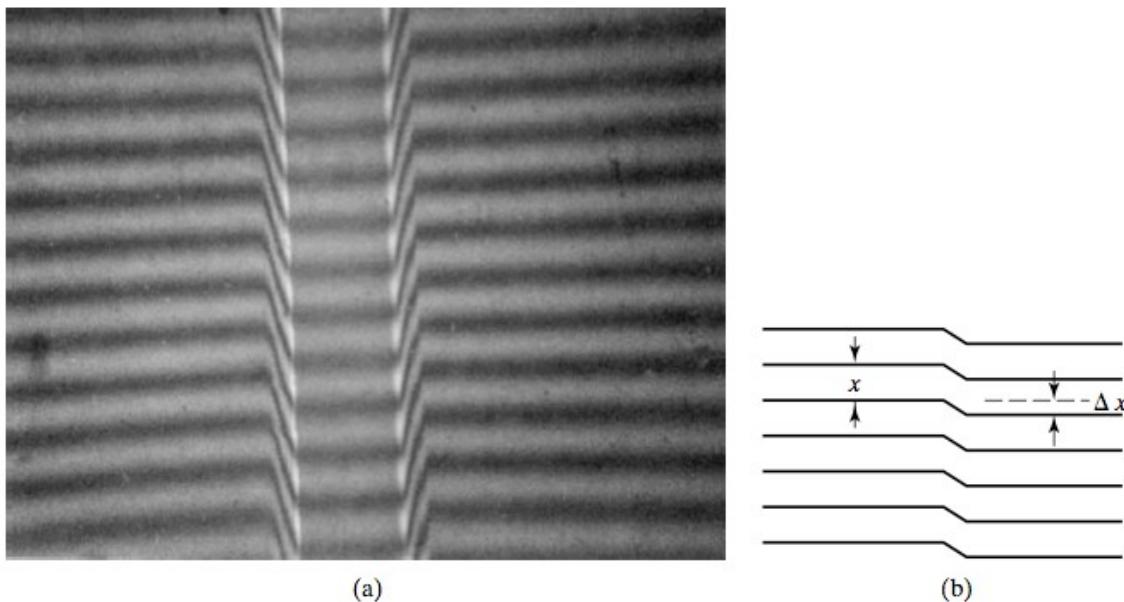
ตัวอย่าง วงเลนส์นูนแกรมราบด้านหักเห 1.523 ซึ่งมีความยาวโฟกัส 8 เมตร บนแผ่นราบดังภาพ ถ้าใช้แสงไฮเดียมความยาวคลื่น 589.3 nm จะเห็นริ้วรอยการแทรกสอด จงหาว่ามีของวงแหวนมีด้านตื้นที่หนึ่ง และอันดับที่สิบ

9. การวัดความหนาของฟิล์มโดยการแทรกสอด

ริ้วรอยพิโซสามารถนำไปใช้ในการวัดความสماเสมอและความหนาของฟิล์มบางได้ ดังภาพ เมื่อแสงออกจาก LS (Light Source) ไปยัง BS (Beam Splitter) แสงจะแยกออกเป็นสองส่วนคือส่องผ่านไปยังกระจก M และสะท้อนลงบนผิวฟิล์ม F จากนั้นแสงจากกระจก M จะสะท้อนกลับมายัง BS และสะท้อนเข้ากล้องจุลทรรศน์ MS ในขณะที่แสงที่สะท้อนจาก F มา�ัง BS จะส่องผ่านไปยังกล้องจุลทรรศน์ MS



ภาพของกระเจจจะเกิดภาพเสมือนที่รูปแบบ M' ทำให้เราสามารถพิจารณาการแทรกสอดเนื่องจากแสงที่ออกมาจาก M' และ F และแสงจาก S



ถ้ารูปแบบ M' และ F เมื่อเทียบกัน จะเกิดเป็นริ้วรอยพิโซขึ้นจากคลื่นอากาศระหว่างรูปแบบ เราสามารถหาความหนาของแผ่นฟิล์มได้โดยการเทียบริ้วรอยการแทรกสอดของฟิล์ม และริ้วรอยการแทรกสอดบนแผ่นรอง substrate ดังภาพ เราจะได้ตำแหน่งริ้วสว่างเป็น

$$\Delta_p + \Delta_r = 2nt + \Delta_r = m\lambda$$

ถ้าให้ความหนาเปลี่ยนไป Δt อันดับของการแทรกสอดก็จะเปลี่ยนแปลงไปเป็น Δm โดยมีความสัมพันธ์กันดังสมการ

$$2\Delta t = \Delta m \lambda$$

เพราะว่าระยะห่าง x ทำให้อันดับของการแทรกสอดเปลี่ยนไป 1 อันดับ ดังนั้นถ้าเราพบว่าระยะห่างระหว่างฟิล์มกับแผ่นรองทำให้ริ้วรอยเลื่อนไปเป็นระยะ Δx จะทำให้อันดับการแทรกสอดเปลี่ยนไป $\Delta m = \Delta x/x$ อันดับ ทำให้เราได้ว่าความหนาของแผ่นฟิล์มมีค่าเท่ากับ

$$d = \left(\frac{\Delta x}{x} \right) \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

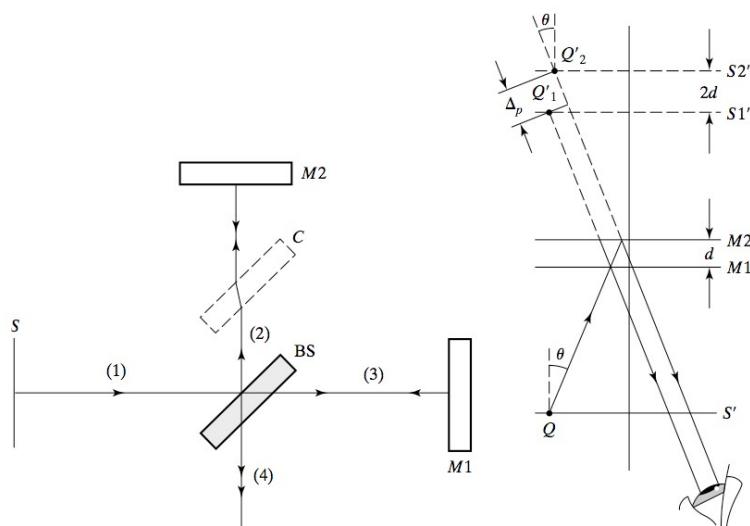
การแทรกรสอดของแสง 3

10. การประยุกต์ใช้การแทรกรสอดของแสง

เครื่องมือที่ใช้การแทรกรสอดของแสงเรียกว่า interferometer (อินเตอร์เฟอโรเมเตอร์) หลักการของ interferometer คือการแบ่งคลื่นแสงเป็นสองส่วนและให้คลื่นทั้งสองมี optical path ที่แตกต่างกัน ก่อนนำมาร่วมกันเป็นริ้วรอยการแทรกรสอด โดยความสามารถแยก interferometer ออกเป็นสองประเภท คือ ประเภทที่แบ่งหน้าคลื่นเป็นสองส่วน ซึ่งได้แก่ _____

และประเภทที่แบ่งแอลมพลิจูดเป็นสองส่วน ซึ่งได้แก่ _____

11. การทดลองการแทรกรสอดของไมเคลลสัน (Michelson interferometer)



แสงจากแหล่งกำเนิด (1) ไปตกกระทบบนตัวแยกแสง (Beam splitter) ซึ่งทำหน้าที่ _____

โดยลำแสงที่ (2) จะสะท้อนบนกระจก _____ และ _____

และลำแสงที่ (3) จะสะท้อนบนกระจก _____ และ _____

ไปเกิดเป็นการแทรกรสอดกันได้

สังเกตว่าลำแสงที่ (2) เดินทางผ่านเนื้อแก้วของตัวแยกแสงเป็นจำนวน _____ ครั้ง

ในขณะที่ลำแสงที่ (3) เดินทางผ่านเนื้อแก้วของตัวแยกแสงเป็นจำนวน _____ ครั้ง

เพื่อเป็นการลดเชย optical path เราจึง _____

โดยเราอาจจะมองการทดลองนี้ได้่ายขึ้นโดยการย้ายกระจก _____ และแหล่งกำเนิดอยู่ในแนวเดียวกัน ดังภาพ เมื่อให้ระยะระหว่างกระจกทั้งสองมีค่าเท่ากับ _____ เราจะได้ความแตกต่างของ optical path เป็น

$$\Delta_p = 2d \cos\theta$$

เมื่อ θ คือมุมที่ลำแสงเอียงเทียบกับแกนแสง ความต่างเฟสจากการสะท้อนมีค่าเท่ากับ $\delta_p = \pi$ ทำให้เราได้เงื่อนไขของการเกิดแบบมีดเป็น

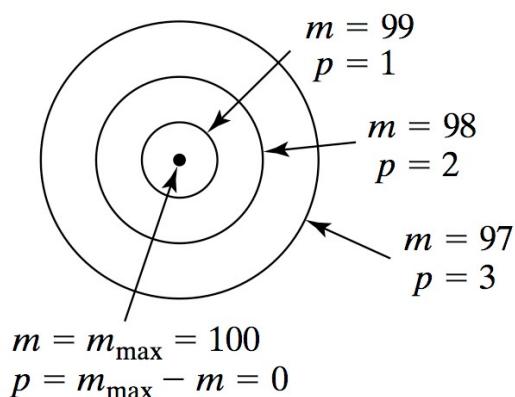
$$2d\cos\theta = m\lambda$$

ดังนั้นที่จุดศูนย์กลางจะเป็นแบบมีดที่มีองศา

แบบมีดที่วงกลมที่มีรัศมีกว้างขึ้นจะมีค่าอันดับลดลง เพราะ _____
เรานิยาม

$$p = m_{max} - m = \frac{2d}{\lambda} - m$$

เราจะได้ p เป็นองศาของแบบมีดเมื่อนับจากจุดศูนย์กลางดังภาพ



โดย p มีความสัมพันธ์กับมุมดังนี้

$$p\lambda = 2d(1 - \cos\theta)$$

การเลื่อนกระจากคือการ _____ และทำให้เกิดการเปลี่ยน _____

และได้ความสัมพันธ์ของริ้วที่เลื่อนไปกับระยะทางที่กระจากเลื่อนไปเป็น

$$\Delta m = \frac{2\Delta d}{\lambda}$$

ตัวอย่าง พิจารณาการเปลี่ยนทางแสงจากแสงความยาวคลื่นเดี่ยวในการทดลองของไมโครสัน เมื่อเลื่อนกระจากไปเป็นระยะทาง 0.073 mm พบร่วมจำนวนรีวีล่อนไป 300 รีวี จงหาความยาวคลื่นแสง และจำนวนรีวีที่เพิ่มขึ้นเมื่อวางแผนแก้วัดชนีหักเห 1.5 และ หนา 0.005 mm ไว้ที่แขนข้างหนึ่งของทางเดินแสง

12. การประยุกต์ใช้การแทรกสอดแบบไมโครสัน

สังเกตว่าในการทดลองไมโครสันเมื่อเปลี่ยน optical path ก็จะเกิดการเปลี่ยนแปลงของรีวอรอย การแทรกสอด ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในการดัชนีหักเหของแก๊ส

ในการหาดัชนีหักเหของแก๊ส เมื่อแก๊สมีความดันสูงก็จะมี _____ ในขณะที่แก๊สมีความดันต่ำก็จะมี _____ เมื่อ光โดยสารแก๊ส (ซึ่งไปร่องแสง) บรรจุแก๊สที่มีความดันและอุณหภูมิที่กำหนดไว้ที่แขนด้านใดด้านหนึ่งของทางเดินแสง เมื่อค่อยๆ นำแก๊สออก รีวอรอยก็จะเปลี่ยนไป เพราะ _____ โดยจำนวนรีวอรอยที่เปลี่ยนก็จะขึ้นกับความแตกต่างใน optical path เมื่อกำหนดให้ความยาวของโพรงเป็น L optical path ก็จะเป็น

$$\Delta d = n_2 L - n_1 L = (n - 1)L$$

จากสมการการเปลี่ยนแปลงรีวอรอย เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรีวอรอยที่เปลี่ยนแปลงไป (สังเกตได้) และดัชนีหักเห

$$n - 1 = \left(\frac{\lambda}{2L} \right) \Delta m$$

เราสามารถประยุกต์ใช้การทดลองนี้กับการหาความแตกต่างของความยาวคลื่นระหว่างสีสเปคตรัมที่อยู่ใกล้ๆ กัน λ และ λ' แต่ความยาวคลื่นก็จะสร้างรีวอรอยการแทรกสอดแบบวงกลมดังสมการ

$$2d \cos\theta = m\lambda$$

เมื่อพิจารณารีววงกลมที่ใกล้กับจุดศูนย์กลางมากๆ นั้นคือ _____ ทำให้

$$2d \approx m\lambda \approx m'\lambda'$$

เราสามารถสังเกตได้ว่าเมื่อรีวัทั้งสองข้อนี้หับกันจะทำให้ลดลายปราภูชัดเจนขึ้น เมื่อพิจารณาการซ้อนหับกันครั้งแรกที่มีระยะห่างระหว่างกระจกทั้งสองเป็น d_1 เราจะได้ว่าอันดับของความยาวคลื่น λ และ λ' ต้องห่างกันเป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ

ทำให้

$$\frac{2d_1}{\lambda} = \frac{2d_1}{\lambda'} + N$$

เมื่อ N เป็นจำนวนเต็ม

เมื่อลื่อนกระจกออกไปทำให้กระจกทั้งสองห่างกันเป็น d_2 และรีวอรอยจากความยาวคลื่นทั้งสองข้อนี้หับ กันอีกครั้ง นั่นคือ อันดับของความยาวคลื่น λ และ λ' ต้องห่างกันเป็นจำนวนเต็ม

ทำให้

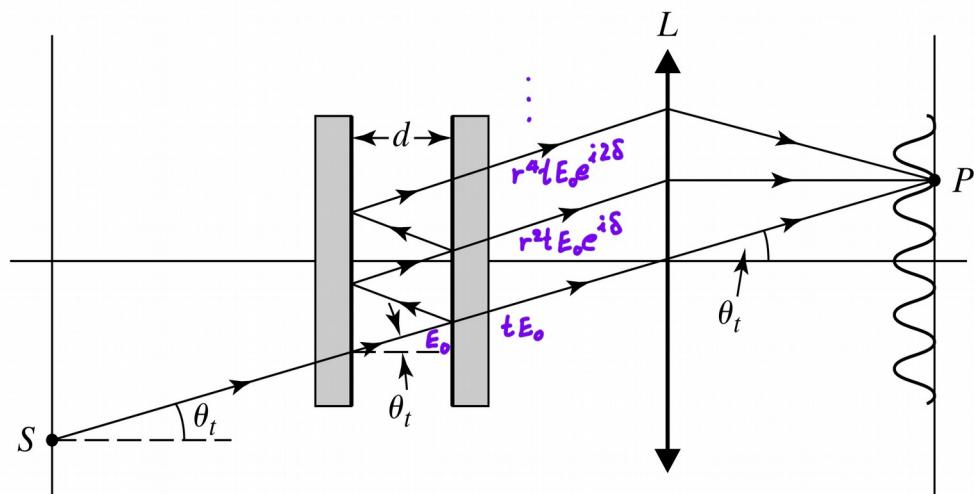
$$\frac{2d_2}{\lambda} = \frac{2d_2}{\lambda'} + N + 1$$

เราจะได้ความสัมพันธ์ของระยะที่กระจกถูกเลื่อนและความแตกต่างในความยาวคลื่นทั้งสองดังนี้

$$\lambda' - \lambda = \frac{\lambda\lambda'}{2\Delta d} \approx \frac{\lambda^2}{2\Delta d}$$

13 การแทรกสอดแบบเฟบรี-เบโรต์ (Fabry-Perot interference)

การแทรกสอดชนิดนี้เกิดจากแสงที่สะท้อนไปมาระหว่างรอยต่อตัวกลางขนาดของเส้นทางภาพ โดยการแทรกสอดเกิดจากการรวมกันของแสงจำนวนมาก โดยเราจะพิจารณาคลื่นแสงโดยใช้ฟังก์ชันเชิงซ้อน



ถ้ากำหนดให้คลื่นแสงก่อนกระพรอยต่อที่สองมีฟังก์ชันเป็น

$$\tilde{E}_{initial} = E_0 e^{i(\alpha - \omega t)}$$

เมื่อกำหนดให้สำหรับรอยต่อนี้ เมื่อแสงส่องผ่าน (transmission) จะมีแอมเพลจูดลดลงเป็น t เท่าของแสง ตกกระทบ ในขณะที่เมื่อแสงสะท้อน (reflection) จะมีแอมเพลจูดลดลงเป็น r เท่าของแสงตกกระทบ ดังนั้น จากหลักการอนุรักษ์พลังงานเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E_0^2 &= r^2 E_0^2 + t^2 E_0^2 \\ 1 &= r^2 + t^2 \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาการส่องผ่านหนึ่งครั้ง เราจะได้ว่าคลื่นแสงแรกที่ออกไปรวมบนฉากรือ

$$\tilde{E}_0 = t E_0 e^{i(\alpha - \omega t)}$$

ในขณะที่คลื่นแสงที่สองที่ไปรวมบนฉากเกิดจากการสะท้อนภายในเพิ่มขึ้นอีกสองครั้ง รวมกับการเปลี่ยนเฟสเนื่องจากการเดินทางของแสงซึ่งเราเขียนเป็นเฟสที่เพิ่มขึ้นเป็น

$$\tilde{E}_1 = r^2 t E_0 e^{i(\alpha - \omega t + \delta)}$$

โดยเฟสที่เพิ่มขึ้นนั้นมีลักษณะเดียวกันกับการแทรกสอดของฟิล์มบางนั่นคือ

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \times (2d \cos \theta_t) = 2k d \cos \theta_t$$

เมื่อพิจารณาแสงที่ออกไปรวมบนฉากใดๆ

$$\tilde{E}_n = (r^2)^n t E_0 e^{i(\alpha - \omega t + n\delta)}$$

เมื่อใช้หลักการซ้อนทับของแสงเราจะได้ว่า

$$\tilde{E}_{total} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \dots = t E_0 e^{i(\alpha - \omega t)} (1 + r^2 e^{i\delta} + r^4 e^{2i\delta} + \dots) = t E_0 e^{i(\alpha - \omega t)} \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{i\delta})^n$$

และเพราะว่า $r < 1$ ผลรวมนี้สามารถหาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ

$$\tilde{E}_{total} = \frac{t E_0 e^{i(\alpha - \omega t)}}{1 - r^2 e^{i\delta}}$$

เมื่อพิจารณาความเข้มแสงรวมที่เกิดขึ้นเราจะได้ว่า

$$I = \tilde{E}_{total} \tilde{E}_{total}^* = \frac{t^2 E_0^2}{(1 - r^2 e^{i\delta})(1 - r^2 e^{-i\delta})} = \frac{(1 - r^2) E_0^2}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \delta}$$

$$\text{ซึ่งเมื่อใช้ } \cos(\delta) = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

ความเข้มแสงจึงมีค่าเท่ากับ

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

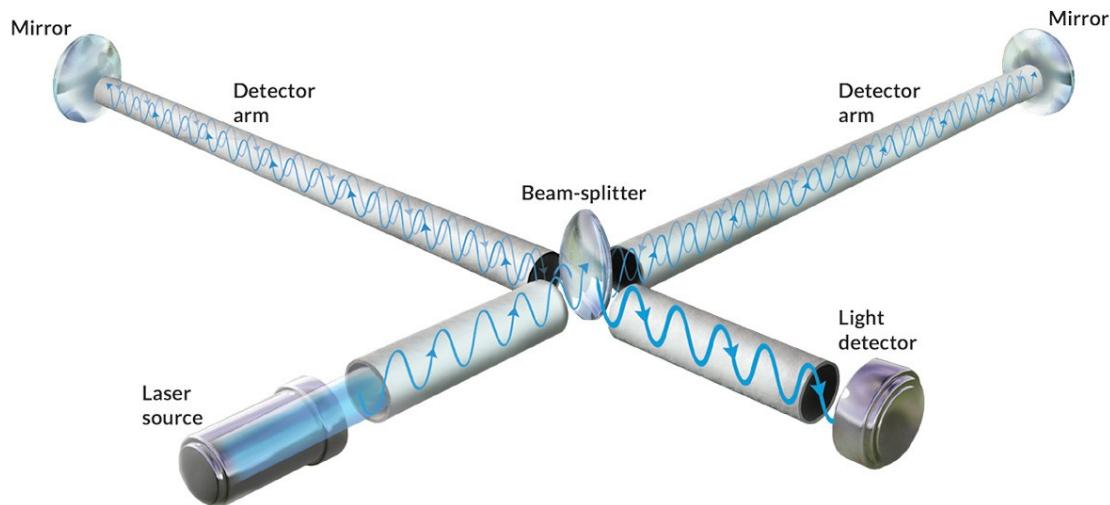
ซึ่งความเข้มแสงจะมีค่าสูงสุดเมื่อ

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0$$

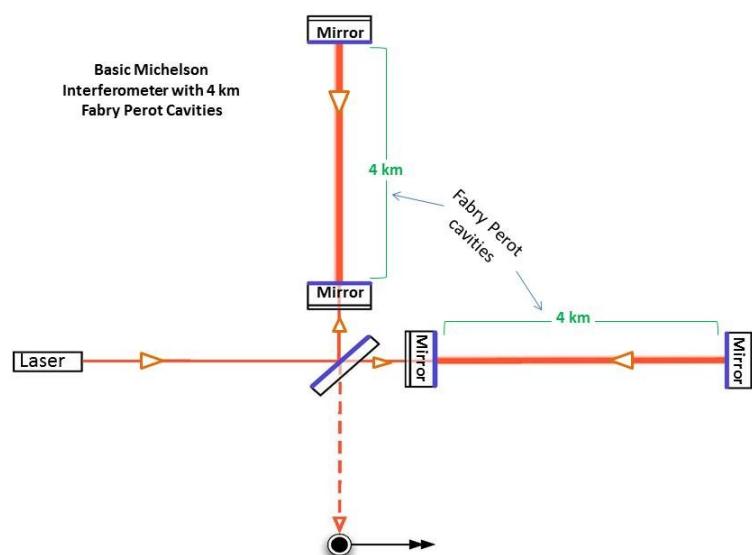
นั่นคือเงื่อนไขของแอบส่ว่างจะเป็น

$$2d \cos \theta_t = m \lambda$$

14. การตรวจวัดคลื่นแรงโน้มถ่วงโดยการใช้การแทรกสอดของแสง

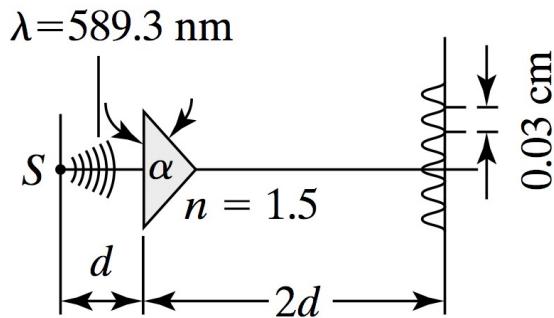


คลื่นแรงโน้มถ่วงเป็นการนำพาผลของทฤษฎีแรงโน้มถ่วงของไอ้น์สไตน์ คลื่นชนิดนี้ทำให้อว拉斯เกิดการสั่นใน การทดลองเพื่อค้นหาคลื่นแรงโน้มถ่วง เรายังสามารถประยุกต์ใช้การแทรกสอดในแบบเดียวกับที่เราศึกษาไปแล้วได้ จากภาพเมื่อคลื่นแรงโน้มถ่วงตกกระทบกับเครื่องมือทดลองก็จะทำให้เกิดการยืดขยายของความยาว ของแต่ละแขน ทำให้เกิดการเลื่อนรั้วอยุ่ของ การแทรกสอดที่หัววัด อย่างไรก็ตามการขยายของอว拉斯มีค่าน้อยมากๆ $\Delta d \approx 10^{-18} m$ เพื่อที่จะให้การทดลองเรามี sensitivity มากพอในการตรวจวัด การทดลอง LIGO (The Laser Interferometer Gravitation-Wave Observatory) จึงสร้างทางเดินของแสงแต่ละ ข้างยาว 4 km รวมทั้งเพิ่มความยาวนี้โดยการสร้างโพรง Fabry-Perot ซึ่งทำให้แสงสะท้อนไปมาประมาณ 280 ครั้งก่อนที่จะผ่านไปที่หัววัด ทำให้จริงๆแล้วแสงเดินทางไปประมาณ 1000 km ก่อนไปแทรกสอดกัน

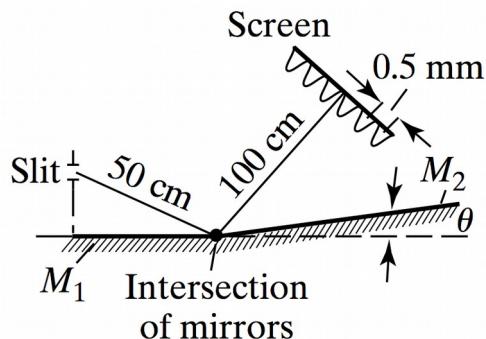


แบบฝึกหัด 5

1. แสงโซเดียมผ่านสลิตเดี่ยวแคบและผ่านเฟนเนลบิริซึม (Fresnel biprism) ซึ่งสร้างจากแก้วที่มีดัชนีหักเห 1.5 ปริซึมอยู่ห่าง จาก Chapman มากกว่าระยะทางจากปริซึมถึงสลิตเดี่ยวสองเท่าดังภาพ ถ้าพบว่าริ้วรอยห่างกัน 0.03 cm ปริซึมนี้มีมุมยอดเท่าใด (มุมเล็กๆที่อยู่ด้านข้างของเฟนเนลปริซึม)

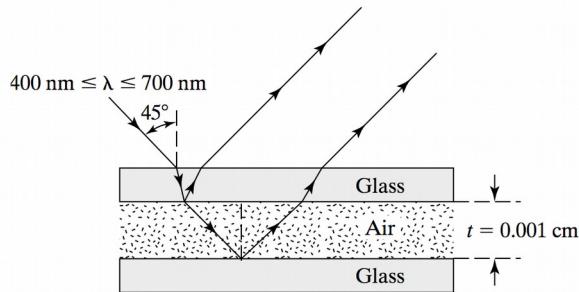


2. จากการทดลองกระเจิงเฟนเนล กระเจิงสองชั้นทำมุกันดังภาพ สลิตเดี่ยวอยู่ห่างจากรอยต่อระหว่างกระเจิงทั้งสอง เป็นระยะ 50 cm และจากอยู่ห่างจากรอยต่อระหว่างกระเจิงเป็นระยะ 1 m เมื่อใช้แสงโซเดียม ความยาวคลื่น 589.3 nm ริ้วรอยการแทรกสอดมีระยะห่าง 0.5 mm จงหามุกกระเจิงทั้งกระเจิง

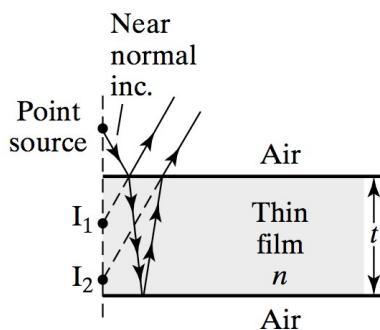


3. แสงที่มีหลายความยาวคลื่นส่องผ่านฟิล์มบางของน้ำมันที่มีดัชนีหักเห 1.30 ซึ่งอยู่บนผิวแก้ว ถ้าเราสังเกตว่า แสงที่สะท้อน ออกมากไม่มีความยาวคลื่น 525 nm และ 675 nm จงหาความหนาของฟิล์มน้ำมันนี้
4. ฟิล์มบางของ MgF_2 ซึ่งมีดัชนีหักเห 1.38 ถูกเคลือบอยู่บนผิวแก้ว เพื่อที่ป้องกันแสงสะท้อนที่มี ความยาวคลื่น 580 nm โดยการสะท้อนแบบตั้งฉากกับผิว แสงความยาวคลื่นใดที่เมื่อตกกระทบ 45 องศาแล้ว มีการสะท้อนน้อยที่สุด
5. ฟิล์มบางกันสะท้อนถูกเคลือบบนเลนส์ที่มีดัชนีหักเห 1.78 จงหาดัชนีหักเหและความหนาของฟิล์มนี้ เพื่อที่ จะป้องกันการ สะท้อนของแสงความยาวคลื่น 550 nm
6. ฟิล์มสีบุญสูงสร้างจากการอบสีเหลี่ยมจมูลในน้ำสบู่ เมื่อวางกรอบสีเหลี่ยมนี้ในลักษณะตั้งฉากกับผิวโลก และ ฉายแสงเลเซอร์ ความยาวคลื่น 632.8 nm จะพบริ้วรอยแทรกสอดบนฟิล์ม 15 แฉบต่อ 1 cm จงอธิบาย原因 ภัยการณ์นี้ (คำแนะนำ: น้ำสบู่จะ ถูกแรงโน้มถ่วงดึงลงทำให้ด้านล่างมีลักษณะหนากว่าด้านบน)

7. แสงขาว (สมมติให้มีความยาวคลื่นระหว่าง $400 - 700 \text{ nm}$) ถูกฉายด้วยมุม 45° องศา ลงบนแผ่นแก้วสองชั้นซึ่งอยู่ห่างกัน (กันด้วยฟิล์มอากาศ) 0.001 cm เมื่อสังเกตแสงที่สะท้อนออกด้วยเครื่องスペกโตรมิเตอร์จะเกิดแบบมีดังภาพ



8. แก้วสไลเดอร์ของกล้องจุลทรรศน์สองชั้นประกอบกันด้วยแผ่นตะกั่วบาง (ทำให้เกิดลิ่มอากาศระหว่างแผ่นแก้ว) เมื่อฉายด้วย แสงโซเดียม 589 nm ด้วยมุมตั้งจากกับผิว จะสังเกตเห็นริ้วรอยแทรกสอดทั้งหมด 40 แผ่นสว่าง เมื่อนับจากตำแหน่งที่ แก้วสไลเดอร์ทั้งสองแตะกันจนไปถึงขอบของแผ่นตะกั่ว จงหาความหนาของตะกั่วนี้
9. จากภาพการแทรกสอดของพิล์มนบางด้วยหักเห n หนา t ถูกวางอยู่ในอากาศ จงแสดงให้เห็นว่าตำแหน่ง เสมือน ของแหล่งกำเนิด I_1 และ I_2 อยู่ห่างกัน $2t/n$ (คำแนะนำ: สูตรการหักเหผ่านพิล์มน้ำจะเป็นประโยชน์)

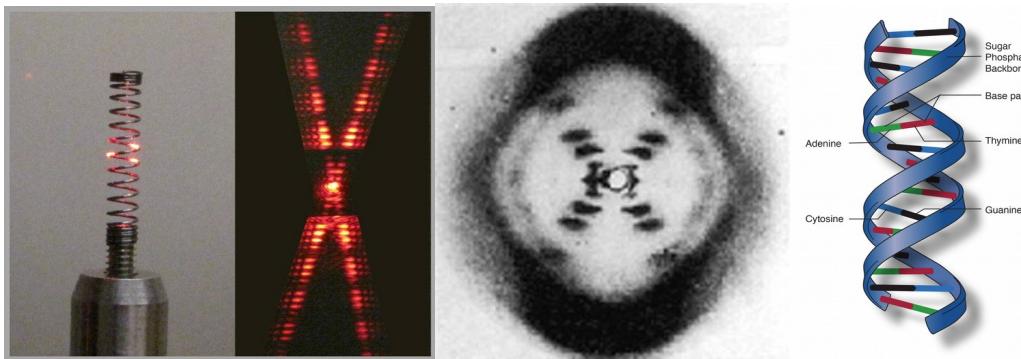


10. จากการทดลองวงแหวนนิวตัน ถ้าเราพบว่าวงแหวนสว่างลำดับที่ 10 มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 7.89 mm เมื่อใช้แสงสีเขียว ความยาวคลื่น 546.1 nm จงหารัศมีความโค้งของเลนส์โค้งนี้

11. ในการทดลองวงแหวนนิวตัน ถ้าเติมของเหลวไประหว่างเลนส์และแผ่นแก้วรองจะพบว่ารัศมีของวงแหวนสว่างจะเปลี่ยนไป เมื่อเทียบกับกรณีที่เป็นลิ่มอากาศ จงแสดงให้เห็นว่ารัศมีของวงแหวนที่ลำดับใดๆเปลี่ยนไป เป็น \sqrt{n} เท่า เมื่อ n คือดัชนีหักเห ของของเหลวที่อยู่ระหว่างเลนส์และแผ่นแก้วรอง

12. วงแหวนนิวตันถูกฉายด้วยแสงสองความยาวคลื่น ความยาวคลื่นหนึ่งมีค่าเท่ากับ 546 nm ถ้าพบสว่าง ลำดับที่ 11 ของแสง 546 nm ซ่อนทับพอดีกับแบบสว่างลำดับที่ 10 ของแสงอีกความยาวคลื่นหนึ่ง จงหาความยาวคลื่นของแสงอีกสีหนึ่ง และรัศมีของวงสว่างที่ซ่อนทับกัน เมื่อให้เลนส์มีรัศมีความโค้ง 1 m

การเลี้ยวเบนของแสง



1. ธรรมชาติการเลี้ยวเบนของแสง

อีกผลที่สำคัญของความเป็นคลื่นของแสงคือการเลี้ยวเบนของแสง การแทรกสอดของแสงจากสิ่ตคู่ ที่เราศึกษาไปในบทที่แล้วคือการที่แสงถูกกันทุกที่ยกเว้นรูส่องรู ซึ่งเราพิจารณารูทั้งสองนี้ให้มีความแคบมากๆ และทำตัวเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่ แต่ในความเป็นจริงนั้นขนาดของรูสลิมีผลต่อการพกติกรรมของแสงด้วย โดยเราสังเกตเห็นได้จากการทดลองว่ารายละเอียดของรูรอยการแทรกสอดเปลี่ยนไปเมื่อขนาดของรูสลิมเปลี่ยนไป

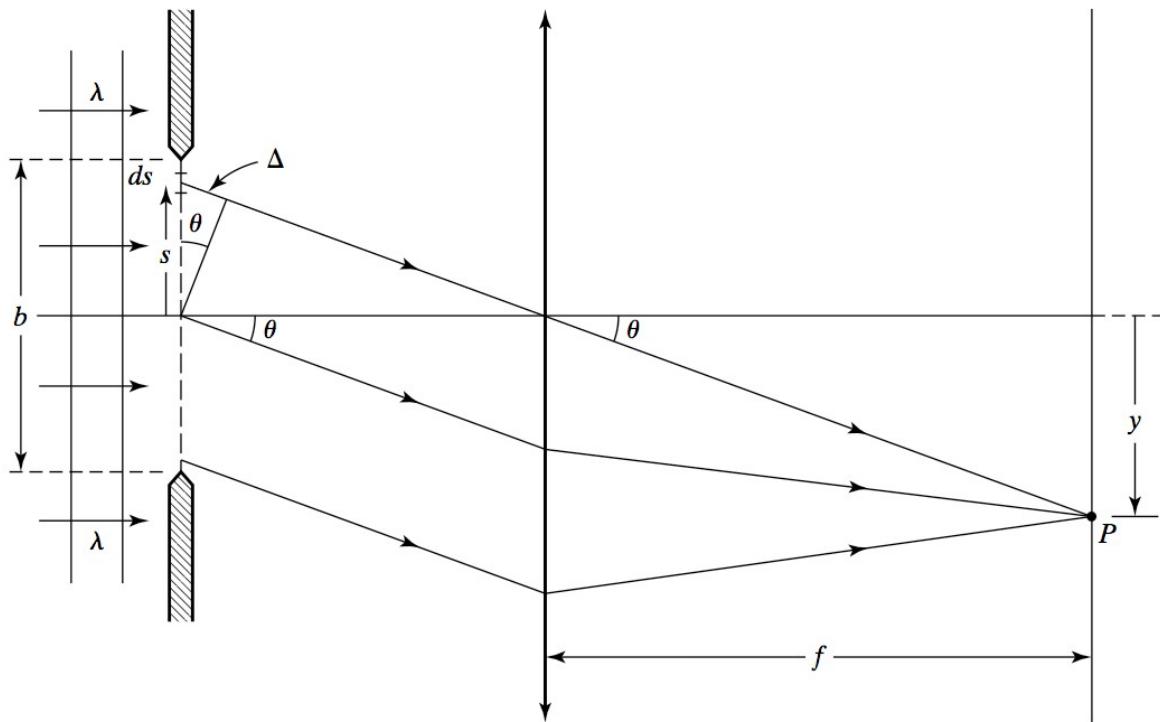
เพื่อที่จะอธิบายผลการทดลองนี้ เราใช้หลักการอยอยเก้นส์-เฟนเนล (Huygens-Fresnel principle) ตามหลักการของอยอยเก้นส์ทุกจุดบนหน้าคลื่นสามารถคิดได้ว่าเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นทรงกลมใหม่ โดยเฟนเนล เพิ่มเติมว่าคลื่นที่เกิดขึ้นหลังจากนั้นเกิดจากการซ้อนทับกันของแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่เหล่านี้ซึ่งอาจจะมี แอม พลิจูดและเฟสที่แตกต่างกัน ดังนั้นเพื่อที่จะคำนวณรูรอยของการเลี้ยวเบนที่จุดใดๆบนหน้ากึ่งต้อง พิจารณา ทุกจุดบนหน้าคลื่นที่ออกมาจากช่องเปิดเป็นแหล่งกำเนิดคลื่น ซึ่งการซ้อนทับกันของคลื่นทั้งหมดนี้ จะเกิดเป็นผลลัพธ์บนจาก

เรามักจะแยกการเลี้ยวเบนออกจาก การแทรกสอดได้โดยการดูว่าแหล่งกำเนิดคลื่นมีความต่อเนื่องหรือไม่ ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นมีลักษณะไม่ต่อเนื่องการรวมคลื่นข้างตันจะถูกเรียกว่า _____
ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นมีลักษณะต่อเนื่องการรวมคลื่นข้างตันจะถูกเรียกว่า _____

การเลี้ยวเบนสามารถจำแนกต่อได้เป็นสองแบบ โดยเมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ห่างจากช่องเปิดมากพอ จนสามารถคิดได้ว่าหน้าคลื่นที่มาถึงที่ช่องเปิดเป็นระนาบตรง เราเรียกการเลี้ยวเบนแบบนี้ว่า _____ หรือ _____ โดยการเลี้ยวเบนแบบนี้มักทำให้การคำนวณง่ายขึ้นโดยการประมาณบางอย่าง ซึ่งเราจะแสดงให้เห็นในลำดับถัดไป ในขณะที่ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ใกล้ช่องเปิดจนหน้าคลื่นที่ช่องเปิด มีความโถ้ง เราเรียกการเลี้ยวเบนแบบนี้ว่า _____ หรือ _____

2. การเลี้ยวเบนผ่านสิ่ตเดียว

เราเริ่มคำนวณการเลี้ยวเบนผ่านสิ่ตเดียวแบบเฟรานโซเยฟอร์ ในทางปฏิบัติเพื่อที่จะได้หน้าคลื่นเส้น ตรงเราอาจจะวางแหล่งกำเนิดคลื่น _____ ในขณะที่เราต้องการให้จากอยู่ใกล้มากๆ (แสงขนาดที่ไปแทรกสอดกัน) เราทำได้โดย _____



สังเกตว่าแสงแต่ละเส้นที่เดินทางไปเจอกันที่จุด P มีเฟสไม่ตรงกัน ตัวอย่างเช่นแสงที่ดำเนินทางสัมผัสนอกจากเส้นที่ระยะ s วัดจากตรงกลางมีเฟสไม่ตรงกันเนื่องจาก _____

- เราจะแบ่งช่องเปิดเป็นช่วงเล็กๆ ขนาด _____ เป็นแหล่งกำเนิดแบบจุด
- จากนั้นเราจะรวมคลื่น จากแหล่งกำเนิดเหล่านี้โดยการรวมกันซึ่งคือการ _____ ทั่วทั้งช่องเปิด
- ในแต่ละช่วงปีดเล็กๆ จะสร้างคลื่นไปถึงจุด P โดยมีขนาดแปรผันตรงกับ _____
- และแปรผันกับ _____ (เราอาจสังเกตได้ว่าความเข้มแปรผันกับ _____)
- ดังนั้นเราสามารถเขียนคลื่นของสนามไฟฟ้าที่จุด P เนื่องจากช่องปีดเล็กๆ ได้ว่า

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)}$$

กำหนดให้ $r = r_0$ เป็นระยะทางจากจุดกึ่งกลางสัมผัสนอกจากจุด P ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่จุด P ซึ่งออกจากการ _____ อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางเป็นระยะ s จะมีค่าเท่ากับ

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r_0 + \Delta} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} e^{ik\Delta}$$

เราจะประมาณว่าค่า Δ ในแอมพลิจูดไม่เปลี่ยนมากเมื่อเทียบกับ r_0 อย่างไรก็ได้ เราไม่สามารถใช้การประมาณนี้ในส่วนของเฟสได้ เพราะการเปลี่ยนไปหนึ่งความยาวคลื่น $\Delta = \lambda$ ทำให้เฟสหมุนไป _____

จากภาพเราจะได้ว่า

$$\Delta = s \sin\theta$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่จุด P จากส่วนย่อย ds ใดๆ จะมีค่าเท่ากับ

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r_0} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} e^{iks \sin\theta}$$

เมื่อทำการอินทิเกรตตลอดช่วงความกว้างสเลิต นั่นคือจาก _____

$$E_p = \frac{E_L b \sin\beta}{r_0 \beta} e^{i(kr_0 - \omega t)}$$

โดยที่

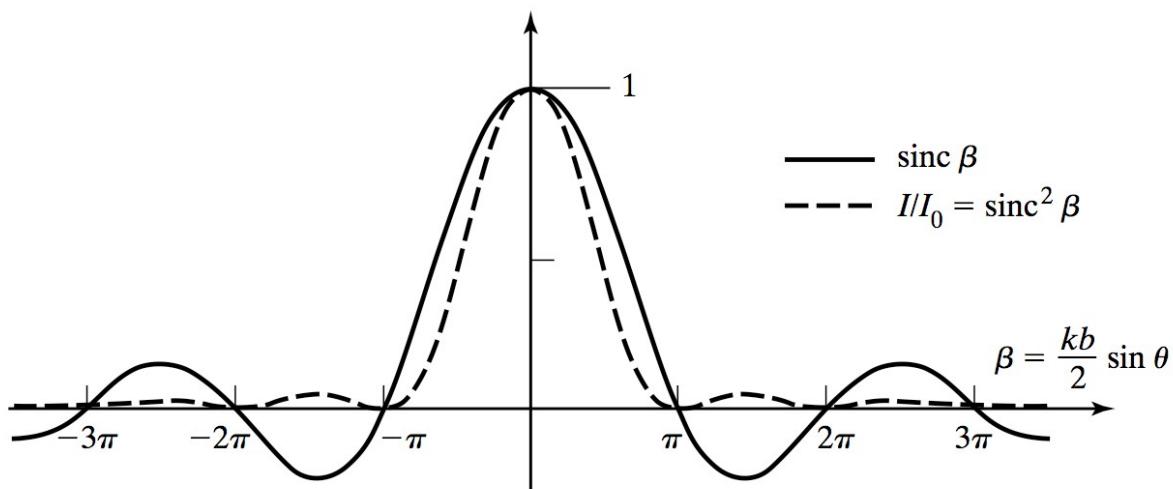
$$\beta = \frac{1}{2} k b \sin\theta$$

ค่าความเข้มจึงมีค่าเท่ากับ

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} \left(\frac{E_L b}{r_0} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

หรือ

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$



ตำแหน่งที่ _____ มีค่า

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta} = 1$$

ตั้งนัยกเว้นที่ $m = 0$ เราจะมีเงื่อนไขการเกิดແຕบมีดเป็น _____
นั่นคือ

$$\beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta = m\pi$$

หรือว่า

$$m\lambda = b \sin \theta$$

เมื่อประมาณให้มีค่าน้อยๆ เราจะได้ _____
ทำให้เงื่อนไขของແຕบมีดเป็น _____

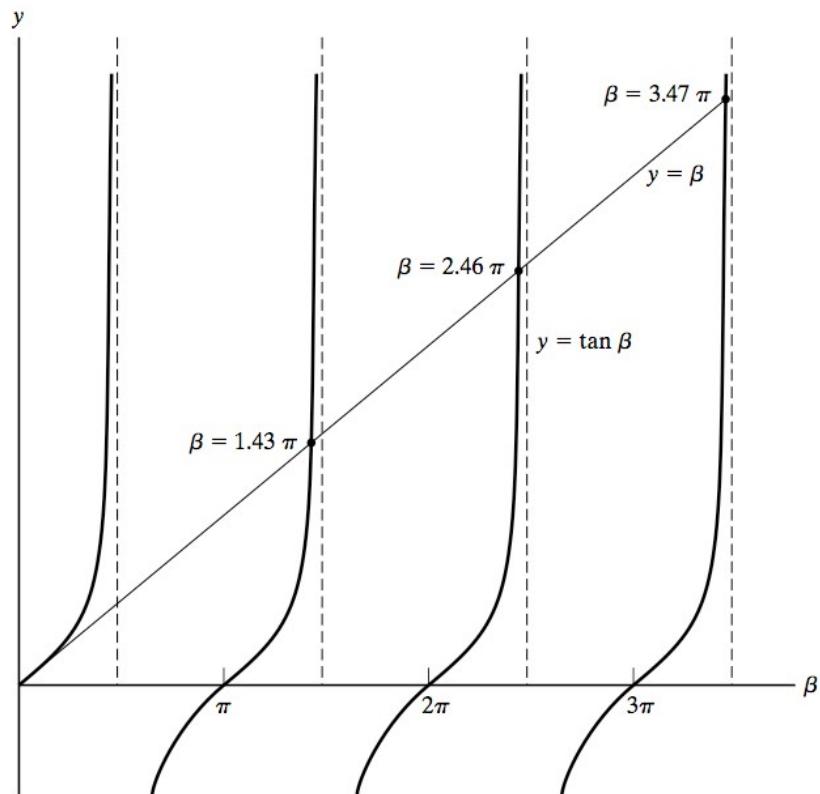
$$y = \frac{m\lambda f}{b}$$

ในการหาແຕบสว่างนั้น สังเกตได้ว่าตำแหน่งสว่างสุดไม่อยู่ตรงกลางพอดีระหว่างจุดมืดสองจุด เพราะ _____
โดยความสามารถค่าสูงสุดได้โดยการ _____

จะได้ว่า

$$\beta = \tan \beta$$

ซึ่งหาค่าต่อไปได้จากการทำ numerical analysis หรือพิจารณาจ่ายๆ ได้จากราฟด้านล่าง



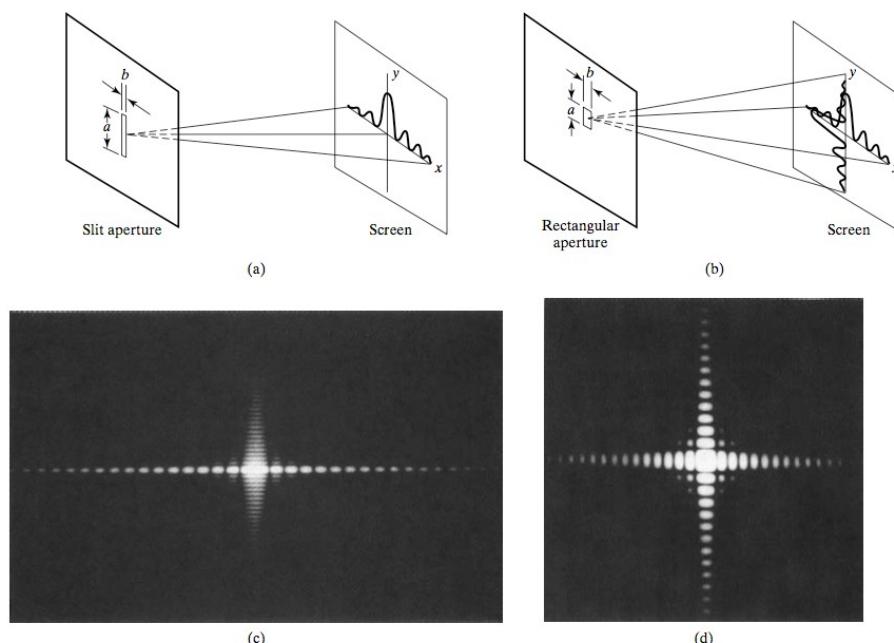
ตัวอย่าง จงหาอัตราส่วนของความเข้มแสงระหว่างແດບສ່ວງຕຽດກລາງແລະແດບສ່ວງອັນດັບແຮກ

สังเกตว่าขนาดของແບສ່ວງຕຽດກາລັງຄືອພາທີເກີດຈາກສລິຕີເດືອຍ່າ ສ່ວນແບມີດສ່ວງຂ້າງໜັ້ນເກີດຈາກຜລຂອງ ກາລັງເລື່ອຍ່າເປັນ ໂດຍມູນຄວາມກວ້າງຂອງແບສ່ວງສາມາຮັດຄຳນວນໄດ້ຈາກມູນຮວ່າງແບມີດອັນດັບໜຶ່ງທັງສອງຂ້າງ

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b}$$

ມີສລິຕີແຄບລົງ ແບສ່ວງຕຽດກາລັງຈະ _____

3. ກາລັງເລື່ອຍ່າຜ່ານຫຼຸດສື່ເຫຼື່ຍມແລະຫຼຸດວົງກລມ



ຄວາມເຂັ້ມຮວມຄືອພລຸດຂອງກາລັງເລື່ອຍ່າໃນແຕ່ລະແກນ

$$I = I_0 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right)$$

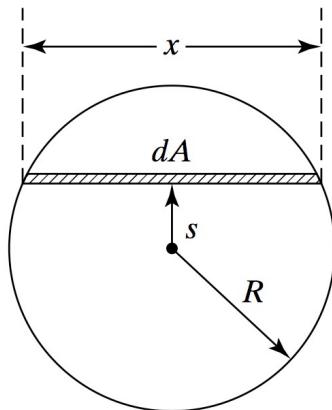
ໂດຍທີ່

$$\beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta_x, \alpha = \frac{1}{2} k a \sin \theta_y$$

ແລະມີເຈືອນໄຟກາລັງເລື່ອຍ່າເປັນ

$$y = \frac{m \lambda f}{b}, x = \frac{n \lambda f}{a}$$

ในการเลี้ยวเบนผ่านช่องเปิดกลม เราจะทำการอินทิเกรตແບซึ่งมีพื้นที่ dA ดังภาพ



เพื่อที่จะทำการอินทิเกรตเราจะใช้

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r_0} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} e^{iks \sin \theta} \Rightarrow dE_p = \left(\frac{E_A dA}{r_0} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} e^{iks \sin \theta}$$

$$E_p = \frac{E_A}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \iint e^{iks \sin \theta} dA$$

จากรูปเราจะได้ว่า

$$dA = 2\sqrt{R^2 - s^2} ds$$

กำหนดให้ $v = s/R$ และ $\gamma = kRs \sin \theta$ ทำให้เราได้

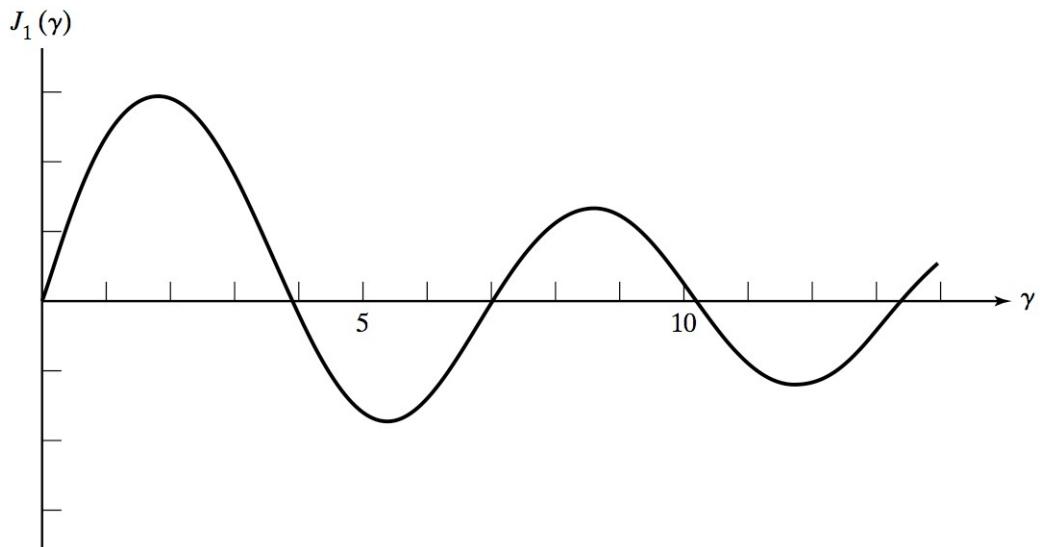
$$E_p = \frac{2E_A R^2}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-1}^1 e^{i\gamma v} \sqrt{1-v^2} dv$$

ซึ่งอินทิเกรตนี้เราจะได้

$$\int_{-1}^1 e^{i\gamma v} \sqrt{1-v^2} dv = \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma}$$

โดย $J_1(\gamma)$ เป็นเบสเซลฟังก์ชันชนิดที่หนึ่งอันดับที่หนึ่ง (first-order Bessel function of the first kind) ซึ่งเขียนเป็นอนุกรมอนันต์ได้

$$J_1(\gamma) = \frac{\gamma}{2} - \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \dots$$



สังเกตว่ามีลักษณะคล้ายกับฟังก์ชัน _____
และมีลิmitที่

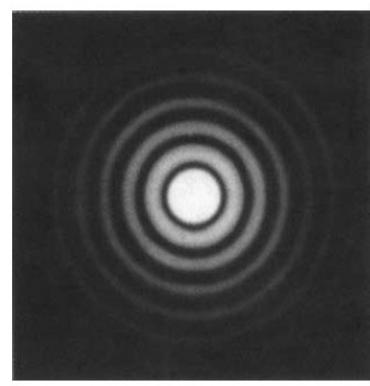
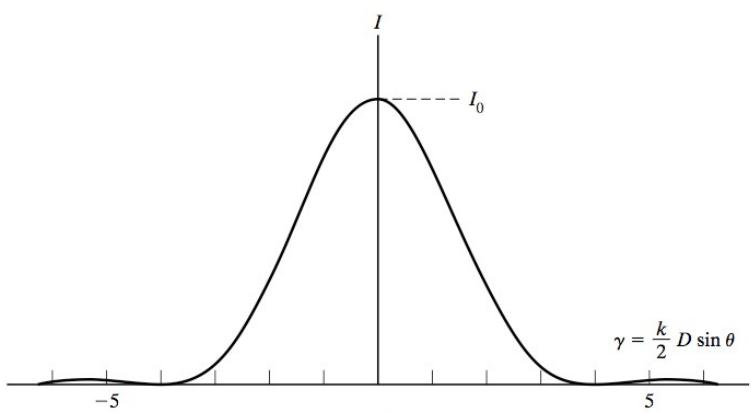
$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{J_1(\gamma)}{\gamma} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้นเราจึงได้ค่าความเข้มเท่ากับ

$$I = I_0 \left(\frac{2 J_1(\gamma)}{\gamma} \right)^2$$

โดยที่

$$\gamma = \frac{1}{2} k D \sin \theta$$



ทั้งนี้การดูค่าต่ำสุดสูงสุด (แบบมีดแบบสว่าง) ต้องดูจากฟังก์ชันเบสเซลซึ่งสามารถอ่านได้ดังตาราง

	γ	$I/I_0 = (2J_1(\gamma)/\gamma)^2$
1 st Maximum	0	1
1 st Zero	3.832	0
2 nd Maximum	5.136	0.0175
2 nd Zero	7.016	0
3 rd Maximum	8.417	0.00416
3 rd Zero	10.173	0
4 th Maximum	11.620	0.00160
4 th Zero	13.324	0

จากตารางคำแนะนำมีดอันดับแรกมีค่า _____

เราจะได้

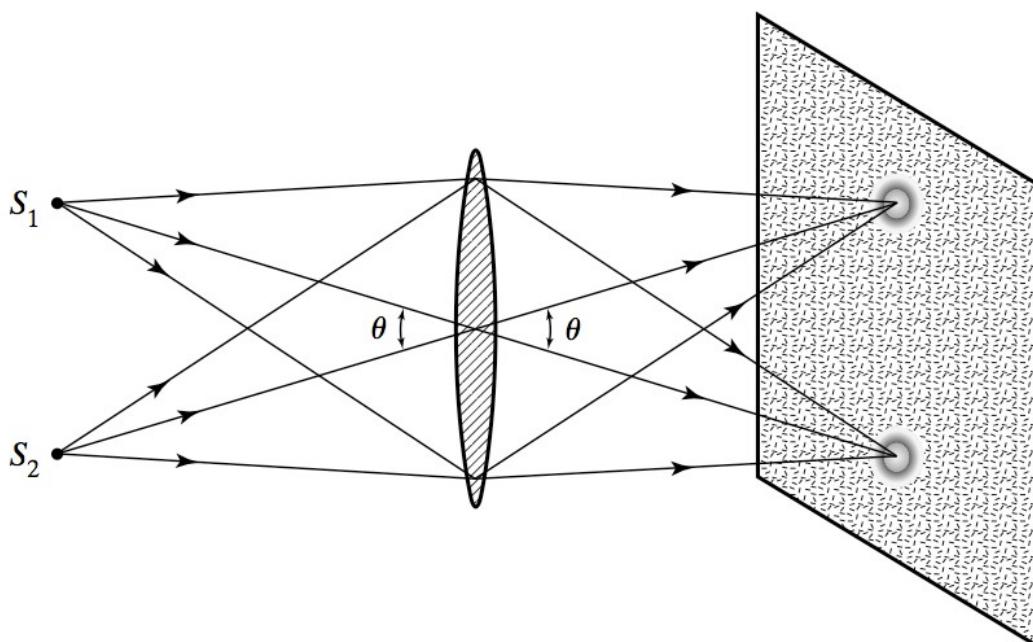
$$D \sin \theta = 1.22 \lambda$$

ซึ่งเป็นคำแนะนำของขอบของวงกลมสว่างตรงกลางที่เรียกว่าจานไอรี (Airy disc)
ในกรณีของมุมเล็กๆ (Fraunhofer or far-field diffraction) เราจะได้ค่าครึ่งหนึ่งของขนาดเชิงมุมของจานไอรี

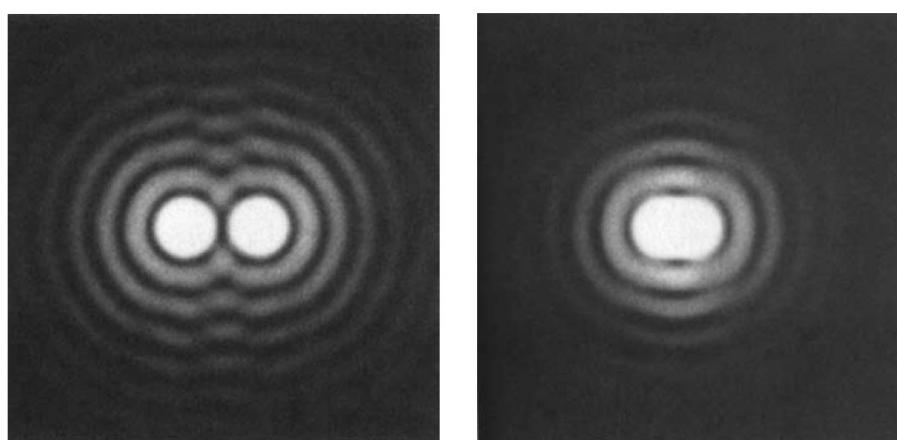
$$\Delta \theta_{1/2} = \frac{1.22 \lambda}{D}$$

4. กำลังแยก (Resolution)

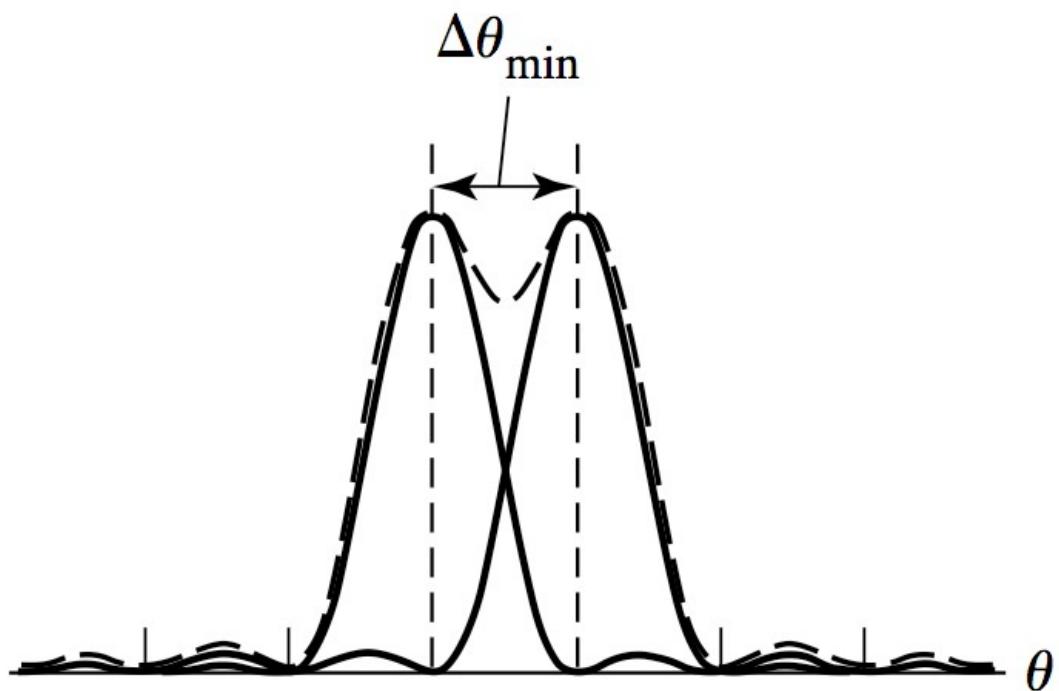
จากที่เรียนผ่านมาแล้ว จะสังเกตได้ว่าระยะระหว่างเลนส์และสลิตเดียวไม่มีผลต่อการเลี้ยวเบน ดังนั้นมีผลต่อภาพที่เกิดจากกล้องจะมีผลของการเลี้ยวเบนอยู่เสมอ ถ้าพิจารณาแสงออกจากจุด S_1 และ S_2 ซึ่งมีระยะห่างเชิงมุม θ ภาพที่เกิดขึ้นบนฉากจะเป็นริ้วรอยของการเลี้ยวเบนผ่านช่องเปิดกลมดังภาพ



เมื่อมุมนี้มีขนาดน้อยเกินไปจะทำให้ภาพทั้งสองดูคล้ายกับว่าเป็นภาพเดียวกัน



ซึ่งเราจะนิยมกำลังการแยกภาพโดยใช้เกณฑ์ของ雷耶ล (Rayleigh's criterion) ซึ่งบอกว่าภาพสองภาพจะถูกแยกได้พอดีก็ต่อเมื่อขอบของจานไอรีของภาพแรกซ้อนกับจุดกึ่งกลางของจานไอรีของภาพที่สองพอดี

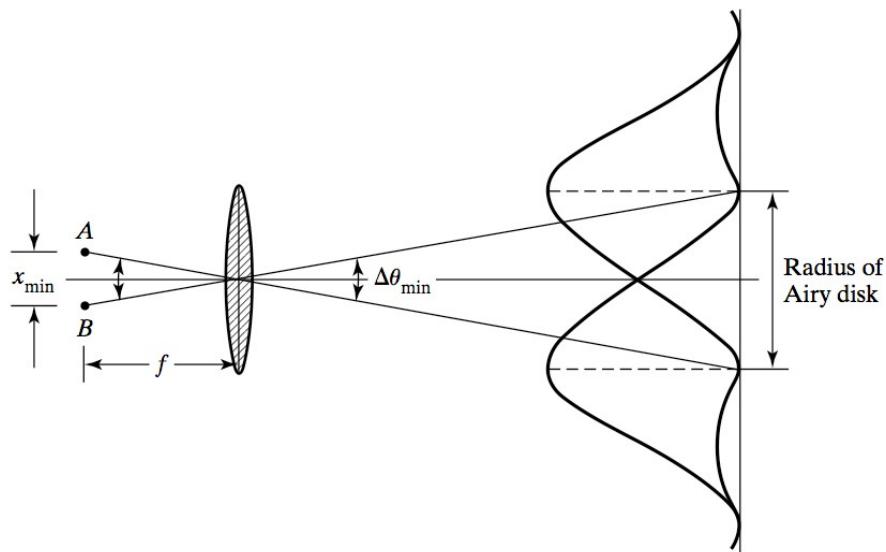


ซึ่งจากที่ได้คำนวณไปแล้วค่ามุมนี้มีค่าเท่ากับ

$$\Delta\theta_{min} = \frac{1.22\lambda}{D}$$

ตัวอย่าง เลนส์ของกล้องสองตามีเลนส์ผ่านศูนย์กลาง 35 มม. จงหาระยะห่างเชิงมุมที่น้อยที่สุดของดาวสองดวงที่สามารถแยกออกจากกันได้ด้วยกล้องนี้

หลักการเดียวกันนี้สามารถประยุกต์ใช้กับเลนส์ที่อยู่ใกล้ๆกันได้ด้วย โดยเมื่อไม่คำนึงถึงหน้าคัลลีนที่ไม่เป็นระนาบบนซ่องเปิด (แหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ใกล้เลนส์) เราจะได้ระบบตั้งภาพ

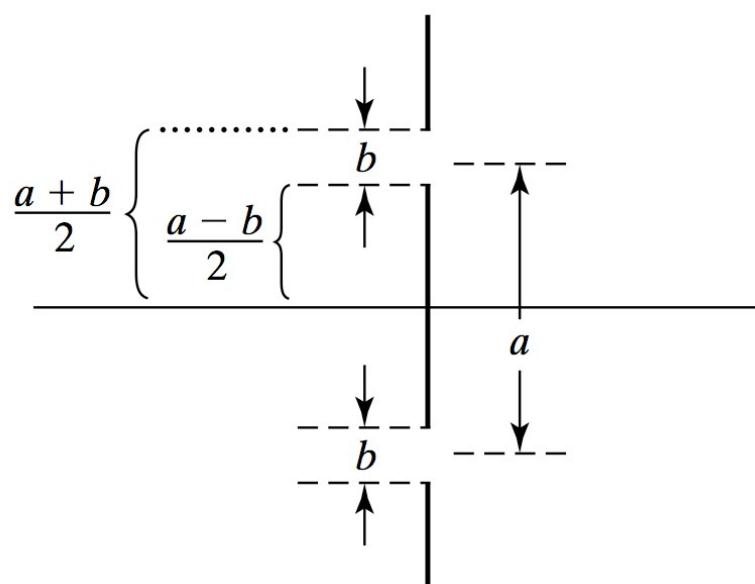


ซึ่งทำให้เราได้ระยะห่างเป็น

$$x_{min} = f \Delta\theta_{min} = f \left(\frac{1.22\lambda}{D} \right)$$

5. การเลี้ยวเบนของสลิตคู่

การคำนวณของสลิตคู่มีลักษณะคล้ายกับสลิตเดี่ยวนั่นคือ พิจารณาสนามไฟฟ้าที่จุด P ซึ่งเกิดจากสนามไฟฟ้าที่ออกจากช่วงเล็กๆ ds บนสลิตที่หนึ่ง รวมกับสนามไฟฟ้าที่ออกจากช่วงเล็กๆ ds' บนสลิตที่สอง



$$E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-(a+b)/2}^{-(a-b)/2} e^{iks \sin \theta} ds + \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{(a-b)/2}^{(a+b)/2} e^{iks' \sin \theta} ds'$$

เมื่อทำการอินทิเกรต เราจะได้

$$E_p = \frac{E_L}{r_0} \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{ik \sin \theta} \left(e^{\frac{ik|b-a|\sin \theta}{2}} - e^{\frac{-ik|a+b|\sin \theta}{2}} + e^{\frac{ik|a+b|\sin \theta}{2}} - e^{\frac{ik|a-b|\sin \theta}{2}} \right)$$

เมื่อแทนตัวแปรใหม่โดยใช้

$$\beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta$$

$$\alpha = \frac{1}{2} k a \sin \theta$$

จะได้สมการเป็น

$$E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \frac{b}{2i\beta} (e^{i\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{-i\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}))$$

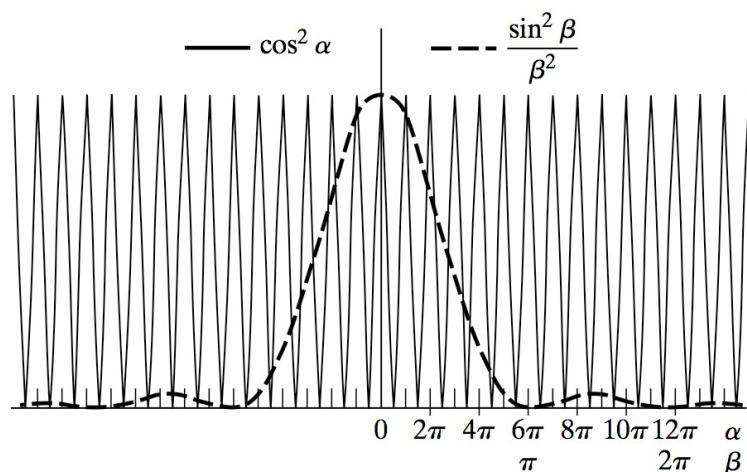
เมื่อจัดรูป จะได้

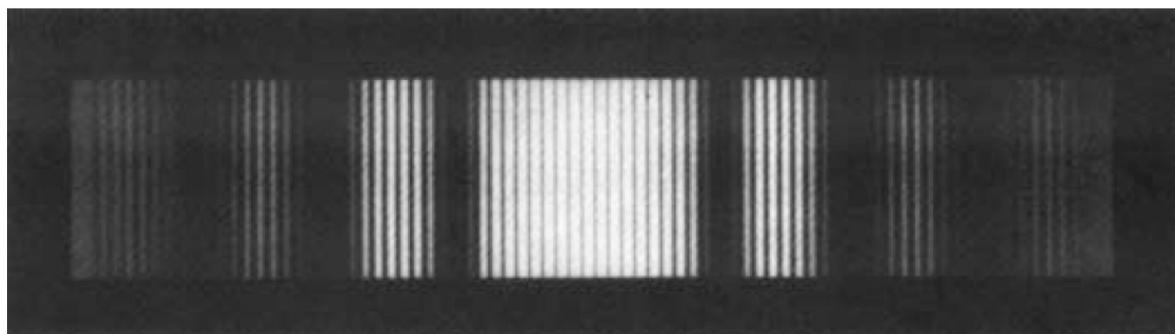
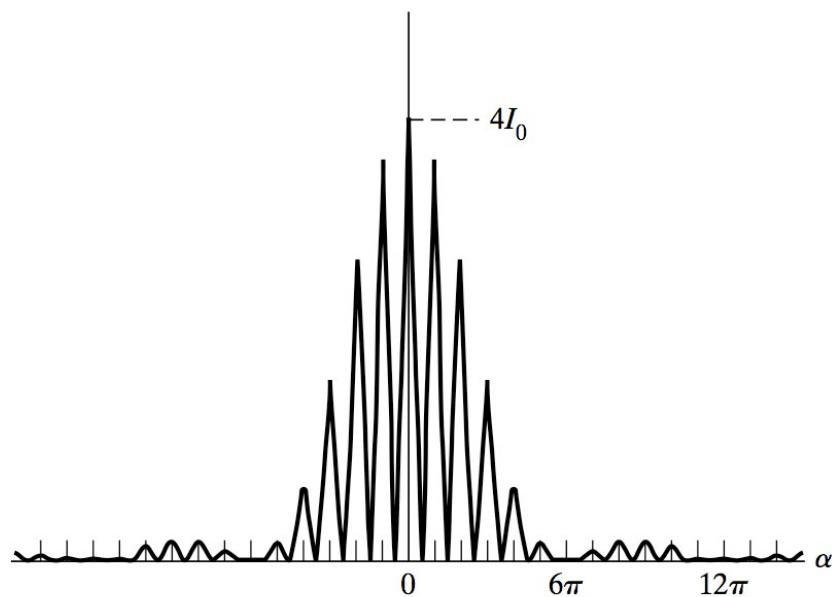
$$E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \frac{2b \sin \beta}{\beta} \cos \alpha$$

ดังนั้นความเข้มมีค่าเป็น

$$I = \left(\frac{\epsilon_0 c}{2} \right) \left(\frac{2 E_L b}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha = 4 I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha$$

เมื่อใช้ I_0 ซึ่งนิยามแบบเดียวกันกับการคำนวณสลิตรเดียว





เราสังเกตได้ว่าริ้วอยนี้เกิดจากการแทรกสอดและเลี้ยวเบนผสมกัน
โดยในสมการ factor _____ แสดงถึงการแทรกสอด
และ factor _____ แสดงถึงการเลี้ยวเบน

เมื่อพิจารณาจุดมีดสุดของการแทรกสอดเราจะได้เงื่อนไขว่า

$$m\lambda = b \sin \theta$$

ในขณะที่จุดสว่างสุดของการเลี้ยวเบนเกิดขึ้นเมื่อ

$$p\lambda = a \sin \theta$$

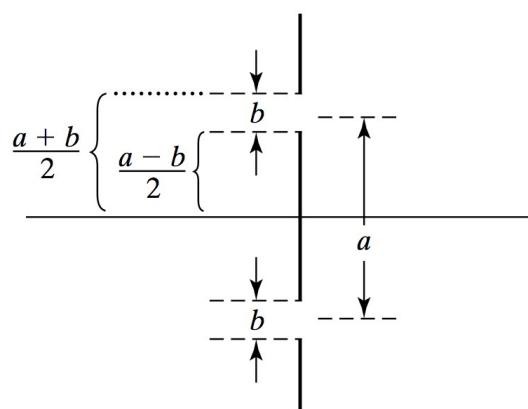
เพราฯว่าความเข้มเป็นผลคูณของทั้งสองส่วน จุดสว่างสุดของการเลี้ยวเบนอาจหายไปได้ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ

$$a = \left(\frac{p}{m} \right) b$$

หรือ

$$\alpha = \left(\frac{p}{m} \right) \beta$$

6. การเลี้ยวเบนจากสลิตร N ช่อง



ในกรณีของสลิตรจำนวน N ช่อง (เกรตติ๊ง) โดยให้ขนาดสลิตรเป็น b และระยะห่างระหว่างสลิตรเป็น a อินทิกรัลจะกล้ายเป็น

$$E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \sum_{j=1}^{N/2} \left(\int_{[-(2j-1)a-b]/2}^{[-(2j-1)a+b]/2} e^{iks \sin \theta} ds + \int_{[(2j-1)a-b]/2}^{[(2j-1)a+b]/2} e^{iks' \sin \theta} ds' \right)$$

เมื่อทำการอินทิเกรตเราจะได้

ทำให้เราได้เทอมในวงลีบด้านบนเป็น

$$K_j = \frac{b}{2i\beta} [e^{-i|2j-1|\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{i|2j-1|\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta})]$$

ทำให้เราได้

$$K_j = \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta) 2 \cos [(2j-1)\alpha]$$

$$K_j = 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \Re [e^{(2j-1)\alpha}]$$

เมื่อพิจารณาผลรวมของทุกค่าของ j เราจะได้

$$S = \sum_{j=1}^{N/2} K_j = 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \Re \left[\sum_{j=1}^{N/2} e^{(2j-1)\alpha} \right]$$

$$S = 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \Re [e^{i\alpha} + e^{i3\alpha} + e^{i5\alpha} + \dots + e^{i(N-1)\alpha}]$$

เมื่อใช้สูตรผลรวมเรขาคณิต เราจะได้ว่า

$$S = 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \Re \left[\frac{e^{iN\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} \right]$$

กระจายในรูป \cos และ \sin เราจะได้

$$S = b \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}$$

และทำให้เราได้สมการไฟฟ้ารวมเป็น

$$E_p = \frac{E_L b}{r_0} \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} e^{i(kr_0 - \omega t)}$$

เมื่อทำเป็นความเข้มเราจะได้

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

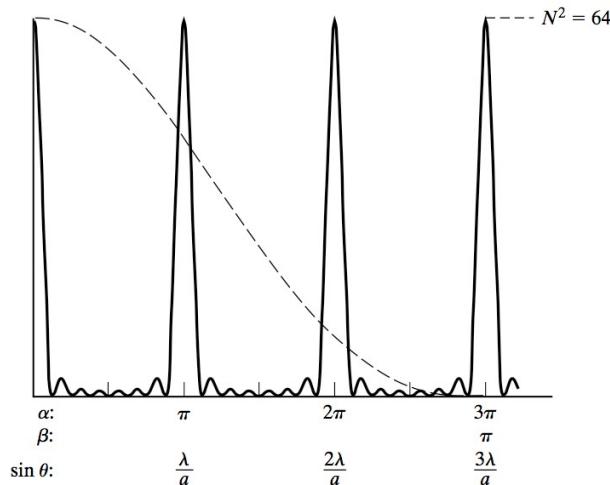
ซึ่งประกอบด้วย _____ ซึ่งเป็น factor ของการเลี้ยวเบน
และ _____ ซึ่งเป็น factor ของการแทรกสอด

เพื่อเป็นการตรวจสอบผลลัพธ์ เราสามารถลดรูปสูตรนี้ในกรณีที่ $N = 1$ และ $N = 2$ แล้วได้สูตรของการเลี้ยวเบนผ่านสเลิตเดี่ยวและสเลิตคู่ดังนี้

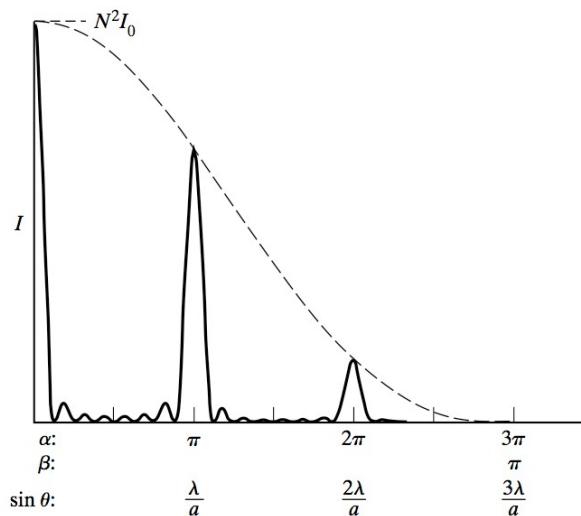
เมื่อพิจารณาเทอมการแทรกสอดเมื่อ $\alpha = m\pi$ โดยการใช้ L'Hopital rule เราสามารถหาค่าของเทอมนี้ได้เท่ากับ

$$\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} = \pm N$$

เราจะได้ความสูงของส่วนการแทรกสอดดังรูป



เมื่อร่วมกับส่วนของการเลี้ยวเบน เราจะได้กราฟ

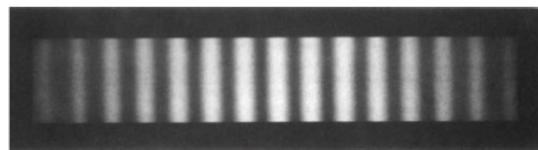
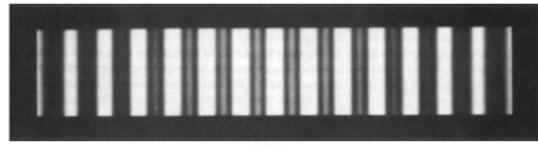
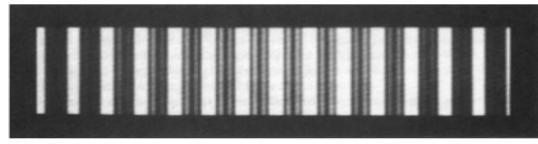
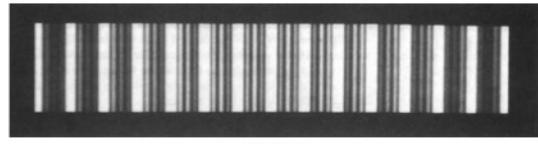


สังเกตว่าระหว่างค่า $\alpha = m\pi$ ก็ยังมีจุดต่ำสุดสูงสุดย่ออยู่อีกเป็นจำนวน $N-2$ (ดังตัวอย่าง $N = 8$ มีพีคย่ออยู่อีก 6 อัน) จุดต่ำสุดย่ออยู่านี้เกิดขึ้นจากตอนที่ส่วนของ $\sin N \alpha$ มีค่าเท่ากับศูนย์แต่ นั่นคือ

$$\alpha N = p\pi$$

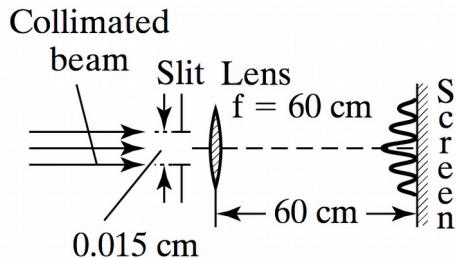
เมื่อ

$$p = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (N-1)$$

(a) $N = 2$ (b) $N = 3$ (c) $N = 4$ (d) $N = 5$

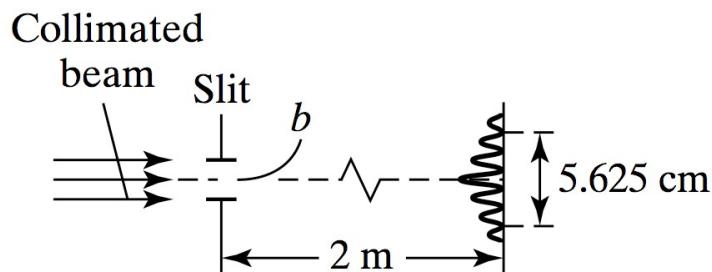
แบบฝึกหัด 6

1. แสงขนาดสีเขียวที่ออกมายากจากธาตุปอร์ทซึ่งมีความยาวคลื่น 546.1 nm ตกกระทบลงบนสลิตเดี่ยวซึ่งมีความกว้าง 0.015 cm เลนส์ซึ่งมีความยาวโฟกัส 60 cm ถูกวางไว้หลังสลิต รีวอรอยของการเลี้ยวเบนปรากภูยู่บนชากระห่วงอยู่หลังเลนส์ 60 cm จงหา ก). ระยะระหว่างจุดที่มีความสว่างสูงสุดและแถบสว่างอันดับที่หนึ่ง ข). ระยะระหว่างแถบสว่างอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง



2. ถ้าให้ความเข้มสูงสุดของการเลี้ยวเบนแบบฟรันโนไฟฟอร์มีค่าเท่ากับ I_0 และความเข้มที่จุดใดๆบนฉากรีวอร์มีค่าเท่ากับ I จงหาอัตราส่วน $\frac{I_0}{I}$ ที่จุดซึ่งห่างจากขอบด้านซ้ายมากกว่าขอบขวาของสลิตเป็นระยะทาง $3/4$ เท่าของความยาวคลื่น

3. นักศึกษาคนหนึ่งได้ทำการทดลองเพื่อหาความกว้างของสลิตโดยการสังเกตรีวอรอยการเลี้ยวเบนบนชากระห่วงอยู่ห่างออกไป จากสลิตเป็นระยะ 2 m ดังภาพเมื่อนักศึกษาฉายแสงเลเซอร์ขนาดซึ่งมีความยาวคลื่น 632.8 nm และทำการวัดระยะห่าง ระหว่างแถบมีดอันดับที่สามจากทั้งสองฝั่ง พบว่าค่าเฉลี่ยที่ได้จากการทดลองคือ 5.625 cm จงหาความกว้างของสลิตนี้



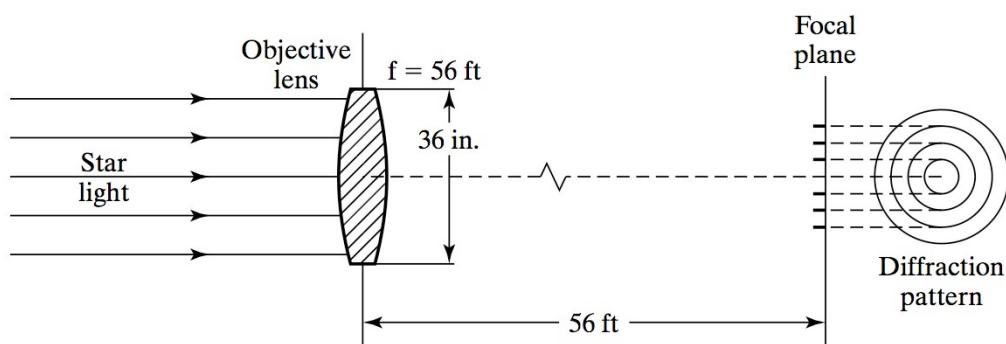
4. เมื่อมองการเลี้ยวเบนแบบฟรันโนไฟฟอร์จากสลิตเดี่ยวโดยการฉายแสงที่มีสเปกตรัมไม่ต่อเนื่อง ถ้าทราบว่า แถบมีดที่ 5 ของความยาวคลื่นที่หนึ่งไปซ่อนทับพอดีกับแถบมีดที่ 4 ของความยาวคลื่น 620 nm จงหาความยาวคลื่นที่ไม่ทราบค่า

5. จงหาความกว้างของสลิตซึ่งทำให้ความกว้างเชิงมุมของแถบสว่างกลางมีค่าเท่ากับ $30, 45, 90, 180$ องศา เมื่อกำหนดว่า ความยาวคลื่น 550 nm

6. พิจารณาการเลี้ยวเบนจากสลิตเดี่ยวกว้าง $2.125 \mu m$ เมื่อฉายแสงที่มีความยาวคลื่น $550 nm$ จงหาความกว้างเชิงมุมของ ແບບสว่างตรงกลาง และหาอัตราส่วนของ $\frac{I_0}{I}$ ที่จุดซึ่งทำมุน 5, 10, 15, 22.5 องศากับแนวตั้งจากของสลิต

7. จงหาอัตราส่วนความเข้มแสงของແບບสว่างอันดับแรกต่อความเข้มแสงของແບບสว่างอันดับที่สอง เมื่อพิจารณา ก). สลิตเดี่ยวยแบบขอตรง ข). สลิตเดี่ยวยแบบวงกลม

8. สถานีกล้องโทรทรรศน์วิภาคแห่งหนึ่งมีช่องเปิดกว้าง 36 นิ้วและมีความยาวโฟกัส 56 ฟุต จงหารัศมีของวงแหวนสว่าง อันดับแรกและอันดับที่สองซึ่งล้อมรอบจานไอรีที่เกิดจากแสงจากดาวไกลาซึ่งมีความยาวคลื่น $550 nm$



9. พิจารณากล้องโทรทรรศน์ซึ่งมีขนาดของช่องเปิด $12 cm$ และความยาวโฟกัส $150 cm$ เมื่อใช้กล้องนี้รับแสงจากดาวที่มี ความยาวคลื่น $550 nm$ จงหารัศมีของจานไอรีที่เกิดจากแสงดาวนี้

10. พิจารณาแสงไฟจากหลอดไฟคู่หน้าร้อนต์ซึ่งอยู่ห่างกัน 45 นิ้ว จงคำนวณหาระยะไกลสุดที่เราจะยังสามารถสังเกตเห็นแสงนี้เป็นหลอดไฟคู่จากการถ่ายภาพ เมื่อกำหนดให้ในตอนกลางคืนรูม่านตาของมนุษย์มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $5 mm$ และสมมติ ว่าแสงที่ออกมากจากหลอดไฟรวมมีความยาวคลื่น $550 nm$ โดยเฉลี่ย

11. กำหนดให้รูม่านตามนุษย์มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 2 ถึง 7 มิลลิเมตร ภายใต้แสงปกติ จงหาช่วงของระยะทางที่ทำให้ตามนุษย์ ยังสามารถแยกวัดถูกซึ่งห่างกัน 1 มิลลิเมตรได้

12. การทดลอง!!!! ให้นักศึกษาลองวัดระยะที่ตนเองสามารถแยกจุดสองจุดที่อยู่ห่าง 1 มิลลิเมตรได้ โดยการจุดสองจุดซึ่งห่างกัน $1 mm$ ด้วยปากกาสีเข้มลงบนกระดาษแล้วนำไปติดกับผนัง จากนั้นค่อยๆเดินออกจากกระทั้งเริ่มสังเกตได้ว่า แยกจุดสองจุดนี้ไม่ได้ แล้วจึงวัดระยะทางนี้ด้วยตัวบั๊มเมตร (หรือประมาณค่าและ/หรือวัดด้วยไม้บรรทัด) จากนั้นให้ คำนวณขนาดของเส้นผ่าศูนย์กลางของรูม่านตา ณ ขณะนั้น (หากนักศึกษาใส่แว่นตาไม่ต้องถอดออกเพื่อทำการทดลองนี้)

13. การเลี้ยวเบนจากสลิตรู้โดยใช้แสงสีเขียวความยาวคลื่น 546.1 nm สลิตรั้งซ่องมีความกว้าง 0.1 mm ปรากฏว่าร็อรอย การเลี้ยวเบนไม่มีแอบสว่างอันดับที่ 4 จงหาว่า ก). สลิตรังส่องห่างกันเท่าใด และ ข). ความเข้มแสงสัมพัทธ์ของแอบสว่าง อันดับที่ 1, 2 และ 3 เมื่อเทียบกับค่าความสว่างสูงสุด

14. จงแสดงให้เห็นว่าจำนวนแอบสว่างที่อยู่ในแอบสว่างกลางของการทดลองการเลี้ยวเบนจากสลิตรู้มีค่าเท่ากับ $2\left(\frac{a}{b}\right) - 1$ โดยที่ a/b คืออัตราส่วนระหว่างระยะห่างระหว่างสลิตรและความกว้างสลิตร

15. จงแสดงให้เห็นว่าในการทดลองการเลี้ยวเบนผ่านสลิตรู้ อัตราส่วนระหว่างความกว้างของแอบสว่างตรงกลาง ที่เกิดจากการเลี้ยวเบนและความกว้างของแอบสว่างตรงกลางที่เกิดจากการแทรกสอดมีค่าเท่ากับ $2\left(\frac{a}{b}\right)$ โดยที่ a/b คืออัตราส่วนระหว่างระยะห่างระหว่างสลิตรและความกว้างสลิตร

16. จงหาความกว้างเชิงมุมของแอบสว่างตรงกลางเมื่อแสงเลี้ยวเบนผ่านช่องเปิดที่มีความกว้าง ก). เท่ากับความยาวคลื่น ข). 5 เท่าของความยาวคลื่น ค). 10 เท่าของความยาวคลื่น

17. ฟังก์ชันเบสเซลอันดับหนึ่งชnidที่หนึ่ง เมื่อ x มีค่ามากๆ สามารถเขียนได้ในรูป

$$J_1(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi x}}$$

จงหาความกว้างเชิงมุมระหว่างแอบสว่างทดสอบที่อยู่ติดกันซึ่งอยู่ห่างจากแนวตั้งจากของช่องเปิดวงกลมมากๆ

18. เราได้แสดงให้เห็นไปแล้วในห้องเรียนว่าตำแหน่งของแอบสว่างไม่ได้อยู่ตรงกลางระหว่างแอบสว่างมีดพอดี แต่ค่อนข้างใกล้เคียง ถ้าเราสมมุติว่าตำแหน่งของแอบสว่างอยู่ตรงกลางพอดี จงแสดงให้เห็นว่าค่าความเข้มของแต่ละแอบสว่างมีค่าเท่ากับ

$$I_m = I_0 \frac{1}{\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}$$

และคำนวนเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงของสูตรนี้เมื่อเทียบกับแอบสว่างสามอันดับแรกที่เกิดขึ้นจริง