แบบฝึกหัดดาวคู่และดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะ

อบรมโอลิมปิกดาราศาสตร์ค่าย 2 ศูนย์มหาวิทยาลัยขอนแก่น

March 9, 2026

กำหนดค่า $G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3/(kgs^2)$, $M_{solar} = 2 \times 10^{30}\ kg$, $M_{Earth} = 6 \times 10^{24}\ kg$

1.1. พลูโตมีดวงจันทร์ที่ใหญ่ที่สุดชื่อชารอน โดยเราสังเกตเห็นชารอนจากทางอ้อมผ่านทางการส่ายของพลูโต (Wobble) กำหนดให้ระบบของพลูโต-ชารอนอยู่ห่างจากโลกเป็นระยะทาง 4.285×10^9 km และระนาบวงโคจรของชารอนตั้งฉากกับแนวเล็งจากโลก กำหนดให้มวลของพลูโตคือ 1.305×10^{22} kg และมวลของชารอนคือ 1.587×10^{21} kg และระยะห่างระหว่างชารอนและพลูโตคือ 19571 km จงหาว่าพลูโตส่ายด้วยแอมพลิจูดเชิงมุมสูงสุดกี่ฟิลิปดารอบเส้นทางเฉลี่ย

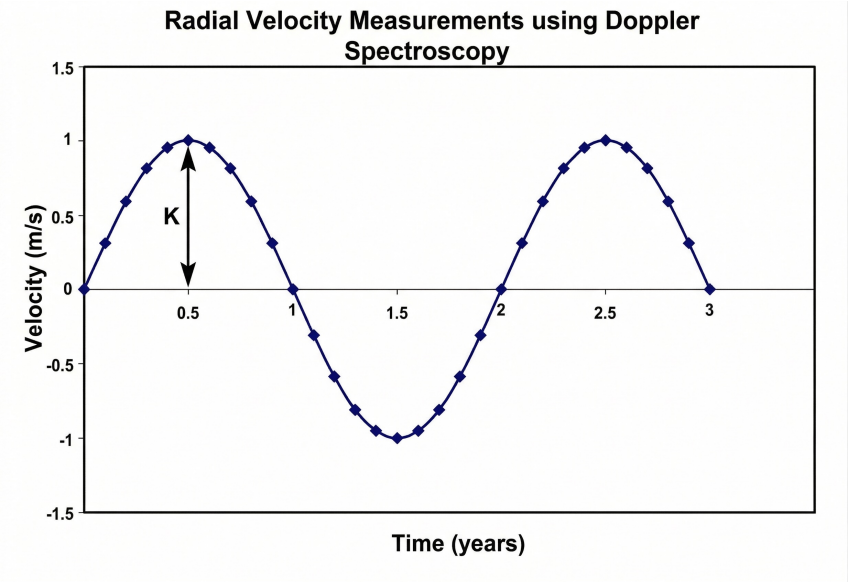
2. ระบบดาวคู่มวล m_1 และ m_2 มีระนาบการโคจรขนานกับแนวสายตา (แนวเล็ง) ของผู้สังเกต เป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางมวลซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับผู้สังเกตด้วยคาบ 8.6ปี เส้นสเปกตรัมไฮโดรเจน (H_α: 656.281nm) ของดาวทั้งสองมีการเลื่อนแบบดอปเปลอร์สูงสุด (Maximum Doppler shifts) $\Delta\lambda_1 = 0.072$ nm และ $\Delta\lambda_2 = 0.068$ nm ตามลำดับ
จงหา:

1. ความเร็วสูงสุดในแนวเล็ง (maximum radial velocity) และ รัศมีวงโคจรของ m_1 และ m_2
2. ระยะห่างระหว่าง m_1 และ m_2 ในหน่วย AU
3. มวลของ m_1 และ m_2 ในหน่วยของมวลดวงอาทิตย์

3. ยานอวกาศที่กำลังเคลื่อนที่ตรงเข้าหาดวงอาทิตย์จากระยะไกลด้วยอัตราเร็ว 100 km/s และผู้สังเกตบนยานอวกาศสามารถตรวจพบแสงเลเซอร์ที่มาจากโลก หากเส้นทางของยานอวกาศอยู่ในระนาบเดียวกับวงโคจรของโลก แล้วความยาวคลื่นต่ำสุดและสูงสุดที่สามารถสังเกตได้จากยานอวกาศมีค่าเท่าไร (กำหนดค่าความยาวคลื่นแสงเลเซอร์จากแหล่งกำเนิดบนโลกเป็น 700 nm และไม่ต้องคำนึงถึงการหมุนรอบตัวเองของโลก)

ระบบดาวคู่ Kepler 16 ประกอบด้วยดาวฤกษ์ Kepler 16A และ Kepler 16B โคจรรอบกันด้วยคาบ 41 วัน โดยมีระยะห่างจากกัน 30 ล้านกิโลเมตร โดย Kepler 16A มีมวลมากกว่า Kepler 16B มาก ในปี ค.ศ. 2011 หอสังเกตการณ์อวกาศ Kepler ได้ตรวจพบดาวเคราะห์ทาทูอิน (Tatooine) ที่มีขนาดใกล้เคียงกับดาวเสาร์โคจรรอบดาวคู่นี้ เมื่อสังเกตจากดาวเคราะห์จะเห็นดาวคู่เป็นเหมือนดวงอาทิตย์คู่ ดาวเคราะห์โคจรในระนาบเดียวกันกับระบบดาวคู่ด้วยวงโคจรวงกลมห่างจากจุดศูนย์กลางมวลของระบบดาวคู่เป็นระยะทาง 108 ล้านกิโลเมตร ด้วยคาบ 229 วัน
ก. ผู้สังเกตบนดาวทาทูอินจะเห็นดาว Kepler 16B มีมุมอีลองเกชันสูงสุดมีค่าประมาณเท่าใด
ข. ผู้สังเกตบนดาวทาทูอินจะเห็นดาว Kepler 16B ผ่านกลางหน้าดาว Kepler 16A ในทุกๆ กี่วัน

5. ดาวฤกษ์ดวงหนึ่งมีมวลเท่ากับมวลของดวงอาทิตย์ จากการสังเกตการณ์วัดความเร็วในแนวเล็ง (Radial velocity) โดยใช้ Doppler Wobble หรือ Doppler Spectroscopy ได้ข้อมูลการสังเกตการณ์ดังกราฟ ถ้าดาวฤกษ์ดวงนี้มีดาวเคราะห์โคจร



รอบเพียงดวงเดียว โดยมีระนาบวงโคจรทับกับแนวเล็งของเรา จงหาว่าดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะดวงนี้มีมวลเป็นเท่าไร?

6. ระบบดาวคู่ 40 Eri BC มีคาบวงโคจรเท่ากับ 247.9 ปี ระบบนี้มีมุมแพรัลแลกซ์ $0''.201$ และขนาดเชิงมุมของค่าครึ่งแกนหลัก (semi-major axis) ของมวลลดทอน (reduced mass) มีค่า $6''.89$ อัตราส่วนของระยะทางของ 40 Eri B ต่อ 40 Eri C จากจุดศูนย์กลางมวลมีค่า $\frac{a_B}{a_c} = 0.37$
จงหามวลของ 40 Eri B และ 40 Eri C

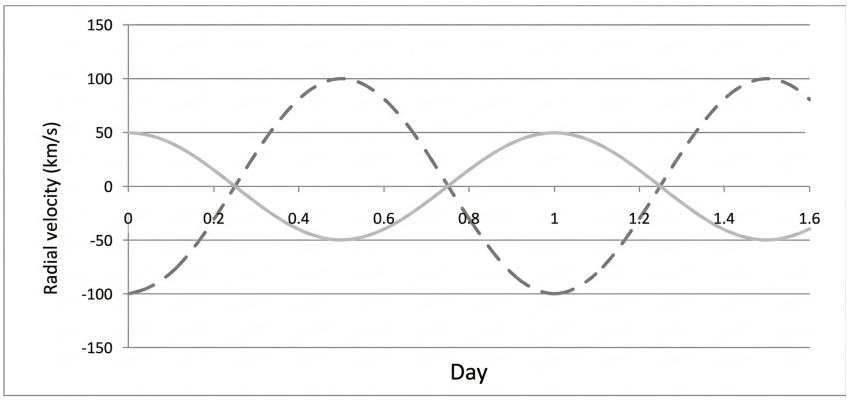
7. เมื่อสังเกตระบบดาวคู่ A, B ณ เวลาหนึ่ง พบว่า สเปกตรัมของดาว A มีเส้นดูดกลืน H_α อยู่ที่ 656.324 nm ส่วนดาว B มีเส้นดูดกลืน H_α อยู่ที่ 656.565 nm ในขณะที่ค่ามาตรฐานบนโลกของ $H_\alpha = 656.281$ nm (กำหนดให้ $\frac{v}{c} \ll 1$)
ก. จงหาความเร็วในแนวเล็ง (Radial velocity, v) ของดาวทั้งสอง
ข. จงหาอัตราส่วนมวลของระบบดาวคู่นี้

8. ถ้าระยะทางระหว่างดาวของระบบดาวคู่เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า แล้วคาบการโคจรของระบบดาวคู่จะเปลี่ยนแปลงหรือไม่ ถ้าเปลี่ยนจะเปลี่ยนไปเท่าไร กำหนดให้มวลของระบบดาวคู่ยังอยู่เท่าเดิม

9. ระบบดาวคู่ประกอบด้วยดาว เอ และดาว บี ดาว บี ไม่สามารถมองเห็นได้ด้วยตาเปล่า เพราะดาว เอ มีความสว่างมากกว่าดาว บี ถึง $10,000$ เท่า
(ก) ดาว เอ มีมุมพาราแลกซ์ (parallax) $0''.38$ จงหาว่าดาว เอ อยู่ห่างจากโลกเท่าใด
(ข) ถ้าความสว่างหรือฟลักซ์ (flux) ของดวงอาทิตย์มีค่าเป็น 1.2×10^{10} เท่า ของดาว เอ จงหากำลังการส่องสว่าง (luminosity) ของดาว เอ ในหน่วยเท่าของดวงอาทิตย์ $(L_\odot)$
(ค) ดาว เอ และคู่ของมันคือดาว บี ต้องเป็นดาวประเภทใด หากดาวทั้งคู่มีสเปกตรัมชนิด A ให้ระบุตำแหน่งของดาวทั้งสองบน H-R Diagram

10. จากกราฟความเร็วของระบบดาวคู่นี้ ให้นักเรียนคำนวณหาอัตราส่วนมวล และมวลของสมาชิกทั้งสอง ทั้งนี้ให้ถือว่า

ระนาบวงโคจรขนานกับแนวสายตาและวงโคจรเป็นวงกลม



11. Exoplanet:

ก. ถ้าระบบดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะ (Extra-Solar Planets) ที่อยู่ห่างออกไป 10 pc มีดาวฤกษ์ที่เหมือนกันกับดวงอาทิตย์ (โชติมาตรโบโลเมตริกสมบูรณ์ เท่ากับ $+4.75$) และมีดาวเคราะห์ที่คล้ายกับดาวพฤหัสบดีมวล 1.9×10^{27} kg ประพฤติตัวเหมือนกับวัตถุดำที่มีอุณหภูมิ 122 K โดยมีรัศมีเท่ากับ $71,400$ km โคจรรอบดาวฤกษ์ที่ระยะ 5.203 AU คาบการโคจร 11.86 ปี ความรีวงโคจร 0.048 กล้องโทรทรรศน์อวกาศฮับเบิลมีกำลังแยกเชิงมุม (angular resolution) อยู่ที่ประมาณ $0.1''$ สามารถตรวจพบวัตถุที่มีโชติมาตรน้อยกว่า $+30$ กล้องโทรทรรศน์ฮับเบิลจะสามารถตรวจพบดาวเคราะห์ดวงนี้ได้หรือไม่ ในช่วงความยาวคลื่นที่ตามองเห็น (visible) ด้วยเทคนิคโฟโตเมตรี (photometry) จงแสดงการคำนวณเพื่ออธิบาย

ข. ถ้าเราใช้วิธีวัดการส่ายของดาวฤกษ์โดยดูจากอัตราเร็ววงโคจร (orbital speed) ของดาวฤกษ์ที่หมุนรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบดาวฤกษ์และดาวเคราะห์ จงคำนวณหาอัตราเร็วในวงโคจรของดาวเคราะห์นี้รอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

ค. ถ้าเทคนิคสเปกโตรสโคปี (spectroscopy) ในปัจจุบันสามารถวัดความเร็วของดาวฤกษ์ตามแนวรัศมีมีค่า ≥ 1 ms^{-1} อยากทราบว่าค่าครึ่งแกนเอก (Semi-major axis) น้อยที่สุดของดาวเคราะห์ที่คล้ายกับดาวพฤหัสบดีที่จะตรวจวัดได้ด้วยเทคนิคสเปกโตรสโคปีมีค่าเป็นเท่าไร จงแสดงการคำนวณเพื่ออธิบาย

12. พิจารณาระบบดาวคู่ระบบหนึ่ง พบว่ามีคาบการโคจรรอบกัน 1 ปี โดยมีจุดศูนย์กลางมวลของระบบอยู่นิ่งกับที่ และมีระยะครึ่งแกนยาว 2 A.U. นักดาราศาสตร์ใช้สเปกโทรกราฟความละเอียดสูง วัดความเร็วในแนวเล็ง (Radial velocity) ของระบบดาวคู่ดังกล่าว พบว่าค่าความเร็วในแนวเล็งที่มากที่สุดของสมาชิกดวงที่ 1 มีค่าเป็น 3 เท่า ของค่าความเร็วในแนวเล็งที่มากที่สุดของสมาชิกดวงที่ 2 จงหาว่ามวลของสมาชิกแต่ละดวงของระบบดาวคู่นี้มีค่าเป็นกี่เท่าของมวลดวงอาทิตย์

13. ระบบดาวคู่แบบอุปราคาปฐมภูมิมีวงโคจรเป็นวงกลมและระนาบวงโคจรอยู่ในแนวสายตาพอดี ($i = 90°$) จากกราฟแสง (Light curve) พบว่าช่วงเวลาตั้งแต่เริ่มเกิดอุปราคา (First contact) จนกระทั่งดาวดวงเล็กเข้าไปอยู่หน้าดาวดวงใหญ่เต็มดวง (Second contact) ใช้เวลา t_1 และช่วงเวลาตั้งแต่ดาวดวงเล็กเริ่มบังเต็มดวงจนกระทั่งเริ่มเคลื่อนที่ออก (Third contact) ใช้เวลา t_2 หากดาวทั้งสองโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลด้วยความเร็วสัมพัทธ์ v

ก. จงหาสมการสำหรับหาค่ารัศมีของดาวทั้งสองดวง (R_1 และ R_2) ในรูปของ v, t_1 และ t_2

ข. หากความลึกของอุปราคาปฐมภูมิและทุติยภูมิที่สังเกตได้คือ Δm_1 และ Δm_2 แมกนิจูด ตามลำดับ จงหาอัตราส่วนของอุณหภูมิยังผล (Effective temperature) ของดาวทั้งสองดวง (สมมติให้ดาวทั้งสองประพฤติตัวเป็นวัตถุดำที่แผ่รังสีแบบไอโซโทรปิก)

14. จากการสังเกตการณ์ระบบดาวคู่แบบสเปกตรัมเส้นเดี่ยว พบว่าดาวฤกษ์ที่มองเห็นได้ (ดาวปฐมภูมิ) มีความเร็วแนวเล็งสูงสุด $K_1 = 50$ km/s และมีคาบการโคจร $P = 30$ วัน สมมติให้วงโคจรเป็นวงกลม ($e = 0$)

ก. จงคำนวณหาฟังก์ชันมวล (Mass function) ของระบบดาวคู่นี้ในหน่วยมวลดวงอาทิตย์ ($M_\odot$)

ข. หากเราทราบจากแบบจำลองวิวัฒนาการดาวฤกษ์ว่าดาวที่มองไม่เห็น (ดาวทุติยภูมิ) คือดาวนิวตรอนที่มีมวล $1.4M_\odot$ และระนาบวงโคจรทำมุมเอียง $i = 60^\circ$ กับระนาบท้องฟ้า จงหามวลของดาวฤกษ์ที่มองเห็นได้ดวงนี้

15. ระบบดาวคู่ประกอบด้วยดาวมวล m_1 และ m_2 โคจรรอบจุดศูนย์กลางมวลด้วยคาบ P และมีความเยื้องศูนย์กลางของวงโคจร e หาก a คือความยาวกึ่งแกนเอกของวงโคจรสัมพัทธ์ (Relative orbit)

ก. จงแสดงการพิสูจน์ว่าโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบในกรอบอ้างอิงจุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass frame) มีค่าเท่ากับ $L = \mu\sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}$ เมื่อ μ คือมวลลดทอน (Reduced mass)

ข. จงพิสูจน์ว่าพลังงานกลรวมของระบบดาวคู่นี้ในกรอบอ้างอิงจุดศูนย์กลางมวล มีค่าเท่ากับ $E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$

16. พิจารณาระบบดาวคู่ที่ประกอบด้วยดาวแคระขาวมวล M รัศมี R และดาวฤกษ์คู่สม (Companion star) มวล m รัศมี r หากดาวฤกษ์คู่สมขยายขนาดขึ้นจนสสารที่ผิวดาวเริ่มหลุดรอดเข้าไปในแรงโน้มถ่วงของดาวแคระขาวผ่านจุดลากรานจ์ L_1 (เกิดปรากฏการณ์ Roche lobe overflow)

จงประเมินระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางดาวทั้งสองดวง (d) ที่ทำให้แรงโน้มถ่วงสุทธิที่กระทำต่อมวลทดสอบ Δm ณ ผิวของดาวฤกษ์คู่สมทางฝั่งที่หันเข้าหาดาวแคระขาวมีค่าเป็นศูนย์ (ประมาณให้ดาวทั้งสองเป็นทรงกลมและละทิ้งแรงหนีศูนย์กลางจากการหมุนรอบตัวเองของดาวฤกษ์คู่สม)