线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109　Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

P. 95-7

设 $A=[a_{ij}]_{n\times s}$, $B=[b_{ij}]_{s\times m}$, $AB=[c_{ij}]_{n\times m}$, $a=[1,\ 1,\ \cdots,\ 1]^T$,

且A与B的各行元素之和都等于1. 求证：

(1) $A a_{s\times 1}=a_{n\times 1}$,

(2) AB的各行元素之和都等于1.

P.43-16 用数学归纳法证明行列式（$\alpha \neq \beta$）

$$|A|_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

证明：取|A|的第一行展开，得递推式

$$|A|_n = (\alpha+\beta)\cdot|A|_{n-1} - \alpha\beta\cdot|A|_{n-2}$$

$$|A|_n - \alpha|A|_{n-1} = \beta\cdot(|A|_{n-1} - \alpha\cdot|A|_{n-2}) \qquad \boxed{B_n = \beta\cdot B_{n-1}}$$

又 $\because$ $|A|_1 = (\alpha+\beta)$，$|A|_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$

$$|A|_2 - \alpha|A|_1 = \beta^2 \qquad \beta\,(|A|_2 - \alpha|A|_1) = |A|_3 - \alpha|A|_2 \qquad (1)$$

(1)两边同乘 β： $\beta^2(|A|_2 - \alpha|A|_1) = \beta\,(|A|_3 - \alpha|A|_2) = |A|_4 - \alpha|A|_3$

$$\beta^2(|A|_2 - \alpha|A|_1) = \beta(|A|_3 - \alpha|A|_2) = |A|_4 - \alpha|A|_3$$

$$|A|_2 - \alpha|A|_1 = \beta^2$$

$$\beta^4 = \beta(|A|_3 - \alpha|A|_2) = |A|_4 - \alpha|A|_3$$

$$\vdots$$

$$\beta^n = |A|_n - \alpha|A|_{n-1} \qquad (1)$$

同理由：$|A|_n = (\alpha + \beta)\cdot|A|_{n-1} - \alpha\beta\cdot|A|_{n-2}$

$$|A|_n - \beta|A|_{n-1} = \alpha\cdot(|A|_{n-1} - \beta\cdot|A|_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$\alpha^n = |A|_n - \beta|A|_{n-1} \qquad (2)$$

(1)和(2)联立求解即证

$\alpha = \beta$ ？

§ 2.1 矩阵的概念

定义2.1：数域 F 中的 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为数域 F 上的一个 m 行 n 列 矩阵（matrix），简称矩阵. 这 $m\times n$ 个数叫做矩阵的元素（element），其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素。

§ 2.2 矩阵的代数运算(矩阵代数)

一、矩阵的加减法与数量乘法

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$kA=Ak=[ka_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

二、矩阵的乘法

定义2.5：设 $A=[a_{ij}]_{m\times l}$, $B=[b_{ij}]_{l\times n}$, 则A与B的乘积定义为 $C=AB=[\,c_{ij}\,]_{m\times n}$，其元素

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}$$

$$(\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m};\quad \mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n})$$

- 可视作行向量与列向量逐一点积。

➲ 矩阵乘积能否定义成列向量乘行向量的形式?

例:

$$AB=\left[\begin{array}{c:c:c}1&0&3\\2&1&-1\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}-1&1&4\\\hdashline 3&-2&1\\\hdashline 0&0&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}-1&1&10\\1&0&7\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-1&1&4\\-2&2&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\3&-2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&6\\0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&10\\1&0&7\end{bmatrix}$$

☑ 矩阵乘积可以定义成列向量乘行向量的形式.

- 向量的标量积(scalar product)或内积(inner product)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

- 内积是常见运算，结果是一个标量，如矩阵乘积的每个元素。
- **Mapping a large space onto a small space,**
  $R^n \rightarrow R$ (two vectors → a number). Hence inner.

- 向量的外积(outer product): 列向量乘以行向量

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{bmatrix}$$

- 两向量外积的结果是一个矩阵
- **Mapping a large space onto a much larger space, $R^n \to R^{n*n}$. Hence outer.**
- 外积不满足结合律、交换律
- 矩阵乘积=外积之和：外积展开 ->信息检索，图形处理。

定理2.1：两个 n 阶方阵乘积的行列式等于两个方阵行列式的乘积。即若 A，B 都是 n 阶方阵，则

$$|AB| = |A||B|$$

补充到第一章：

行列式性质

证明：设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times n}$, $AB = C = [c_{ij}]_{n\times n}$

- 考虑 2n 阶行列式

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

- 根据拉普拉斯定理，按前 n 行展开，得

$$|D| = |A||B|$$

利用行列式性质，又可得

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|D| \xlongequal[j=1,2,\cdots,n]{C_{n+j}+\sum_{i=1}^{n} b_{ij}C_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= |C|(-1)^{(2n+1)n}(-1)^n = |C|(-1)^{2n^2+n+n} = |C|, \quad \text{所以}: |AB| = |A||B|.$$

例如： $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{pmatrix}$, 有 $|AB|=\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 7 & 5\end{vmatrix}=30$

而 $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=10$, $|B|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$

所以 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

推论：若 $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_k}$ 都是 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，则

$$|A_1A_2\cdots A_k|=|A_1||A_2|\cdots|A_k|$$

$$|\boldsymbol{A}^m|=|\boldsymbol{A}|^m$$

三、矩阵的转置

定义2.6：设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，把A的行和列依次互换得到的 $n\times m$ 阶矩阵称为 A 的**转置矩阵**(transposed matrix)，记作 A^T

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 转置矩阵就是把A的行换成同序号的列得到的一个新矩阵。

例如，矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 的转置矩阵为 $A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 9\end{bmatrix}$ $\quad B^T=\begin{bmatrix}7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

性质 (矩阵的转置是一种运算)

(1) $(A^T)^T=A$

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(3) $(kA)^T=kA^T$

(4) $(AB)^T=B^TA^T$

练习：$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 求 $(AB)^T$

解一：$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & -1\\ 8 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

解二：$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

例： 设 n 阶矩阵 $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$，矩阵 A 与 B 的每列元素的和都等于1， α 为 n×1 矩阵，且每个元素都等于1.

(1) 计算 $\alpha^T A$， $\alpha^T B$

(2) 证明矩阵 AB 每列之和都等于1.

解：由已知 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1, (\forall j=1,2,\ldots,n)$ $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}=1, (\forall j=1,2,\ldots,n)$

$$\alpha^T A=[1,1,\cdots,1]\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}\right]=[1,1,\cdots,1]=\alpha^T$$

同理 $\alpha^T \mathrm{B}=\alpha^T$

(2) 设 $AB=[c_{ij}]$ $\alpha^T AB=\left[\sum_{i=1}^{n} c_{i1}, \sum_{i=1}^{n} c_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} c_{in}\right]$

$$\alpha^T AB=(\alpha^T A)B=\alpha^T B=\alpha^T=[1,1,\cdots,1]$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} c_{ij}=1 \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

P52 矩阵乘法结合律

□ 对称矩阵

(1) 若方阵A满足 $A^T = A$，即 $a_{ji} = a_{ij}$，则称A为对称矩阵。

(2) 若方阵A满足 $A^T = -A$，即 $a_{ji} = -a_{ij}$，则称A为反对称矩阵。这时 $a_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$

例如矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

为对称矩阵， $A^T = A$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

为反对称矩阵， $A^T = -A$ ， $a_{ii} = 0$

设 A 为任一方阵，证明：$A+A^T$为对称阵，

$A-A^T$ 为反对称阵

证1：写出A的具体形式...

证2:

$$(A+A^T)^T = A^T+(A^T)^T = A^T+A = A+A^T$$

$$(A-A^T)^T = A^T-(A^T)^T = A^T-A = -(A-A^T)$$

故 $A+A^T$为对称阵，$A-A^T$ 为反对称阵。

- 性质：任一方阵都可表示成一个对称阵与反对称阵之和：

$$A=\frac{1}{2}[(A+A^T)+(A-A^T)]$$

三、矩阵的乘幂与矩阵多项式

定义2.7：设 A 是 n 阶矩阵，称 k 个 A的乘积为矩阵 A 的 k 次幂， 记作 A^k，并规定

$$A^0 = E, \qquad A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}A}$$

- k 只能是非负整数。

- 矩阵乘法满足结合律，所以方阵的幂满足

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl},$$

- 矩阵的乘法一般不适合交换律，所以方阵的幂

$$\boxed{(AB)^k \neq A^k B^k}$$

单位矩阵

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

称为n阶单位矩阵，简记 E

$$A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}$$

$$E_n B_{n\times m} = B_{n\times m}$$

定义2.8：设 A 是 n 阶矩阵

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m$$

是x的一个多项式，A为任意方阵，则称

$$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$$

为矩阵A的多项式(**polynomial of matrix A**),记作 f(A).

- 显然，f(A)仍是一个 n 阶方阵
- f(A) 同时也是 A 的函数

矩阵多项式的性质

(1)对于任意方阵A, 有 $f(A)g(A)=g(A)f(A)$;

例如：$(A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)=A^2-E$

例 已知 $f(x)=2-3x+x^2$ $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

求 $f(A)$.

解: $$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$f(A)=2E-3A+A^2$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

□ 方阵的行列式

定义：由n阶方阵A所有元素构成的行列式称为n阶方阵A的行列式

➢ n阶方阵行列式的运算满足下列运算律

(1) $|A^T|=|A|$ (2) $|kA|=k^n|A|$

例： 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 求 $|2A|$。

解： $|2A|=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 8 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2^3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=8\times 3=24$

小结：方阵的行列式

(1) 方阵 A 对应的行列式应记为 $|A|$或 $\det(A)$

(2) $|kA| = k^n |A|$

(3) $|AB| = |A||B|$， $|AB| = |BA|$

(4) $|A_1 A_2 \dots A_k| = |A_1||A_2| \dots |A_k|$

(5) $|A^T| = |A|$　　　$|A^m| = |A|^m$

- 归纳到第一章

- **布置习题 P96:**

16. (2)、(3)

17. (3)

18. 19.

21. (1)、(2)

§ 2.3 可逆矩阵

一、逆矩阵的定义及可逆的充要条件

- 我们已定义了矩阵的加/减/乘/数乘运算，矩阵能否作“除”法运算？
- 当数 $a \neq 0$ 时，我们有 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$
- 在矩阵的运算中，单位阵 E 相当于数乘的 1
- 对于矩阵 A ，是否存在一个 A^{-1} 使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad ?$$

定义2.9：设 A 是 n 阶矩阵，若存在n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 是 A 的逆矩阵 (inverse matrix)

称A是可逆矩阵（invertible matrix）或非奇异矩阵。

- ✓ 记为 $B = A^{-1}$ 或 $A^{-1} = B$　　$B = \dfrac{1}{A}$　　?
- ➢ 因为一个数除以一张数表没有意义.
- ■ 只有方阵才可能有逆阵

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

有 $$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以 B 是 A 的逆阵，同时 A 也是 B 的逆阵。

逆矩阵是唯一的

若矩阵A可逆，则逆矩阵唯一

反证法：假设B，C 都是A的逆矩阵，由定义

$$AB = BA = E, \qquad AC = CA = E,$$

- 于是 $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$

定义2.10：设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的伴随矩阵 (adjoint matrix)

记作 A^* 或 *adj* A

- 伴随矩阵是 A 的代数余子式矩阵①的转置②

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

- 由 P30（4.7） $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} |A|, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$

$$AA^* = A^* A = \begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix} = |A| E$$

- 逆矩阵

- 归纳到第一章，代数余子式另一个用处

定理 2.2:方阵A可逆的充要条件是A为非奇异矩阵，即 $|A|\neq 0$，并且

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$$

证明：先证必要性：已知 A 可逆，所以有 $AA^{-1}=E$.

- 对等式两边取行列式，由定理 2.1， 得

$$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|=1$$

- 故知 $|A|\neq 0$

- 再证明充分性：已知 $|A|\neq 0$, 由 $A^*A=AA^*=|A|E$

$$A\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}A=E$$

- 故A可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$.

- **推论**：如果AB = BA = E，则A,B互为逆阵，即

$$A^{-1} = B, B^{-1} = A$$

证明：由AB = E，得 |A||B|=1≠0, 必有 |A|≠0，|B|≠0

- 故A、B均可逆，且

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B,$$

$$B^{-1} = EB^{-1} = (AB)B^{-1} = A(BB^{-1}) = AE = A.$$

- **矩阵和它的逆矩阵相乘可以交换**

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

逆矩阵的计算方法(1) — 求伴随矩阵

习题 16（1）：求 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的逆矩阵（ad−bc≠0）。

解：因为 $|A| = ad - bc \neq 0$

故A可逆，下面求矩阵每个元素的代数余子式

$$A_{11} = d,\quad A_{12} = -c,\quad A_{21} = -b,\quad A_{22} = a \qquad A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- 可记住结论，计算时直接用：$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

练习： 求方阵 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

解：因为 $|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc$

故当a, b, c全不为零时, A可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{bmatrix}$$

☑ 定理：对角阵的逆阵还是对角阵，其对角线元素是原对角线元素的倒数。

例：求方阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

解：因 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0$ ，所以A^{-1}存在 。

再求 A 中每个元素的代数余子式：

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=-6,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

得 $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

所以 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

例： 用求逆阵的方法解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

解：方程组简记为 $AX = B$

其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$,

由于|A|=2 ≠ 0，A可逆，故 $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

即 $x_1 = -8$, $x_2 = 9$, $x_3 = -3$.

解线性方程组的第二种方法

定理 1.5：（克莱姆法则）若 n 阶线性方程组的系数行列式$|A|\neq 0$，则它有惟一解

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{|A_n|}{|A|}.$$

$$|A_j|=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{A^*}{|A|}B=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x_1=\frac{1}{|A|}\left[b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}\right]=\frac{|A_1|}{|A|}$$

$$x_j=\frac{1}{|A|}\left[b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}\right]=\frac{|A_j|}{|A|},\quad \cdots$$

说明

- 伴随矩阵类似于逆矩阵，如果矩阵可逆，那么它的逆矩阵和它的伴随矩阵差一个系数|A|。
- 但，即使矩阵不可逆，伴随矩阵也仍然存在。
- 伴随矩阵还有其它性质，如：

  $adj\,(E) = E$

  $adj\,(A^T) = adj\,(A)^T$

  $adj\,(AB) = adj\,(B)\,adj\,(A)$

  $adj\,(A^{-1}) = adj\,(A)^{-1} = A/\det(A)$

  等等。

可逆矩阵的性质

- 设 A 可逆，有

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ 归纳到第一章

(3) 若数 k ≠ 0 $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$

(4) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

(5)若A，B为同阶可逆矩阵，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- (3)是(5)的特例。

(5)若A，B为同阶可逆矩阵，则$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

证明： 由已知，$|A|\neq 0$， $|B|\neq 0$，

$|AB|=|A||B|\neq 0$， 所以 AB 可逆.

因为 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$

$$=AEA^{-1}=E$$

所以 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

推广：若A_1，A_2，…，A_m均为n阶可逆矩阵，则

$(A_1A_2\ldots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$

若：$A_1=A_2\ldots=A_m$， 则有 $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$

练习： 解矩阵方程 $AX+E=A^2+X$

其中：$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, E 为三阶单位矩阵

解：由 $AX+E=A^2+X$

$$AX-X=A^2-E$$

即 $(A-E)X=(A-E)(A+E)$

$$A-E=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

- $A-E$ 可逆.

$$(A-E)X=(A-E)(A+E)$$

所以 $(A-E)^{-1}(A-E)X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)$

$$X=A+E=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$