线性代数习题课

第三章：线性方程组

20

几个重要的结论

（1）两向量组等价⇒向量组的秩相等且两向量组可以互相线性表出。

（2）整体线性无关，部分必线性无关；部分线性相关，整体必线性相关。

（3） $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 $\xrightarrow{否}$ $\boldsymbol{\alpha}_s$ 一定可由剩下的s-1个向量线性表出；

$\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由剩下的s-1个向量线性表出 $\xrightarrow{否}$ $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关。

（4）如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则

1）如果 $s > t$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；

2）如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $s \leq t$

（5）有零向量的向量组肯定线性相关；任意n+1个n维向量必线性相关。

（6）如A可逆，则r(AB) = r(B)；如B可逆，则r(AB) = r(A)；

几个重要的结论

（7）方程组$\mathbf{Ax}=0$, 是$m\times n$矩阵，方程组的矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

显然，m = 方程的个数；n = 未知数的个数。

1）齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=0$

（a）r(A)=n， 即可用方程组的个数等于未知数的个数 $\Leftrightarrow$ 有零解（唯一解）

（b）r(A)<n， 即可用方程组的个数少于未知数的个数 $\Leftrightarrow$ 有非零解（无穷多解）

2）非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathrm{b}$

（a）$r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})=n$， 即可用方程组的个数等于未知数的个数 $\Leftrightarrow$ 有唯一解

（b）$r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})<n$， 即可用方程组的个数少于未知数的个数 $\Leftrightarrow$ 有无穷多解

（c） $r(\mathbf{A})+1=r(\bar{\mathbf{A}})$ $\Leftrightarrow$ 方程无解

复旦大學 FUDAN UNIVERSITY

题型1 线性组合、线性相关的判别

例 1 （1） 下列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，线性无关的是

（A） $(1,2,3,4)$， $(4,3,2,1)$， $(0,0,0,0)$

（B） (a,b,c)， (b,c,d)， (c,d,e)， (d,e,f)

（C） $(a,1,b,0,0)$， $(c,0,d,2,3)$， $(e,4,f,5,6)$

（D） $(a,1,2,3)$， $(b,1,2,3)$， $(c,4,2,3)$， $(d,0,0,0)$

分析：有零向量的向量组肯定线性相关，任意n+1个n维向量必线性相关，故A,B均线性相关。

对于D，若$d=0$，肯定线性相关；若$d\neq 0$,则

$$(a,1,2,3)-(b,1,2,3)=\frac{a-b}{d}(d,0,0,0)$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，而线性相关的向量组再增加向量肯定仍是线性相关，因此不论哪种情况，D是线性相关的。

FUDAN UNIVERSITY 1905 復旦大學 FUDAN UNIVERSITY

对于C，若能观察出 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)$， $\boldsymbol{\beta}_2=(0,2,3)$， $\boldsymbol{\beta}_3=(4,5,6)$ 所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

则可知 $\boldsymbol{\beta}_1$， $\boldsymbol{\beta}_2$， $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是其延伸组，即不论怎么扩充均线性无关。

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则它的任一延伸组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_s\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{bmatrix}$ 必线性无关。

（2）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则命题正确的是

（A） $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

（B） $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

（C） $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

（D） $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

分析：由观察法可知 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=0$

即A线性相关。

同理可知B,C线性相关

（3）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 是n维向量，则下列命题中正确的是

（A ） 如$\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

（B）如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_s$不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关

（C） 如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，任意s-1个向量都线性无关，则

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

（D）零向量不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

复旦大學 FUDAN UNIVERSITY

对于A，当且仅当每一个向量都不能用其余向量表示时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 才线性无关。

如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,3)$，虽 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，但 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关。

对于C，如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，可知它的任何一个部分组均线性无关。但任一部分组线性无关不能保证该向量组线性无关。例如

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0,\cdots,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\mathbf{e}_n=(0,0,0,\cdots,1),\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,\cdots,1)$$

其中任意n个都是线性无关的，但这n+1个向量是线性相关的。

对于D，在线性表出的定义中，对组合系数没有任何约束条件，因此，零向量可以用任何向量组线性表出，最多组合系数全取为0，即

$$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s$$

其实，零向量用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 表示时，如果组合系数可以不全为0，则表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性相关的，否则线性无关。

对于B，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，故存在不全为0的 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ ，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

显然， $k_s=0$ （否则 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出），因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关

（4）设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，则下列命题正确的是

（A）若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\le s$

（B）若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$

（C）若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\le s$

（D）若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$

分析：因为Ⅰ可由Ⅱ线性表出，故 $r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$ 。当向量组Ⅰ线性无关时，有 $r(\mathrm{I})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_r)=r$ 。由向量组秩的概念自然有 $r(\mathrm{II})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\le s$ 从而A正确。

若 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ，可见B, D均不正确。

若 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ，可见C不正确。

复旦大学 FUDAN UNIVERSITY

题型2 线性相关与线性无关的证明

【解题思路】证明线性无关通常思路是：用定义法（同乘或拆项重组），用秩（等于向量个数），齐次方程组只有零解或反证法。

例2 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

【证法一】（定义法，拆项重组）

若 $x_1(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$ ，整理得

$$(2x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(3x_1+x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

由已知条件 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故组合系数必全为0，即

$$\begin{cases}2x_1 \qquad\quad +x_3=0\\ 3x_1+x_2+x_3=0\\ \qquad -x_2+x_3=0\end{cases}$$

因为系数行列式 $\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$

故齐次方程组只有零解，即 $x_1=x_2=x_3=0$

因此 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

【证法二】（用秩，等价向量组）

令 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ ，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\beta}_1-3\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$$

那么，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可互相线性表出，它们是等价向量组，因而有相同的秩，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，即 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

【证法三】（用秩）

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，知其秩为3，又

$$(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&1\\3&-1&1\end{bmatrix}$$

而矩阵 $\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&1\\3&-1&1\end{bmatrix}$ 可逆，故

$$r(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$$

题型3 求秩与极大线性无关组

例3 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,2,3,-11)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,10,0)^{\mathrm{T}}$$

的一个极大线性无关组。

【解法一】把行向量组成矩阵，用初等行变换化成阶梯形，有

$$\begin{bmatrix}1&1&4&2\\1&-1&-2&4\\-3&2&3&-11\\1&3&10&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_4\end{array}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&4&2\\0&-2&-6&2\\0&5&15&-5\\0&2&6&-2\end{bmatrix}\begin{array}{c}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1\end{array}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&4&2\\0&-1&-3&1\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{array}{c}\boldsymbol{\alpha}_1\\1/2\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\\1/5\cdot(\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)\\\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1\end{array}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&4&2\\0&-1&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{array}{c}\boldsymbol{\alpha}_1\\1/2\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\\1/5\cdot(\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1)+1/2\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)\\\boldsymbol{\alpha}_4-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\end{array}$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组

注：如题目要求用极大线性无关组表示其余的向量，可考虑这种解法

復旦大學 FUDAN UNIVERSITY

【解法二】把 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 写成列向量，构成矩阵，再作初等行变换化矩阵为阶梯形，即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & -11 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么阶梯形矩阵中每一行第一个非零元所在的列对应的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 就是极大线性无关组。

由于 $(-3,5,0,0)^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}(1,0,0,0)^{\mathrm{T}} - \frac{5}{2}(1,-2,0,0)^{\mathrm{T}}$ ，所以如果需要线性表出，则有

$(1,2,0,0)^{\mathrm{T}} = 2(1,0,0,0)^{\mathrm{T}} - (1,-2,0,0)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{5}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$$

题型4 线性方程组的求解

例4：解下列线性方程组，若有无穷多解，用导出组的基础解系表示全部解。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

解:对方程组的增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵：

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 - 7R_1]{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}R_3]{R_4 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}R_3]{R_4-2R_3}\begin{bmatrix}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1+R_3]{R_2+R_3}\begin{bmatrix}1&0&1&0&3\\0&-1&2&0&8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$r(\mathbf{A})=3$$

方程组有无穷多解，由n-r(**A**)=4-3=1，基础解系由1个向量组成，每个解中有1个自由变量。

方程组最终化为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = -8 \\ x_4 = 6 \end{cases}$$

先求相应齐次线性方程组的基础解系，令 $x_3 = 0$ ，解出 $x_1 = -1, x_2 = 2, x_4 = 0$ ，所以齐次线性方程组的通解为 $k(-1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 。

再求非齐次线性方程组的特解，令 $x_3 = 0$ ，解出 $x_1 = 3, x_2 = -8, x_4 = 6$
特解为 $(3,-8,0,6)^{\mathrm{T}}$

于是，方程组的通解是： $(3,-8,0,6)^{\mathrm{T}} + k(-1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$

例5：设n阶矩阵 $\mathbf{A}$ 各行元素之和均为零，且$r(\mathbf{A})=n-1$，求齐次线性方程组$\mathbf{AX}=0$的全部解。

分析：$\mathbf{AX}=0$ 是n元齐次线性方程组，又 $r(\mathbf{A})=n-1$，必有无数非零解。且基础解系中含有n-r=1个解向量。只需求出任意一个非零解，就能求出方程组得全部解。

解：设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则由条件

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=0(i=1,2,\cdots,n)$$

可知：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因而，$\boldsymbol{\xi}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为方程组 $\mathbf{AX}=0$ 的一个非零解，且构成基础解系，于是方程组得全部解为：

$$\mathbf{X}=c\boldsymbol{\xi} \qquad （c为任意常数）$$

FUDAN UNIVERSITY 复旦大学

例6：设$m\times n$ 矩阵A的秩为n（这时称A为列满秩矩阵），B为n阶矩阵。若$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，证明$\mathbf{B}=\mathbf{O}$ 。

证：把矩阵A按列分块为：

$$\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

由 $r(\mathbf{A})=n$ ，秩等于向量个数，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

设 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ ，则

$$\mathbf{AB}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

于是，AB中第j列为：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}=b_{1j}\alpha_1+b_{2j}\alpha_2+\cdots+b_{nj}\alpha_n=0$$

$$(j=1,2,\cdots n)$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故有：

$$b_{ij}=0 \qquad (i,j=1,2,\cdots n)$$

所以 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$.

由矩阵乘法我们知道，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$,且$\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$时，一般地不能推出 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$。本题说明，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 且 $\mathbf{A}$ 为列满秩矩阵时，必有 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$。同理，当 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ ，且 $\mathbf{B}$ 为行满秩矩阵时，必有 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 。

復旦大學 FUDAN UNIVERSITY

例7：证明：若$\mathbf{A}$为n阶方阵$(n\geq 2)$，则：

（1）当 $r_A=n$ 时，$r_{A^*}=n$ ；

（2）当 $r_A=n-1$ 时，$r_{A^*}=1$ ；

（3）当 $r_A<n-1$ 时，$r_{A^*}=0$ ；

证明：（1）当 $r_A=n$ 时，$\mathbf{A}$可逆，$|\mathbf{A}|\neq 0$。因为 $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$，所以 $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$

那么$|\mathbf{A}\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^n=|\mathbf{A}||\mathbf{A}^*|$，从而$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}\neq 0$，所以，$r_{A^*}=n$。

（2）当 $r_A=n-1$，$\mathbf{A}$ 中存在 $n-1$ 阶子式不为零，而 $\mathbf{A}^*$ 是由 $\mathbf{A}$ 的元素a_{ij}的代数余子式$\mathbf{A}_{ij}$组成，必有非零元，故 $r(\mathbf{A}^*)\geq 1$。

又因为$r_A=n-1$，$|\mathbf{A}|=0$，于是$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{E}=\mathbf{O}$。从而根据矩阵秩的性质，$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{A}^*)\leq n$，所以$r(\mathbf{A}^*)\leq 1$。故$r(\mathbf{A}^*)=1$。

性质：若 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times l}=\mathbf{O}$ ，则 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\le n$ 。

对于矩阵方程 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times 1}=\mathbf{0}$ ，非零解 $\mathbf{X}$ 的基础解系含有的解向量的个数为 $n-r(\mathbf{A})$ ，它们是线性无关的，其它解向量可由这 $n-r(\mathbf{A})$ 个解线性表示，将由所有非零解构成的向量组记为V，基础解系就是它的一个极大线性无关组，向量组V的秩就是 $n-r(\mathbf{A})$ 。

把矩阵 $\mathbf{B}$ 看作是 l 个n元向量，这 l 个向量都是是方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的解，把这 l 个向量构成的向量组，记为P，向量组P 是向量组V的一部分，向量组P的秩 $r(\mathbf{B})$ 一定小于向量组V的秩 $n-r(\mathbf{A})$ ，即：$r(\mathbf{B})\le n-r(\mathbf{A})$ 。

（3）当 $r_A<n-1$ 时，$r_{A^*}=0$ ；

当 $r_A<n-1$时，$\mathbf{A}$ 的全部n-1阶子式均为零，故 $\mathbf{A}$ 的元素 a_{ij}的全部代数余子式 $\mathbf{A}_{ij}$ 均为零，即 $\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$，所以，$r(\mathbf{A}^*)=0$。