习题课

2012-4-18

习题答案

ftp://math:math@10.132.140.133/

14.15，令 $2Z=\{2k \mid k\in Z\}$，证明

$(1)[Z;+]\cong[2Z;+]$

$(2)[Z;+;\cdot]$不同构于$[2Z;+;\cdot]$

解：（1）构造 $\varphi(x)=2x$

首先证明同态；再证明一一对应

（2）反证；假设存在同构 φ，则

$\varphi(1)=\varphi(1\cdot 1)=\varphi(1)\cdot\varphi(1)$

$\therefore \varphi(1)=0$或1

而$1\notin 2Z$，$\therefore \varphi(1)=0$

又 $\varphi(0)=0$(单位元)

不是一一对应，矛盾。

14.16, 设$[F;+;\cdot]$为域，$F^*=F-\{0\}$，则$[F;+]$不同构于$[F^*;\cdot]$。

解：

假设存在同构映射φ，则$\varphi(0)=1$

令$\varphi(x)=-1$，有

$$\varphi(x+x)=\varphi(x)\cdot\varphi(x)=(-1)\cdot(-1)=1$$

$\therefore 2x=0$，即 x=0或者F的特征=2

若 x=0，与$\varphi(x)=-1$矛盾；

若 char$F$=2， 在 F^*中找到a’, b’满足a’≠ b’且a’≠ −b’

(考虑到F为无限域， F*中必有这样的a’, b’)

(若F为有限域， F*的元素个数比F少， 无法一一对应)

不妨令 $\varphi(a) = a', \varphi(b) = b'$

则 $a' \cdot a' = \varphi(a + a) = \varphi(2a)$

由 $charF = 2$ 可知 $2a = 0$

$\therefore a' \cdot a' = \varphi(0) = 1 \backslash$

同理 $b' \cdot b' = 1$

$\therefore (a' + b') \cdot (a' - b') = a' \cdot a' - b' \cdot b' = 1 - 1 = 0$

$\therefore a' + b', a' - b'$ 为零因子， F 不为域， 矛盾。

解法2?：假设存在同构映射φ，则$\varphi(0)=1$

令$\varphi(x)=-1$，有

$\varphi(x-x)=\varphi(x)\cdot\varphi(-x)=\varphi(0)=1$

注意到$(-1)\cdot(-1)=1$，由逆元的唯一性可知

$\varphi(-x)=-1$，即$\varphi(-x)=\varphi(x)$

由一一映射可知，$-x=x$

所以$x=0$ $\Leftarrow$ 对吗？只能得到x的加法逆元等于自身，

即$x+x=0$，同样要对charF进行讨论！

14.20， 分别在模3和模5的同余类环[R;+;·]上解方程组：

$$\begin{cases} x + 2z = 1 & (1) \\ y + 2z = 2 & (2) \\ 2x + z = 1 & (3) \end{cases}$$

解：（1）在$[Z_3;\oplus;\otimes]$上，（1）+（3）

0=2;无解；

（2）在$[Z_5;\oplus;\otimes]$上，（3）×2-(1)得

3x=1 mod 5

∴ x=[2]

带入（1），（2）可求

y=[3], z=[2]

14.22，

在域Z_3上分解多项式x^4+x^3+x+2为不可约多项式积。

解：（1）在$[Z_3;\oplus;\otimes]$中

$$x^4+1=x(x^3+x+1)+2x^2+2x+1$$

$$x^3+x+1=(2x+1)(2x^2+2x+1)$$

$$\therefore \gcd(f(x),g(x))=2x^2+2x+1$$

（2）在$[Q;+;\cdot]$中

$$x^4+1=x(x^3+x+1)-x^2-x+1$$

$$x^3+x+1=(-x+1)(-x^2-x+1)+3x$$

$$-x^2-x+1=(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})(3x)+1$$

$$3x=3x\cdot 1$$

$$\therefore \gcd(f(x),g(x))=1$$

14.23 在域Z_3上分解多项式x^4+x^3+x+2为不可约多项式积。

解：
$$x^4+x^3+x+2$$
$$=(x^2+1)(x^2-1)+1+x(x^2+1)+2$$
$$=(x^2+1)(x^2-1+x)$$
$$=(x^2+1)(x^2+x+2)$$

14.27 判断子环或理想

(1)整数集Z，在整系数多项式环$Z[x]$中

解：子环，但不是理想；$2 \cdot x \notin Z$

(2)自然数集N，在整数环Z中

解：不是子环,不是理想；1无加法逆元

(3)整系数多项式集合Z[x]在有理数多项式Q[x]中

解：子环，不是理想；$1 \cdot 1/2 \notin Z[x]$

(4)常数项为偶数的多项式$I[x]$在整数多项式$Z[x]$中

解：子环，理想

(5)首项系数为偶数的多项式$E[x]$在整数多项式$Z[x]$中

解：不是子环，不是理想；$(2x^2+x)-(2x^2)=x$

14.29 设R是环，a,b和$ab-1$是R中的可逆元，证明$a-b^{-1}$和$(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$是可逆的

证明：(1) $a-b^{-1}=(ab-1)\cdot b^{-1}$

$\therefore (a-b^{-1})^{-1}=b\cdot(ab-1)^{-1}$

(2) $a((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})(ab-1)$

$=a(b\cdot(ab-1)^{-1}-a^{-1})(ab-1)$

$=ab-(ab-1)=1$

$\therefore ((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1}=(ab-1)a$

补充题

- 定理14.6(2)分析

定理：同态映射 φ: [R;+;·] $\to$ [R’;∘;∗]且 φ(R) $\neq \varnothing$；

若 R 和 R' 均为有单位元环，单位元分别为e,e’；

那么当 φ 是满射或者 R' 为无零因子环且 φ 不是零同态

有 φ(e)=e’.

分析：该定理中包含

A： φ 是满射

B：R’无零因子

C： φ 不是零同态

定理成立的条件为(A $\cup (B \cap C$)

那么定理不成立的条件为 $\neg$(A $\cup (B \cap C) = (\neg A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap \neg C)$

补1，举例说明定理14.6(2)中，若φ不是满射，即使不是零同态，结论不一定成立。

解：题干要求¬A∩C，只能构造¬B，即构造R'使其具有零因子。

设 φ: $[Z \times Z, +, \cdot] \to [Z \times Z, +, \cdot]$ 并定义运算为

$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

定义 $\varphi((a,b)) = (0,b)$

可以证明φ为同态映射，不为满射，非零同态。

而 $\varphi(e) = \varphi((1,1)) = (0,1) \neq e$

补2，举例说明定理14.6(2)中，若φ不是满射，即使R'无零因子，结论不一定成立。

解：题干要求¬A∩B，只能构造¬C，即构造零同态。

设 $\varphi: [Z, +, \cdot] \to [Z, +, \cdot]$,

$+$和 $\cdot$ 运算为Z中普通加法和乘法

定义 $\varphi(x) = 0$

可以证明φ为同态映射，不为满射，Z无零因子。

而 $\varphi(e) = \varphi(1) = 0 \neq e$