线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

第三章　线性方程组

- 线性方程组在众多科学和工程领域应用广泛.
- 本章借助矩阵理论，系统研究线性方程组求解问题.

- 完整形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- 矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

也可写为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为线性方程组的系数矩阵(coefficient matrix)

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X=\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]^T$$

称为线性方程组的未知向量，亦可记为

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad B=\left[b_1, b_2, \cdots, b_m\right]^T$$

称为线性方程组的右端向量

- 线性方程组的解取决于系数 a_{ij} 和 常数项 b_i 及其排列位置，故我们将二者组合起来

$$\overline{A}=[A,b]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为线性方程组的 增广矩阵 (augmented matrix)

- 显然，线性方程组与增广矩阵一一对应.

- 对方程组的研究转化为对 m × (n+1) 阶矩阵的研究，直观而方便.

§ 3.1 消元法

- 一般线 程组
方程个 数个数

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & ② \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases}$$

- 最基本的解线性方程组的方法是高斯消元法.
- 高斯消元法用到如下三种变换

（1）互换两个方程的位置　（例方程②与④互换）

（2）用不等于 0 的数乘某个方程;

（3）一个方程加上另一个方程的k倍（例方程①+k③)

- 初等变换后的方程组与原方程组<u>同解</u>，称为同解方程组.

例：解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-4x_4=1 & (1) \\ 2x_1+5x_2+x_3-5x_4=3 & (2) \\ 3x_1+5x_2+4x_3-15x_4=2 & (3) \end{cases}$$

增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & -15 & 2 \end{bmatrix}$$

解： 消去 (2)(3)中的 x_1

$$\begin{matrix} (2)-2\times(1) \\ (3)-3\times(1) \end{matrix}\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-4x_4=1 & (1) \\ x_2-x_3+3x_4=1 & (4) \\ -x_2+x_3-3x_4=-1 & (5) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(5)+(4)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-4x_4=1 & (1) \\ x_2-x_3+3x_4=1 & (4) \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 & (1) \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 & (4) \end{cases}$$

- 同解方程组包含两个方程，四个未知量，没有唯一解。
- 易见，未知量 x_1，x_2 对应的二阶系数行列式不为零；若将 x_3，x_4视作独立参变数，方程组可解.

$$(1)-2\times(4)\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 10x_4 = -1 & (6) \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 & (4) \end{cases} \qquad \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -1 - 3\boldsymbol{x}_3 + 10\boldsymbol{x}_4 \\ \boldsymbol{x}_2 = 1 + \boldsymbol{x}_3 - 3\boldsymbol{x}_4 \end{cases}$$

- 只要任意取定 x_3，x_4，就得到方程组的一个解，也可记为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -1 - 3\boldsymbol{t}_1 + 10\boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 = 1 + \boldsymbol{t}_1 - 3\boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{t}_2 \end{cases} \quad (\text{其中}\boldsymbol{t}_1，\boldsymbol{t}_2\text{为任意常数})$$

- 称为方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3t_1 + 10t_2 \\ x_2 = 1 + t_1 - 3t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$ (其中t_1，t_2为任意常数)

➢ 进一步用向量表示：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3t_1 & +10t_2 \\ 1 & +t_1 & -3t_2 \\ 0 & +t_1 & +0t_2 \\ 0 & +0t_1 & +1t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Uparrow$

特 解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 15x_4 = 2 \end{cases}$$

- 可见，由于线性方程组与其增广矩阵一一对应，对方程组的初等变换可简洁地用其增广矩阵的变换来记录.

- 这种线性方程组的求解方法称为高斯消元法.

- 方程组的通解（general solution）也称一般解，是将方程组的非自由未知量用自由未知量表示的一组式子.

- 当方程组有无穷多解时，我们把它的解写为通解的形式，由这组式子可以得出方程组的任何解。

- 通解就是全部解.

高斯消元法的实质

$$\text{增广矩阵} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行阶梯型矩阵}$$

定义：利用初等行变换，把线性方程组的增广矩阵化为行阶梯形矩阵的过程称为 高斯消元法

(Gaussian elimination).

行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \underline{2} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 5 \\ 0 & \underline{2} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{2} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

无 首元

- 矩阵的每一行，从左往右数，第一个不为零的元素称为这一行的**非零首元**（简称<u>首元</u>）。

行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_r} & \cdots & a_{1n} \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_r} & \cdots & a_{2n} \\
 & & & \cdots\cdots\cdots & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rn} \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \cdots\cdots\cdots & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}_{m\times n}$$

行阶梯形矩阵
(echelon matrix)

$a_{ij_i} \neq 0, (i = 1, 2, \cdots, r)$, 为第 i 行的首元

① 每个非零行的上方没有零行

② 首元编号满足 $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$； 注意：小于

行阶梯形矩阵举例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- 非 行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

- 如何化为行阶梯形矩阵？ $R_i \Leftrightarrow R_j$

- 若行阶梯形矩阵首元都为1，首元所在列的其余元素均为零，则称这种矩阵为<u>最简阶梯形矩阵</u> **(reduced echelon matrix).**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{是}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{不是}$$

- 无疑，最简阶梯形矩阵对解线性方程组至关重要。

例： 将矩阵化成最简阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_1]{R_2-3R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -21 & -7 & -14 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -21 & -7 & -14 \\ 0 & -15 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3+7R_2 \\ R_4+5R_2}]{R_1-\frac{7}{3}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_4]{\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-\frac{1}{3}R_3]{R_1+\frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 任何矩阵 $A_{m\times n}$ 均能通过有限次

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形矩阵}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{最简阶梯形矩阵}$$

- 增广矩阵化成最简阶梯形矩阵后，
线性方程组解的情况就清楚了.

- 阶梯形矩阵所对应的方程组与原方程组同解
- 如阶梯形矩阵出现 s个零行，说明原方程组中有 s个方程不是独立的.
  - 阶梯型矩阵中全为零的行一般对应多余的方程(打假)。
- 即原方程组中有 $r = n - s$ 个独立(必不可少)的方程.

⇨ 秩

例：在空间直角坐标系中，描述下列线性方程组的图像：

$$(1)\quad x+y+z=2$$

解：原方程即 x = 2 - y - z

- 将 y, z 视为自由变量，取任意实数 t_1， t_2 ，方程的解的集合为

$$\Pi=\{(2-t_1-t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in R\}$$

$$\text{即:}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-t_1-t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

❖ 布置习题 P 137:

1. （1）、(3)、(5)

2. （1）、(3)

3. 4. 5.

§ 3.2 线性方程组的一般理论

- 考虑线性代数方程组 AX = b
- 其中 $b=\left[b_1,b_2,\cdots,b_m\right]^T$
- 当 $b\neq 0$ 时，即向量b的元素至少有一个不为零时，称 AX = b 为非齐次(nonhomogeneous)线性方程组。
- 如果一个线性方程组存在解,则称方程组是相容的(compatible)
- 反之，如果一个线性方程组不存在解,则称方程组是不相容的 (incompatible) 或 矛盾的

一、非齐次线性方程组的研究

定理 3.1：非齐次线性方程组相容的充要条件是其系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等.

证明：按消元法思想，用初等行变换化简方程组增广矩阵：

$$\overline{A}=[A,b]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- 设 $r_A=r$，则 A 中必有一个非零的 r 阶子式，不妨设该子式在左上角。(否则可以通过改变方程次序及未知量编号将其调至左上角)

➤ 该子式非零 → 其对应的 r 阶矩阵可逆→可经初等行变换变为 r 阶单位阵，可得

$$\overline{A}=[A,b]\xrightarrow{\text{经初等行变换}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & & d_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & & d_r \\
a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} & & b_{r+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,r} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{m,n} & & b_m
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[i=r+1,\cdots,m]{R_i - \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} R_j}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1,r+1} & \cdots & c_{r+1,n} & & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m,r+1} & \cdots & c_{m,n} & & d_m \end{array}\right] \overset{\text{记}}{=\!=} [C, D]$$

$$A \xrightarrow{\text{经初等行变换}} C$$

- 由于 $r_c = r_A = r$，则 $c_{i,j}=0$（$i = r+1,\ldots,m;\ j = r+1,\ldots n$）

否则，若$c_{l,k} \neq 0\,(r+1 \le l \le m, r+1 \le k \le n)$，则

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,k} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{l,k} \end{vmatrix} = c_{l,k} \neq 0$$

- 这与 $r_c = r$ 矛盾，于是C 中右下角矩阵为零矩阵，即

$$[C, D] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right]$$

- 可对后 $m-r$ 行实施适当的初等行变换，可得

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & \vdots & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & \vdots & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & \vdots & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & d \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{记}}{=\!=} \overline{C} \qquad (2.3)$$

- 其中，当 $d_{r+1},\dots,d_m$ 全为零时，$d=0$
- 当 $d_{r+1},\dots,d_m$ 不全为零时，$d\neq 0$
- 并且

$$r_{\overline{A}} = r_{\overline{C}} \qquad (2.4)$$

➢ 相应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \qquad c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1,n}x_n = d_1 \\ \quad x_2 + \qquad c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2,n}x_n = d_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{r,n}x_n = d_r \\ \qquad\qquad 0 = d \end{cases} \tag{2.5}$$

➢ 先证必要性，即：从非齐次线性方程组相容，

证明：系数矩阵与增广矩阵的秩相等.

➢ 设原方程组(2.1)相容，于是方程组(2.5)也相容，则必须 d=0，由(2.3)，(2.4)易得

$$r_{\overline{A}} = r_{\overline{C}} = r = r_A$$

$$
\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right] = \overline{C} \quad (2.3)
$$

$$
\boldsymbol{r}_{\overline{A}} = \boldsymbol{r}_{\overline{C}} \qquad (2.4)
$$

- 再证充分性，即：由系数矩阵与增广矩阵的秩相等，证：非齐次线性方程组相容(有解).

已知 $r_A = r_{\overline{A}} = r$ 由 $r_{\overline{A}} = r_{\overline{C}}$ (2.4) $\Rightarrow r_{\mathrm{C}} = r$

- 于是 （2.3）式中 $\boldsymbol{d = 0}$
- 此时方程组(2.5)有解，解可表示为

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1,n}x_n = d_1 \\ \quad x_2 + \qquad c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2,n}x_n = d_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{r,n}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n}x_n \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2,n}x_n \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n}x_n \end{cases} \qquad (2.6)$$

- 因原方程组(2. 1)与方程组(2. 5)同解，充分性得证，即系数矩阵与增广矩阵秩相等 => 线性方程组相容.

☑ 定理 3.1 续:对非齐次线性方程组(2.1),

（1） 当 $r_A \neq r_{\overline{A}}$ 时，方程组不相容

（2）当 $r_A = r_{\overline{A}} = r = n$ 时，由(2.6)方程组有唯一解

$$x_1 = d_1,\ x_2 = d_2, \cdots,\ x_n = d_n$$

（3）当 $r_A = r_{\overline{A}} = r < n$ 时，方程组有无数解.

有解

$r_A = r_{\bar{A}} = r < n$：

方程组的通解为：

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}t_{r+1} - \cdots - c_{1,n}t_{n-r} \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}t_{r+1} - \cdots - c_{2,n}t_{n-r} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}t_{r+1} - \cdots - c_{r,n}t_{n-r} \\ x_{r+1} = t_1 \\ x_{r+2} = t_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = t_{n-r} \end{cases}$$

➢ 其中 $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \cdots, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n-r}}$ 为任意常数。

例：解线性方程组

增广矩阵

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & -3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

解：对增广矩阵施行初等行变换，化为行阶梯形矩阵

$$\xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 显然 $r_{\overline{A}} = 3 \neq r_A = 2$
- 方程组不相容

例：解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

解：对增广矩阵施行初等行变换，化为阶梯形矩阵

$$\xrightarrow[R_4 - 2R_1]{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\cdot R_2]{R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\cdot R_3]{R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{\overline{A}} = r_A = n = 3$$

➢ 方程组有唯一解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➢ 进一步变换，化简

最简形 (reduced echelon form)

$$\xrightarrow[\frac{1}{7}\cdot R_3]{R_1-\frac{2}{7}R_3 \quad R_2-\frac{3}{7}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

阶梯形 (echelon form)

➢ 方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7} \\ x_2 = -\dfrac{1}{7} \\ x_3 = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

➢ 必须用定理 3.1来判断

$$r_{\overline{A}} = r_A = n = 3$$

➢ 而不是用方程与未知量的个数（打假）

➢ 方程组包含4个方程，3个未知量，有唯一解。

例：解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 4 & -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

解：对增广矩阵施行初等行变换，化为阶梯形矩阵

$$\xrightarrow[R_4 - 2R_1]{R_2 - R_1 \quad R_3 - 4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & -2 & 2 & -5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 + R_2]{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3} \cdot R_3]{R_4 - \frac{4}{3} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r_A = r_{\overline{A}} = 3 < 5$(未知数个数)

- 方程组有无数解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➢ 进一步化简

$$\xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➢ 对应的方程组解为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 6x_5 = -4 \\ x_2 - x_3 + \frac{5}{2} x_5 = \frac{5}{2} \\ x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$$

➢ x_1, x_2 , x_4 对应系数为 1 ，将 x_3, x_5 作为自由未知量 **(free variables)**

- 得方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -4 - x_3 + 6x_5 \\ x_2 = \dfrac{5}{2} + x_3 - \dfrac{5}{2}x_5 \\ x_4 = -2 + 3x_5 \end{cases}$$

- 也可表示为

$$\begin{cases} x_1 = -4 - t_1 + 6t_2 \\ x_2 = \dfrac{5}{2} + t_1 - \dfrac{5}{2}t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = -2 + 3t_2 \\ x_5 = t_2 \end{cases}$$

- 其中 t_1, t_2 为任意常数。
- 选取不同的自由未知量，通解的形式不同，但是解集是相同的.

练习：问 k 取何值时方程组有唯一解？有无穷多解？无解？

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + kx_3 = 18 - 5k \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & k & 18-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

解：对增广矩阵施行初等行变换，化为阶梯形矩阵

$$\xrightarrow[R_2 - 2R_3]{R_1 - R_3} \begin{bmatrix} k & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & k-4 & 14-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{k}{3}R_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{3}k - \frac{1}{3}k^2 - 1 & \frac{5}{3}k^2 - \frac{14}{3}k + 3 \\ 3 & 0 & k-4 & 14-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{2,3}]{R_{1,2}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & k-4 & 14-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}k - \frac{1}{3}k^2 - 1 & \frac{5}{3}k^2 - \frac{14}{3}k + 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & k-4 & 14-5k \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}k-\frac{1}{3}k^2-1 & \frac{5}{3}k^2-\frac{14}{3}k+3 \end{bmatrix}$$

(1) 当$\frac{4}{3}k-\frac{1}{3}k^2-1\neq 0$时

即当$k\neq 1$且$k\neq 3$时，

$r_A=r_{\overline{A}}=3=n$

➢ 方程组有唯一解。

(2) 当k=1时, 有 $\frac{4}{3}k-\frac{1}{3}k^2-1=0,\ \frac{5}{3}k^2-\frac{14}{3}k+3=0,$

$$r_A = r_{\overline{A}} = 2 < n$$

➢ 方程组有无穷多解。

(3) 当k=3时， $r_A=2,\ r_{\overline{A}}=3,$ $r_A<r_{\overline{A}}$

➢ 方程组无解。

阶梯阵的形状与线性方程组的解

$Ax=b\to\bar{A}x=\bar{b}$	解的数目	$[A,b]\to[\bar{A},\bar{b}]$
$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=1\\ 2x_2+x_3=2\\ 0=1\end{cases}$	无解	$\begin{bmatrix}2&3&-4&1\\0&2&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ $r_{\tilde{A}}=r_A+1$
$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=8\\ 2x_2+x_3=1\\ x_3=5\end{cases}$	有唯一解	$\begin{bmatrix}2&-1&2&8\\0&2&1&1\\0&0&1&5\end{bmatrix}$ $r_{\tilde{A}}=r_A=n$
$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4=2\\ x_3+4x_4=3\\ 0=0\end{cases}$	有无数解 $r_{\tilde{A}}=r_A<n$	$\begin{bmatrix}1&2&1&1&2\\0&0&1&4&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

二、齐次线性方程组的研究

- 考虑齐次线性代数方程组 AX = 0
  - 其中 m × 1 阶零矩阵 $0 = \left[0,0,\cdots,0\right]^T$
  - 它的增广矩阵为 [A,0]，显然有 $r_{\bar{A}} = r_A$
  - 因此，齐次线性方程组总是相容的！
  - 事实上，X = 0 ，即零解/平凡解 (trivial solution)，始终是齐次线性方程组的解
  - 所以，对齐次线性方程组，我们主要关心的是它的非零解/非平凡解 (nontrivial solution)

定理 3.2：齐次线性方程组有非零解的充要条件是其系数矩阵的秩小于未知量的个数；只有零解的充要条件是其系数矩阵的秩等于未知量的个数.

说明：若 $r_A = r < n$，由非齐次线性方程组的解(2.7)，令 $d_i=0$，可得齐次线性方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}t_1 - c_{1,r+2}t_2 - \cdots - c_{1,n}t_n \\ x_2 = -c_{2,r+1}t_1 - c_{2,r+2}t_2 - \cdots - c_{2,n}t_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}t_1 - c_{r,r+2}t_2 - \cdots - c_{r,n}t_n \\ x_{r+1} = t_1 \\ x_{r+2} = t_2 \\ \vdots \\ x_n = t_{n-r} \end{cases} \quad (t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}\text{为任意常数})$$

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}t_{r+1} - \cdots - c_{1,n}t_{n-r} \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}t_{r+1} - \cdots - c_{2,n}t_{n-r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}t_{r+1} - \cdots - c_{r,n}t_{n-r} \\ x_{r+1} = t_1 \\ x_{r+2} = t_2 \\ \vdots \\ x_n = t_{n-r} \end{cases} \qquad (2.7)$$

即通解中含 $n - r_A$ 个任意常数 .

推论：有 n 个未知量及 n 个方程的齐次线性方程组

有非零解的充要条件是|A| = 0 ；

只有零解的充要条件是|A| ≠ 0.

即$r_A = n$时

有唯一解(零解)

否则有无穷多非零解

例：解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

解：对系数矩阵施行初等行变换

$$\xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 将 x_2，x_3 作为自由未知量

$$\begin{cases} x_1 = -3t_1 + 3t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = -3t_2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad (t_1, t_2\text{为任意常数})$$

例： 判定方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$
是只有零解还是有非零解?

解： 由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -6 \\ 1 & -7 & 6 \end{vmatrix} - (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -6 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -2\times(-31) - 7 = 55 \neq 0$$

所以方程组只有零解.

例： k 取何值时方程组有非零解?

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_1 \qquad\quad -x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+4x_2 \qquad +k\,x_4=0 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & k \end{bmatrix}$$

解：对系数矩阵施行初等行变换，可得

$$\xrightarrow[R_4+R_3]{\substack{R_1+R_3 \\ R_2-R_3}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[R_5-R_1]{\frac{1}{3}\cdot R_4} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1-4R_4]{R_2+R_4} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 - R_2 \\ R_4 - R_2}]{\substack{R_1 + R_2 \\ \frac{1}{2}\cdot R_2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\cdot R_3]{R_{3,4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

- 当 k ≠ 0 时 $r_A = n$ (未知量个数)
  - 齐次线性方程组只有零解
- 当 k = 0 时 $r_A = 3 < n$ (未知量个数)
  - 齐次线性方程组有非零解 $\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -3x_4 \end{cases}$

通解中含 $n - r_A = 1$ 个任意常数 .