

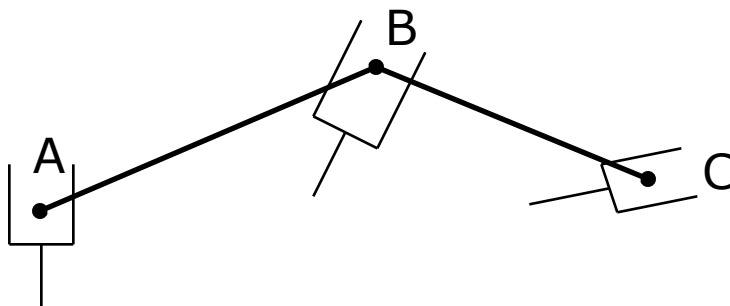
9 轨迹规划

- 路径与轨迹
- 关节空间描述与直角坐标空间描述
- 轨迹规划的基本原理
- 关节空间的轨迹规划
 - 三次多项式轨迹规划
 - 五次多项式轨迹规划
 - 抛物线过渡的线性运动轨迹
 - 高次多项式运动轨迹
- 直角坐标空间的轨迹规划

-
- 轨迹：机械手的位移，速度和加速度
 - 轨迹规划：由任务要求，计算出预算的运动轨迹
 - 轨迹规划应考虑的问题
 - 机器人规划方式的分类
 - 机械手常用的两种轨迹规划方法：
 - 轨迹规划可在关节空间或直角空间中表示
 - 给出插值点上一组显式约束
 - 给出运动路径的解析式
 - 规划器的任务：解变换方程，运动学反解和插值运算

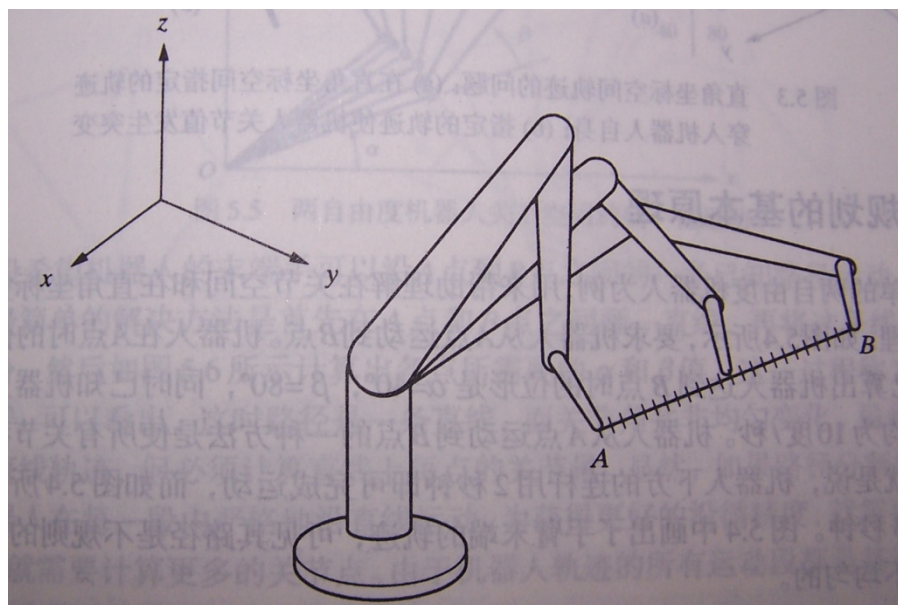
6.1 路径与轨迹

- 路径定义为机器人位形的一个特定序列，而不考虑机器人位形的时间因素
- 轨迹与何时到达路径中的每个部分有关，强调时间性



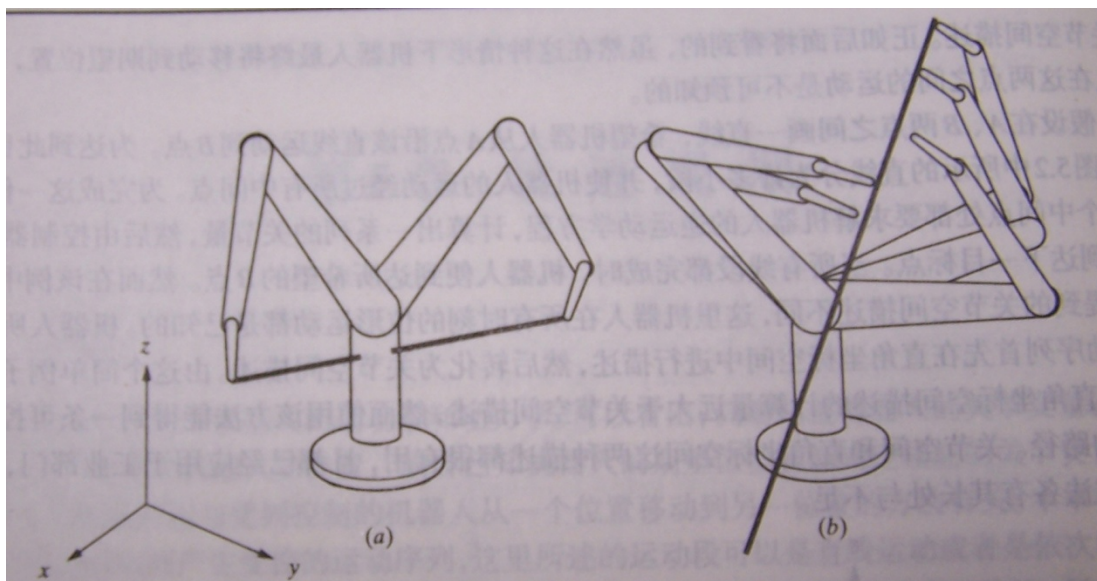
6.2 关节空间描述与直角坐标空间描述

- 首先在直角坐标空间进行描述
- 再转化为关节空间描述



直角坐标空间描述的特点

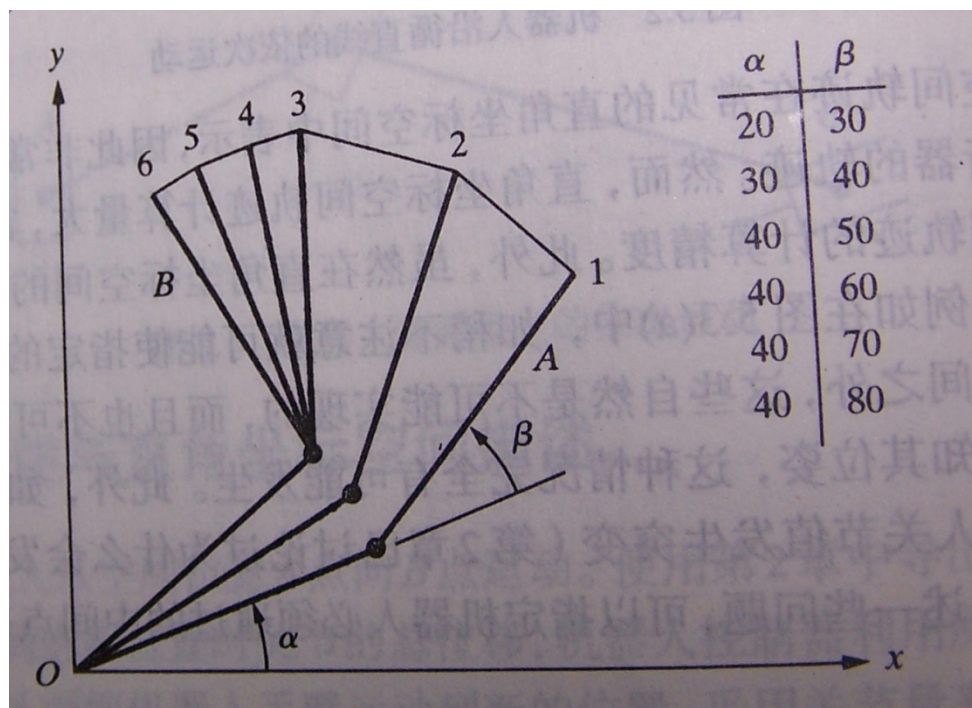
- 直观，容易看到末端执行器的运动轨迹
- 计算量大
- 存在奇异点，可以指定中间点来避开障碍物和奇异点



6.3 轨迹规划的基本原理

□ 关节空间的非归一化运动

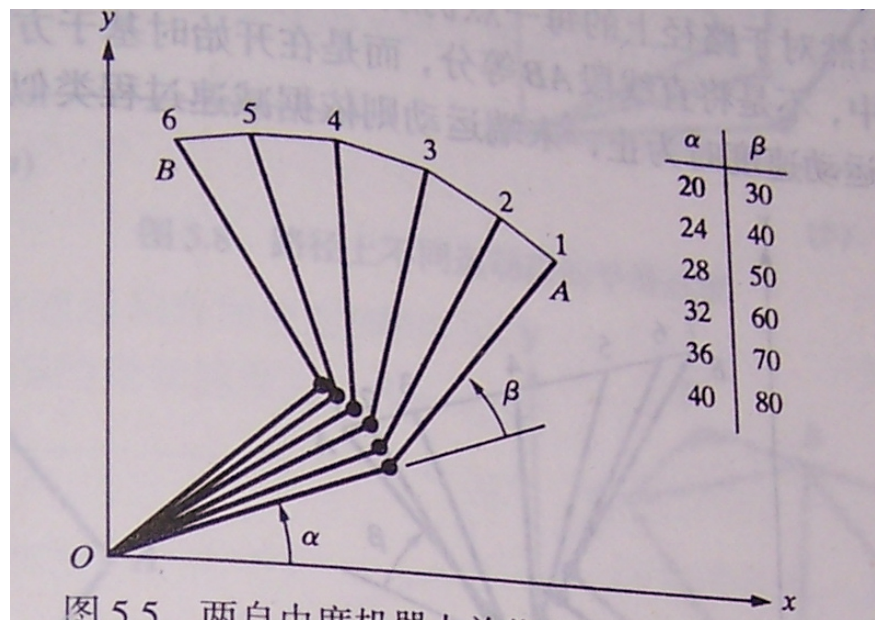
- 各关节以最大角速度运动
- 路径不规则
- 末端走过的距离不均匀



6.3 轨迹规划的基本原理

□ 关节空间的归一化运动

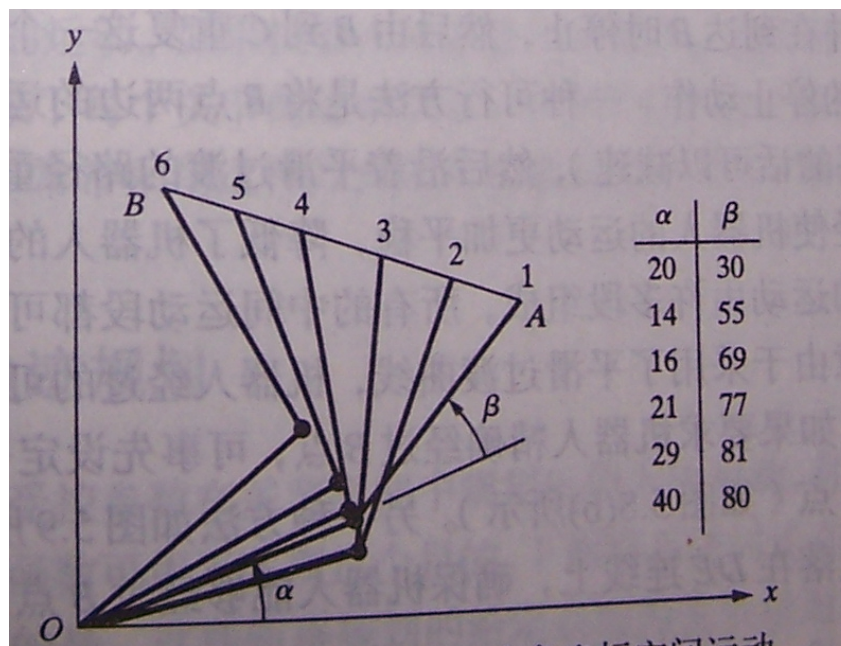
- 各关节同步地开始和结束，以不同速度连续运动
- 运动轨迹较为均衡
- 路径仍是不规则的



6.3 轨迹规划的基本原理

□ 直角坐标空间运动

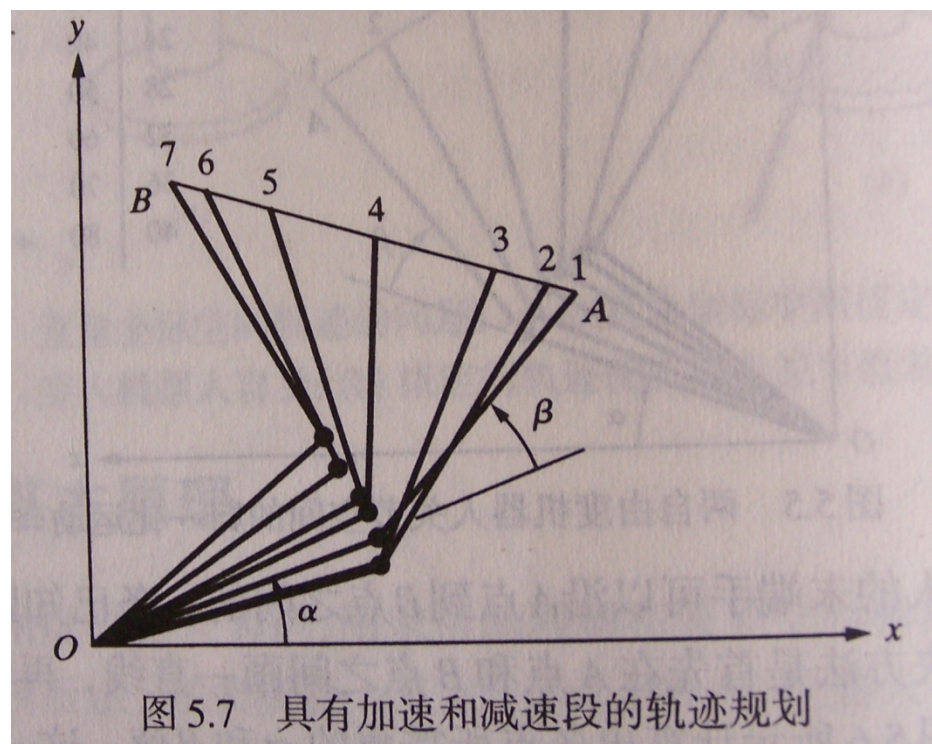
- 末端运动路径已知
- 在路径上进行插值，确定相应关节运动角度



6.3 轨迹规划的基本原理

□ 具有加速和减速段的轨迹规划

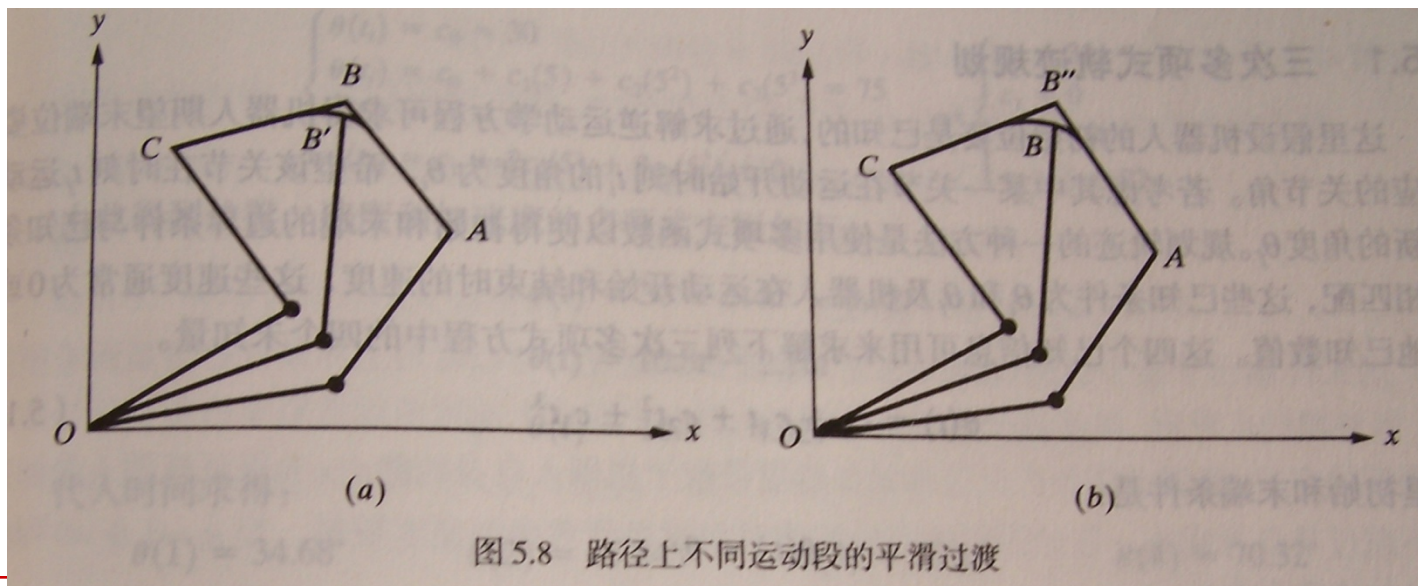
- 开始加速运动，路径分段小；
- 随后以恒定的速度运动；
- 最后在较少的分段上减速运动



6.3 轨迹规划的基本原理

□ 多点间的轨迹规划

- A-B先加速，再减速，B点停止；B-C重复
- B点两边的运动进行平滑过渡



6.4关节空间的轨迹规划

- 高次多项式表示两个路段之间每个点的位置、速度和加速度
- 控制器通过路径信息求解逆运动学方程得到关节量，并操纵机器人做相应运动
- 对于复杂路径，可以手动移动，示教机器人

□ 三次多项式轨迹规划

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 \\ \theta(t_f) &= \theta_f \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

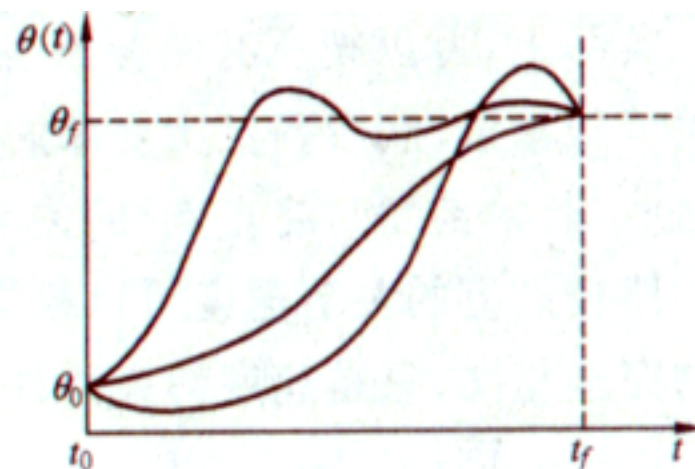


图 7.33 单个关节的不同轨迹曲线

关节速度和加速度:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 5a_3t \end{aligned} \right\}$$

关于四个系数的线性方程:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 \end{aligned} \right\}$$

解得四个系数的表达式:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) \end{aligned} \right\}$$

将速度约束条件变为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

重新求得三项式的系数:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f}(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_f) \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

□ 确定路径点上关节速度的三种方法：

- 根据工具坐标在直角坐标空间中的瞬时线速度和角速度来确定。
- 采用适当的启发式方法，由控制系统自动地选择。
- 要保证每个路径点上的加速度连续

□ 五次多项式：

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (7.10)$$

6个约束条件：

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ \dot{\theta}_0 &= a_1 \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ \ddot{\theta}_0 &= 2a_2 \\ \ddot{\theta}_f &= 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

解为:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \\ a_3 &= \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_4 &= \frac{30\theta_f - 30\theta_0 + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_3 &= \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

□ 抛物线过渡的线性运动轨迹

- 为避免运动段的起点和终点产生加速度无穷大，线性运动段的起点和终点可以用抛物线进行过渡

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{2} c_2 t^2$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + c_2 t$$

$$\ddot{\theta}(t) = c_2$$

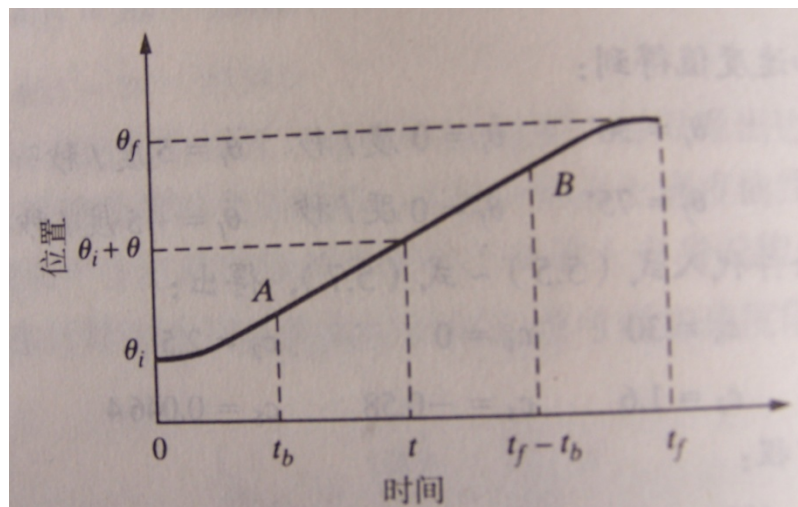


图 5.13 抛物线过渡的线性段规划方法

边界条件:

$$\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_i = c_0 \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 = c_1 \\ \ddot{\theta}(t) = c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 = \theta_i \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \ddot{\theta} \end{cases}$$

初始抛物线段方程:

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_i + \frac{1}{2}c_2t^2 \\ \dot{\theta}(t) = c_2t \\ \ddot{\theta}(t) = c_2 \end{cases}$$

直线段A-B方程:

确定A、B点以及终点的关节位置和速度

$$\theta_A = \theta_i + \frac{1}{2} c_2 t_b^2$$

$$\dot{\theta}_A = c_2 t_b = \omega$$

$$\theta_B = \theta_A + \omega((t_f - t_b) - t_b) = \theta_A + \omega(t_f - 2t_b)$$

$$\dot{\theta}_B = \dot{\theta}_A = \omega$$

$$\theta_f = \theta_B + (\theta_A - \theta_i)$$

$$\dot{\theta}_f = 0$$

过渡时间 t_b

$$\begin{cases} c_2 = \frac{\omega}{t_b} \\ \theta_f = \theta_i + c_2 t_b^2 + \omega(t_f - 2t_b) \end{cases} \rightarrow \theta_f = \theta_i + \left(\frac{\omega}{t_b}\right) t_b^2 + \omega(t_f - 2t_b)$$
$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega}$$

□ 终点的抛物线段方程：

■ 与初始的抛物线段是对称的，只是加速度为负值。

$$\theta(t) = \theta_f - \frac{1}{2} c_2 (t_f - t)^2, c_2 = \frac{\omega}{t_b}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta(t) = \theta_f - \frac{\omega}{2t_b} (t_f - t)^2 \\ \dot{\theta}(t) = \frac{\omega}{t_b} (t_f - t) \\ \ddot{\theta}(t) = -\frac{\omega}{t_b} \end{cases}$$

□ 高次多项式运动轨迹

- 对路径上的每一个点都求解高次多项式方程需要大量的计算
- 可在轨迹不同的运动段采用不同的低次多项式，将它们平滑地过渡在一起，以满足各点的边界条件。
- 如可使用**4-3-4**轨迹来代替**7**次多项式：首先使用**4**次多项式来规划从起点到第一个中间点（如抬升点）间的轨迹；再用**3**次多项式来规划两个中间点（如抬升点和着陆点）之间的轨迹；最后用**4**次多项式来规划最后一个中间点（如着陆点）到终点之间的轨迹。

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n$$

6.5 直角坐标空间的轨迹规划

- 对于关节空间轨迹规划，规划函数生成的值是关节值
- 直角坐标空间轨迹规划函数生成的值是机器人末端的位姿
- 利用逆运动学方程计算出对应手姿态的关节量
- 将关节信息送给控制器
- 不断重复上述步骤，直到达到期望位姿

- 以直线轨迹为例，必须计算起点和终点位姿之间的变换，并将该变换划分为许多小段。3种方法：
 - 利用每个新段的位姿与微分运动、雅可比矩阵等关系求解
 - 在起点和终点之间的变换分解为一个平移和两个旋转。平移是将坐标原点从起点移动到终点；第一个旋转是将末端手坐标系与期望姿态对准；第二个旋转是手坐标系绕其自身轴转到最终的姿态。3个变换同时进行
 - 在起点和终点之间的变换分为一个平移和一个绕 k 轴的旋转。平移仍是将坐标原点从起点移到终点，而旋转是将手臂坐标系与最终的期望姿态对准。2个变换同时进行

