线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

二、判断正定二次型的充要条件

定理 6.4：n 元实二次型

正定的充要条件是它的正惯性指数等于 n .

或者，它的标准形的n 个系数全为正.

推论1：n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

正定的充要条件是它的矩阵A的特征值全大于零 .

定义6.4：如果实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为正定(半正定，负定，半负定)，则实对称阵A 称为正定(半正定，负定，半负定)矩阵.

推论2：正定矩阵的行列式大于零(由推论1).

定理6.5：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为正定的充要条件是它的矩阵A的顺序主子式都大于零，即

$$\Delta_1=a_{11}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots\ \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|A|>0$$

证明：先证必要性，假定二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

是正定的，记

$$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j\ ,\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

- 由正定二次型的定义，对于任意一组不全为零的实数 $C_1, C_2, \ldots, C_k$

$$f_k(C_1, C_2, \cdots, C_k) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} C_i C_j$$

$$= f_k(C_1, C_2, \cdots, C_k, 0, \cdots, 0) > 0$$

- 所以(子)二次型 f_k 对应的矩阵

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

- 也是正定的，由推论2知 $|A_k| = \Delta_k > 0,$
- k是任意的，故A的顺序主子式都大于零.

充分性：由顺序主子式均大于零($\Delta_k > 0$)

$\Rightarrow f$ 正定；数学归纳法

- **对于变量的个数 n 作数学归纳法**

当$k=1$时，$f(x_1)=a_{11}x_1^2$,由条件 $a_{11}>0$，故$f(x_1)$正定.

- **假设对于 k = n-1 元二次型论断成立，下面证明对 k = n 元二次型论断也成立.**

为此，把二次型改写为：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$

$$=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2\cdots+a_{1n}x_n)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

其中$b_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}$,因为$a_{ij}=a_{ji}$，所以$b_{ij}=b_{ji}$.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^{\ 2}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}x_ix_1+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

由A的对称性：$=a_{11}x_1^{\ 2}+2\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$

凑平方：$=a_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}\cdot x_j}{a_{11}})^2-\frac{\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\cdot x_j\right)^2}{a_{11}}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$

$$=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\cdot x_j)^2-\frac{\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\cdot x_j\right)^2}{a_{11}}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\cdot x_j)^2-\frac{\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\cdot x_j\right)^2}{a_{11}}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\cdot x_j)^2-\frac{\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\cdot x_j\right)\left(\sum_{i=2}^{n}a_{1i}\cdot x_i\right)}{a_{11}}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}\cdot x_j)^2-\frac{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{1j}a_{1i}\,x_ix_j}{a_{11}}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2\cdots+a_{1n}x_n\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j\quad ,\text{其中}\ b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2\cdots+a_{1n}x_n)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

- 如果能够证明二次型

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

是正定的， 那么，$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 显然也是正定的，定理得证.

➢ 由行列式的性质知 $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$

$$\overline{\overline{\underset{i=2,3,\cdots,k}{R_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} R_1}}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}, k = 2,3,\cdots,n$$

充分性：假设顺序主子式<u>都大于零</u> $\Delta_k > 0 \Rightarrow f$ 正定

➢ 根据已知条件 $\Delta_k > 0$，得

$$\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 2,3,\cdots,\boxed{n})$$

- 故 n-1 个变量的二次型 $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_i x_j$ 是正定的.

由：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_i x_j$

所以，$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 也是正定的，定理的充分性成立. 证毕.

- 进一步，若 A 是对称正定矩阵，则 A 的顺序主子阵均正定.

例：判别二次型的正定性

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$

二次型的顺序主子式

$$\Delta_1=1>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=1>0$$

所以A是正定的.

例：若二次型是正定的，求 a 的取值范围.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$

二次型的顺序主子式

$$\Delta_1=1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a^2,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=-a(5a+4),$$

- **所以a 的取值范围是**

$$\begin{cases}1-a^2>0\\ -a(5a+4)>0\end{cases}\Rightarrow -1<a<0$$

定理6.6：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 为负定的充要条件是它的矩阵A的顺序主子式的值是负正相间，即

$$\Delta_1=a_{11}<0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}<0,\cdots$$

$$(-1)^n\Delta_n=(-1)^n\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=|A|>0$$

- 即，奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

例：判别二次型的类型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

解：二次型的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$$\Delta_1 = -5 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$

- **所以二次型为负定二次型.**

➢ 正定矩阵非常重要，它独立于二次型存在

⇨ 正定矩阵的主要性质.

性质1：正定矩阵的主对角线上的元素都大于零.

证明：反证法，A 的主对角线上有一个元素

a_{kk} ≤0，则取 $X = e_k \neq 0$

此时有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T A X = e_k^T A e_k = a_{kk} \le 0$$

这与假设 A 是正定矩阵矛盾. 因此正定矩阵的主对角线上的元素都大于零. 证毕.

性质2：任何正定矩阵都可逆，且其逆阵也一定是正定阵.

证1： 用正定阵特征值的性质：

设正定阵A的特征值全为正

- A^{-1}的特征值是A的特征值的倒数，也全为正；
- 故A^{-1} 也是正定矩阵， 证毕.
- $AX=\lambda X$， $X=\lambda A^{-1}X$， $A^{-1}X=X/\lambda$

性质2：任何正定矩阵都可逆，且其逆阵也一定是正定阵.

证2：设A 是正定阵，由定理6.4推论2，|A|>0，所以A 是可逆的.

对二次型 $X^TA^{-1}X$ 作坐标变换， 令 $X = AY$

$$X^TA^{-1}X = (AY)^TA^{-1}(AY)$$

$$= Y^TA^TY = Y^TAY > 0$$

- 故A^{-1} 是正定矩阵. 证毕.

性质3：任何正定矩阵必能表示为 B^TB 的形式，这里B是与A同阶的正定阵.

证明：因为A 是正定阵，所以一定是实对称阵.

必能找到一个正交阵 P，使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的全部特征值.

- 因为A 是正定阵，所以 $\lambda_i > 0$ (i = 1,2,...,n)，

√ $\lambda_i > 0$，亦即

$$A = P \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \cdot P^T$$

令 $B = P \cdot diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P^T$，则 $B = B^T$

$$B^2 = P \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \cdot P^T = A$$

由于 $\lambda_i > 0\ (i = 1,2,\ldots,n)$， $\sqrt{\lambda_i}$都是正实数

- 因此B 是n 阶实对称阵，且是正定矩阵

$$\text{又}\ B^2 = B^T B$$

- 从而可得 $A=B^2=B^TB$ 证毕.

例： 设A是一个 $m\times n$ 阶矩阵， 则 A^TA 是n阶对称矩阵，且是半正定的；如果A的秩是n，则A^TA 是正定阵.

解：由于$(A^TA)^T = A^TA$，故A^TA 是n阶对称矩阵.

对任意非零向量X，因为

$$X^T(A^TA)X = (AX)^T(AX) \geq 0$$

- 所以A^TA是半正定的.

如果A的秩是n，那么对于$X\neq 0$，可知 $AX\neq 0$，因此

$$X^T(A^TA)X = (AX)^T(AX) > 0$$

- 所以A^TA是正定阵.

正定矩阵的应用不仅仅限于二次型

- 线性方程组的求解： 消元的可行性/稳定性，LU分解、LDL^T 分解 ...
- 超定方程组的最小二乘解；
- 数值方法的基础理论：有限元方法、有限差分法 ...

本章小结

A. 概念与理论：

(1) 二次型、二次型的矩阵

(2) 惯性定理，惯性指数，二次型的规范形

(3) 正定（负定、半正定、半负定、不定）二次型

(4) 正定二次型的判定：惯性指数，矩阵A的特征值，
矩阵A的顺序主子式

(5) 正定矩阵的性质.

B. 计算方法：

(1) 二次型用矩阵表示；

(2) 化二次型为标准形：配方法、正交变换法；

(3) 掌握二次型的分类, 能熟练判别二次型的类型；

(4) 正定二次型、正定矩阵相关的证明.