线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

问题：非齐次线性方程组 AX=b 的所有解向量是否构成 R^n 上的线性空间？

- 否，因为对线性运算不封闭：
- 设 X_1 X_1 是解向量，则

$$A X_1 = b, \qquad A X_2 = b$$

但 $A(X_1 + X_2) = A X_1 + A X_2 = 2b \neq b$

- 对加法运算不封闭，因此不能构成 R^n 上的线性空间.

三、过渡矩阵与坐标变换公式

☑ 定义 4.6：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 是 n 维线性空间 V 中的两个基，且有：

$$[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]M$$

则称矩阵 **M** 为由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 的过渡矩阵(transition matrix).

或：$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]M = [\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n]$

- 基变换公式

$$\boxed{[\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M}$$

基变换公式

- 过渡矩阵是基与基之间的一个可逆线性变换.

☑ 定理 4.3：设 ε'$_1$, ε'$_2$, ..., ε'$_n$ 和 ε$_1$, ε$_2$, ..., ε$_n$ 是 n 维线性空间 V 中的两个基，且有：

$$[\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M$$

则 (1) 过渡矩阵 M 是可逆的；

(2) 若 α ∈V，且在基 ε$_1$, ε$_2$, ..., ε$_n$ 和 ε'$_1$, ε'$_2$, ..., ε'$_n$ 下的坐标分别为

$[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ 和

$[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]^T$，则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

四、线性子空间的维数与基

- 基/维数/坐标等概念也可以应用到线性子空间.

<u>定理 4.4</u>：设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是线性空间 V 中的两个向量组。

(1) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ 的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价;

(2) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 的秩.

§ 4.3 欧几里德(Euclid)空间

➔ 欧几里德(Euclid) 空间

— 长度、夹角、内积等概念是几何空间的特征，是以欧氏几何为基础的，故称该空间为欧氏空间.

一、欧几里德空间的定义及基本性质

➢ 如果两向量之间的夹角为φ，则它们的内积

$$\alpha\cdot\beta = \|\alpha\|\cdot\|\beta\|\cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

$$\cos\varphi = \alpha\cdot\beta/(\|\alpha\|\cdot\|\beta\|)$$

➢ 内积是关键！

☑ 定义 4.7：设 V 是实数域 R 上的一个线性空间，如果对于 V 中任意两个向量 α 与 β， 都有唯一的确定的实数 <不妨用(α,β)表示>与它对应， 且它具有下列性质：

对称性

(1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$；(2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$；

(3) $(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$； (2、3)线性性

(4) $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$， 当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha, \alpha)= 0$.

恒正性

这里 $\alpha, \beta, \gamma \in V$，$k \in R$， 则称 (α, β) 为 α 与 β 的内积，称引入内积后的线性空间 V 是欧几里德空间，简称欧氏空间.

- 简单地说，引入<u>内积</u> **(inner/dot/scalar product)** 后的有限维<u>实线性</u>空间就是<u>欧氏空间</u>.

注：

- 欧氏空间是特殊的线性空间—具备线性空间的所有性质.
- 但是欧氏空间除了线性运算外还有内积运算.
- 欧氏空间是实数域上的；而线性空间可在任何数域定义.
- 复数域上有复内积空间的定义—酉空间.
- 所以欧氏空间∈内积空间.

例： 在 几何空间中，规定内积为

$$(\alpha,\beta)=\|\alpha\|\,\|\beta\|\cos\theta$$

其中 α , β 为几何空间向量， $\|\alpha\|$，$\|\beta\|$ 表示

向量的长度， θ 为向量间的夹角

- 这样规定的内积满足定义4.7 中的四个条件，
  因此它是一个欧氏空间.

✓ 向量的内积

在线性空间 R^n 中，对于向量 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

- 常定义内积如下

实数

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \alpha^T \beta$$

- 这样规定的内积满足定义4.7 中的四个条件，因此 R^n 构成一个欧氏空间.

n>3以上维内积是三维向量内积的推广，但是，没有直观的几何意义.

例：在线性空间C[a, b]中，对于任意两个实连续函数

f(x)， g(x) ∈ C[a,b]，定义内积

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

- 则C[a, b]构成一个欧氏空间.
- 显然，**(f, g)** 是实数，且满足4条性质：

(1) (f, g) = (g, f)；　　(2) (kf, g) = k(f, g)；

(3) (f+g, h) = (f, h) + (g, h)；

(4) (f, f) ≥0 ，当且仅当f=0 时(f, f)= 0 .

- 所以，**f, g** 对于给定的内积定义构成欧氏空间.

☑ 欧氏空间的基本性质：

(1) $(\alpha, 0) = 0$;

(2) $(\alpha, k\beta) = (k\beta, \alpha) = (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;

$(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;

(3) $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$.

- 布置习题 P 186:

20.

22.

24.

26.

28.

二、向量的长度与夹角

- 有了内积的定义，我们就可以进一步给出欧氏空间内 **向量的长度** 与 **向量间夹角**的定义.

- 对于任一向量 α， 总有 $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$， 因此 $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 是有意义的，由此引入欧氏空间中长度的概念.

☑ 定义 4.8：设 α 是欧氏空间 V 的一个向量，称非负实数

$$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$$

为向量 α 的长度(length) 或者 模 或者 范数(norm，2范数)，记为：$\|\alpha\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

长度的基本性质：

(1) 正定性: $\|\alpha\| \geq 0$; 且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$;

(2) 齐次性: $\|k\alpha\| = |k|\cdot\|\alpha\|$ ($k\in\mathbf{R}$);

(3) 三角不等式: $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

单位向量(unit vector)

α 的长度(模) $\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$.

长度为 1 的向量称为<u>单位向量</u>.

- 对于非零向量α, 我们可以将其单位化/标准化(normalize).

$$令\ \varepsilon = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \qquad 则\ \|\varepsilon\| = 1.$$

例：在线性空间 $\boldsymbol{R}^2$ 中，向量：

$$\alpha=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\qquad \beta=\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}$$

(1)求两向量之间的距离；(2）将两向量单位化。

解：向量距离的定义为数值 $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$

- 两向量之间的距离为

$$\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{(-1-3)^2+(7-4)^2}=5$$

- 将两向量单位化

$$\mathbf{u}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{v}=\frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5\sqrt{2}}\\\frac{7}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

☑ 定理 4.5：柯西—施瓦茨不等式(Cauchy-Schwartz Inequality):

对于欧氏空间 V 中任意两个向量α，β，恒有

$$|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\,\|\beta\| \qquad (3.2)$$

当且仅当 α 与β 线性相关时等号成立.

立发现如上结论，故称为柯西—施瓦茨不等式.

证明：（1） $\alpha=\mathbf{0}$ 或 $\beta=\mathbf{0}$ 时显然成立；

考虑 $\alpha\neq\mathbf{0}$，$\beta\neq\mathbf{0}$,

- **由内积的性质，对任意实数 t**

$$(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)=(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta)\geq 0$$

取 $t=-(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)$，

得：$$(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)^2/(\beta,\beta)\geq 0$$

$$(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)^2/(\beta,\beta)\geq 0$$

即： $(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\geq(\alpha,\beta)^2$

两边开方得： $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\,\|\beta\|$

下面证明： α 与 β 线性相关时等号成立

- **假设 α 与 β 线性相关，则 $\alpha=k\beta$，可得**

$$(\alpha,\beta)^2=(k\beta,\beta)^2=k^2(\beta,\beta)^2$$

$$=(k\beta,k\beta)(\beta,\beta)=(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

$$\therefore\quad |(\alpha,\beta)|=\|\alpha\|\,\|\beta\|$$

$$|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \, \|\beta\|$$

取 $t = -(\alpha, \beta) / (\beta, \beta)$

$$(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) = (\alpha, \alpha) - (\alpha, \beta)^2 / (\beta, \beta)$$

最后证明：等号成立时α与β 线性相关：

- **假设等号成立，$\beta \neq 0$ ，可得**

$$(\alpha, \alpha) - (\alpha, \beta)^2 / (\beta, \beta) = 0$$

$$(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha + t\beta = \alpha - \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta = 0$$

⇨ **α与β 线性相关；**

- **此时向量 α与β 夹角为零或π.**

柯西—施瓦茨不等式的应用 $\boxed{|(\alpha, \beta)| \le \|\alpha\| \, \|\beta\|}$

- 应用于R^n：

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n|$$
$$\le \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots x_n^{\ 2}} \ \sqrt{y_1^{\ 2} + y_2^{\ 2} + \cdots y_n^{\ 2}}$$

✓ 柯西不等式： 常用于不等式、 求函数最值等问题

- 应用于C[a, b]中，对于任意两个实函数

f(x)，g(x) ∈ C[a,b]

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ dx}\ \sqrt{\int_a^b g^2(x)\ dx}$$

✓ 施瓦茨不等式, 函数论的重要工具.

☑ 推论:对于欧氏空间 V 中任意两个向量α，β

$$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\| \qquad (3.3)$$

称为三角不等式.

证明：利用柯西—施瓦茨不等式 $\boxed{|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\,\|\beta\|}$

$$\|\alpha+\beta\|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

$$\le \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\|\,\|\beta\| + \|\beta\|^2 = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$$

- 两边开方即得 **(3.3).**
- 在几何空间中，即两边之和大于第三边.

☑ 定义 4.9：设 α, β 是欧氏空间中的两个**非零向量**

定义 α, β 的**夹角**(the angle between α and β) 为

$$\varphi = \mathbf{arccos}\frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

➢ 定义的合理性分析：由柯西—施瓦茨不等式

$$|(\alpha, \beta)| \le \|\alpha\| \, \|\beta\| \qquad -\|\alpha\| \, \|\beta\| \le (\alpha, \beta) \le \|\alpha\| \, \|\beta\|$$

$$\therefore \quad -1 \le \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \le 1$$

➢ 在 0 与 π 之间必有**唯一**的角度 φ 使得定义成立.

例：在线性空间 R^2 中，向量：

$$\alpha=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\qquad\beta=\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}$$

求两向量之间的夹角。

解：前例我们已将其单位化

$$\mathbf{u}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\qquad\mathbf{v}=\frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5\sqrt{2}}\\\frac{7}{5\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\cos\theta=(u,v)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\theta=\pi/4$$

练习： 求向量 $\alpha = (1, 2, 2, 3)$与$\beta = (3, 1, 5, 1)$的夹角 .

解 $\because \cos\theta = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

$$= \frac{18}{3\sqrt{2} \cdot 6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}.$$

☑ 定义 4.10：若$(\alpha, \beta) = 0$，即$\varphi = \pi/2$，则称α与β 正交或垂直 (orthogonal)，记为 $\alpha \perp \beta$.

由定义知

- 零向量与欧氏空间中任何向量正交.
- 零向量与自身正交，而且只有零向量与自己正交.
- 欧氏空间中当向量α与β正交时

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$$

勾股定理

证明：
$$\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)$$
$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$
$$=(\alpha,\alpha)+0+(\beta,\beta)$$
$$=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$$

- 即勾股定理在欧氏空间中依然成立；
- 并且，可以推广到更一般的情形：

☑ 设欧氏空间中向量 α_1，α_2，…，α_n 两两正交，则

$$\boxed{\|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\|^2=\|\alpha_1\|^2+\|\alpha_2\|^2+\cdots+\|\alpha_n\|^2}$$

例：在线性空间 R^3 中，向量：

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} \quad 和\ \eta=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$ 正交

例：考虑线性空间C[-1,1]中，两个实连续函数分别为 f(x)=1， g(x)=x，参照前面内积的定义

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} 1\cdot \mathrm{x}\, dx=0$$

- 显然 f, g 是正交的，它们的长度为

$$\|1\|=\sqrt{(1,1)}=\sqrt{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\, dx}=\sqrt{2}$$

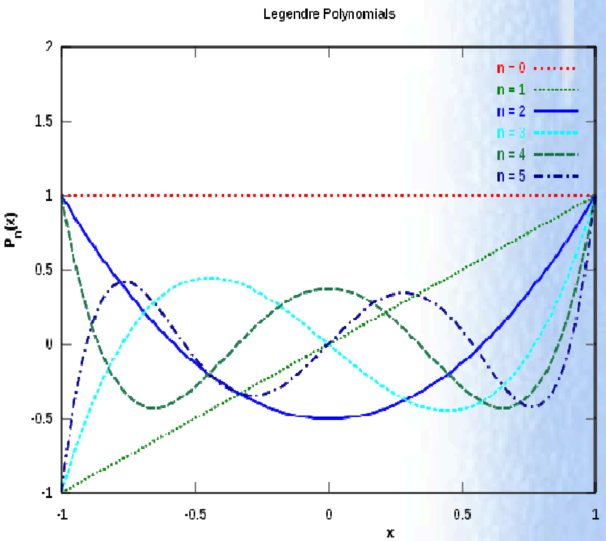
$$\|\mathrm{x}\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\int_{-1}^{1} x\cdot \mathrm{x}\, dx}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

- **它们是正交的，所以满足勾股定理：**

$$\|1+x\|^2=\|1\|^2+\|x\|^2=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

验证： $\|1+x\|^2=(1+x,1+x)$

$$=\int_{-1}^{1}(1+x)^2\,dx=\frac{8}{3}$$



- **勒让德多项式：**

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad\cdots$$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_l(x)dx=N_l^{\,2}\delta_{n,l}$$

$$N_l^{\,2}=\int_{-1}^{1}P_l(x)P_l(x)dx=\frac{2}{2l+1}$$

例如：考虑线性空间C[-π，π]中，两个实连续函数分别为

f(x)=sin x， g(x)= cos x，定义内积的为

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}\cdot\mathrm{g}\, dx$$

证明： f, g 是正交的，且长度为1

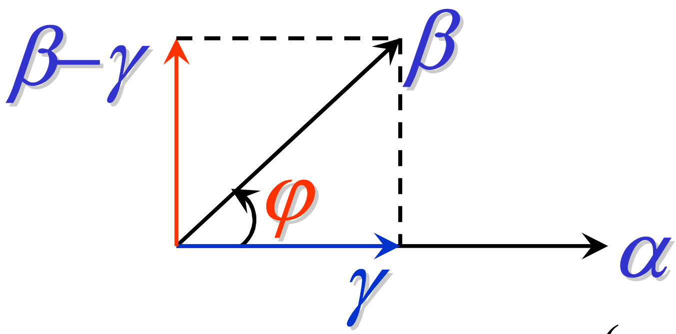
$$(\cos x, \sin x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\cdot\sin x\, dx=0$$

$$(\cos x, \cos x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\cdot\cos x\, dx=1$$

- 傅立叶级数

例： 设$\alpha, \beta\in \mathbf{R}^n$, 且$\alpha$与$\beta$线性无关, 求常数 k

使$\beta+k\alpha$与α正交.



解 (1)：几何方法 $\|\gamma\|=\|\beta\|\cos\varphi =\|\beta\|\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|} =\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|}$

➢ γ 与 α 同方向，所以 $\gamma=\|\gamma\|\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|} =\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|}\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$

$$=\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \qquad \because k\alpha=-\gamma=-\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \quad \therefore\ k=-\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$$

解 (2)： 代数方法

- 向量 $\beta+k\alpha$ 与 α 正交，所以

$$(\beta+k\alpha,\alpha)=0$$

$$\Rightarrow(\beta,\alpha)+k(\alpha,\alpha)=0$$

$$\Rightarrow k=-\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$$

- 这个结果后面会用到.

三、内积的坐标表示

- 有了内积的定义，线性空间中的基、坐标等概念也可以应用于欧氏空间V 中.
- 在 V 中任意取定 一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，对 V 中任意两个向量 α，β 有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \qquad \beta = \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j$$

- 由内积的性质 $(\alpha, \beta) = (\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$$

$$\begin{aligned}
&= x_1y_1(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+x_1y_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\cdots+x_1y_n(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\
&+x_2y_1(\varepsilon_2,\varepsilon_1)+x_2y_2(\varepsilon_2,\varepsilon_2)+\cdots+x_2y_n(\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\
&+\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&+x_ny_1(\varepsilon_n,\varepsilon_1)+x_ny_2(\varepsilon_n,\varepsilon_2)+\cdots+x_ny_n(\varepsilon_n,\varepsilon_n)
\end{aligned}$$

$$=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} y_1(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+y_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\cdots+y_n(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ y_1(\varepsilon_2,\varepsilon_1)+y_2(\varepsilon_2,\varepsilon_2)+\cdots+y_n(\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ y_1(\varepsilon_n,\varepsilon_1)+y_2(\varepsilon_n,\varepsilon_2)+\cdots+y_n(\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix}$$

$$=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1)&(\varepsilon_1,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\(\varepsilon_2,\varepsilon_1)&(\varepsilon_2,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(\varepsilon_n,\varepsilon_1)&(\varepsilon_n,\varepsilon_2)&\cdots&(\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

- 利用矩阵可表示为

$$(\alpha,\beta)=X^T AY \qquad (3.8)$$

- 其中 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \qquad Y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T$

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \qquad a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j) \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

- 矩阵 **A** 称为基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 的 度量矩阵 **(metric matrix)**，也称格拉姆**(Gram)**方阵.
- **A** 是基中各向量之间的内积构成的，度量矩阵确定后，**V** 中任意两个向量的内积可由它们的坐标决定.
- 由定义，度量矩阵的对角线元素恒正.

例：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是欧氏空间V 中的一个基，其度量矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 9 \\ 1 & -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

且V 中两个向量 $\alpha=\varepsilon_1+\varepsilon_3-2\varepsilon_4$ ， $\beta=2\varepsilon_1+\varepsilon_3-3\varepsilon_4$

求 $\|\varepsilon_2\|$ 和（α，β）.

解：由度量矩阵的定义 $a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$， $\|\varepsilon_2\|=\sqrt{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}=\sqrt{6}$

- 由(3.8)式

$$(\alpha,\beta)=[1\quad 0\quad 1\quad -2]\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\\ -3 & 6 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 13 & 9\\ 1 & -1 & 9 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\\-3\end{bmatrix}$$

$$=[0\quad -1\quad -5\quad -4]\begin{bmatrix}2\\0\\1\\-3\end{bmatrix}=7.$$

- 如果基中向量**两两正交**，**度量矩阵变为对角阵**；
- 如果基中向量不仅**两两正交**，而且**长度为1**
  - ⇨ 度量矩阵变为单位阵
  - ⇨ 内积计算极大简化.