线 性 代 数习题课

Linear Algebra

李岳涵

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1102 Tel: 18501704523

13210720008@fudan.edu.cn

本章小结

1.理论部分：

(1) 2阶、3阶行列式，n 级排列及其奇偶性、逆序、逆序数

(2) *n*阶行列式的三种展开方式， *n*阶行列式的基本性质

(3) *n*阶行列式的余子式、代数余子式的概念

(4) *n*阶行列式按某一行(列)展开

(5) 拉普拉斯定理

(6)*n*阶线性方程组的求解方法——克莱姆法则。

2.行列式的性质：

(1)经转置的行列式的值不变

(2)行列式中某一行（列）各元素如有公因数k，则可以提到行列式符号外。特别地，若行列式中某一行（列）元素全是零，则行列式的值为零

(3)如果行列式中某行（列）的每个元素都是两个数的和，则这个行列式可以拆成两个行列式的和

(4) 对换行列式中的某两行（列）的位置，行列式的值只改变正负号。特别地，如两行（列）元素对应相等（或成比例），则行列式的值为零

(5) 把某行（列）的k倍加至另一行（列），行列式的值不变

2. 计算行列式的方法：

(1)利用行列式的定义计算

(2)利用性质化为三角形行列式或含有较多零元素的行列式

(3)利用性质和按某一行（列）展开定理，将高阶化为低阶

(4)利用已知公式计算(如范德蒙行列式)。

3. 计算行列式的常用技巧

三角化法、递推法、数学归纳法、加边法、公式法等

例1：

设 $p(x)=\begin{vmatrix} 3x & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 3x & -x & x \\ 3 & 2x & x & 5 \\ x & 4 & 4x & 1 \end{vmatrix}$ ，则 x^4 的系数是多少

，常数项是多少。

如果直接计算4阶行列式的结果，计算量很大，可根据定义求出行列式的某些特殊项。

4阶行列式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_1} a_{3j_1} a_{4j_1}$

$$(-1)^{\tau(1423)} a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} = 3x \cdot x \cdot 2x \cdot 4x = 24x^4$$

知识点：考察行列式的基本概念

例2：已知5阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=27$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$，其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为D中第4行第j列元素的代数余子式。

解：可以通过代数余子式的定义求，也可以通过观察发现利用第2行和第4行

$$\begin{cases}(1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43})+(2A_{44}+2A_{45})=27\\ (2A_{41}+2A_{42}+2A_{43})+(1\cdot A_{44}+1\cdot A_{45})=0\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27\\ 2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0\end{cases}$$

解此方程组得：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9,A_{44}+A_{45}=18$$

代数余子式的重要性质：行列式一行（列）元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和必为零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\qquad(i\neq j)$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0\qquad(j\neq k)$$

思考：

设 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ ，求 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$

，其中 $A_{i2}(i=1,2,3,4)$ 为D中元素 a_{i2} 的代数余子式 。

范德蒙行列式的两种变形

例3(a)计算行列式的值

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}$$

解：

$$A=a_1\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^2 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^3 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2a_3a_4\square\prod_{1\le j<i\le 4}\left(a_i-a_j\right)$$

例4：计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

解：依次将第i行 $\times(-1)$ 加到第(i+1)行 $(i=1,2,\cdots,n-1)$ ，得：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

N阶范德蒙行列式

补充

证明：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right)\cdot\prod_{1\le j<i\le 4}\left(a_i-a_j\right)$$

分析：此行列式与范德蒙行列式很相似，但缺少a_i的3次幂。因此给它添加上一行一列，使其成为范德蒙行列式，再比较它们之间的关系。

证明：考虑下列5阶范德蒙行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & x^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & x^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & x^4 \end{vmatrix} =(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\prod_{1\le j<i\le 4}\left(a_i-a_j\right)$$

另一方面，把$f(x)$按第5列展开，得

$$f(x)=A_{15}+A_{25}x+A_{35}x^2+A_{45}x^3+A_{55}x^4$$

其中，A_{ij} 为元 a_{ij}的代数余子式。显见，$D=-A_{45}$，即 D 为$f(x)$ 的展开式中 x^3 项系数的相反数。$f(x)$ 中 x^3 项的系数为

$$-\left(\sum_{i=1}^{4}a_i\right)\cdot\prod_{1\le j<i\le 4}\left(a_i-a_j\right)$$

所以，$D=\left(\sum_{i=1}^{4}a_i\right)\cdot\prod_{1\le j<i\le 4}\left(a_i-a_j\right)$

三角化法求解行列式：将行列式化为上（下）三角行列式。

例5：计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

解题思路：分析行列式发现，每行所有元素相加后的值相等，可把所有列加到第一列，提取公因子再化简计算。

$$D_n = \begin{vmatrix} b+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ b+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = \left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_i - r_1 (i=2,3,\cdots,n)}} \left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = \left(b+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) b^{n-1}$$

例6：计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_1 + \sum_{i=2}^{n} -\frac{1}{i} c_i (i = 2, 3, \cdots, n)}} \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n! \left(1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \right)$$

方法：将第一列的元素1转换为0，行列式变为上三角行列式

递推法求解行列式

例7：计算n阶三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

提示：对此类三对角行列式，多采用递推法求解，找出D_n与D_{n-1}，或 D_n 与 D_{n-1}, D_{n-2}之间的关系，由递推关系式求出D_n的值。

解：按第一行展开得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

则： $D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3})$

$$\cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n$$

其中： $D_1 = |a+b| = a+b$ $\quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$

所以根据递推公式：

$$D_n = aD_{n-1} + b^n$$

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = \cdots = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n$$

例8：用数学归纳法证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix} = (n+1)a^n$$

将 D_n 按第一列展开，得：

$$D_n = 2aD_{n-1} - \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

用上例的递推法，也可继续求解出结果。

假设当$n \le k-1$时，结论成立。现在来看$n = k$时的情形。

$$D_k = 2aD_{k-1} - a^2 D_{k-2}$$
$$= 2a \cdot k \cdot a^{k-1} - a^2 \cdot (k-1)a^{k-2}$$
$$= (k+1)a^k$$

因此，当 $n = k$ 时，结论也成立。

当$n = 1, n = 2$ 时，结论显然成立。

故对任何正整数n，有 $D_n = (n+1)a^n$成立。

例9：计算n阶（n>=3）行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解:利用行列式的性质，按第1列展开得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

例10：计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}, \lambda_i \neq 0$$

$$D_n = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 + \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_j} \right)$$

例11：求一个二次多项式，使得 $f(1)=3, f(-1)=1, f(2)=7.$

解：设所求的二次多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c$ 得线性方程组：

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a-b+c=1 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6 \quad D_1=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6 \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}=6 \quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}=6$$

故： $a=\dfrac{D_1}{D}=1 \qquad b=\dfrac{D_2}{D}=1 \qquad c=\dfrac{D_3}{D}=1$

所求的二次多项式为 $f(x)=x^2+x+1.$

克莱姆法则