习题课

2012-4-12

13.41 证明：

(1) R/Z ≅ U

Proof: 构造$\varphi : R \to U$

1. 先证其为同态映射

$$\varphi(x+y)=\cos(2x\pi+2y\pi)+\sin(2x\pi+2y\pi)\cdot i$$
$$=(\cos 2x\pi+\sin 2x\pi\cdot i)(\cos 2y\pi+\sin 2y\pi\cdot i)$$
$$=\varphi(x)+\varphi(y)$$

2. 证满射

∵对U中任意元素a+bi有||a2+b2||=1

∴(a,b)为二维平面上以原点为圆心，1为半径的圆上的一点

设其与x轴夹角为 ，令x= /2 ，

则a=cos =cos2x , b=sin =sin2x

即 (x)=a+bi

∴ 为满射

3. 证 $\ker\varphi = Z$

$\because \forall x \in Z, \varphi(x) = 1 = e_U, x \in \ker\varphi$

$\therefore Z \subseteq \ker\varphi$

$\because \forall x \in \ker\varphi, \cos 2x\pi = 1$

$\therefore x \in Z$

$\therefore \ker\varphi \subseteq Z$

综上，Z=$\ker\varphi$

综合1,2,3,根据定理13.20，有

$$R / Z = R / \ker\varphi \cong \varphi(R) = U$$

(3) $C^* / U \cong D$

Proof: 构造 $\varphi : C^* \to D$

$$\varphi(x) = \| x \|$$

其余类似(1)

1. 同态

2. 满射 $\forall d \in D, \varphi(\frac{\sqrt{2d}}{2}) = d \Rightarrow \varphi(C^*) = D$

3. $U = \ker \varphi$ ⇐U定义

(5) $C^{*}/U_{n} \cong C^{*}$

Proof: 构造 $\varphi : C^{*} \to C^{*}$

$$\varphi(x) = x^{n}$$

其余类似(1)

1. 同态 $\varphi(x \cdot y) = x^{n} \cdot y^{n} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

2. 满射

3. $U = \ker \varphi$

补充1：　　为群[G, *]→[G’, ·]的同态映射，证明　　(G)是G‘子群.

Proof: 由已知，$\varphi(G) \subseteq G'$

(1)封闭性

$\because \forall x, y \in G, \text{有} x * y \in G$

$\therefore \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x * y) \in \varphi(G)$

(2)逆元

$\because \forall x \in G, \text{存在} x^{-1} \in G, x * x^{-1} = e_G$

$\therefore \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = \varphi(x * x^{-1}) = e_{G'}$

$\therefore (\varphi(x))^{-1} = \varphi(x^{-1}) \in \varphi(G)$

补充2，设 是G到G‘的同态映射

(1)若H是G的子群，则 (H)是G’的子群

证明： 方法同上题.

(1) $\varphi(\mathrm{H}) \subseteq G'$

(2)封闭性

(3) 逆元

也可用定理13.15证明

(2)若H是G的正规子群，且 是满同态映射，则 (H)也是G’的正规子群

证明：由(1)可知，$\varphi(H)$是G'的子群

对$\forall g'\in G', h'\in\varphi(H)$,不妨令h’=$\varphi(h_0), h_0\in H$

$\because\varphi$为满同态映射

$\therefore\exists g_0\in G$满足$\varphi(g_0)=g'$,同时有$\varphi(g_0^{-1})=g'^{-1}$

$\therefore g'^{-1}h'g'=\varphi(g_0^{-1})\varphi(h_0)\varphi(g_0)=\varphi(g_0^{-1}h_0g_0)$

而$\because$ H是G的正规子群

$\therefore\forall g\in G, h\in H$,有$g^{-1}hg\in H$

所以，$g'^{-1}h'g'\in\varphi(H)$,得证。

14.2 判断是否为环

解：只能用定义来套

(1)环

(2)环（1.要明确什么是函数的加法、乘法

2.什么叫区间[-1,1]）

(3)环

(4)不是;不满足分配率，反例

$$f(x)=x^2, g(x)=r(x)=2x$$

则$f\cdot(g+r)(x)=16x^2 \neq f\cdot g(x)+f\cdot r(x)=8x^2$

(5)不是;不满足分配率，反例

$$(a+(-a))\cdot b=0 \neq a\cdot b+(-a)\cdot b=2|a|b$$

14.3 判断整环，除环，域

解：定义

(1)域

(2)都不是，有零因子

$([1],[0])\cdot([0],[1])=([0],[0])=0$

(3) 都不是，有零因子

$(1,0)\cdot(0,1)=(0,0)=0$

(4) 整环, a+bi在Z上不一定有逆元，如2+2i

(5)当F为整环时，此系统为整环

当F不为整环时，此系统不一定为整环

14.4 找零因子

(1){[2],[3],[4]}，均为左&右零因子

(2){([1],[0]),([0],[1])}，均为左&右零因子

(3)从齐次线性方程组有非零解的角度考虑

零因子有：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} & [0] \\ \mathrm{y} & [0] \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ [0] & [0] \end{pmatrix},\begin{pmatrix} [0] & \mathrm{x} \\ [0] & y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} [0] & [0] \\ \mathrm{x} & y \end{pmatrix}; x, y \text{不全为} [0]$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \mathrm{y} & y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ \mathrm{x} & y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \{[1],[2]\}$$

14.7 证明环的直积也是环。

Proof: 定义

$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in R \times R'$

(1)可结合

$((a, b)\Delta(c, d))\Delta(e, f)=(a+c, b+d)\Delta(e, f)=(a+c+e, b+d+f)$

$(a, b)\Delta((c, d)\Delta(e, f))=(a, b)\Delta(c+e, d+f)=(a+c+e, b+d+f)$

(2) 可交换

$(a, b)\Delta(c, d)=(a+c, b+d)=(c, d)\Delta(a, b)$

(3) 有单位元

存在$(0, 0)\in R\times R'$,使得$(0, 0)\Delta(a, b)=(a, b)=(a, b)\Delta(0, 0)$

(4) 加法逆元

存在 $(-a, -b) \in R \times R'$, 使得 $(a, b)\,\Delta(-a, -b) = (0, 0)$

(5)□可结合

$((a, b)\square(c,d))\square(e,f) = (ac,bd)\square(e,f) = (ace,bdf)$

$(a,b)\square((c,d)\square(e,f)) = (a,b)\square(ce,df) = (ace,bdf)$

(6) 分配率

$(a, b)\square((c,d)\Delta(e,f)) = (a,b)\square(c+e,d+f) = (ac+ae,bd+bf)$

$= ((a,b)\square(c,d))\Delta((a,b)\square(e,f))$

14.12 判断子环

解：

(1)是

(2)是

(3)是

(4)不是，不满足封闭性

$1 \in C$, 但$1+1=2 \notin C$

14.13 已知A,B为R的子环，证明A∩B是R的子环

Proof: 对$\forall a,b \in A \bigcap B$

$\because A$是子环，根据定理14.3

$\therefore a+b \in A, -a \in A, a \cdot b \in A$

同理$a+b \in B, -a \in B, a \cdot b \in B$

$\therefore a+b \in A \bigcap B, -a \in A \bigcap B, a \cdot b \in A \bigcap B$

又$\because A \subseteq R, B \subseteq R$

$\therefore A \bigcap B \subseteq R$，且$e \in A \bigcap B, A \bigcap B \neq \varnothing$

综上，根据定理14.3，得证。