第二章 关系

（由于时间关系，第二章只给出习题课中未讲的题目的答案，其他题目若有问题可以发邮件给我 052021196@fudan.edu.cn ，望同学们见谅！）

2.16

证明：

对于A上任意二元关系R都有$R \subseteq A\times A$，

即$R \in P(A\times A)$（$P(\bullet)$为幂集）

$\because |A\times A| = n^2$

$\therefore |P(A\times A)| = 2^{n^2}$

这说明集合A上共有2^{n^2}个不同的二元关系，

而 $\{R^i | 0 \le i \le 2^{n^2}\}$中共有$2^{n^2}+1$个二元关系，

由抽屉原理可知，$\{R^i | 0 \le i \le 2^{n^2}\}$中必存在重复的元素，

故必存在s与t,$0 \le s<t \le 2^{n^2}$,使得$R^s = R^t$.

2.17

(1)

证明：

显然r(R)是自反的，

则由 定理2.11(1) 可知sr(R)是对称的

又由 定理2.12(1) sr(R)=rs(R),

又因为rs(R)是自反的，所以sr(R)是自反的，

由 定理2.11(1) 及sr(R)自反可知tsr(R)是自反的，

由 定理2.11(2) 及sr(R)对称可知tsr(R)是对称的，

又 tsr(R)显然是传递的，所以tsr(R)是等价关系。

(2)

证明：

R''是等价关系，所以R''是自反，对称，传递的。

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} R''\supseteq R\text{且}R''\text{是自反的}\\ r(R)\text{是}R\text{的自反闭包}\end{array}\right\}\Rightarrow R''\supseteq r(R)\\ R''\text{是对称的}\\ sr(R)\text{是}r(R)\text{的传递闭包}\end{array}\right\}\Rightarrow R''\supseteq sr(R)\\ R''\text{是对称的}\\ tsr(R)\text{是}sr(R)\text{的传递闭包}\end{array}\right\}\Rightarrow R''\supseteq tsr(R).$$

以上每一步推导均使用了闭包定义中第三个条件（性质）。

2.22

证明：

(1)

$\because$ R自反

$\therefore \forall a \in A$,有$(a,a) \in R$

$$\left.\begin{array}{l}(a,a) \in R \\ (a,a) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow (a,a) \in T$$

$\therefore T$是自反的。

(2)

$\forall\ (a,b) \in T$

$(a,b) \in T \Leftrightarrow (a,b) \in R$且$(b,a) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$且$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in T.$

$\therefore T$是对称的。

(3)

$\forall a,b,c \in A$

若 $(a,b) \in T$且$(b,c) \in T,$

则 $(a,b) \in T \Leftrightarrow (a,b) \in R$且$(b,a) \in R$

$(b,c) \in T \Leftrightarrow (b,c) \in R$且$(c,b) \in R$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(a,b) \in R \\ (b,c) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow (a,c) \in R \\ \left.\begin{array}{l}(b,a) \in R \\ (c,b) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow (c,a) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow (a,c) \in T$$

$\therefore T$是传递的。

综上所述，T是等价关系。

2.23

证明：

(1) $\because R$自反的$\therefore \forall a \in A,$有$(a,a) \in R.$

$(a,a) \in R$且$(a,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in S. \therefore S$是自反的。

(2) $\forall (a,b) \in S, \exists\ c \in A,$ 使得 $(a,c) \in R$且 $(c,b) \in R,$

$\because$ R是对称的，$\therefore (b,c) \in R$且 $(c,a) \in R$

$(b,c) \in R$且 $(c,a) \in R \Rightarrow (b,a) \in R. \therefore S$是对称的。

(3) $\forall (a,b) \in S, (b,c) \in S$

则 $\exists e$，使得$(a,e) \in R$且$(e,b) \in R,$又R是传递的，$\therefore (a,b) \in R$，

同理可得$(b,c) \in R,$则$(a,b) \in R$且$(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in S. \therefore S$是传递的。

综上所述，S是等价关系。

2.24

证明：

要在R是A上的自反关系这一前提下证明命题的等价性：

（1） 充分性:即要证若$(a,b)\in R,(a,c)\in R$,则$(b,c)\in R\Rightarrow R$是等价关系。

(α) $\forall(a,b)\in R$, $\because$ R是自反的，$\therefore (a,a)\in R$.

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in R\\(a,a)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow (b,a)\in R,\text{故R是对称的。}$$

(β) $\forall(a,b)\in R,(b,c)\in R$

由前证R是对称的，故$(b,a)\in R$，

$$\left.\begin{array}{l}(b,a)\in R\\(b,c)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow (a,c)\in R,\text{故R是传递的。}$$

综上所述，R是等价关系。

(2)必要性：即要证R是等价关系$\Rightarrow \forall(a,b)\in R,(a,c)\in R$,必有$(b,c)\in R$。

$$\left.\begin{array}{r}(a,b)\in R\Rightarrow (b,a)\in R\\(b,c)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow (b,c)\in R.$$

2.40

(1)证明:

先证 充分性:即k是j的整数倍$\Rightarrow I/R_k$细分I/R_j.

$\because$ I/R_k细分$I/R_j \Leftrightarrow R_k\subseteq R_j$ $\therefore$要证I/R_k细分I/R_j,可证$R_k\subseteq R_j$.

$\forall a,b\in I$,若$(a,b)\in R_k$则$\dfrac{a-b}{k}\in I$,不妨设$\dfrac{a-b}{k}=m(m\in I)$.

又k是j的整数倍，不妨设k=nj $(n\in I, n\neq 0)$.

则$\dfrac{a-b}{k}=m\Leftrightarrow\dfrac{a-b}{nj}=m\Leftrightarrow\dfrac{a-b}{j}=nm.$

$\because nm\in I,\therefore(a,b)\in R_j$

$\therefore R_k\subseteq R_j$,即$I/R_k$细分$I/R_j$.

再证 必要性:I/R_k细分$I/R_j\Rightarrow$即k是j的整数倍.

$\because (k,0)\in R_k$ 且 I/R_k细分$I/R_j\Leftrightarrow R_k\subseteq R_j$

$\therefore (k,0)\in R_j$，即 $\dfrac{k-0}{j}\in I$,显然k是j的整数倍.

(2)设 $I/R_k+I/R_j$ 是I上以m为模的同余关系的商集.

由(1)知 $I/R_k+I/R_j$被I/R_k与I/R_j细分$\Rightarrow k$是m的整数倍, j是m的整数倍

$\Rightarrow$ m是k, j的公约数.

又 $I/R_k+I/R_j$是同时被I/R_k与I/R_j细分的最大划分

$\Rightarrow$ m是k, j的其他任意公约数的整数倍$\Rightarrow$ m是k, j的最大公约数.

(3)用类似与(2)中的方法分析$I/R_k\bullet I/R_j$的含义,可得m是k, j的最小公倍数.

第三章　函数

3.1

(1)是函数;$Dom_f = A, R_f = \{x, z, y\}$;不是内射,不是满射.

(2)不是函数.

(3)是函数;$Dom_f = A, R_f = \mathrm{B}$;是内射,是满射, $f^{-1} = \{(z,1),(w,2),(x,3),(y,4)\}$;

(4)不是A到B的函数,因为$Dom_f \neq A$.

(5)是函数,$Dom_f = A, R_f = \{y\}$;是内射,不是满射.

3.2

(1) $f = \{(1,x),(2,x)\}, Dom_f = \{1,2\}, R_f = \{x,y\}$.

(2) $f = \{(1,x),(2,y),(3,x)\}, Dom_f = \{1,2,3\}, R_f = \{x,y\}$.

(3) $f = \{(1,x),(2,x),(3,y)\}, Dom_f = \{1,2,3\}, R_f = \{x,y,z\}$.

3.3

$|A|>|B|$,显然由抽屉原理可知,A到B上不存在内射,故不存在双射.

$f_0 = \{(a,0),(b,0),(c,0)\}$,非满射.

$f_1 = \{(a,0),(b,0),(c,1)\}$,满射.

$f_2 = \{(a,0),(b,1),(c,0)\}$,满射

$f_3 = \{(a,0),(b,1),(c,1)\}$,满射

$f_4 = \{(a,1),(b,0),(c,0)\}$,满射

$f_5 = \{(a,1),(b,0),(c,1)\}$,满射

$f_6 = \{(a,1),(b,1),(c,0)\}$,满射

$f_7 = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$,非满射.

3.4

$R_f = \{2n+1 \mid n \in \mathrm{N}\}$.

3.5

(2)与(4)可构成函数.

3.6

(1)是内射,不是满射(2)即不是内射也不是满射,(3)不是内射也不是满射,(4)不是内射,是满射.

3.7

(1)证明f是满射,但不是内射.

证明:

$\forall x \in N, \exists (0,x) \in N \times N$,使得$f((0,x)) = 0 + x = x$,所以$f$是满射.

又$\exists (x,0) \in N \times N$,使得$f((x,0)) = x + 0 = x$,

当$x \neq 0$时,$(0,x) \neq (x,0)$,显然f不是内射.

(2)证明g是满射,但不是内射

证明:

证明:

$\forall x \in N, \exists (1,x) \in N \times N$,使得g$((1,x)) = 1 \cdot x = x$,所以g是满射.

又$\exists (x,1) \in N \times N$,使得g$((x,1)) = x \cdot 1 = x$,

当$x \neq 1$时,$(1,x) \neq (x,1)$,显然g不是内射.

3.8

证明:

f的逆函数记为f^{-1}.

(1)先证f^{-1}的定义域$Dom_{f^{-1}} = B$.

$Dom_{f^{-1}}$可表示为$Dom_{f^{-1}} = \{b \mid \exists (b,a) \in f^{-1}\}$.

则$\forall b \in Dom_{f^{-1}}, \exists (b,a) \in f^{-1}$,也即$\exists (a,b) \in f$,

$\because f$是A到B上的关系

$\therefore b \in B$,即$Dom_{f^{-1}} \subseteq B$.

又$\forall b \in B$

$\because f$是满射$\therefore \exists a \in A$,使得$(a,b) \in f$

$\therefore \exists (b,a) \in f^{-1}, \therefore b \in Dom_{f^{-1}}$,即$B \subseteq Dom_{f^{-1}}$.

$\therefore Dom_{f^{-1}} = B$.

(2)证明$\forall (b,a) \in f^{-1}, (b,a') \in f^{-1}$,均有$a = a'$.

$\because (b,a) \in f^{-1}, (b,a') \in f^{-1}$

$\therefore (a,b) \in f, (a',b) \in f$

$\because f$是内射$\therefore a = a'$.

综合(1),(2)可知f^{-1}是B到A的一个函数.

3.9

要使f(x)有逆函数,需限定f(x)的定义域.

3.10

证明:

(要证存在P(A)到B的双射,只需构造一个P(A)到B的函数,并证明该函数是双射)

令$f=\left\{(A',g)\middle|\begin{cases}g(x)=1,\forall x\in A'\\ g(x)=0,\forall x\in A\text{且}x\notin A'\end{cases}\right\}$

以下证明f是双射:

(1)$\forall g'\in B$,

令$A'=\{x\mid g'(x)=1\}$,显然$A'\subseteq A$,即$A'\in P(A)$.

且易知$(A',g')\in f$,所以f是满射.

(2)$\forall A'\in P(A)$,$A''\in P(A)$,且$A'\neq A''$令$f(A')=g'$, $f(A'')=g''$.

假设$g'=g''$

则$\forall x\in A'$,有$g(x)=1$

由$g'=g''$的假设可得$g'(x)=1$,这意味$x\in A''$,

$\therefore A'\subseteq A''$

同理可得$A''\subseteq A'$

因此有$A''=A'$,这于$A'\neq A''$的条件矛盾,故$g'=g''$的假设不成立.

$\therefore g'\neq g''$,即f是内射.

综上所述, f是满足条件的双射.

3.11

证明:

构造函数如下

$g=\{(f,(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}))\mid f(i)=a_i,a_i\in A,0\le i\le n-1\}$

证明g是双射:

(1)$\forall(a_0',a_1',\ldots,a_{n-1}')\in A^n$

构造$f'=\{(i,a_i')\mid 0\le i\le n-1\}$,易证$f\in S$,

且显然$(f',(a_0',a_1',\ldots,a_{n-1}'))\in g$

所以g是满射.

(2)

证明内射可用反证法,仿照3.10,此处从略.

3.12

(1) $f\circ f=\{(a,a),(b,b),(c,a)\}$, $f\circ f\circ f=\{(a,b),(b,a),(c,b)\}$.

(2) $f^9=f^{623}=f^3$.

3.13

略.

3.14

(1) $f=\{(0,0),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, f既是内射也是满射.

(2) $f=\{(0,0),(1,4),(2,2),(3,0),(4,4),(5,2)\}$, f即不是内射也不是满射.

3.15

$n=m-1$

3.16

(1)假.$A=\{0,1\}, B=\{0,1,\}, C=\{0,1\}$,

$f=\{(0,0),(1,1)\}, g=\{(0,0),(1,0)\}, f\circ g=\{(0,0),(1,0)\}$,不是内射.

(2)假.$A=\{0,1\}, B=\{0,1,\}, C=\{0,1\}$,

$f=\{(0,0),(1,1)\}, g=\{(0,0),(1,0)\}, f\circ g=\{(0,0),(1,0)\}$,不是满射.

(3)假.$A=\{0,1\}, B=\{0,1,2\}, C=\{0,1\}$,

$f=\{(0,0),(1,0),(2,1)\}, g=\{(0,1),(1,2)\}, f\circ g=\{(0,0),(1,1)\}$.

(4)真.

(5)真.

(6)真.

3.17

证明:

令h是一个从A到C的复合关系,

显然$Dom_f=A$.

又$\forall(a,c),(a,c')\in h$

$\exists b\in B$,使得$(a,b)\in g,(b,c)\in f$,

$\exists b'\in B$,使得$(a,b')\in g,(b',c')\in f$,

f是函数,$(a,b)\in g,(a,b')\in g\Rightarrow b=b'$,

则$(b',c')\in f\Leftrightarrow(b,c')\in f$,

g是函数,$(b,c')\in g,(b,c)\in g\Rightarrow c=c'$.

故h是一个函数.

3.18

函数的复合实质就是关系的复合,故可用关系复合的结合律说明函数复合的结合律.

3.19

证明:

(1)证明$f^{-1}\circ f=I_A$

$\forall a\in A$

$\because f$是函数$\therefore \exists b\in B, f(a)=b,$且$f^{-1}(b)=a,$

则$f^{-1}\circ f(a)=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(b)=a.$

又显然$\mathrm{I}_A(a)=a.$

即$\forall a\in A, \mathrm{I}_A(a)=f^{-1}\circ f(a), \therefore I_A=f^{-1}\circ f.$

(2)证明$f\circ f^{-1}=I_A.$

证明可仿照(1).

3.20

略。

3.21

(1)证明:

先证$f(X\bigcup Y)\subseteq f(X)\bigcup f(Y)$

$\forall b\in f(X\bigcup Y)$

至少存在一个$a, a\in X\bigcup Y,$使得$f(a)=b.$

不妨设$a\in X,$则$f(a)=b\Rightarrow b\in f(X)\Rightarrow b\in f(X)\bigcup f(Y).$

同理在$a\in Y$时,同样有$b\in f(X)\bigcup f(Y).$

所以$f(X\bigcup Y)\subseteq f(X)\bigcup f(Y).$

再证$f(X)\bigcup f(Y)\subseteq f(X\bigcup Y)$

$\forall b\in f(X)\bigcup f(Y)$

不妨设$b\in f(X),$则至少存在一个$a, a\in X,$使得$f(a)=b.$

又显然$a\in X\bigcup Y,$所以$f(a)=b\Rightarrow b\in f(X\bigcup Y),$

同理在$b\in f(Y)$时,同样有$b\in f(X\bigcup Y).$

所以$f(X)\bigcup f(Y)\subseteq f(X\bigcup Y).$

综上所述,有$f(X)\bigcup f(Y)=f(X\bigcup Y).$

(2)

$\forall b\in f(X\bigcap Y)$

至少存在一个$a, a\in X\bigcap Y,$使得$f(a)=b.$

$$\left.\begin{array}{l} a\in X, f(a)=b\Rightarrow b\in f(X) \\ a\in Y, f(a)=b\Rightarrow b\in f(Y) \end{array}\right\}\Rightarrow b\in f(X)\bigcap f(Y).$$

所以$f(X\bigcap Y)\subseteq f(X)\bigcap f(Y).$

3.22

证明:

由题目3.21(2)可知$f(X\cap Y)\subseteq f(X)\cap f(Y)$,

故只需证明$f(X)\cap f(Y)\subseteq f(X\cap Y)$.

$\forall b\in f(X)\cap f(Y)$

则$b\in f(X)$且$b\in f(Y)$.

$b\in f(X)\Rightarrow \exists a\in X$,使得$f(a)=b\Rightarrow \exists a\in A$,使得$f(a)=b$.

$b\in f(Y)\Rightarrow \exists a'\in Y$,使得$f(a')=b\Rightarrow \exists a'\in A$,使得$f(a')=b$.

$\because f$是A上的内射$\therefore a=a'$

即$\exists a\in X\cap Y$,使得$f(a)=b$,所以$b\in f(X\cap Y)$.

故$f(X)\cap f(Y)\subseteq f(X\cap Y)$.

综上所述有$f(X)\cap f(Y)=f(X\cap Y)$.

3.23

略。

3.24

证明:

令$A_b=f^{-1}(\{b\}),b\in B$,则$\varphi=\{\bigcup_{b\in B}A_b\}$

(1)$\because f$是A到B上的满射$\therefore$易知$\forall b\in B,A_b\neq\varnothing$.

(2)由原像的定义易知$\forall b\in B,A_b\subseteq A$,所以$\bigcup_{b\in B}A_b\subseteq A$.

又f是A到B上的函数

$\therefore \forall a\in A,\exists b'\in B$,使得$f(a)=b'$.

又$f(a)=b'\Leftrightarrow a\in A_{b'},\therefore a\in\bigcup_{b\in B}A_b,\therefore A\subseteq\bigcup_{b\in B}A_b$.

$\bigcup_{b\in B}A_b\subseteq A,A\subseteq\bigcup_{b\in B}A_b\Rightarrow\bigcup_{b\in B}A_b=A$.

(3)$\forall b\in B,b'\in B,b\neq b'$,以下用反证法证明$A_b\cap A_{b'}=\varnothing$.

假设$A_b\cap A_{b'}\neq\varnothing$,则$\exists a\in A_b\cap A_{b'}$

这意味这$f(a)=b$且$f(a)=b'$

$\because f$是函数$\therefore b=b'$,这与$b\neq b'$的条件矛盾,故假设不成立,原结论正确.

综上所述,φ是对A的一个划分.

产生这个划分的等价关系为R=$\{(a,b)\mid f(a)=b,a\in A,b\in B\}$.

3.25

$\because R$是等价关系$\therefore R$是自反的

$\therefore \forall[a], \exists a \in \mathrm{A}$,使得$a \in [a]$.

$\therefore g$是满射.

当aRb时,$[a]=[b]$,即$g(a)=g(b)$.

3.26

(1)

证明:

$A \bigcup B = (A-B) \bigcup (B-A) \bigcup (A \bigcap B)$

$\therefore \forall x \in A \bigcup B$,有

$(\alpha) x \in (A-B)$

$(\beta) x \in (B-A)$

$(\gamma) x \in (A \bigcap B)$,

三种情况,且必居其一.

若$x \in (A-B)$,则$x \in A, x \notin B, x \notin A \bigcap B$,

$\therefore \psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A \cap B}(x)=1+0-0=1=\psi_{A \cup B}(x)$.

若$x \in (B-A)$,则$x \in B, x \notin A, x \notin A \bigcap B$,

$\therefore \psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A \cap B}(x)=0+1-0=1=\psi_{A \cup B}(x)$.

若$x \in (A \bigcap B)$,则$x \in A \bigcap B, x \in B, x \in A$,

$\therefore \psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A \cap B}(x)=1+1-1=1=\psi_{A \cup B}(x)$.

$\forall x \in \overline{A \bigcup B}$,易知$x \notin A \bigcap B, x \notin B, x \notin A$

$\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A \cap B}(x)=0+0-0=0=\psi_{A \cup B}(x)$.

总之有$\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A \cap B}(x)=\psi_{A \cup B}(x)$.

(2)

略.

(3)

证明:

$\forall x \in A-B$

$x \in A$且$x \notin B$

$\therefore \psi_A(x)=1, \psi_B(x)=0$.

$\psi_A(x)[1-\psi_B(x)]=1=\psi_{A-B}(x)$.

$\forall x \notin A-B$有$x \notin A$

$\therefore \psi_A(x)=0$

$\therefore \psi_A(x)[1-\psi_B(x)]=0=\psi_{A-B}(x)$.

总之有$\psi_A(x)[1-\psi_B(x)]=\psi_{A-B}(x)$.

3.27

解:

$A\oplus B=(A-B)\bigcup(B-A)$

$\psi_{A\oplus B}=\psi_{(A-B)\bigcup(B-A)}$

$=\psi_{(A-B)}+\psi_{(B-A)}-\psi_{(A-B)}\psi_{(B-A)}$ （由题目3.26(1)的结论）

$=\psi_A[1-\psi_B]+\psi_B[1-\psi_A]-\psi_A[1-\psi_B]\psi_B[1-\psi_A]$ （由题目3.26(3)的结论）

$=\psi_A+\psi_B-3\psi_A\psi_B+\psi_A{}^2\psi_B+\psi_A\psi_B{}^2-\psi_A{}^2\psi_B{}^2$

又 ψ_A,ψ_B在$\{0,1\}$上取值,$\therefore\psi_A{}^2=\psi_A,\psi_B{}^2=\psi_B$,代入上式得

$\psi_{A\oplus B}=\psi_A+\psi_B-2\psi_A\psi_B$.

3.28

证明:

$\forall\psi_A$,显然它是定义在U的某一子集A上的

$\therefore\exists A\in\mathrm{P}(U)$,使得$f(A)=\psi_A$

$\therefore f$是满射.

又$\forall A\in\mathrm{P}(U),\forall A'\in\mathrm{P}(U),A\neq A'$,用反证法证明$\psi_A\neq\psi_{A'}$

假设$\psi_A=\psi_{A'}$

则$\forall x\in A$

$x\in A\Leftrightarrow\psi_A(x)=1\Leftrightarrow\psi_{A'}(x)=1\Leftrightarrow x\in A'$,推导过程步步等价,

所以$A=A'$,这与$A\neq A'$的条件矛盾,故假设不成立,$\psi_A\neq\psi_{A'}$, f是内射.

3.29

若f是A的子集B的特征函数,

$\forall a\in B,[a]_R=\{x\mid x\in B\}$,

$\forall a\notin B,[a]_R=\{x\mid x\notin B\}$.

第四章　无限集

4.1

1).

(1)基础:$5 \in E_5$;

(2)归纳:$x \in E_5, x+5 \in E_5$;

(3)闭合:除了有限次应用(1)(2)中的规则产生集合A中的元素外,A中再没有其他元素.

2).

(1)基础:$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \subseteq U$

(2)归纳:若$x \in U, a \in U, xa \in U$($xa$指$x$与$a$毗连的结果).

(3)闭合:除了有限次应用(1)(2)中的规则产生集合A中的元素外,A中再没有其他元素.

3).

(1)基础:$0 \in \mathrm{E}_2$;

(2)归纳:若$x \in \mathrm{E}_2$,则$x+2 \in \mathrm{E}_2$;

(3)闭合:除了有限次应用(1)(2)中的规则产生集合A中的元素外,A中再没有其他元素.

4.2

证明:用反证法证明.

假设命题不是对一切自然数都成立.令N表示使命题不成立的自然数所组成的集合,显然N非空,于是,则N中必有最小数m,$m \neq 0$,否则与第二归纳法中(1)矛盾.所以m-1是一个自然数,又m是N中最小的数,所以m-1能使命题成立.这就是说,命题对于一切$\leq$ m-1的自然数都成立,根据第二数学归纳法(2),可知m也能使命题成立,这与m是使命题不成立的自然数集N中的最小数矛盾.因此定理获证.

4.3

平面上任意顶点可用$Q \times Q$中的一个元素表示,而三角形的三个顶点是互相独立的,所以一个三角形需要$Q \times Q \times Q \times Q \times Q \times Q$中的一个元素表示.也就是说平面上三角形集合是$Q \times Q \times Q \times Q \times Q \times Q$的无限子集,

Q是可列集,所以$Q \times Q \times Q \times Q \times Q \times Q$是可列集,那么平面上三角形集合也是可列集,它的基数为$\aleph_0$.

4.4

证明:

(1)若区间的个数为有限多个,则显然集合是可列的.

(2)若区间的个数为无限多个,则在每一个开区间内必能取到一个有理数q,且因为这些开区间两两不相交,故在每一个开区间上取出的有理数必两两不等,这说明存在开区间集合到有理数集的内射,所以开区间集合的基数不大于有理数集的基数,而有理数集是可列的,所以题目结论得证.

4.5

证明:

设可列集$A=\{a_0,a_1,...a_n,...\}$.

以下使用第一数学归纳法证明:A的包含n($n\in N$)个元素的子集组成的集合S_i是可列集:

(1)

A的包含零个元素的子集($\varnothing$)所组成的集合为$S_0=\{\varnothing\}$,显然是可列的:

A的包含一个元素的子集所组成的集合S_1可表示为:

$S_1=\{\{a_0\},\{a_1\},...,\{a_n\},...\}$,显然是可列集.

A的包含两个元素的子集所组成的集合S_1可表示为:

(2)

假设A的包含k个元素的子集所组成的集合S_k是可列的,

令e_i表示S_k中的元素,则$S_k=\{e_0,e_1,...,e_n,...\}$.

则S_{k+1}可表示为:$S_{k+1}=\bigcup_{i\in N}S_{(k+1)i}$

其中$\bigcup_{i\in N}S_{(k+1)i}=\{e_0\cup\{a_i\},e_1\cup\{a_i\},...,e_n\cup\{a_i\},...\}-\{e_m\cup\{a_i\}\mid a_i\in e_m\}$.

显然每一个$S_{(k+1)i}$是可列的,而S_{k+1}是可列个$S_{(k+1)i}$的并,故S_{k+1}也是可列的.

(3)

由(1)(2)知,A的包含n($n\in N$)个元素的子集组成的集合S_i是可列集.

而A的所有有限集所组成的集合可以表示为:

B=$\bigcup_{i\in N}S_i$,则B为可列个可列集S_i组成的集合,故B是可列的.

第四章　无限集

4.6

证明:

令A为二进制有限小数集合

对于A中任意一个元素,存在一个有理数与之对应,

且显然这种映射是单射,故$|\mathrm{A}| \le |\mathrm{N}| = \aleph_0$,

又$\forall$ i $\in N$, A中至少存在一个小数点后第$i+1$位为1的小数,

故A为无限集,即$|\mathrm{A}| \ge \aleph_0$.

综上有$|\mathrm{A}| = \aleph_0$.

4.7

证明:

有理数点集为$Q \times Q$,半径$r \in Q^{+}$,

所以$A = Q \times Q \times Q^{+}$,

Q与Q^{+}均为可列集,由例4.13结论易证$Q \times Q \times Q^{+}$是可列集.

4.8

证明:

对于任意直线,都可在其上建立数轴.

则E的元素与数轴上实数一一对应,即存在双射f:E $\to$ R,

且$\forall e_{\mathrm{i}}, e_j \in \mathrm{E}, |e_{\mathrm{i}} - e_j| = |\mathrm{f}(e_{\mathrm{i}}) - \mathrm{f}(e_{\mathrm{j}})|$.

现在构造映射g:E $\to$ N如下:

g(e)=$\lceil \mathrm{f(e)} \rceil$,$\lceil \bullet \rceil$是取上整数运算,显然g是满射,

以下说明g是内射:

假设存在$e_{\mathrm{i}} \ne e_{\mathrm{j}}$, g($e_{\mathrm{i}}$)=g($e_{\mathrm{j}}$),

由$\lceil \bullet \rceil$运算的含义可知$\mathrm{f}(e_{\mathrm{i}}) = \mathrm{g}(e_{\mathrm{i}}) - 1 + \delta_1$, $\mathrm{f}(e_{\mathrm{j}}) = \mathrm{g}(e_{\mathrm{j}}) - 1 + \delta_1$, $0 < \delta_1, \delta_1 \le 1$

则$|e_{\mathrm{i}} - e_j| = |\mathrm{f}(e_{\mathrm{i}}) - \mathrm{f}(e_{\mathrm{j}})| = |\delta_1 - \delta_1| < 1$,这与题设条件矛盾,故g是内射.

由g是内射可知$|\mathrm{E}| \le |\mathrm{N}|$,也即$E$是有限的或可列的.

4.9

证明:

以下用数学归纳法证明,

(1)

$P(1): A_1$显然是可列的,

$P(2): A_1 \times A_2$,仿例4.13使用对角线法可证$A_1 \times A_2$可列.

(2)

假设对于任意$k > 2, P(k)$为真,即$A_k' = A_1 \times A_2 \times \cdots A_k$可列.

则$A_1 \times A_2 \times \cdots A_k \times A_{k+1} = A_k' \times A_{k+1}$,由$P(2)$为真可知$A_k' \times A_{k+1}$可列,

即$A_1 \times A_2 \times \cdots A_k \times A_{k+1}$可列,故$P(k+1)$为真.

所以对于所有$n \in N, n > 0, P(n)$为真.

4.10

解:

由例题4.16知存在双射$f: [0,1] \to (0,1)$,

由例题4.16知存在双射$g: (0,1) \to R$,则$g \circ f$是$[0,1]$到R的双射.

4.11

解:

由定理4.11知存在$[0,1]$到$(0,1]$的双射f,

构造双射$g: (0,1] \to [0,+\infty)$, $g(x) = -\ln(x)$.

则$g \circ f$是$[0,1]$到$[0,+\infty)$的双射.

4.12

解:

由定理4.11知存在$[0,1)$到$(0,1)$的双射f.

且存在$g: (0,1) \to (a,b)$, $g(x) = a + (b-a)x, x \in (0,1)$.

则$g \circ f$是$[0,1)$到(a,b)的双射.

4.13

解:

设S为无理数集,则S为无限集,故S必有一个可列子集B,

因为有理数集Q为可列集,故$Q \cup B$也是可列集,

则B与$Q \cup B$等势,即存在双射$f: B \to Q \cup B$,

在f的基础上构造g, $g(x)=\begin{cases} f(x), x \in B \\ x, x \in (S-B) \end{cases}$

显然g(x)是双射,且由$Q \cup B \cup (S-B) = R$可知g是$S \to \mathrm{R}$的双射.

4.14

解:

设实数集上一切闭区间组成的集合为A,

易知A与$\mathrm{R} \times \mathrm{R}$等势,以下讨论$\mathrm{R} \times \mathrm{R}$的势.

R与$(0,1)$等势,故存在双射$f: \mathrm{R} \to (0,1)$,

则可构造$\mathrm{R} \times \mathrm{R}$到$(0,1) \times (0,1)$的双射:

$g: \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to (0,1) \times (0,1), g((a,b)) = (f(a), f(b)), a, b \in R.$

故$|\mathrm{R} \times \mathrm{R}| = |(0,1) \times (0,1)|$

以下证明$|(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)| = c$:

构造$(0,1) \times (0,1)$到$(0,1)$的内射h:

$\forall (a,b) \in (0,1) \times (0,1)$,将$a,b$写成十进制无限小数的形式:

$a=0.a_1a_2....a_n....$, $b=0.b_1b_2....b_n....$

$h(a,b) = 0.a_1b_1a_2b_2....a_nb_n....$,这样的$h$是$(0,1) \times (0,1)$到$(0,1)$的内射.

所以$|(0,1) \times (0,1)| \le |(0,1)|$,

再构造$(0,1)$到$(0,1) \times (0,1)$的内射p:

$\forall a \in (0,1), p(a) = (a,a)$

所以$|(0,1)| \le |(0,1) \times (0,1)|$,

因此有$|(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)| = c$,又已知$|\mathrm{R} \times \mathrm{R}| = |(0,1) \times (0,1)|$,

所以$|\mathrm{R} \times \mathrm{R}| = c.$

注意:A不是R的幂集$\mathrm{P(R)}$,因为A中不存在元素$[a,b]$,使得$[a,b] = \mathrm{R}$,

即$\mathrm{R} \notin \mathrm{A}$,而$\mathrm{R} \in \mathrm{P(R)}$.

4.15

证明:

由4.15结论可知$\Sigma+$是可列集,.

所以可以表示为$\Sigma+=\{a_0,a_1,....,a_i,....\}$,

而S是有限集,令S=$\{b_0,b_1,.....b_{n-1}\}$.

则可以这样排列并访问$S\times\Sigma+$中的元素:

$$
\begin{aligned}
&b_0a_0 \to b_1a_0 \to .... \to b_{n-1}a_0\\
&\to b_0a_1 \to b_1a_1 \to .... \to b_{n-1}a_1\\
&\to b_0a_2 \to b_1a_2 \to .... \to b_{n-1}a_2\\
&\vdots\\
&\to b_0a_i \to b_1a_i \to .... \to b_{n-1}a_i\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

则$\forall b_i a_j \in S\times\Sigma+$都可在(i+1)+jn步访问到,

故$S\times\Sigma+$是可列集,$|S\times\Sigma+|=\aleph_0$.

4.16

证明:

设整系数多项式为A.

对于A中的每一个元素,只保留该元素中的非零系数项,所有项按升幂排列

并将非零系数项的数目作为该元素的长度.

则A中长度为一的元素具有形式$ax^n(a\in Z, n\in N)$,所以这些元素组成的集合是$Z\times N$的无限子集,

易知长度为m的元素组成的集合是$\underbrace{(Z\times N)...(Z\times N)}_{m个Z\times N}$的子集.

令$A_m, m\in N$表示A的长度为i的元素组成的子集.

以下证明$(Z\times N)^m, m\in N$是可列集:

将$Z\times N$中元素做如下排列:

$$
\begin{aligned}
&(0,0),(0,1),(0,2),....,(0,n),.....\\
&(-1,0),(-1,1),(-1,2),...,(-1,n),...\\
&(1,0),(1,1),(1,2),...,(1,n),...\\
&\vdots\\
&(-i,0),(-i,1),(-i,2),...,(-i,n),...\\
&(i,0),(i,1),(i,2),...,(i,n),...\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

用对角线法可以在确定的有限步数内访问到$Z\times N$中的任一元素,

故$Z\times N$是可列的,又由习题4.9结论知,$(Z\times N)^m, m\in N$是可列的.

由$(Z\times N)^m, m\in N$可列,知A_m是可列的,

A=$\bigcup_{i\in N} A_m$,可列个可列集的并是可列的,故A是可列的.

4.17

证明:

R与$(0,1)$等势,故存在双射f:R $\to (0,1)$,

则可构造$\mathrm{R}^n \to (0,1)^n$的双射:

$g:\mathrm{R}^n \to (0,1)^n$, $g((x_1,x_2,...x_n))=(f(x_1),f(x_2),...f(x_n))$

再构造$(0,1)^n$到$(0,1)$的内射h:

$\forall(x_1,x_2,...,x_n)\in(0,1)^n$,将$x_1,x_2,...x_n$写成十进制无限小数:

$x_1=0.a_{11}a_{12}...a_{1i}....,x_2=0.a_{21}a_{22}...a_{2i}....,...,x_n=0.a_{n1}a_{n2}...a_{ni}....$

$\mathrm{h}((x_1,x_2,...x_n))=0.a_{11}a_{21}...a_{n1}a_{12}a_{22}...a_{n2}...a_{1i}a_{2i}...a_{ni}....$

则这样的h是内射,因此$\left|(0,1)^n\right|\le\left|(0,1)\right|=c.$

又存在$(0,1)$到$(0,1)^n$的内射p:

$\forall x\in(0,1),p(x)=(\underbrace{x,x,...,x}_{n个x}).$

因此又有$\left|(0,1)\right|=c\le\left|(0,1)^n\right|$,综上有$\left|(0,1)^n\right|=c.$

4.18

证明:

构造映射$f:A\times B\to R,f((a,b))=a+b,a\in N,b\in(0,1).$

$\because a,b$分别是$a+b$的整数与小数部分

$\therefore\forall(a,b)\ne(c,d),a+b\ne c+d$,即$f$是内射,这说明$\left|A\times B\right|\le\left|R\right|=c.$

构造映射$g:B\to A\times B,g(x)=(0,x),x\in(0,1).$

显然g是内射,这说明$\left|(0,1)\right|=c\le\left|A\times B\right|.$

综上,$\left|A\times B\right|=c.$

4.19

证明:

由$[0,1],(0,1)$等势知存在双射f:$[0,1]\to(0,1)$,

则可构造双射$g:[0,1]\times[0,1]\to(0,1)\times(0,1),g((a,b))=(f(a),f(b)),a,b\in[0,1].$

因此$\left|[0,1]\times[0,1]\right|=\left|(0,1)\times(0,1)\right|$

在习题4.14中已证明$\left|(0,1)\times(0,1)\right|=c$,所以$\left|[0,1]\times[0,1]\right|=c.$

4.20

证明:

(1)证明$\le$是全序关系:

设基数集合为C,

$\forall c_1, c_2 \in C$,$\exists$集合$A_1, A_2, |A_1| = c_1, |A_2| = c_2$.

由$Zermelo$定理知

$c_1 < c_2, c_2 < c_1, c_1 = c_2$恰有一个成立,

由此可得$c_1 \le c_2, c_2 \le c_1$恰有且必有一个成立,

因此$\le$是全序关系.

(2)真明$<$是拟序关系:

$\forall c_1 \in C$,显然$c_1 = c_1$,故由$Zermelo$定理知$c_1 < c_1$不成立,$<$是反自反的.

$\forall c_1, c_2, c_3 \in C$,$\exists$集合$A_1, A_2, A_3, |A_1| = c_1, |A_2| = c_2, |A_3| = c_3$.

若$c_1 < c_2, c_2 < c_3$,

则表明存在A_1到A_2的内射与A_2到A_3的内射.

假设$c_1 > c_3$或$c_1 = c_3$,

则表明存在A_3到A_1的内射.

$$\left.\begin{array}{l}\text{存在}A_1\text{到}A_2\text{的内射}\\ \text{存在}A_3\text{到}A_1\text{的内射}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{存在}A_3\text{到}A_2\text{的内射} \Leftrightarrow c_3 \le c_2,$$

这与$c_2 < c_3$矛盾,故$c_1 > c_3$或$c_1 = c_3$不成立,

由$Zermelo$定理知一定有$c_1 < c_3$,故$<$是传递的.

综上,$<$是拟序关系.

第五章 图的基本概念

5.1

证明：

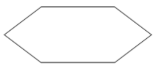
设顶点v_i的度为d_i

则$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n+1)$,

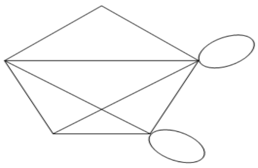
$\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = 2 + \frac{2}{n} > 3 - 1$,所以由抽屉原理加强形式可得至少有一个$d_i$不小于3.

5.2

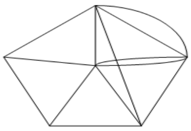
(1)



(2)



(3)



5.3

证明：

竞赛图为有向完全图，则有n个顶点的竞赛图满足以下性质：

设顶点v_i的出度为od_i,入度为id_i,

则$od_i + id_i = n-1$，即$\sum_{i=1}^{n}(od_i + id_i) = n(n-1)$

且$\sum_{i=1}^{n} od_i = \sum_{i=1}^{n} id_i = \frac{n(n-1)}{2}$。

$$\sum_{i=1}^{n} od_i^2 - \sum_{i=1}^{n} id_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(od_i^2 - id_i^2) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(od_i + id_i\right)\left(od_i - id_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[(n-1)(od_i - id_i)\right]$$

$$= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} od_i - \sum_{i=1}^{n} id_i\right) = 0.$$

所以$\sum_{i=1}^{n} od_i^2 = \sum_{i=1}^{n} id_i^2$.

第五章 图的基本概念

5.4

证明：

为了证明两个图是同构，需要找到顶点集之间的一个一一对应关系，

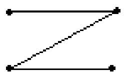
经观察可知存在顶点之间的如下对应关系：

$a \to a', e \to b', b \to c', g \to d', c \to e', h \to f', d \to g', f \to h'$可以使得

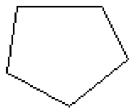
顶点与顶点，顶点与弧之间的关系保持不变，所以两个图是同构的。

5.5

(1)



(2)



(3)不存在三个或六个顶点的自补图。

(4)证明：

假设一个自补图中有e条边，则补图中边数也为e，则该图的

完全图中边数为2e,为一偶数。

而4k+2与4k+3个顶点的图其完全图中的边数分别为C(4k+2,2)与C(4k+3,2)，

$C(4k+2,2)=\dfrac{(4k+2)(4k+1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$,

$C(4k+3,2)=\dfrac{(4k+3)(4k+2)}{2}(2k+1)(4k+3)$,显然C(4k+2,2)与C(4k+3,2)均为奇数，

这与前面自补图的完全图中有偶数条边是矛盾的，故自补图的定点数不可能是4k+2与4k+3.

5.6

(1)证明：

用反证法：

假设完全图G(V,E)存在导出子图G(V′)不是一个完全图

则$\exists a,b \in V'$， 在G(V′)中a、b之间没有边，

而在G(V,E)中a、b之间恰有一条边e，由导出子图定义可知

e属于G(V′)的边集，这与在G(V′)中a、b之间没有边的结论是矛盾的，

所以G(V′)不是一个完全图的假设是不成立的。

（2）证明

设$G(V_1,V_2)$是一个二分图，G(V′)是它的任一导出子图，

令$V_1'=\{v \mid v \in V', 且 v \in V_1\}$

$V_2'=\{v \mid v \in V', 且 v \in V_2\}$，

$\forall a,b \in V'$，若a,b之间存在边e，

则在$G(V_1,V_2)$中a,b之间也存在边e，

不妨设$a \in V_1$，$b \in V_2$,则有$a \in V_1'$，$b \in V_2'$，

易知$V_1' \cup V_2' = V'$，$V_1' \cap V_2' = \varnothing$，这说明G(V′)也是二分图。

5.7

证明：

（1）若a所在的闭链除首尾顶点外没有重复顶点，则该闭链本身为一个回路。

（2）若不然，则说明除首位顶点外存在其他的重复顶点，

设这一闭链表示为序列$a, e_0, v_1, e_1, \ldots, v_i, e_i, a$.

对该序列进行如下处理：

从顶点a开始遍历整个序列，在遍历的过程中删除掉重复出现的顶点之间的部分（保留重复顶点中的一个以保证保留部分的连通性）.

设保留下来的序列为s。

则s中仅有首尾位置的a是重复的顶点，且s是连通的，所以s是一个回路。

5.8

证明：

若v_1, v_2之间存在一条路径r, 若r的边数不多于n−1，则命题自然成立；

若不然，r的边数大于n−1, 不妨设为k,

则这条路径上有k+1个顶点，k+1>n, 这说明在这条路径上存在重复的顶点，则可以遍历该路径，删除掉所有重复顶点间的部分，使最终保留下来的路径中顶点没用重复，则路径中顶点数目不多于n ，则相应的边数不多于n−1.

5.9

证明：

必要性是显然的，顶点的度之和为偶数。

充分性：$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数 $\Rightarrow (d_1, \ldots, d_n)$是某图的度序列。

设序列$(d_1, \ldots, d_n)$满足$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数的条件，并设与之对应的顶点序列为$(v_1, \ldots, v_n)$, 则对于v_i分两种情况构造边使得它的度为d_i：

(1) d_i为偶数：

在v_i上添加$\frac{d_i}{2}$个自环即可。

(2) d_i为奇数：

首先在v_i上添加$\frac{d_i-1}{2}$个自环，此时v_i度为d_i-1,

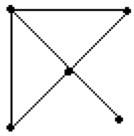
因为$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数，所以为奇数的d_i有偶数个，将对应的v_i两两分组，在同一组内的顶点间添加一条边，则这样可以使v_i的度增加1，此时v_i的度为d_i。

按以上方法可以使得每一个顶点获得相应得度数。

5.10

（1）证明：

可构造满足条件的图：



（2）

$(7,6,5,4,3,3,2)$:7个顶点的简单图中不存在度为7的顶点；

$(6,6,5,4,3,3,1)$：若有一个顶点度为1，则不可能同时存在两个度为6的顶点。

（3）充分条件:加入v_1即可。

必要条件：设G为单图，其图序列为d，且$d(v_i)=d_i, i=1,2,3,\dots,n$

(1)若v_1关联的d_1条边恰好是$v_2,v_3,\dots v_{d_1},v_{d_1+1}$,则$G-v_1$的图序列就是$d'$.

(2)若v_1关联的d_1条边中，有v_1v_j,且$j>d_1+1$.

令$j_0=\max\{j \mid v_1v_j\in E(G)\}>d_1+1$,

$i_0=\min\{i \mid v_1v_i\notin E(G)\}\le d_1+1$,则

$v_1v_{j_0}\in E(G)$,且$j>j_0$时，$v_1v_j\notin E(G)$；$v_1v_{j_0}\notin E(G)$，且$i<i_0$时，$v_1v_i\in E(G)$。

$\because i_0<j_0$, $\therefore d_{i_0}>d_{j_0}$

那么，存在k, $v_kv_{i_0}\in E(G), v_kv_{j_0}\notin E(G)$，那么，在G的基础上构造$G'$，

令$v_kv_{i_0}\notin E(G)$，$v_1v_{i_0}\in E(G), v_1v_{j_0}\notin E(G), v_kv_{j_0}\in E(G)$,那么$G'$与$G$有相同的图序列....一直这样改下去，直到$v_1$关联的边是$\{v_2,v_3\dots v_{d_1+1}\}$.

5.11

证明：

用反证法证明

设存在G,在满足$\delta>\left[\frac{n}{2}\right]-1$的条件下不是连通的，

则G一定有至少两个连通分支，且必定存在一个连通分支G',G'的顶点数不大于$\left[\frac{n}{2}\right]$,则G'中任一顶点的度不大于$\left[\frac{n}{2}\right]-1$，这与$\delta>\left[\frac{n}{2}\right]-1$的条件矛盾。

5.12

（1）证明：

$\omega(G) \le \omega(G-e)$显然的；

以下证明：$\omega(G-e) \le \omega(G)+1$

在$G-e$上添一条e边，使其成为G可以分两种情况讨论：

1）e连接了两个连通分支，则$\omega(G)=\omega(G-e)-1$，此时$\omega(G-e)=\omega(G)+1$

2）e添在了一个连通分支中，则$\omega(G)=\omega(G-e)$，此时$\omega(G-e)<\omega(G)+1$

综上所述，总有$\omega(G-e) \le \omega(G)+1$。

(2)可以举反例。

5.13

证明：

1）充分性：e不包含在G的任一回路中$\Rightarrow e>$是割边

用反证法，假设e不是割边，即$\omega(G-e)>\omega(G)$不成立，

则$\omega(G-e) \le \omega(G)$，又由5.12中结论$\omega(G-e) \ge \omega(G)$可知

$\omega(G-e)=\omega(G)$，这表明删除e前后图的连通性没有变化。

设e的顶点为u、v,则在$G-e$中u、v间仍然存在通路，不妨设为$u,e_1,.....,e_i,v$.

则在G中存在回路$u,e_1,.....,e_i,v,e,u$.这与e不包含在G的任一回路中是矛盾的。

2）必要性：反证法，显然可证。

5.14

（1）证明：

可用5.11结论证明。

（2）

不一定是连通图，比如它有两个各有n个顶点的全连通分支，

两个连通分支间是不连通的，分支内各顶点度均为n-1.

5.15

证明：

若p_1与p_2没有公共顶点，则$p_1 \cup p_2$为一奇路。

若p_1与p_2存在公共顶点则做如下处理：

若p_1与p_2上存在公共边，则删除掉这些公共边。

p_1与p_2保留的部分分别记为p_1'与p_2'，则p_1'与p_2'只有公共顶点，这些

公共顶点在p_1'与p_2'上产生了若干回路（n个公共顶点形成n-1个回路）

且由于p_1与p_2删除的边数是相等的，p_1'与p_2'的长度仍然是一奇一偶，

即p_1'与p_2'的边的总数为奇数。

p_1'与p_2'的边的总数也等于p_1'与p_2'上所有回路的边数之和（删除公共边的目的），

若G中只有偶回路，则这些回路的边数之和为偶数，与

p_1'与p_2'的边的总数为奇数矛盾，所以p_1'与p_2'上含有一条奇路p，

又因为$p_1' \subseteq p_1$，$p_2' \subseteq p_2$，所以$p \subseteq p_1 \cup p_2$。

5.16

（1）用反证法证明：

先给出如下定理：

$$C(n_1,2)+C(n_2,2)+...C(n_i,2) \le C(\sum_{k=1}^{i} n_i-1,2),(n_k \ge 1,k=1,2,...,i)$$

$$C(n_1,2)+C(n_2,2)+...C(n_i,2)$$

$$=\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}+\dots\frac{n_i(n_i-1)}{2}$$

$$\le\left(\sum_{k=1}^{i} n_i-1\right)\left(\frac{(n_1-1)}{2}+\frac{(n_2-1)}{2}+\dots\frac{(n_i-1)}{2}\right)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{i} n_i-1\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{i} n_i-i}{2}\right)\le\left(\sum_{k=1}^{i} n_i-1\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{i} n_i-2}{2}\right)=C(\sum_{k=1}^{i} n_i,2)$$

回到原问题，

设G不是连通的，其连通分支为$G_1,\dots,G_i$,两通分支的定点数分别为$n_1,\dots,n_i$

则$\sum_{k=1}^{i} n_i = n$,各连通分支中的边数分别为$e_1,\dots,e_i$.

显然$e=\sum_{k=1}^{i} e_i$

又$\sum_{k=1}^{i} e_i \le \sum_{k=1}^{i} C(n_i,2) \le C(\sum_{k=1}^{i} n_i-1,2)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$,

这与题目中已知条件矛盾，所以G不是连通的假设不成立。

（2）

两个孤立顶点组成的图

5.17

(1)若G是连通的，则命题成立。

（2）若G不连通，取G_1为G的一个连通分支，取$G_2 = G \setminus G_1$.

记V_1为G_1的顶点集，V_2是G_2的顶点集，G与$\overline{G}$的顶点集是V.

则$\forall v_1, v_2 \in V$，则有：

$<1>$ v_1, v_2都在V_1或V_2中，不妨设都在V_1中，则取V_2中一点u,则（v_1, u）与（v_2，u）均不在G中，因此都在$\overline{G}$中。

$<2>$ v_1, v_2分别在V_1与V_2中，那么，（v_1, v_2）$\notin E$(G)，因此（v_1, v_2）$\in E(\overline{G})$。

综上，$\forall v_1, v_2 \in V$，存在$\overline{G}$中链路连接v_1, v_2，因此$\overline{G}$连通。

5.18

证明：

设C为$G-v$的任意一个连通分支，若在G中v与C中k个顶点有边相连，则去掉v后，这k个顶点成为奇数度顶点，且C中其他顶点度数仍为偶数，由定理5.2可知，k为偶数，即$k \geq 2$，即v与每一个连通分支间至少存在两条边相连，所以这样的连通分支数不会大于$\frac{1}{2}d(v)$.

5.19

证明：

设P是G中最长的一条路，它的长度m小于k,设P为$v_1 v_2 v_3 \dots v_{m-1} v_m$,则$d(v_1) \geq \delta \geq k > m$,从而在$P$上顶点之外存在一个顶点$v_0$和$v_1$邻接，于是$v_0 v_1 v_2 v_3 \dots v_{m-1} v_m$是一条比$P$还要长的路，这与$P$是最长路的假设矛盾，故$m \geq k$.

5.20

证明：

设$(v_1,v_2),(v_1',v_2')$是G上两条最长路，且它们没有公共顶点。

因为G是连通图，故v_2与v_2'之间一定存在一条路，设v_3是

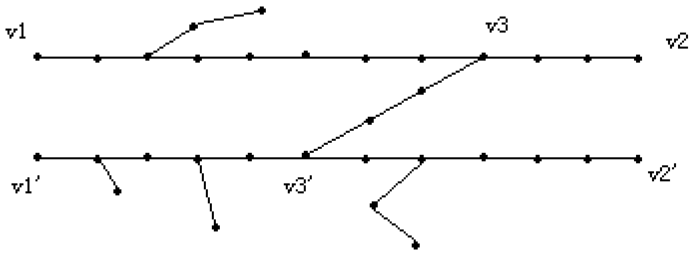
沿(v_2,v_2')方向最后一个(v_2,v_2')与(v_1,v_2)的公共顶点，

v_3'是沿(v_2,v_2')方向第一个(v_2,v_2')与(v_1',v_2')的公共顶点，

则不妨设(v_1,v_3)的长度大于(v_1',v_3')的长度，这样的

话$(v_1,v_3)\cup(v_3,v_3')\cup(v_3',v_2')$是一条比$(v_1,v_2),(v_1',v_2')$都长的路，

这与$(v_1,v_2),(v_1',v_2')$是G上两条最长路的条件矛盾，故假设不成立。



5.21

证明：

先证明一个引理：

若$\varepsilon \geq v$,则简单图G中含有回路，其中ε, v分别表示G的边数与顶点数。

若G中存在度为1的顶点，则我们除去这个顶点以及它关联的边，设得到得图为G_1，则$\varepsilon(G_1)\geq v(G_1)$，若$G_1$中仍然有度为1的点，则类似得处理得到$G_2$，一直这样进行下去，直到得到的图中没有度为1的顶点，由于在v=1或2时不可能有$\varepsilon \geq v$，所以之一过程是可以保证结束的。

假设我们最终得到了G_i,则G_i中所有顶点的度均大于1,所以G_i中存在回路，也即G中存在回路。

易证当$v>4$时，$\varepsilon(G)$与$\varepsilon(\overline{G})$中至少有一个不小于$v$，则由上面引理可知G与$\overline{G}$中至少有一个存在回路。

5.22 （感觉题目有问题，如果同学们有答案的话请告诉我，谢谢。）

5.23

证明：数学归纳法：

$k=1,2$时，显然成立

$k\ge 2$时，假设命题成立，即$m_{ij}^{(k)}$为v_i,v_j之间长度为k的路径数目，则

$m_{ij}^{(k+1)}=\sum_{t=1}^{n} m_{it}^{(k)} m_{tj}=\sum_{v_t\in\Phi} m_{it}^{(k)}$,其中$\Phi$是$j$的邻点集。

那么，一方面，$m_{it}^{(k)}$表示v_i到v_t之间长度为k的路径数目，而v_t到v_j之间

有长度为1的路径。由v_i到v_t之间长度为k的路径可以构造v_i到v_j之间长度为$k+1$的路径.

另一方面，每一条v_i到v_j之间长度为$k+1$的路径都可分解为从v_i到v_t(v_j的某个邻点)长度为k的路径再

故可证$k+1$时成立。

。

5.24

证明：

因为G为二分图，所以顶点集合V可以按邻接关系划分成两个

顶点子集V_1,V_2.

在对G的顶点标号时，给所有属于同一顶点子集的顶点以连续的

下标，也即所有标号小于某个i值的v_k属于同一个集合，所有标号

不小于i值的v_k属于同一个集合。

则$\forall k_1<i,k_2<i,v_{k_1}$与$v_{k_2}$属于同一集合，所以它们不邻接，则$m_{k_1k_2}=0$,

同样对于$\forall k_1\ge i,k_2\ge i$,也有$m_{k_1k_2}=0$,所以矩阵中存在两个元素全零的方阵。

又若$\exists m_{k_1k_2}=1$，则表明v_{k_1}与v_{k_2}邻接，则由邻接的对称性可知$m_{k_2k_1}=1$，所以$A_{21}=A_{12}^T$.

5.25

证明：

(1)必要性：

若G是连通欧拉图，则G中顶点全部为偶顶点，则由定理5.4可知

G中存在一个回路G_1',在G中将G_1'删除，得到G_2,则G_2中的所有顶点

仍然为偶顶点，则G_2中存在一个回路G_2'，在G_2中删除G_2'得到G_3，...，

重复上述过程直到得到的某个G_i，G_i中存在一个回路G_i',$G_i - G_i'$为空集。

易知$G = G_1' \cup G_2' ...... \cup G_i'$.

(2)充分性：

设$G = G_1 \cup G_2 ...... \cup G_i$，$G_1, ..., G_i$为没有重复边的一组回路。

则由于这些回路间没有重复边，任意一条边对一个顶点的度的贡献

仅限于它所在的回路内，所以满足以下等式：

$d_v = \sum_{k=1}^{i} d_{vk}$,其中$d_v$表示顶点$v$在$G$中的度，$d_{vk}$表示顶点$v$在$G_k$中的度。

由于G_k为回路，所以d_{vk}一定为偶数，则d_v一定为偶数，所以G中顶点

全部为偶顶点，因此G是欧拉图。

5.26

(1)至少需要k笔才能画成。

(2)证明：

设G中的奇顶点为$v_1, v_2, ..., v_{2k}$.

连接v_i与v_{i+k},$(1 \le i \le k)$,得到G′，则G′中的所有顶点均为偶顶点，也即

G′是欧拉图，则由习题5.25的结论可知，G′由若干条边不相重的回路

组成，则去掉那些连接G中的奇顶点的边后，这些回路分解为k条链。

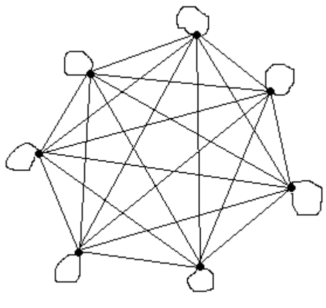
5.27

解：

在每块骨牌的两个半面上各刻着0～6中的某个数字。

做一如下一个图，图中的每一个顶点表示骨牌的一个半面，

图中的边表示以它的顶点为半面的一张骨牌。



则易知上图中恰有28条边，且每个顶点度均为偶数（8），所以存在一条欧拉回路覆盖所有28条边，这条欧拉回路刚好对应摆放骨牌的方式。

5.28

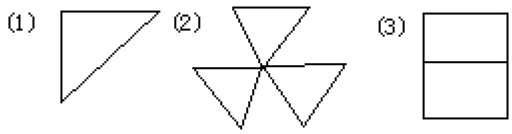
不可能的，将棋盘上的 64 个棋子位置看作图中的顶点，若两个位置之间只需马走一步，则在它们之间连一条边，这样形成的图中存在两个以上奇顶点，不能构成半欧拉图，也就是说不能把所有可以走的跳动方式走一遍。（但是可以构成哈密顿图，也就是说可以保证每个位置恰遍历一次）

5.29

(1)不一定是欧拉图，当n为偶数时，图中所有顶点均为奇顶点，所以不是欧拉图；是哈密顿图，满足$d(u)+d(v)=2(n-1)\ge n$，当$n\ge 2$时。

(2)不一定是欧拉图；不一定是哈密顿图。

5.30



5.31

取长度为$n-1$的σ^{n-1}个字标记为顶点，顶点记为$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$($\alpha_i=0,1,2,...\sigma-1$)

从顶点$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$到$\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0$的弧记为$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0$.

从顶点$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$到$\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1$的弧记为$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1$.

....

从顶点$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$到$\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(\sigma-1)$的弧记为$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(\sigma-1)$.

从$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$出来的弧有$\sigma$条

则进入$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$的弧有$\sigma$条，分别为：

从$0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}$到$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$，记为$0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$;

....

从$(\sigma-1)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}$到$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$，记为$(\sigma-1)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$.

对两个顶点，$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$，$\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}$都有一条有向路经过：

$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1},\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta_1,\ldots,\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\beta_1\beta_2,\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}$.

由定理5.11，G有一条欧拉有向链，G中每条链相邻的两条弧是

$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$与$\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}$，即第一条弧后$n-1$位与后一条弧前$n-1$位相同。这样的弧有$\sigma^n$条。

对应于欧拉有向链，存在一个σ^n个σ进制数组成的循环序列，使得每τ个连接的σ进制子序列全部相同.其中τ为对应与σ,n的笛波滤思序列。

第六章 平面图和图的着色

6.1

证明：

设G的连通分支为$G_1, G_2, \ldots, G_\omega$

设G_i的边数,定点数以及内部面数分别为n_i, e_i, f_i',

则由欧拉定理可知$n_i - e_i + f_i' = 2 - 1$(除去一个外部面),

所以$n - e + f'$(G的内部面数)$= \sum_{i=1}^{\omega}\left(n_i - e_i + f_i'\right) = \omega.$

则$n - e + f = n - e + f' + 1$(1个外部面)$= \omega + 1.$

6.2

证明：

仿照推论6.1的证明过程即可，$e \geq \frac{kf}{2} \ldots$

6.3

6.3

(1)

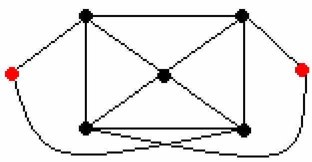
证明：

用反证法证明，假设图(a)是平面图，

经观察可知图(a)中的所有回路长度均不小于5，所以图(a)中的面至少由5条边围成，由6.2的结论可知图(a)应满足$3e \leq 5n - 10$,

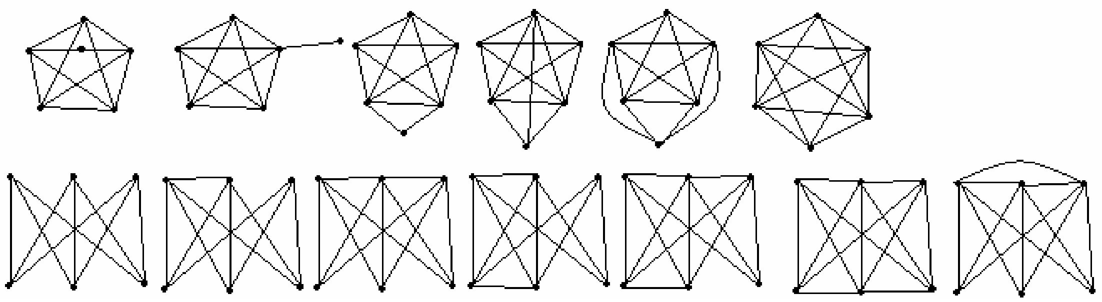
将$e = 15, n = 10$,代入上式得到矛盾，故图(a)是平面图的假设不成立。

(2) (b)的如下子图为K_5的剖分，红色顶点为剖分点



由库拉托斯基定理知，(b)不是平面图。

6.4



6.5

证明：

用反证法，假设一个边数小于30的图G中不存在度小于5的顶点，

则有$2e \ge 5n \Rightarrow n \le \frac{2}{5}e$,又$n > 3$,所以有$\frac{2}{3}e \ge f$（参见推论6.1的证明过程）

将以上两个不等式代入习题6.1的结论得：

$\frac{2}{5}e - e + \frac{2}{3}e \ge 1 + \omega(G) \ge 2 \Rightarrow \frac{e}{15} \ge 2 \Rightarrow e \ge 30$,与题设矛盾。

故假设不成立，G中存在度小于5的顶点。

6.6

证明：

连通平面简单图中每个面至少由3条边围成，所以有$2e \ge 3f$

又由欧拉公式$6 - 12 + f = 2 \Rightarrow f = 8$，则上面得不等式只能取等号，这表明每个面恰由3条边围成。

6.7

证明：

用反证法，假设每个面的边数均不小于5.

每个面的边数均不小于5$\Rightarrow 5f \le 2e \Rightarrow f \le \frac{2}{5}e$

顶点度至少为3$\Rightarrow 3n \le 2e \Rightarrow n \le \frac{2}{3}e$

将以上两个不等式代入欧拉公式得$e \ge 30$

又由$f < 12$及$f \le \frac{2}{5}e$得$e < 30$,故推出矛盾，所以假设不成立。

6.8

证明：

由题目本身可知G是平面图（否则谈不上面的概念与面着色）。

设G^*是G的对偶图，由习题6.7的结论可知，G中至少有一个面的边数小于5，这说明G^*中至少有一个顶点的度数小于5。

要证G是$4-$面可着色的等价于证G^*是$4-$（顶点）可着色的，以下用数学归纳法证明G^*是$4-$可着色的（完全类似与定理6.10的证明）：

(1) 当$n(G^*)\le 4$时结论显然成立；

(2) 假设$n(G^*)=k-1(k<12)$时，G^*是$4-$可着色的，现在考察有k个顶点的G^*，G^*中至少存在一个顶点v，满足$d(v)\le 4$，且由假设知G^*-v是$4-$可着色的，在给定G^*-v的着色后，将v以及其关联的边加入到原图G^*中，分两种情况讨论：

1）如果$d(v)<4$，则v相邻的顶点所着颜色数小于4，因此存在剩余的颜色可用来给v着色。

2)如果$d(v)=4$，将v的相邻顶点分别记为v_1,v_2,v_3,v_4，并且假设它们的对应颜色分别为1,2,3,4.

设H_{13}为G^*-v的一个子图，它是由着色1和3的顶点集合的导出子图，如果v_1,v_3属于H_{13}的不同分支，将v_1所在的分支着色1与着色3的顶点上颜色互换此时v_1着色3，这不影响G^*-v的正常着色，然后可给v着色1，得到G^*的正常$4-$着色。

如果v_1,v_3是在H_{13}的同一分支中，则在G^*-v中存在一条v_1到v_3的路，这条路与(v_1,v_0,v_3)构成一条回路，它或者把v_2围在里面，或者把v_4围在里面。由于G^*是平面图，在任何一种情况下都不存在连接v_2和v_4并且顶点着色2或4的一条路。现在设H_{24}是G^*-v的由着色2和4的顶点集导出的子图，则v_2和v_4属于不同的分支，于是可以在v_2所在的分支中对调着色2和4的顶点，v_2着色4，这不影响G^*-v的正常着色，然后则可给v着色2，得到G^*的正常$4-$着色。

3）综上所述当$n(G^*)<12$时G^*是$4-$可着色的。

G^*是$4-$可着色的等价于G是$4-$面可着色的。

6.9

最大为 4。

6.10

证明：
对顶点数进行归纳：
$v \le 6$时显然成立；
设$v \le k$时命题成立，现考虑$k+1$个顶点的平面图G,由定理6.3知
G中存在$v_0, d(v_0) \le 5$.考虑$G' = G - v_0$,显然G'仍是平面图，且
G'顶点数为k,由归纳假设知G'是6－可着色的.由于$d(v_0) \le 5$，所以
v_0在G中的邻接顶点在着色时至少有1种颜色没有用到，用这种
颜色给v_0着色，于是G也是6－可着色的.

6.11 略

6.12

(1)证明：
由库拉托斯基定理可知，G与$\bar{G}$同时为非平面图当且仅当它们都分
别包含一个子图是K_5或$K_{3,3}$的剖分。
又当n$\le$6时，$e(K_n) \le \frac{6\times(6-1)}{2} = 15 \le 2e(K_{3,3}) = 18 \le 2e(K_5) = 20$
所以n$\le$6时G与$\bar{G}$中不可能同时存在子图是K_5或$K_{3,3}$的剖分。
当n=7时，$e(K_n)=21$,则G与$\bar{G}$中至少有一个边数不大于10,不妨设
$e(G) \le 10$。
若G为非平面图则有三种情况：
a)G由K_5以及两个孤立顶点组成
b)G是$K_{3,3}$的一点剖分
c)G由$K_{3,3}$外加一个孤立顶点组成
无论G是属于上述哪种情况，都能很容易地看到$\bar{G}$是可平面图。
因此G与$\bar{G}$至少有一个是可平面图。

(2)

证明：

若G与$\overline{G}$均为非平面图，则结论成立

若G与$\overline{G}$中有一个为平面图不妨设为G,则来考察$\overline{G}$：

由推论6.1知$e(G)\le 3n-6$,又$e(G)+e(\overline{G})=\dfrac{n(n-1)}{2}$

所以$e(\overline{G})\ge \dfrac{n^2-7n+12}{2}$,当$n\ge 11$时,$\dfrac{n^2-7n+12}{2}>3n-6$

也即$e(\overline{G})>3n-6$，

所以由推论6.1可知，$\overline{G}$不是平面图。

所以G与$\overline{G}$中至少有一个是非平面图。

6.13 略.

6.14

解：

$(a)\chi(G)=2,\chi'(G)=4;(b)\chi(G)=3,\chi'(G)=4.$

6.15

证明：

用反证法，假设$\chi(G)\ge 6$，且G已经着色.

令G_1为G中着1,2,3颜色的顶点在G中的导出子图，

G_2为G中着4,5,6,...,$\chi(G)$颜色的顶点在G中的导出子图，

显然$\chi(G_1)\ge 3$，$\chi(G_2)\ge 3$，

由于二分图的色数为2,故G_1与G_2都不是二分图，也即是说

G_1与G_2是两个奇圈.

又易知G_1与G_2没有公共顶点，这与题设条件矛盾，所以假设是不成立的。

6.16

（1）证明：

用数学归纳法证明如下：

(1)当直线数n＝1时，平面分成两个半平面，恰可用两种颜色着色。

(2)假设当n=k时，平面是2-面着色的。

在n=k+1时，当第k+1条直线未加入时，给定一种2-面着色方案，第k+1条直线加入后，它将原有平面分为两个区域R_1与R_2，此时采取这样的着色方案：R_1中着色不变，R_2中着色取反。则在新的作色方案中那些本来就同在R_1或R_2中的相邻面之间着色依然不同，而以第k+1条边为界相邻的面其着色互为取反，故也不相同。因此此时平面依然是2-面着色的。

(3)综上所述可知，任意有限条直线划分平面所得的图是两面着色的。

(2)

仿照上一问的思路可证。

6.17 略

6.18 略

第七章 树

7.1

证明：

充分性：$e=n-\omega \Rightarrow G$是森林。

设G的分支分别为$T_1,T_2,...T_\omega$

在G中添加$\omega-1$条边$e_{1,2},e_{2,3},...e_{\omega-1,\omega}$,其中$e_{i,i+1}$的端点分别在$T_i$与$T_{i+1}$中，

则这样得到的图G'是含有$n-1$条边的连通图，由定理7.1(3)可知G'

是一棵树，则G'中没有回路。

然后在G'中去掉$e_{1,2},e_{2,3},...e_{\omega-1,\omega}$,则得到的$T_1,T_2,...T_\omega$分别是无回路的连通图，因此$T_1,T_2,...T_\omega$都是树，则$G$是森林。

必要性：G是森林$\Rightarrow e=n-\omega$

$$e=\sum_{i=1}^{\omega}e(T_i)=\sum_{i=1}^{\omega}(n(T_i)-1)=\sum_{i=1}^{\omega}n(T_i)-\omega=n-\omega.$$

7.2

证明：

假设非平凡树T中最长路为(u,v).

用反证法证明：

假设u与v中至少有一个的度不为1，不妨设为v，在非平凡树中这意味

$d(v)\geq 2$.

设在(u,v)中与v相邻的顶点为w,则$d(v)\geq 2$表明除w外，v还与其他顶点相邻

不妨设为q,且一定有$q\notin(u,v)$，否则T中存在回路，这与T是树矛盾。

因此(u,v,q)也是T中的一条路，路(u,v,q)的长度比(u,v)长度大1,这与

(u,v)是最长路矛盾，故假设不成立，原结论正确。

7.3

证明：

(1)设T中有且仅有两片树叶u,v

则$\sum\limits_{v\in V(T)-\{u,v\}} d(v)=2(n-1)-d(u)-d(v)=2(n-1)-2=2(n-2),$

$\because \forall v\in E(T)-\{u,v\},d(v)>1$

$\therefore \forall v\in E(T)-\{u,v\},d(v)=2$

则T中恰有两个奇顶点，故T中存在半哈密顿路，此路包含了T中所有顶点，且由$\forall v\in E(T)-\{u,v\},d(v)=2$知此路包含了$T$中所有的边，故$T$是一条路。

(2)任意一棵树T中均不含回路，因此不含奇回路，故T是二分图。

7.4

(1)解：

设n_i表示度为i的顶点的个数，则有$n(T)=n_1+n_2+n_3+n_4=6+n_1.$

$e(T)=n(T)-1=5+n_1.$

$\sum\limits_{v\in V(T)} d(v)=n_1+2n_2+3n_3+4n_4=19+n_1$

又$\sum\limits_{v\in V(T)} d(v)=2e(T)=10+2n_1$

所以$10+2n_1$═$19+n_1\Rightarrow n_1$═$9.$

(2)

仿（1）中思路可求得$n_1=\sum\limits_{i=3}^{k}(i-2)n_i+2$

(3)

由（2）中结论可知$n_1\ge n_i(i=3,4,\ldots\Delta)$

若$n_1\ge n_2$，则由$n_1\ge n_i(i=2,3,4,\ldots\Delta)$

若$n_1\le n_2$，则由$n_2\ge n_1\ge n_i(i=3,4,\ldots\Delta)$

7.5

证明：
由7.4(3)中的结论，若$\Delta > 2$则，$n_1 \geq \Delta \geq k$;
若$\Delta = 2$,则由定理7.2知$n_1 \geq 2 = \Delta \geq k$;
所以总是有$n_1 \geq k$.

7.6

证明：
用数学归纳法证明：
(1)当$k=1$，时G中有且仅有两个奇顶点，由定理7.4可知G中只包含一棵树T,又由习题7.3(1)的结论可知G是一条路.
(2)假设当$k=n-1$时结论成立。
当$k=n$时，任取G中一棵树T，则T中至少有2片叶子，设为u,v,它们之间存在且仅存在一条路$p_n=(u,v)$,在T中删去$E(p_n)$，得到的图G'中有$2(n-1)$个奇顶点，由前面的假设知存在$n-1$条无公共边的路p_1，p_2,...p_{n-1},使得
$G' = E(p_1) \cup E(p_2) \cup E(p_3) ... \cup (p_{n-1})$
则对G有$G = G' \cup E(p_n) = E(p_1) \cup E(p_2) \cup E(p_3) ... \cup (p_{n-1}) \cup E(p_n)$,故命题成立。

7.7

(1)略

(2)
证明：
$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$,由习题5.9可知$d_i$是图的度序列，设$G$是满足这个度序列的图集中具有最小分支数的一个，以下证明$\omega(G)=1$.
若G不连通，则$\omega(G) \geq 2$,且至少有一个分支G_1含有圈C_1。若不然的话G是森林，则有$e(G) = n - \omega < n-1$矛盾。
在C_1中任取一边u_1v_1,在G的另一分支C_2中任取一边u_2v_2,
构造图$G' = G - \{u_1v_1, u_2v_2\} + \{u_1v_2, u_2v_1\}$
则G'也是满足度序列d_i的图，且$\omega(G') = \omega(G) - 1$，这与$G$具有最小分支数矛盾，故$G$不连通的假设是不成立的。
所以$\omega(G)=1$，则由定理7.1(3)知G是树。

7.8

证明：

充分性：连通图G的每条边都是割边$\Rightarrow G$是树。

连通图G的每条边都是割边$\Leftrightarrow$删去G中任意一条边后，便不再连通

由定理7.1(5)可知G是树。

必要性：G是树$\Rightarrow G$的每条边都是割边。

G是树$\Leftrightarrow$删去G中任意一条边后，便不再连通$\Rightarrow G$的每条边都是割边。

7.9

2^{n-3}

7.10

证明：

设回路C为$v_1e_1v_2e_2...v_iav_{i+1}...v_jbv_{j+1}...v_ke_kv_1$

构造这样一个割集D,删去D后得到的两个连通分支顶点集为

$V_1=\{v_{j+1},v_{j+2},...v_k,v_1,...,v_i\},V_2=\{v_{i+1},v_{i+2},...,v_j\}$

且D是所有满足条件的割集中最小的，

则$\{a,b\}\subseteq D$,且除a,b外，C中其他边不在D中，否则这与D是最小的割集

矛盾。

对于C与D，有$C\cap D=\{a,b\}$.

7.12

证明：

C_1中存在以a的两个顶点u,v为叶节点的生成树T_1, C_1中也存在以u,v为叶节点的生成树T_2，且在$T_1\cup T_2$中u,v为仅有的两个叶节点，易知$\forall v\in V(T_1\cup T_2-\{u,v\})$，$d(v)\geq 2$,所以在$T_1\cup T_2$上存在包含$b$的一条回路$C_3$.

7.13

证明：

思路提示：

设D把V划分为V_1，V_2。

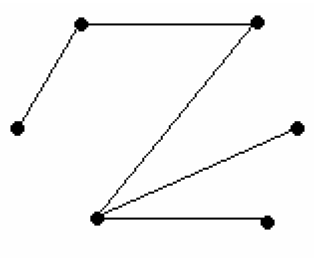
若e_1包含在其他的某个基本回路C中，则在删除割集D后，e_1的两个端点之间在C中仍然存在一条不包含e_1的通路，这与D是割集矛盾。

任意$e_i\left(2\leq i\leq k\right)$对应的基本回路$C_i'$中必同时包含至少两条边满足它们的端点分别属于$V_1$，$V_2$，否则的话$C_i'$中只有一条这样的边$e_i$是构不成回路的，这意味这$C_i'$中包含至少两条$D$中的边，除$e_i$外另外那条边只能是$e_1$.

7.14

思路可仿照上题

7.15



7.16

该算法可以用来求最大生成树，只需把边的权值取相反数（或倒数），然后用原克鲁斯科算法即可。

7.17

证明：

$n \geq 2$时G的生成子图T中至少有两个叶节点，删去这两片树叶后T的剩余部分仍然是连通的，它所对应的G的剩余部分也是连通的。

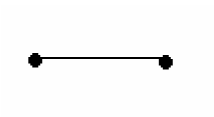
7.18

证明：

若连通图G中存在度为一的点则该点在G的生成树T中一定是叶节点，则删去它不影响剩余部分的连通性。

若G中所有顶点度均大于1，则G中必含有回路，则删去回路中任意一条边剩余部分仍然是连通的。

7.19



7.20

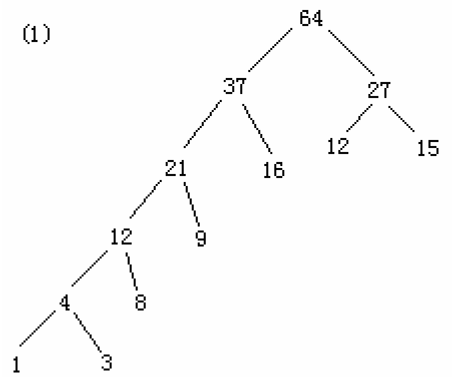
证明：

设分枝点数为i,树叶数为t,

则总顶点数为$i+t$,又由定理7.10知$i=t-1$

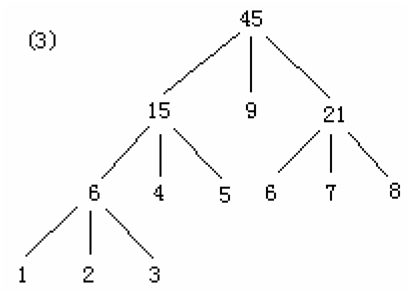
所以$i+t=2t-1$为偶数。

7.21



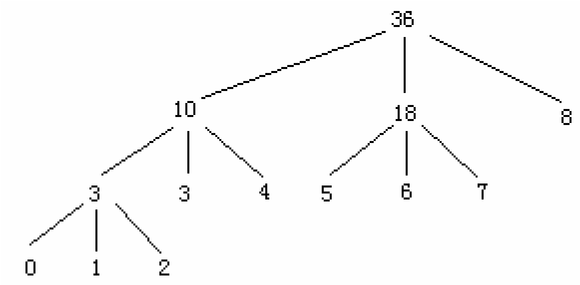
(2)

将原算法修改为每次取具有最小权的m棵树即可。



(4)

用0权值的节点补齐，使得t-1是m-1的整数倍，然后用(2)中的方法做。



7.22

证明：

(1)

$e(T)=mi$

$e(T)=n-1=(i+t)-1$

$\therefore mi=(i+t)-1 \Rightarrow (m-1)i=t-1$

(2)对分支点数i进行归纳证明

1)当$i=1$时，树中只用根节点为分枝点，其余m个点为叶节点，

此时$E=m, I=0, (m-1)I+mi=m=E.$

2)假设当$i=k$时，$E_k=(m-1)I_k+mi_k$成立

在$i=k$的m分树上任选一个树叶（设它到根节点的路长度为l），给它添加m个子节点使其变成分枝点，则此时树中有i_k+1个分枝点。

$i_{k+1}=i_k+1,$

$I_{k+1}=I_k+l,$

$E_{k+1}=E_k+m(l+1)-l=(m-1)I_k+m(i_k+1)+(m-1)l$

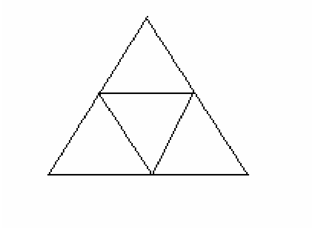
$=(m-1)(I_{k+1}-l)+mi_{k+1}+(m-1)l=(m-1)I_{k+1}+mi_{k+1}.$

所以$i=k+1$时结论也是成立的。

由1以上归纳假设证明可知原结论是成立的。

第十章　鸽笼原理

10.1



如上图所示对正三角行划分，得到四个互不相交小三角形。放置在三角形内的任意 5 个点必有两个点落入同一个小三角形（含边界），而每一个小三角形边长为 1，其内（含边界）两点距离不大于一。

10.2

证明：

Z上的模n同余关系将Z划分为n个模n同余类：

$[0]_n,[1]_n \dots [n\text{-}1]_n$

令$S_m=\sum_{i=0}^{m}a_i,(a_0=0).$

则$S_0,\dots,S_n$共$n+1$个整数，根据鸽笼原理这$n+1$个整数必有两个落入同一个模n同余类。

设$S_k\equiv S_l(\bmod n)$,则有（S_k-S_l）$\equiv 0(\bmod n)$

即$a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_l$被$n$整除。

10.3

证明：

构造$N+1$个整数：

$7,77,777,\dots,\underbrace{7\dots7}_{N+1个7}.$

则这$N+1$个整数必有两个属于同一个模N同余类，

这两个数的差可被N整除，且仅由0和7组成。

10.4

证明：

36段中每一段都可作为相邻三段的起始段，

所以圆盘上相邻的三段共有36组.

这36组的数字之和为$(1+2+...+36)\times 3$.

其平均值为$\frac{(1+2+...+36)\times 3}{36}=55.5>56-1$

由鸽笼原理的加强形式知必存在三段之和大于56.

10.5

略。

10.6

证明：

(1)

将1,2,...100分成50组 $\{1,50\},...\{i,i+50\},...\{50,100\}$

则51个数必有两个分在同一组，其差为50。

(2)

设取出的数为$a_1,a_2,...a_k$

a_i（$1\le i\le k$）可表示为$a_i=2^{m_i}n_i$,其中$m_i=0,1,2...,n_i$为奇数.

而1~100之间奇数有50个，故存在$n_i=n_j$,

不妨设$a_i>a_j$,则$a_i/a_j=2^{m_i-m_j}$,即a_i是a_j的整数倍。

10.7

证明：

模2n同余关系将整数集划分成2n个同余类：

$[0]_{2n},[1]_{2n},\ldots,[2n-2]_{2n,}[2n-1]_{2n}$

将这些类重新组合成n+1个类：

$\{[0]_{2n}\}\{[1]_{2n},[2n-1]_{2n}\},\{[i]_{2n},[2n-i]_{2n}\},\{[n]_{2n}\}$

则任取的n+2个数中必有两个落入同一分组

若这两个数模2n同余，则其差可被2n整除；

若不然，则其余数之和等于2n，两数之和可被2n整除。

第十一章 排列与组合

11.1

(1)$P(5,3)$

(2)5^3

11.2

解：

第一位有9种选择，后三位有P(9,3)种情况，共9P(9,3)种。

11.3

解：

在除去a,b的24个字母中选取7个进行排列——P(24,7)

a,b之间的排列——P(2,2)

将a,b与选定的7个字母作为整体与其他17个字母排列——P(18,18)

总排列数为P(2,2)P(24,7)P(18,18)=36×P(24,24)。

11.4

解：

（这里考虑的是四相邻，即认为一个方格只与其前后左右四个方格相邻）

对于每一行与每一列，都有7组相邻方格，所以总数为7(8+8)=112.

11.5

(1)解：

将be作为一个整体与其余四个字母排列——P(5,5).

(2)解：

六个字母的全排列——P(6,6)

其中b在e的左或右各占一半，所以所求为P(6,6)/2。

11.6

解：

六个先生的环排列——$P(6,6)/6$.

将女士插入6个空位（此时不需要考虑环排列）——P(6,6).

总数为$P(6,6)^2/6$。

11.7

解：

（以下过程中认为所有位子是一样的）

先安排十个人的环排列——P(10,10)/10,

再将不愿相邻的两人插入十个人中——P(10,2).

总数为P(10,2)P(10,10)/10.

11.8

(1)$C(200,30)\times C(200,30)$

(2)$C(200,25)C(175,5)C(170,25)$(公式不唯一)

11.9

(1)C(15,5)C(10,5)C(5,5)

(2)此时组与组之间没有区分:C(15,5)C(10,5)C(5,5)/3!.

11.10

解：

将1□1000按模4同余关系划分：

A=$\left\{x\mid x\equiv 0\pmod{4}\right\}$,

B=$\left\{x\mid x\equiv 1\pmod{4}\right\}$,

C=$\left\{x\mid x\equiv 2\pmod{4}\right\}$,

D=$\left\{x\mid x\equiv 3\pmod{4}\right\}$.

$|A|=|B|=|C|=|D|=125$

则有以下取法使得三个数之和被4整除：

(1)三个数全部取自A--C(125,3)

(2)两个取自B,一个取自C--C(125,2)C(125,1)

(3)两个取自C,一个取自A--C(125,2)C(125,1)

(4)两个取自D，一个取自B--C(125,2)C(125,1)

(5)A,B,D各取一个——125^3

总数为C(125,3)+3C(125,2)C(125,1)+125^3

11.12

解：

设多重集$S=\{3\cdot white, 2\cdot yellow, 2\cdot green, 5\cdot blue\}$

所求为S的全排列数＝$\dfrac{12!}{3!2!2!5!}$

11.13

(1)解

b, c, d, e的全排列数--4!

将5个a插入b, c, d, e形成的5个空位--C(5, 5)

总数为4!

(2)解

将b, c, d, e插入5个a形成的6个空位--P(6, 4)

11.14

(1)

两个英文字母(可重复)--26^2

四个数字(可重复)--10^4

共$26^2 10^4$

(2)

$P(26,2)10^4$

11.15

(1)解:

先选取并排列前9张牌的点数--P(13, 9)

确定前9张牌的花色--4^9

选择第十张牌的点数--C(9, 1)

选择第十张牌的花色--C(3, 1)

总数为4^9P(13, 9)C(9, 1)C(3, 1)

(2)解:

所有取十张牌的取法--P(52, 10)

第十张牌与前九张牌点数不重复的取法--C(52, 1)P(48, 9)

所求为P(52, 10)-C(52, 1)P(48, 9)

11.16

解: 10^4。

11.17

解：

（以下过程认为位子的不同只体现在位子的位置上）

先将三组相邻的位子安排好，例如从左到右（每一组视为一个整体），这样的安排只有一种（每一组是等价的）.

然后将剩余的5个位子插入三组形成的四个空位中，

令S=$\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c,\infty\cdot d\}$

a,b,c,d分别表示四个空位，元素的重数表示可以放入位子的个数.

则将剩余的5个位子插入三组形成的四个空位中的方法数就是

S的5-组合数--C(4+5-1,5)=C(8,5)

而以上每一种插入空位的方法反过来对应一种从20个位子中选取

3组相邻位子的方法，所以所求选取的方法数为C(8,5).

11.18

解：

r=1时，1-组合数为k;

$r\geq 2$时，份两种情况;

(1)选取a_1,这时的组合有C(k-1+r-1-1,r-1)种.

(2)不选取a_1,此时组合数为$C(k-1+r-1,r)$种.

总组合数为C(k+r-3,r-1)+$C(k+r-2,r)$

11.19

解：

设$S_1=\{a_1,a_2...,a_t\},S_2=\{\infty\cdot a_{t+1},\infty\cdot a_{t+2}...,\infty\cdot a_k\}r$

在S中选取r个数可以分解为$t+1$种情况:

定义第$i(0\leq i\leq t)$种情况为:在S_1中选取i个元素（$C(t,i)$种），

在S_2中选取$r-i$个元素（$C(k-t+r-i,r-i-1)$种).

则第i种情况下的组合数为$C(t,i)C(k-t+r-i,r-i-1)$.

所求组合数为$\sum_{i=0}^{t}C(t,i)C(k-t+r-i,r-i-1)$.

11.20

解：

对于S的每一个圆排列，都可以在a_1处断开形成一个以a_1为首的排列；反之对于一个以a_1为首的排列都可以首尾衔接形成一个圆排列。所以S的圆排列与以a_1为首的排列(普通排列)是一一对应的。

而以a_1为首的排列数即为S'=S-$\{a_1\}$的全排列数＝$n!/n_2!...n_k!$

所以S的圆排列数是$n!/n_2!...n_k!$

11.21

(1)$C(6,1)C(5,2)C(3,3)$

(2)$C(6,2)C(4,2)C(2,2)$

(3)$C(6,1)C(5,2)C(3,3)P(3,3)$

11.22

解：

选取得一本书的两个人--C(5,2)

分书给两个人--P(8,2)

将剩余6本书分给3个人--C(6,2)C(4,2)C(2,2)P(3,3)

总数：P(8,2)C(5,2)C(6,2)C(4,2)C(2,2)P(3,3)

11.23

$C(6,2)C(4,2)/P(3,3)$

11.24

$C(6,1)C(5,2)C(3,3)$

11.25

一本的两堆--C(8,2)

剩下的6本分三堆--C(6,2)C(4,2)C(2,2)/$P(3,3)$

11.26

解：
组成4个委员会(每个委员会两人)的方法数--C(8,2)C(6,2)C(4,2)/P(4,4)
组成3个委员会的方法数:
两个委员会两人，一个委员会4人--C(8,4)C(4,2)C(2,2)/P(2,2)
一个委员会两人，两个委员会3人--C(8,2)C(6,3)C(3,3)/P(2,2)
组成两个委员会的方法数：
一个委员会两人，一个委员会6人：--C(8,2)C(6,6)
一个委员会3人，一个委员会5人：--C(8,3)C(5,5)
两个委员会各4人：--C(8,4)C(4,4)/P(2,2)
组成一个委员会的方法显然为一种，
则可组成的委员会总数为以上各项之和。

11.27

解：
方法一：首先将这100个同学按身高升序排列，用排名来表示这100个同学为$s_1, s_2, ... s_{100}$。
则第一组中最高的同学可以在集合$\{s_{10}, s_{11}, ..., s_{90}\}$中选择，
假设我们选取$s_i (10 \le i \le 90)$同学为第一组中最高的同学,
则此时第一组中其余9位同学的选取方式有C(i-1,9)种，
第二组10位同学（排名均大于i）的选取方式有C(100-i,10)种,
此时的分组方式有C(i-1,9)C(100-i,10)种
所有的分组方式总数为$\sum_{i=10}^{90} C(i-1,9)C(100-i,10)$
方法二：从100名学生中选取20名学生，按从高到矮排列即可：
C(100,20)

11.28

解：
$C(22,5)C(17,5)P(5,2)C(12,4)C(8,4)C(4,4)P(3,3)$

11.29

$$\left(\prod_{i=0}^{n-1} C(2n-2i,2)\right) \Big/ P(n,n)$$

11.30

解：

设Z_i为1到1000之间能被i整除的整数的个数，

则题目所求为1000－$|Z_5 \cup Z_6 \cup Z_8|$

$|Z_5| = 1000/5 = 200, |Z_6| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166, |Z_8| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$

$|Z_5 \cap Z_6| = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

$|Z_5 \cap Z_8| = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|Z_6 \cap Z_8| = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|Z_5 \cap Z_6 \cap Z_8| = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

利用容斥原理可计算$|Z_5 \cup Z_6 \cup Z_8|$=400，则题目所求为600.

11.31

解：

A到B的全部映射数为m^n.

设$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$

设A到B上的映射组成的集合$\mathrm{S_i}=\{f:A\to B|$在映射f下b_i不存在原象$\}$

则A到B不同满射的个数为$m^n-\left|\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{S_i}\right|$

$\left|\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{S_i}\right|$的计算需用容斥原理：

$|\mathrm{S_i}|=(m-1)^n, \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{s}}|\mathrm{S_i}|=m(m-1)^n$

$|\mathrm{S_i}\cap\mathrm{S_j}|=(m-2)^n, \sum_{i<j}|\mathrm{S_i}\cap\mathrm{S_j}|=C(m,2)(m-2)^n$

...

$|\mathrm{S_{i_1}}\cap\mathrm{S_{i_2}}...\cap\mathrm{S_{i_k}}|=(m-k)^n, \sum_{i_1<i_2<...<i_k}|\mathrm{S_{i_1}}\cap\mathrm{S_{i_2}}...\cap\mathrm{S_{i_k}}|=C(m,k)(m-k)^n, (1\le i_1<i_2<...<i_k\le m)$

...

$|\mathrm{S_1}\cap\mathrm{S_2}...\cap\mathrm{S_m}|=0$

将以上各项代入容斥原理公式（注意每一项的符号）可求得$\left|\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{S_i}\right|$，

继而可求得满射的个数。

11.32

提示：

设集合A:出现beg的排列情况组成的集合

$|\mathrm{A}|$=P(5,5)

B:出现cad的排列情况组成的集合

$|\mathrm{B}|$=P(5,5)

用容斥原理易求$|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|$=2P(5,5)-P(3,3)，

所求为$P(7,7)-|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|$= P(7,7)-2P(5,5)+P(3,3)=4806

11.33

解：

$6^n-5^n\times2+4^n$

11.34

解：

设完全平方数的组合为A,完全立方数的组合为B,

则$|A|=100$

$|B|=21$

$|A\cup B|=100+21-4=117$

则题目所求为9883

11.35

将容斥原理用到多重集D=(∞.a,∞.b,∞.c,∞.d)上

Y表示S的10组合数

$|Y|=C(13,10)=286$

A_1表示其中b多于3个

$|A_1|=C(9,6)=84$

A_2表示其中c多于5个

$|A_2|=C(7,4)=35$

A_3表示其中d多于8个

$|A_3|=C(4,1)=4$

$|A_1\cap A_2|=1$

则$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=164$

11.36

解：

(1)

设$S=\{8\cdot a,8\cdot b,8\cdot c\}$

，则该问题等价于求S的14组合数.

$|S|=C(16,2)-3C(7,2)=57$

(2)

设$S'=\{7\cdot a,7\cdot b,7\cdot c\}$

则该问题等价于求S的11组合数.

$|S|=C(13,2)-3C(5,2)=48$

11.37

(1)设集合$A_i(i=2,4,6,8)$表示数字i出现在其自然顺序位置上的排列组成的集合。

所求为$P(8,8)-\left|\bigcup_{i\in\{2,4,6,8\}} A_i\right|$,使用容斥原理求$\left|\bigcup_{i\in\{2,4,6,8\}} A_i\right|$。

(2)首先我们选定出现在自然顺序位置的k个整数，有C(n,k)种选法

设剩余的整数组成的集合为S=$\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-k}\}$

设集合A_i表示a_i出现在其自然顺序位置的排列组成的集合

则题目所求为P(n,n)-C(n,k)$\left|\bigcup_{i=1}^{n-k} A_i\right|$

$\left|A_i\right| = P(n-k-1,n-k-1),\sum_{i=1}^{n-k}\left|A_i\right| = (n-k)P(n-k-1,n-k-1)$

$\left|A_i \cap A_j\right| = P(n-k-2,n-k-2),\sum_{i<j}\left|A_i \cap A_j\right| = C(n-k,2)P(n-k-2,n-k-2)$

...

$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_j}\right| = P(n-k-j,n-k-j)$

$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_j}\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_j}\right| = C(n-k,j)P(n-k-j,n-k-j)$

$(1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m)$

...

$\left|A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_m\right| = 1$

将以上各项代入容斥原理即可求得$\left|\bigcup_{i=1}^{n-k} A_i\right| = 24024$

11.38

提示：

对该题的分析可参照11.37(2)中对不在自然序上的n-k个数的排列所作的分析。

$D_n = C(n,0)P(n,n)-C(n,1)P(n-1,n-1)+\ldots+(-1)^n C(n,n-1)$

11.39

解：

总的排列数$|S| = \mathrm{P}(9,9)/\mathrm{P}(3,3)\mathrm{P}(4,4)\mathrm{P}(2,2)=1260$

a的全体相邻:$|\mathrm{A}_1|=\mathrm{P}(7,7)/\mathrm{P}(4,4)\mathrm{P}(2,2)=105$

b的全体相邻:$|\mathrm{A}_2|=\mathrm{P}(6,6)/\mathrm{P}(3,3)\mathrm{P}(2,2)=60$

c的全体相邻:$|\mathrm{A}_3|=\mathrm{P}(8,8)/\mathrm{P}(4,4)\mathrm{P}(3,3)=280$

$|\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2| = P(4,4)/\mathrm{P}(2,2)=12$

$|\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3| = P(5,5) / P(3,3) = 20$

$|\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_3| = P(6,6)/\mathrm{P}(4,4)=30$

$|\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap A_3| = 6$

根据容斥原理:

题目所求为1260-105-60-280+12+20+30-6=871

11.40

(1) D_n

(2) $n! - D_n$

(3) $n! - D_n - C(n,1)D_{n-1}$

第十二章 生成函数与递推关系

12.2

解：

(1)设母函数$f(x)=(1+x+...+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3)$

所求方法数为$f(x)$中x^5的系数：

(2)设母函数$f(x)=(1+x+...+x^5)(x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3)$

所求为$f(x)$中x^8的系数：

12.3

解：

设母函数$f(x)=(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(x^2+x^3+x^4+x^5)$

所求为$f(x)$展开式中各项系数之和，也即$f(1)$的值，$f(1)=20$。

12.4

略

12.5

解：

设A_{1r}为所有r个球中红球为偶数个，蓝球为奇数个的组合的集合。

A_{2r}为所有r个球中白球为偶数个，蓝球为奇数个的组合的集合。

A_{3r}为所有r个球中白球为偶数个，黄球为奇数个的组合的集合。

则$a_r=|A_{1r}\cup A_{2r}\cup A_{3r}|=|A_{1r}|+|A_{2r}|+|A_{3r}|-|A_{1r}\cap A_{2r}|-|A_{1r}\cap A_{3r}|-|A_{2r}\cap A_{3r}|+|A_{1r}\cap A_{2r}\cap A_{3r}|$

则$\{|A_{ir}|\}(i=1,2,3)$的生成函数为$f(y)=(1+y^2+y^4+...)(1+y+y^2+...)(y+y^3+...)(1+y+y^2+...)$

$\{|A_{1r}\cap A_{2r}|\}$的生成函数为$f(y)=(1+y^2+y^4+...)(1+y^2+y^4+...)(y+y^3+...)(1+y+y^2+...)$

$\{|A_{1r}\cap A_{3r}|\}$的生成函数为$f(y)=(1+y^2+y^4+...)(1+y^2+y^4+...)(y+y^3+...)(y+y^3+...)$

$\{|A_{2r}\cap A_{3r}|\}$的生成函数为$f(y)=(1+y+y^2+...)(1+y^2+y^4+...)(y+y^3+...)(y+y^3+...)$

$\{|A_{1r}\cap A_{2r}\cap A_{3r}|\}$的生成函数为$f(y)=(1+y^2+y^4+...)(1+y^2+y^4+...)(y+y^3+...)(y+y^3+...)$

将以上各式代入容斥原理公式得

a_r的生成函数为$f(y)=\dfrac{2y}{(1-y)^4(1+y^2)^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(1-y)^4}-\dfrac{1}{(1-y^2)^2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{k+3}^{k}y^k-C_{k+1}^{k}y^{2k}\right)\right)$

$r=23$时，$a_r=\dfrac{1}{2}C_{23+3}^{23}=1300.$

12.7

解：

设指母函数$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^2(1+x)$

所求为$f(x)$中$\frac{x^4}{4!}$的系数。

12.8

解：

$$
\begin{aligned}
\text{设指母函数} f(x) &= (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+...)(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+...)^3 \\
&= e^x(e^x-1)^3 \\
&= e^{4x}-3e^{3x}+3e^{2x}-e^x
\end{aligned}
$$

所以$f(x)$中$\frac{x^r}{r!}$的系数为$4^r-3^{r+1}+3\cdot 2^r-1$

12.9

(1)证明：

$$
\begin{aligned}
f(y) &= (1+y)^n\left[(1+y)^n+y(1+y)^{n-1}+...+y^r(1+y)^{n-r}+...+y^n\right] \\
&= (1+y)^n\left[\frac{(1+y)^{n+1}-y^{n+1}}{(1+y)-y}\right] \\
&= (1+y)^{2n+1}-y^{n+1}(1+y)^n
\end{aligned}
$$

$\because y^{n+1}(1+y)^n$中每一项次数均不小于$n+1$

$\therefore$当$0\le r\le n$时, a_r仅来自于$(1+y)^{2n+1}$，$a_r=C(2n+1,r)$,

当$n+1\le r\le 2n+1$时, $a_r=C(2n+1,r)-C(n,r-n-1)$,

当$r\ge 2n+1$时，$a_r=0$。

(2)

原式为$f(y)$中y^n的系数，代入上式得$C(2n+1,n)$.