# 线 性 代 数

## *Linear Algebra*

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

# § 1.3 行列式的基本性质

✓ **行列式六个性质:**

**1. 转置、2. 行(列)互换、**
**3. 数乘行(列)、4.** 两行**(**列**)**成比例、**5.**分行**(**列**)**相加、
**6.** 某行**(**列**)**加另一行**(**列**) k** 倍**.**

✓ **计算行列式常用方法?**

**(1) 利用定义;**
**(2) 利用性质;**
**(3)** 化为上**(**下**)**三角形行列式。

# § 1.4 行列式按行(列)展开定理

- 如何将高阶行列式转换为低阶？

## 一、余子式与代数余子式

例如

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\underline{a_{22}a_{33}} + a_{12}\underline{a_{23}a_{31}} + a_{13}\underline{a_{21}a_{32}} - a_{11}\underline{a_{23}a_{32}} - a_{12}\underline{a_{21}a_{33}} - a_{13}\underline{a_{22}a_{31}}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}$$

也可以按列展开为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}}$$

? 可否推广到 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} (\text{或} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1})$$

**定义1.5**：在 n 阶行列式|A|中，**任意**取定 k 行 和 k 列，位于这些行列交叉处的元素，按原位置所构成的 k 阶行列式称为行列式 |A|的一个 k 阶子式，记为 M 。

- 在 |A|中划去 M 所在的 k 行 和 k 列，余下元素按原位置所构成一个 **n-k** 阶行列式，称为 k 阶子式 M 的余子式 **(algebraic cofactor)**，记为 N 。

例：|A|的 第1、3行与第 2、3 列构成的二阶子式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

M 余子式为

$$|N| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

- 设 k 阶子式 M 位于行列式的第 $i_1$ 行，第 $i_2$ 行，…，第 $i_k$ 行， 与 第 $j_1$ 列，第 $j_2$ 列，…，第 $j_k$ 列，则称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots j_k}N$$

为 k 阶子式 M 的代数余子式

$$|M|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

例如 M 的代数余子式为 $(-1)^{1+3+2+3}N=-N$

- 在 n 阶行列式|A|中，把元素 $a_{ij}$ 所在的行列划去后，所得的 n-1 阶行列式(余子式)，记作 $M_{ij}$，称

$$(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式， 记作 $A_{ij}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

例如：$a_{23}$ 的余子式为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$a_{23}$ 的代数余子式为 $A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

- 行列式的每个元素分别对应着一个余子式 和一个代数余子式。

- 一个 n 阶行列式|A|，如果其中第 $i$ 行元素除 $a_{ij}$ 外都为零，那末这行列式等于 $a_{ij}$ 与它的**代数余子式**的乘积，即

$$|A| = a_{ij} A_{ij}$$

例如

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

## 证明：当 $a_{ij}$ 位于第一行第一列时

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

- 展开式每项都含有第一行的元素，第一行除 $a_{ij}$ 外均为零，故有

$$|A| = \sum_{1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(1 j_2 \cdots j_n)} a_{11} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} = a_{11} \sum_{j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 \cdots j_n)} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{2 j_2} a_{3 j_3} \cdots a_{n j_n}$$

即有 $|A| = a_{11} M_{11}.$

又 $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11},$

从而 $|A| = a_{11} A_{11}$

再证明 $a_{ij}$ 位于任意位置的情况，假设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把第 $i$ 行依次与第 $i-1$、第 $i-2$、… 第$1$ 行对换，得

$$|A| = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再把第 $j$ 列依次与第 $j$-1 、第 $j$-2、… 第1列对换，得

$$|A| = (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{ij} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 元素 $a_{ij}$ 对换前、后的余子式完全相同，∴

$$|A| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$$

## 二、按一行(列)展开定理(拉普拉斯展开)

定理1.2：n 阶行列式|A| 等于其任一行(列)上所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

证明：

利用引理

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+0+\cdots+0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0+a_{2j}+\cdots+0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0+0+\cdots+a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

例:计算三阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解：按第一行展开，得

$$|A| = -3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 27$$

验证：按定义展开，得

$$|A| = 6 + 0 + 0 - (-21) - 0 - 0 = 27$$

按第二行展开，得 $|A| = -1\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 27$

例： 计算四阶行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

解：由展开定理有

$$|A| = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} + (-5)\,(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=3\left[1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right]+5\left[(-4)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\right]$$

$$=3(-7-76)+5(152-7)=466$$

例： 计算五阶行列式 $|A|=\begin{vmatrix} \boxed{0 & 1 & 0 & 0 & 1} \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解：思路—使某一行(列)有尽可能多的零元素

$$|A| \overset{C_5-C_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{定理1.2}}{=\!=\!=} (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_4+R_1}{\overset{R_3-2R_1}{=\!=\!=}} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & -10 \\ 0 & 5 & 9 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{定理1.2}}{=\!=\!=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & -3 & -10 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -210$$

例： 计算 n 阶行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}$

解：按第一行展开，得

$$|A| = a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

➢ 已化为上、下三角行列式，故

$$|A| = a\cdot a^{n-1} + b\cdot(-1)^{n+1}\cdot b^{n-1} \quad = a^n + (-1)^{n+1}\cdot b^n$$

例：计算 n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解：行列式特点-指数逐行增加1

$$|A_n| \xlongequal[\substack{\vdots \\ R_2 - a_1 R_1}]{\substack{R_n - a_1 R_{n-1} \\ R_{n-1} - a_1 R_{n-2}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

➢ 按第一列展开，再提出各列的公因子，得

$$|A_n| = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad \boxed{\Leftarrow |A_{n-1}|}$$

- 同理可得 $\left|A_{n-1}\right| = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)\cdots(a_n - a_2)\left|A_{n-2}\right|$

$$\vdots$$

$$\left|A_2\right| = (a_n - a_{n-1}), \quad (\left|A_1\right| = 1)$$

- 综合上述递推结果 $\left|A_n\right| = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)$

$$(a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_2)$$

$$\vdots$$

$$(a_n - a_{n-1})$$

☑ 范德蒙行列式的结果很重要。

$$\xlongequal[\prod\text{表连乘}]{\text{记}} \prod_{1 \le i \le j \le n} (a_j - a_i).$$

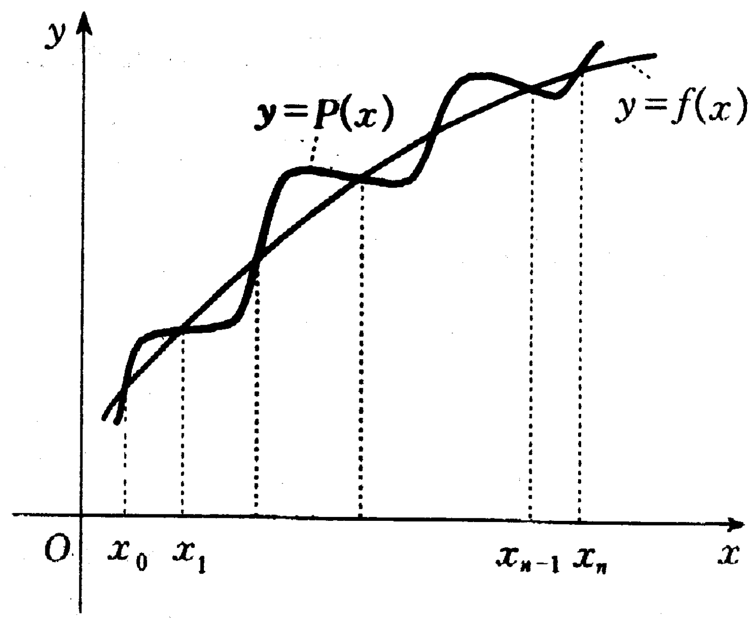
□ 所以， n 阶范德蒙行列式等于零的充要条件是：

$a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ 中至少有两个数相等。

$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 4 & 16 & 64\\ 1 & x & x^2 & x^3\end{vmatrix}=0 \text{ 的根 } x=?$$

$2, 3, 4$

# 范得蒙行列式的应用-函数插值




代数多项式 $P(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

插值原则 $P(x_i) = y_i, i = 0,1,2,\cdots,n$

由插值原则，有
$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

- 方程组系数行列式为范得蒙行列式

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i \le j \le n} (a_j - a_i)$$

- Matlab

练习：利用范德蒙行列式计算 $D_3=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

解：$D_3=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

## ❖ 布置习题

P39:

12. (1)、(3)、(6)

13. 14. 15. 16. 17

## 拉普拉斯展开的应用—加边法（升阶法）

➢ 将行列式加边，利用所加的行(列)化简。

例：

$$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

n+1阶

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ C_1-\frac{1}{m}C_{n+1}}]{\substack{C_1-\frac{1}{m}C_2 \\ C_1-\frac{1}{m}C_3}} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

m = 0 …

$$= (-m)^n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m}\right)$$

例： 计算 n 阶行列式 $|A_n|=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

$$\boxed{\therefore |A_n| = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}$$

解：按第一列展开，得|$A_n$|的递推公式

$$|A_n| = x\cdot|A_{n-1}| + a_n\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

- 下面n个等式相加
- 即 $|A_n| = x\cdot|A_{n-1}| + a_n$

- 同理可得

$$|A_{n-1}| = x\cdot|A_{n-2}| + a_{n-1}$$
$$|A_{n-2}| = x\cdot|A_{n-3}| + a_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$|A_2| = x\cdot|A_1| + a_2$$
$$|A_1| = x + a_1$$

- 所以

$$x\cdot|A_{n-1}| = x^2\cdot|A_{n-2}| + a_{n-1}x$$
$$x^2\cdot|A_{n-2}| = x^3\cdot|A_{n-3}| + a_{n-2}x^2$$
$$\vdots$$
$$x^{n-2}\cdot|A_2| = x^{n-1}\cdot|A_1| + a_2x^{n-2}$$
$$x^{n-1}\cdot|A_1| = x^n + a_1x^{n-1}$$

定理1.3： 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

证1：由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{R_j+R_i}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 两边同时按第 j 行展开，得 $\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}(a_{jk}+a_{ik})A_{jk}$
- 移项、化简，得 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0\quad(i\neq j)$

定理1.3： 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

证2：把行列式按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

用第 i行的元素 $a_{ik}$ 替换 $a_{jk}$，可得展开式

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

第 i 行

第 j 行

} 相同

当 $i \neq j$ 时，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, \quad (i \neq j).$$

**同理性质对列也成立：** $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, \quad (i \neq j).$

# 总结：代数余子式的性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = |A|\delta_{ij} = \begin{cases} |A|, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j. \end{cases}$

- 因为行列式的行与列具有对称性，所以上式中把行换成列也同样成立

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = |A|\delta_{ij} = \begin{cases} |A|, 当 i = j, \\ 0, 当 i \neq j; \end{cases}$$

## 三、拉普拉斯定理(拉普拉斯展开推广至k阶子式)

定理1.4：在行列式中任取 k 行，则由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式的值。

- 设|A| 为 n 阶行列式，任取其中 k 行，这 k 行元素组成的k 阶子式的个数为

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

- 这 k 阶子式分别记为 $M_1, M_2, \ldots M_t$ ，其中 $t = C_n^k$
- 它们对应的代数余子式记为 $A_1, A_2, \ldots A_t$ ，则有

$$|A| = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t$$

例：计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

解：取|A|的1，2两行，这两行所有的二阶子式数目为

$$C_5^2=\frac{5(5-1)}{2!}=10$$

- 但是其中7个子式为零，余下的3个非零子式为

$$M_1=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=19 \quad M_2=\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=30 \quad M_3=\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=36$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19 \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 30$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

➢ 它们对应的代数余子式依次为

$$A_1 = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 65 \quad A_2 = (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$A_3 = (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

➢ 由拉普拉斯定理

$$\begin{aligned} |A| &= M_1 A_1 + M_2 A_2 + M_3 A_3 \\ &= 19 \times 65 + 30 \times (-19) \\ &= 665 \end{aligned}$$

例：计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

解：取|A|的前 n 行，这 **n** 行元素构成的所有 n 阶子式中仅有左上角的一个 n 阶子式可能不为零。由拉普拉斯定理：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+\cdots+n+1+2+\cdots+n}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

✓ 分块计算的思想