线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

第三章　线性方程组

- **线性代数方程组** Ax=b

- **转化为对增广矩阵的研究**

$$\bar{A}=[A,b]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

§ 3.1 消元法

- 最**基本**的解线性方程组求解方法：高斯消元法

$$\text{增广矩阵} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行阶梯型矩阵}$$

- 初等变换后的方程组与原方程组<u>同解</u>

§ 3.2 线性方程组的一般理论

- 线性代数方程组 AX = b
  - 当 $b \neq 0$ 时，称 AX = b 为**非齐次**线性方程组
  - 当 $b = 0$ 时，称 AX = b 为 **齐次** 线性方程组
- 如果一个线性方程组存在解,则称方程组是**相容的** (compatible)
- 反之，如果一个线性方程组不存在解,则称方程组是**不相容的** (incompatible) 或 **矛盾**的

一、非齐次线性方程组的研究

定理 3.1：非齐次线性方程组相容的充要条件是其系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等.

☑ 定理 3.1 续:对非齐次线性方程组，

（1） 当 $r_A \neq r_{\overline{A}}$ 时，方程组不相容

（2）当 $r_A = r_{\overline{A}} = r = n$ 时，方程组有唯一解

（3）当 $r_A = r_{\overline{A}} = r < n$ 时，方程组有无数解.

二、齐次线性方程组的研究

- 齐次线性代数方程组 AX = 0

定理 3.2：齐次线性方程组有非零解的充要条件：

系数矩阵的秩小于未知量的个数；

只有零解的充要条件：

系数矩阵的秩等于未知量的个数.

即 $r_A = n$ 时：唯一解 （零解 ）

否则：无穷多非零解

§ 3.3　n 元向量的一般关系

- 在空间解析几何中，我们接触过向量/矢量(vector)

$$\bar{a} = 2\hat{x} + 3\hat{y} = (2, 3) \quad \bar{b} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z} = (2, 3, 4)$$

- 几何向量可以表示 — 力/速度/电磁场等现实世界中既有大小又有方向的量
- 将2元、3元有序数组推广到 n 元 ？
- 比如空间中质量为 m 半径为 r 的球：

$$(x, y, z, m, r)$$

- 还可用 n 元向量研究线性方程组

一、线性组合与等价向量组

定义 3.1:由n个数组成的有序数组$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$称为n元(维)向量(n-dimensional vector), 记作:

$$\alpha = [a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n] \quad 或者 \quad \alpha = [a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

行向量(row vector) (例如 矩阵的一行)

列向量(column vector) (例如 矩阵的一列)

$a_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 称为n 元向量的第i个分量(component)

- 分量全为零的向量称作零向量(zero vector), 记作0或 θ .
- 分量全为实数的向量称为实向量,
- 分量全为复数的向量称为复向量.

例如：

$$(1,2,3,\cdots,n) \longrightarrow \text{n元实向量}$$

$$(\underbrace{1+2i}_{\text{第1个分量}},\underbrace{2+3i}_{\text{第2个分量}},\cdots,\underbrace{n+(n+1)i}_{\text{第n个分量}}) \longrightarrow \text{n元复向量}$$

➢ 当两个 n 元向量 $\alpha=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

的对应分量都相等时,即 $a_i=b_i$

➢ 则称向量α与向量β**相等**，记为 α＝β.

定义 3.2：设 k 为常数，定义

$$\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} \text{ 及 } \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

➢ 分别为向量α与向量β的**和**，向量α的**数量乘积**，分别记为α＋β，$k\alpha$ 。

- 定义 $-\beta = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ \vdots \\ -b_n \end{bmatrix}$ 为向量β的负向量，

- 则α－β可定义为：$\begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$

✓ 将加法和数乘两种运算统称为向量的<u>线性运算</u>

➢ 向量线性运算的基本性质

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
- $\alpha+(-\alpha)=0$;
- $\alpha+0=\alpha$;
- $1\alpha=\alpha$;
- $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;
- $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

➢ 所以，向量的线性运算

定义 — 与矩阵的线性运算相同；

性质 — 与矩阵的线性运算相同.

向量组：m 个具有相同维数的向量称为<u>向量组</u>.

定义 3.3:对于一组向量 β， $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{m}$， 若存在一组数 $k_{1}, k_{2}, \ldots, k_{m}$，使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称向量 β 是向量 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{m}$ 的线性组合

(linear combination).

- 或向量 β 可经向量组 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{m}$ 线性表示 (linear representation).

线性组合: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m$

数　n维向量

线性表示： $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m$

$$\beta = \boldsymbol{k}_1\alpha_1 + \boldsymbol{k}_2\alpha_2 + \cdots + \boldsymbol{k}_m\alpha_m$$

- 也可用矩阵表示为

$$\beta = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m] \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_1 \\ \boldsymbol{k}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{k}_m \end{bmatrix}$$

其中$[\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{m}]$是一个 $n \times m$ 阶矩阵，

$[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ 是 m 元列向量.

- 同学们有没有联想到线性方程组？
- 相容. . .

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

代数解释:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_s \end{pmatrix},$$

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n$ $\qquad$ $A = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax = \beta$ 有解

例： 实系数二元一次方程组有唯一解的充要条件

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

解： 方程组可写为向量的形式：

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \qquad x\,\vec{\alpha} + y\,\vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

- 有**唯一解**的充要条件： 左端两个向量不共线

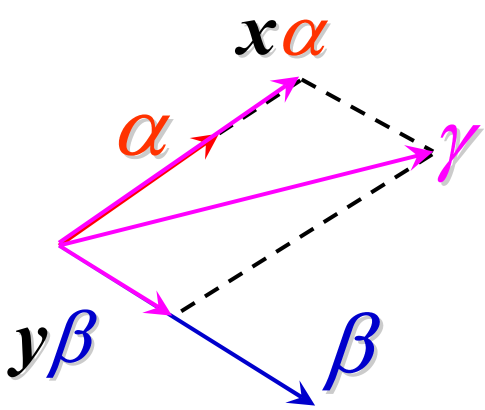
  → **系数矩阵对应的行列式不为零**

$\Rightarrow \quad r_A = r_{\bar{A}} = n = 2$

几何解释:

γ 与 β、 α 共线 ⇨

γ 能由 α 或 β 线性表示，但不唯一



$$\gamma = \mathbf{x}\alpha + \mathbf{y}\beta$$

α 与 β 不共线, 则$\Leftrightarrow$ γ 能由 α, β 线性表示

三元一次方程组有唯一解的条件

例：实系数三元一次方程组有唯一解的充要条件

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

解：　方程组可写为向量的形式：

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x\,\overrightarrow{OA}+y\,\overrightarrow{OB}+z\,\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$$

- 有唯一解的充要条件：等式左端3个向量不共面

→ 行列式不为零　$\Rightarrow \quad r_A = r_{\bar{A}} = n = 3$

例：设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

则 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$

➢ **即 β 可用向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示**

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b = \beta = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

- 由定义，零向量可用任意一个向量组线性表示

- 任意一个n元向量 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$ 都可由 n 元向量组

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$ 线性表示.

例: $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 能由 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 线性表示,

$\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ 不能由 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ 线性表示.

☑ 向量β怎样用向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示?

设 $$\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \alpha_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} \cdots \alpha_m=\begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

若β可用 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示, 则必存在一组数

$k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$ 成立

➤ 等价于线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m = b_n \end{cases}$$ 相容.

- 综上，得向量β可用 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{m}$ 线性表示的两个充要条件

（1） 线性方程组 $AX=\beta$ 相容.

（2） 矩阵 $[\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{m}]$ 与矩阵 $[\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{m}, \beta]$ 的秩相等.

- 方程组的解即
  线性组合的系数： $k_{1}, k_{2}, \ldots, k_{m}$.

例：已知向量 $\alpha_1=[1,0,2,1]^T$，$\alpha_2=[1,2,0,1]^T$，

$\alpha_3=[2,1,3,0]^T$，$\alpha_4=[2,5,-1,4]^T$，

问 α_4 能否用其它 3 个向量线性表示?

解：记 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\2&0&3&-1\\1&1&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-R_1]{R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\0&-2&-1&-5\\0&0&-2&2\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_4]{R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{3,4}}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad r_A=r_{\overline{A}}=3$$

- 根据充要条件(2)，α_4能用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.
- 进一步化简，可求出线性表示：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➢线性方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

➢ 所求线性表示为: $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$

向量组等价

定义3.4：若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 中每一个向量 α_i（i=1, 2, . . . , r）都可经向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 矩阵线性表示，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 可经向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示；若两个向量组可以相互线性表示，则称这两个向量组 等价.

例：向量组 I: $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (1, -1), \alpha_3 = (2, 1)$,

向量组 II: $\beta_1 = (1, 0), \beta_2 = (1, 2)$.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 \quad \alpha_3 = \frac{3}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2$$

- 即向量组 I 可以由 II 线性表示.

例： 向量组 I: $\alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (1, -1)$, $\alpha_3 = (2, 1)$,

向量组 II: $\beta_1 = (1, 0)$, $\beta_2 = (1, 2)$.

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + 0\alpha_3 \qquad \beta_2 = \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 + 0\alpha_3$$

- 即向量组II可以由I线性表示
- 故向量组I与II等价.

等价向量组的性质

（1） 反身性： 每个向量组都与它自身等价；

（2） 对称性： 若向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 等价，则 Ⅱ 也与 Ⅰ 等价；

（3） 传递性： 若向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 等价，且 Ⅱ 与 Ⅲ 等价，则 Ⅰ 与 Ⅲ 等价.

向量组等价与矩阵等价

$$A:\ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \cdots \\ a_{ms} \end{bmatrix} \qquad C:\ \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \cdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \cdots \\ c_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \cdots \\ c_{mn} \end{bmatrix}$$

简记为A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, C：$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

若$\gamma_j = b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + \ldots + b_{sj}\alpha_s$, $j=1,2,\ldots,n$, 即

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \\ \gamma_1 \quad \gamma_2 \qquad\quad \gamma_n \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \qquad\quad \alpha_s \end{array} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

向量组等价与矩阵等价

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \underset{\text{初等列变换}}{\overset{\text{初等列变换}}{\rightleftarrows}} B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$
$$A = BN$$

➢ 向量组B可以由向量组A线性表示，系数是？

$$\Downarrow$$
$$B = AM$$

➢ 表明什么？

$$\Downarrow$$

矩阵A与B的列向量组等价

(列变换→列等价)

向量组等价与矩阵等价

$$B:\ \begin{matrix} [b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}] \\ [b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}] \end{matrix} \qquad C:\ \begin{matrix} [c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}] \\ [c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}] \end{matrix}$$

简记为B: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, C : $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$.

若$\eta_i = \underline{a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{is}\beta_s}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, 即

$$\begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \\ \eta_m \end{array} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \beta_s \end{array}$$

向量组等价与矩阵等价

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \underset{\text{初等行变换}}{\overset{\text{初等行变换}}{\rightleftarrows}} B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$A = NB \qquad\qquad\qquad\qquad B = MA$$

$$\Downarrow$$

矩阵A与B的行向量组等价

(行变换→行等价)

向量组等价与矩阵等价

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

×(−1)

无法通过初等列变换实现

矩阵A与B的行向量组等价，但列向量组不等价.

$$C=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

×(−1)

无法通过初等行变换实现

矩阵C与B的列向量组等价，但行向量组不等价.

向量组等价与矩阵等价

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

矩阵A与B等价, 但它们的
行向量组不等价, 列向量组也不等价.

- 矩阵等价 与 向量组等价 之间没有必然联系.
- 定义2.19: 若矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，则称 A与 B 等价.
- 而矩阵的初等变换即包括行变换、又包括列变换.

向量组等价与矩阵等价

- 两向量组等价，它们各自组成的矩阵不一定等价

  → 两向量组包含的向量个数可能不同.

- 什么情况下，两矩阵等价 => 其 行/列向量组等价？

  → A经初等行变换得到 B，二者行向量组等价；

  → A经初等列变换得到 B，二者列向量组等价；

- 什么情况下，行/列向量组等价

  => 其构成的矩阵等价 ？

  → 二者向量个数相等

二、线性相关与线性无关

非常重要！

- 向量β是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 的线性组合，表明向量 β，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 之间有线性关系.

例如： $\beta = a_1 + 3a_2 - a_3$

- 而单位向量组 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

中任一向量都不能表示为其余两个向量的线性组合

- 说明单位向量相互之间是线性独立的.

向量组线性相关/线性无关

定义3.5：对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$，
若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关 (linear dependent)；

若仅当 $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$ 时，上式才成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关 (linear independent)，或 线性独立.

- 同学们有没有联想到线性方程组？
- 齐次线性方程组，零/非零解，满秩/降秩？

例： 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\2\\-5\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}2\\0\\-4\end{bmatrix}$

分别讨论向量组 α_1, α_2 及向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

解：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，即 $k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\2\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}k_1=0\\-2k_1+2k_2=0\\3k_1-5k_2=0\end{cases}$$

- 解得 $k_1=k_2=0$ (或者求秩)，所以 α_1, α_2 线性无关.

- 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，即

$$k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\2\\-5\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}2\\0\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \begin{cases}k_1+2k_3=0\\-2k_1+2k_2=0\\3k_1-5k_2-4k_3=0\end{cases}$$

- **解得** $\begin{cases}k_1=-2t\\k_2=-2t\\k_3=t\end{cases}$ (t为任意常数)

- **可取 t = -1，得 $k_1=2$， $k_2=2$， $k_3=-1$，有**

$$2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0,$$

- **所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.**

由定义易验证以下结论：

例如：$1\theta+0\alpha=\theta$.

(1) 任意一个包含零向量的向量组必线性相关.

(2) 如果向量组中有部分向量线性相关，则整体向量组必线性相关.

(3) 如果一个向量组线性无关，则它的任何一个部分向量组必线性无关.

(4) 补充定义：当向量组只含有一个向量时，如果该向量是零向量，则称向量组线性相关，若该向量是非零向量，则称向量组线性无关.

- 任意一个向量组，不是线性相关就是线性无关

(5) 两个非零向量线性相关的充要条件是它们的对应分量成比例.

必要：$k\alpha + l\beta = \theta \xRightarrow{不妨设k \neq 0} \alpha = -\dfrac{l}{k}\beta.$

充分：设$\alpha = m\beta$, 则$1\alpha - m\beta = \theta.$

➢ 对于两个2 元实向量组，线性相关的几何意义是...

$k_1\alpha + k_2\beta = 0$

设$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$ ➢ α β 线性相关 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kb_1 \\ kb_2 \end{bmatrix},$

➢ α β 对应分量成比例，两向量共线或平行

- 三个 2 元实向量组一定线性相关···
- 因为，共面的三个向量至少有一个能被其余向量线性表示.
- 对于三个 3 元实向量组，线性相关的几何意义是三向量共面.
- 对于三个 3 元实向量组，线性无关则不共面，如单位坐标向量.
- 推广至高维向量组：若 **$s > n$** ，

  s 个 n 元向量必线性相关.

定理3.3: 向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, \alpha_s=\begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \cdots \\ a_{ns} \end{bmatrix}$,

线性相关的充分必要条件是矩阵

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{bmatrix}$$

的秩小于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中向量的个数 s .

即 $r_A < s$ $\Leftarrow$ “向量个数大于维数必相关”

线性无关的充分必要条件是 $r_A = s$

证明：按定义3.5，向量组 $\alpha_{1}, \alpha_{2},\ldots, \alpha_{s}$ 的相关性取决于如下方程有非零解还是只有零解：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$$

方程可改写为 $$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0$$

- 记 $X=[x_1, x_2, \ldots, x_s]^T$, 即有齐次线性方程组 $AX = 0$
- 齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $r_A < s$
- 只有零解的充要条件是 $r_A = s$ 证毕

✓ 当 $s=n$ 时，A 为 n 阶方阵，所以 n 元向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充要条件是 $|A|=0$；线性无关的充要条件是 $|A|\neq 0$.

例：已知向量 $\alpha_1=[1,0,2,1]^T$，$\alpha_2=[1,2,0,1]^T$，$\alpha_3=[2,1,3,0]^T$，$\alpha_4=[2,5,-1,4]^T$，判断向量组 α_1, α_2, α_3 及向量组 α_1, α_2, α_3, α_4 的线性相关性.

解：由 P116 例 1 可知，$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\2&0&3&-1\\1&1&0&4\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{经若干初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$r_A=r_{\overline{A}}=3$$

- 由于仅作初等行变换，各列次序不变，易得

$$r[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=3=\text{向量个数}$$

- 所以 α_1, α_2, α_3 线性无关.

$r_A = 3 < 4$ (向量个数)

- 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

例：证明 s 个 (s > n) n 元向量必线性相关。

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 构成矩阵

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{bmatrix}$$

- A 是 n×s 阶矩阵，则有 $r_A \le \min(n, s) = n < s$
- 即 A 的秩小于向量的个数，故向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.