线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

§ 4.3 欧几里德(Euclid)空间

一、欧几里德空间的定义及基本性质

☑ 定义 4.7:引入内积后的有限维实线性空间就是欧氏空间.

➢ 常见内积定义

实数

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$$

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

☑ 内积的基本性质:

对称性

(1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;

(2) $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;

(2、3)线性性

(3) $(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;

(4) $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha, \alpha) = 0$.

恒正性

二、向量的长度与夹角

- 有了内积的定义，可以进一步给出欧氏空间内向量的长度与向量间夹角的定义.

☑ 定义 4.8：设 α 是欧氏空间 V 的一个向量，称非负实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

为向量 α 的长度(length) 或模或范数，记为：$\|\alpha\|$

☑ 有了范数就可以度量：向量的长度、向量间的距离、向量间的角度....

长度的基本性质：

(1) **正定性**: $\|\alpha\| \geq 0$; 且$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$;

(2) **齐次性**: $\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$ $(k \in \mathbf{R})$;

(3) **三角不等式**: $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

☑ 定理 4.5：柯西—施瓦茨不等式

对于欧氏空间 V 中任意两个向量α，β，恒有

$$\boxed{|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|}$$

当且仅当 α 与β 线性相关时等号成立.

☑定义 4.9：设α, β是欧氏空间中的两个非零向量

定义α, β的夹角为

$$\varphi = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}, 0 \le \varphi \le \pi$$

☑ 定义 4.10：若$(\alpha, \beta) = 0$, 即$\varphi = \pi / 2$, 则称α与β **正交或垂直** (orthogonal)，记为 $\alpha \perp \beta$.

- 欧氏空间中当向量α与β正交时

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$$

勾股定理

☑ 设欧氏空间中向量α_1，α_2，…，α_n **两两正交**，则

$$\boxed{\|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\|^2 = \|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \cdots + \|\alpha_n\|^2}$$

三、内积的坐标表示

➢ n 维欧氏空间 V 中取定基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，对 V 中任意两个向量 α，β 有：$(\alpha, \beta) = X^T A Y$

$$A = \begin{bmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

➢ 矩阵 A 称为基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 的 <u>度量矩阵</u>

(metric matrix)，也称格拉姆(Gram)方阵.

✓ 基向量两两正交，且长度为1 ⇨ A 为单位阵

四、标准正交基

- 线性空间内任一向量可由基和坐标表示
- 基作为度量标准，首先必需满足：(1) 线性无关；(2) 空间V 中任一向量都可由基线性表示.
- 基作为度量标准，本身应该尽可能简洁。
- 普通基：表示不便，计算不便，计算不稳定.
- 而标准正交基类似于几何空间中的直角坐标系：表示方便，计算方便，计算稳定.

- 例如： （1 0 0） （1 1 0） （1 1 1）

  与： （1 0 0） （0 1 0） （0 0 1）

- 在标准正交基下，内积、 范数、度量矩阵等都具有简单形式.

定义 4.11 在欧氏空间 V 中，一组非零向量，如果两两正交(mutually orthogonal)，则称其为正交向量组。

- 例如 R^n 的标准基 $(e_1, e_2, ..., e_n)$

- 例如 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

定理 4.6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (m≤n) 是 n 维欧氏空间 V 中的一组正交向量，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

证明：作正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的线性组合，使

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0 \qquad (*)$$

- 用 α_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, 对等式作内积，因为

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \|\alpha_j\|^2 & i = j \end{cases}$$

- 只有 $\lambda_j = 0$ 时(*)式才成立
- 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关.

定义 4.12 在 n 维欧氏空间中，由 n 个两两正交的非零向量所构成的正交向量组称为正交基；

☑ 由单位向量构成的正交基称为标准正交基。

➢ 例如 $\alpha_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

例：证明向量组：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$$

是欧氏空间R^3 的一个标准正交基.

解：由于 $(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_3)=0$

- 且 $\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|=\|\alpha_3\|=1$
- 由定义知α_1，α_2，α_3是一组标准正交基.

- 若 ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一个标准正交基，由定义4.12有

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

- 标准正交基的度量矩阵为单位阵.

$$A=\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}=E$$

- 在标准正交基下，向量的内积变得非常简单

$$(\alpha,\beta)=X^TAY=X^TY$$

- 因此向量组的正交化非常必要：
- 即由一组基向量，得到同一子空间两两(单位)正交的向量组.

定理 4.7 任一 n 维欧氏空间($n \geq 1$) 都必有正交基(orthogonal basis)

证明：设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是n 维欧氏空间的任意一个基，我们可以由它构造一个正交基

⇨ 施密特正交化过程

(Schmidt's Orthonormalization Process)

☑ 施密特正交化过程：

- 先取 $\boxed{\beta_1 = \alpha_1,}$
- 显然 $\beta_1 \neq 0$，令

$\beta_2 = \alpha_2 - k_{12}\beta_1$，使 β_2 与 β_1 正交，即

$$(\alpha_2 - k_{12}\beta_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_1) - k_{12}(\beta_1, \beta_1) = 0$$

- 于是系数 $k_{12} = \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$， $\boxed{\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1;}$
- 而且 $\beta_2 \neq 0$，否则 α_1, α_2 线性相关，与假设矛盾.

- 此时β$_2$与β$_1$已正交； $\boxed{\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1;}$

- 我们再令 $\beta_3=\alpha_3+k_{13}\,\beta_1+k_{23}\,\beta_2$

- 并且使β$_3$与β$_2$、β$_1$都正交，故

$$(\alpha_3+k_{13}\,\beta_1+k_{23}\,\beta_2,\beta_1)=(\alpha_3,\beta_1)+k_{13}(\beta_1,\beta_1)=0$$

- 于是系数 $k_{13}=-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)},$

- 同理，由 $(\alpha_3+k_{13}\,\beta_1+k_{23}\,\beta_2,\beta_2)=(\alpha_3,\beta_2)+k_{23}(\beta_2,\beta_2)=0$

$$k_{23}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)},$$

- 因此，有 $\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$

- 且β$_3\neq 0$，否则 α$_1$,α$_2$,α$_3$线性相关，与假设矛盾.

- 此时 β_3、β_2、β_1 已两两正交.
- 重复上述步骤，可得

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

- 且 $\beta_n \neq 0$，此时 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 两两正交，即为所求正交基.
- **Schmidt** 正交化提供了正交化方法：通过子空间的一个基得出子空间的一个正交基，
- 并可进一步求出标准正交基.

定义(投影) 若 α 与 β 是 n 维内积空间中的向量，则 β 到 α 的**标量投影**(scalar projection)为

$$\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|}$$

则 β 到 α 的**向量投影**(vector projection) η 为

$$\eta=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|}\cdot\frac{\alpha}{\|\alpha\|}=\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=proj_{\alpha}\,\beta$$

- 由前例 $\beta-\eta\perp\alpha$.
- **Schmidt** 正交化思路就是利用投影原理，在已有正交基的基础上构造一个新的正交基。

➢ 具体的说，从其中一个向量所张成的一维子空间开始，重复扩展构造，直到 n 维空间：

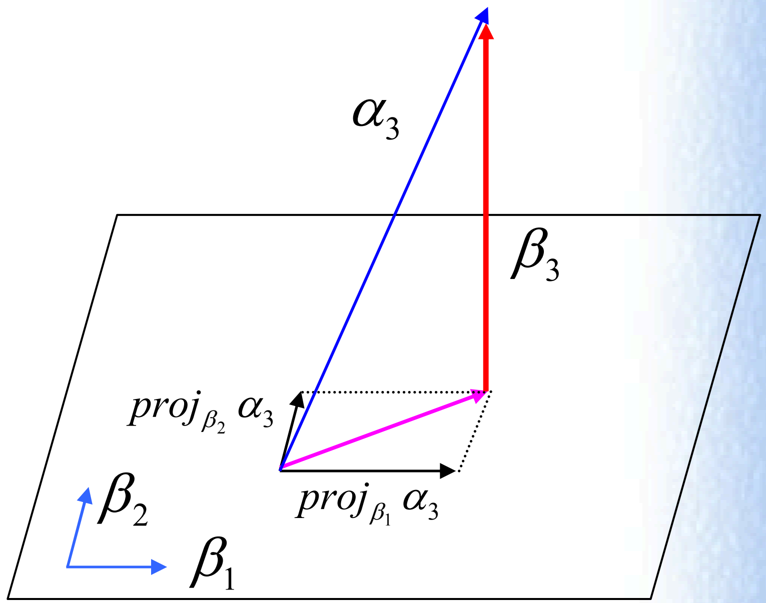
$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - proj_{\beta_1}\,\alpha_2$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - proj_{\beta_2}\,\alpha_3 - proj_{\beta_1}\,\alpha_3$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} proj_{\beta_j}\,\alpha_n$$



Erhard Schmidt

- (1876.1.13-1959.12.6)德国数学家
- 哥廷根大学博士，师从希尔伯特
- 拉普拉斯和柯西更早发现这一正交化方法，但没有达到施密特的高度.
- 主要工作在积分方程和希尔伯特空间方面，,创立了泛函分析。
- 现代数学的奠基人之一。
- 实际数值计算中，Schmidt正交化并不稳定，误差累积会使得正交性越来越差，
- 常用的是 Householder 变换 或 Givens旋转.

- 布置习题　P 188:

30.　31.　34.　36.

4.7推论 任一 n 维欧氏空间(n≥1) 都有一个**标准正交基**(orthonormal basis) 。

- 只要将定理4.7中的正交基单位化即得.

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,\eta_n=\frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$$

- $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 即为所求标准正交基.
- 标准正交基带来的好处:
  - 坐标分量是向量与相应基向量的内积!
  - 内积运算、过渡矩阵的最简化.
  - 标准正交基 ⇨ 正交矩阵 ⇨ 线性方程组求解

例：已知欧氏空间 R^4 的向量组：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

求：(1)生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的一个标准正交基;

(2)将此标准正交基扩充成 R^4 的一个标准正交基.

解: (1) 先求向量组的秩，得到一组基

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&2&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

➢ 向量组的秩 $r=2$，$\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=2$，取 α_1，α_2 为基.

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

➢ 将α_1，α_2 正交化，令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

➢ 再标准化，得 $\varepsilon_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\qquad \varepsilon_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

➢ 即为生成子空间 L(α_1，α_2，α_3) 的一个标准正交基.

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(2) 将此标准正交基扩充成 R^4 的一个标准正交基.

- 设向量 $\alpha = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in R^4$，且 $\alpha \perp \beta_1$，$\alpha \perp \beta_2$，即

$$\begin{cases}(\alpha, \beta_1) = x_1 + x_3 = 0\\(\alpha, \beta_2) = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\end{cases}$$

- 求齐次线性方程组的基础解系，得

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 将α_4，α_5 正交化，令

$$\beta_3 = \alpha_4,$$

$$\beta_4 = \alpha_5 - \frac{(\alpha_5, \beta_3)}{(\beta_3, \beta_3)}\beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 再标准化，得 $\varepsilon_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\varepsilon_4 = \frac{\beta_4}{\|\beta_4\|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- 向量组 ε_1， ε_2， ε_3， ε_4 就是 R^4 的一个标准正交基.

例：考虑 $P[x]_3$ 中定义的内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx$$

求 $P[x]_3$ 的一组标准正交基.

思路: 不妨从标准基出发，先正交化，再单位化

$$\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$$

(1) 正交化，令 $\beta_1=\alpha_1=1,$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \qquad \because(\alpha_2,\beta_1)=\int_{-1}^{1} x\cdot 1\,dx=0$$

$$\therefore \beta_2=\alpha_2=x$$

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2$ $\beta_1 = \alpha_1 = 1,$ $\beta_2 = \alpha_2 = x$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$\because (\alpha_3, \beta_1) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\, dx = \frac{2}{3} \qquad (\beta_1, \beta_1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx = 2$$

$$(\alpha_3, \beta_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\, dx = 0 \quad \therefore \beta_3 = \alpha_3 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 1 - 0 = x^2 - \frac{1}{3}$$

(2) 单位化： $\varepsilon_1 = \dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{(\beta_1, \beta_1)}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad (\beta_2, \beta_2) = \int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx = \dfrac{2}{3}$

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{x}{\sqrt{(\beta_2, \beta_2)}} = \frac{\sqrt{6}}{2}x \qquad (\beta_3, \beta_3) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{\sqrt{10}}{2}(3x^2 - 1)$$

选择系数，令 $\beta_n(1)=1 \Rightarrow$ n 阶勒让德多项式：

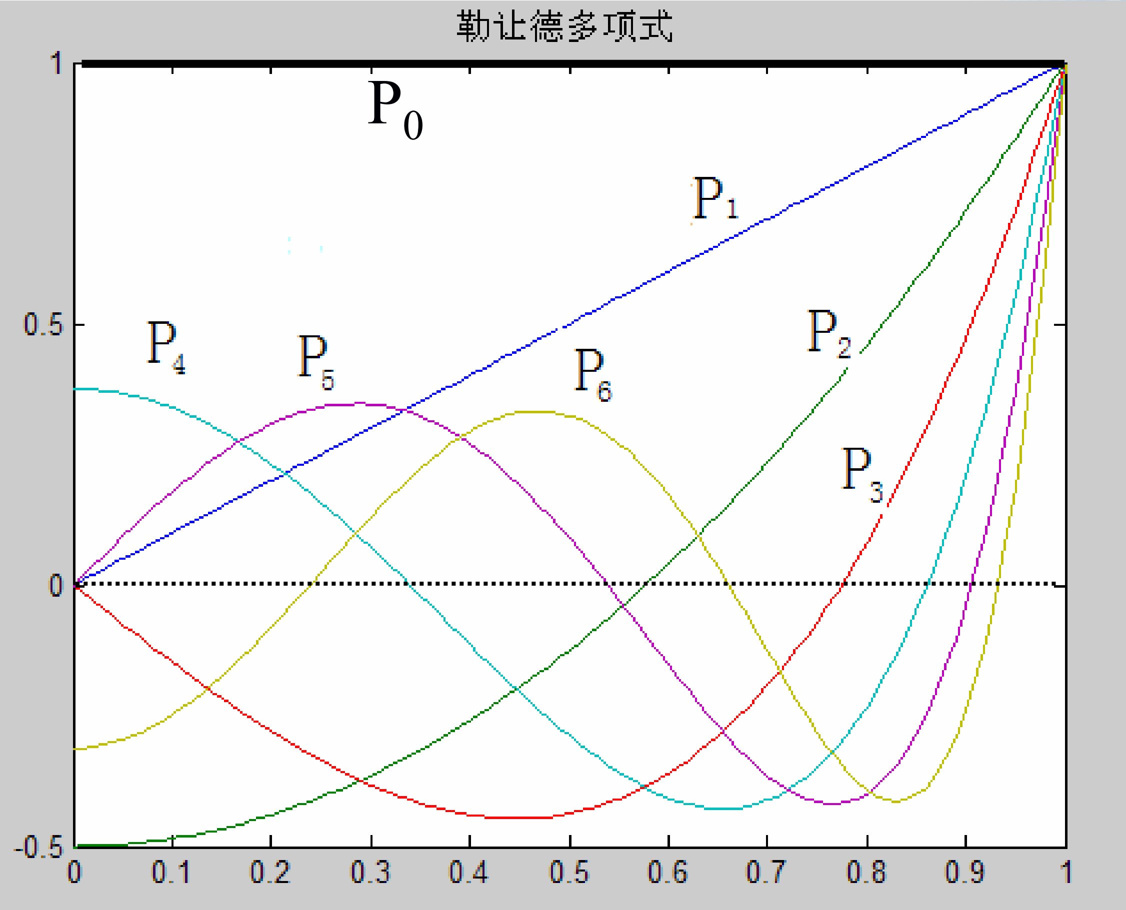
$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

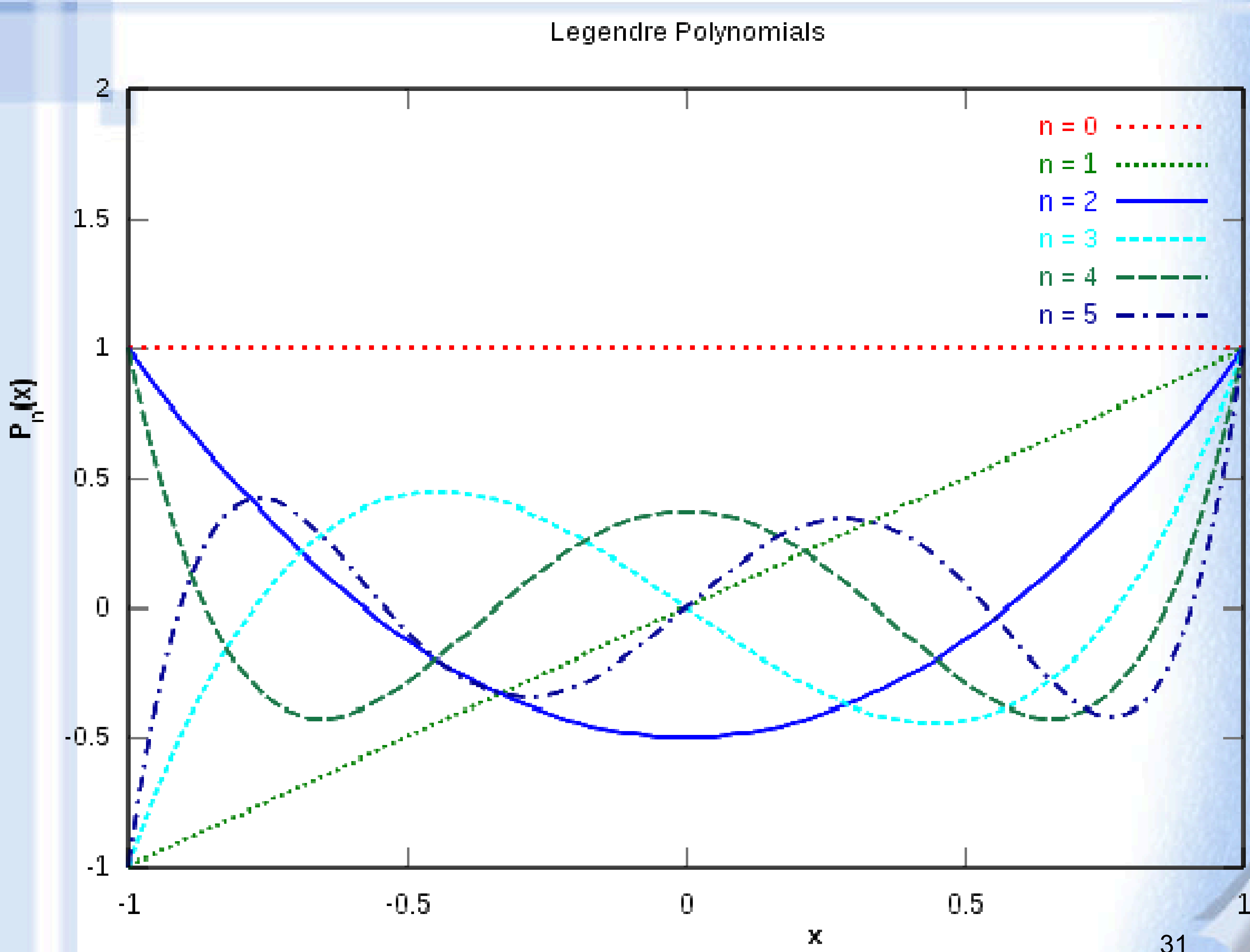
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$



$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$



Legendre Polynomials
n = 0
n = 1
n = 2
n = 3
n = 4
n = 5
$P_n(x)$
x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

例：矩阵 $$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求：A 的列空间的一组标准正交基；

解: 显然 A 的3个列向量线性无关，它们构成 R^4 的3 维子空间的一组基，可以使用施密特正交化过程

- 正交化、标准化同时进行，令 $r_{11}=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|=5,$

$$\mathbf{q}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{r_{11}}=\left(\frac{1}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{4}{5},\right)^T$$

- 令 $r_{12}=(\mathbf{q}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=-2,\qquad r_{12}\mathbf{q}_1=-2\mathbf{q}_1,$

$$\boldsymbol{\alpha}_2-r_{12}\mathbf{q}_1=\left(-\frac{8}{5},\quad \frac{4}{5},\quad -\frac{16}{5},\quad \frac{8}{5},\right)^T,$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{r_{11}} = \left(\frac{1}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{4}{5}\right)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1 = \left(-\frac{8}{5}, \quad \frac{4}{5}, \quad -\frac{16}{5}, \quad \frac{8}{5}\right)^T,$$

$$r_{22} = \left\|\boldsymbol{\alpha}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1\right\| = 4, \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1}{r_{22}} = \left(-\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{4}{5}, \quad \frac{2}{5}\right)^T$$

- 令 $r_{13} = (\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = 1, \quad r_{23} = (\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = -1,$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2 = \left(-\frac{8}{5}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{4}{5}, \quad -\frac{2}{5}\right)^T,$$

$$r_{33} = \left\|\boldsymbol{\alpha}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2\right\| = 2,$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2}{r_{33}} = \left(-\frac{4}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad -\frac{1}{5}\right)^T$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{q}_1 r_{11}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{q}_1 r_{12} + \mathbf{q}_2 r_{22}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{q}_1 r_{13} + \mathbf{q}_2 r_{23} + \mathbf{q}_3 r_{33}$$

$$\therefore A = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$$

$$= [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ & r_{22} & r_{23} \\ & & r_{33} \end{bmatrix}$$

- 向量组 q_1，q_2，q_3 就是 **A** 的列空间的一组标准正交基.

定理(QR分解) 若 A 是一秩为 n 的 m×n 阶矩阵，则A 可以分解为乘积 QR，其中 Q 为列正交的m×n 阶矩阵，R 为对角线元素均为正的 n×n 阶上三角阵。

- 例中的 QR 分解为

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ & 4 & -1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

例：求方程组 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ➢ **Matlab 验证**

的最小二乘解.

解：设 AX’ = QR X’ = b，则 R X’ = Q^T b = y

$$\mathbf{y} = Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ & 4 & -1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

➢ 回代求解 RX’ = y，得 $X' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

标准正交基上的坐标

- 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一个标准正交基，任一向量 α ∈ V，设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

标量投影

- 用 ε_i 与上式两边做内积，可得 $x_i = (\varepsilon_i, \alpha)$

$$\alpha = (\varepsilon_1, \alpha)\varepsilon_1 + (\varepsilon_2, \alpha)\varepsilon_2 + \cdots + (\varepsilon_n, \alpha)\varepsilon_n$$

- 利用标准正交基的度量矩阵，两个向量的内积变得非常简单

$$(\alpha, \beta) = X^T E Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$(\alpha, \alpha) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

例：已知欧氏空间 R^4 的向量组：$\alpha_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\alpha_3=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$$\beta=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$

（1）证明 α_1，α_2，α_3，α_4 是 R^4 的一个标准正交基；

（2）若向量 $\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3-5\alpha_4$，求$\|\alpha\|$和$(\alpha,\beta)$.

解:（1）因为 $\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|=\|\alpha_3\|=\|\alpha_4\|=1$，

$$(\alpha_i,\alpha_j)=0 \quad (i\neq j,\quad i,j=1,2,3,4)$$

➢ 所以 α_1，α_2，α_3，α_4 是 R^4 的一个标准正交基.

(2) $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{3^2+2^2+4^2+5^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

$$(\alpha,\beta)=3(\alpha_1,\beta)+2(\alpha_2,\beta)+4(\alpha_3,\beta)-5(\alpha_4,\beta)=3-2=1$$

➢ 先求 β 在(1)下的坐标，再点乘 α 在(1)下的的坐标.

☑ 定理 4.8：设 ε$_1$, ε$_2$, ..., ε$_n$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一个标准正交基，若：

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\,A$$

例如：$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

其中 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，则向量组 $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ 是标准正交基的充要条件是 A 为一个正交阵.

证明：因为 ε$_1$, ε$_2$, ..., ε$_n$ 是标准正交基 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

由已知 $$\begin{cases}\eta_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\\ \eta_2=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \eta_n=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n\end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \eta_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \eta_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

- 向量 η_i, η_j 的内积为 $X^T Y$ 的形式

$$(\eta_i, \eta_j) = \alpha_{1i}\,\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\,\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\,\alpha_{nj}$$

- 从而 $(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ 的充要条件是

$$\alpha_{1i}\,\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\,\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\,\alpha_{nj} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- 即向量组 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是标准正交基的充要条件是

$$A^T A = E$$

- 即 A 是一个正交阵. 证毕.
- 也就是说，同一欧氏空间中，两组标准正交基间的过渡矩阵是正交阵。