线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

§ 1.4 行列式按行(列)展开定理

- 作业题

一、余子式与代数余子式

子式: $\mathrm{M}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

M 的余子式 N: $\mathrm{N}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$

□ 设 k 阶子式 M 位于行列式的第 i_1 行，第 i_2 行，…，第 i_k 行， 与 第 j_1 列，第 j_2列，…，第 j_k 列，则称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots j_k} N$$

为 k 阶子式 M 的代数余子式

$$\mathrm{M}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

M 的代数余子式 $\qquad (-1)^{1+3+2+3} N=-N$

■ 元素 a_{ij} 的代数余子式， 记作 A_{ij}

$$(-1)^{i+j}M_{ij}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

例如：a_{23} 的余子式为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

a_{23} 的代数余子式为 $A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$

二、按一行(列)展开定理(拉普拉斯展开)

定理1.2：n 阶行列式|A| 等于其任一行(列)上所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = |A|\delta_{ij} = \begin{cases} |A|, 当\, i = j, \\ 0, 当\, i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = |A|\delta_{ij} = \begin{cases} |A|, 当\, i = j, \\ 0, 当\, i \neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\, i = j, \\ 0, 当\, i \neq j. \end{cases}$

☑ 拉普拉斯展开的应用 — 范德蒙行列式

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\prod\text{表连乘}}{\overset{\text{记}}{=\!=\!=}} \prod_{1 \le i \le j \le n} (a_j - a_i).$$

□ 拉普拉斯展开的应用—加边法（升阶法）

➢ 将行列式加一行(列)，利用所加的行(列)化简。

$$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

n+1阶

三、拉普拉斯定理(拉普拉斯展开推广到k阶子式)

定理1.4：在行列式中任取 k 行，则由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式的值。

$$|A| = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t$$

例：计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

解：取|A|的前 n 行，这 **n** 行元素构成的所有 n 阶子式中仅有左上角的一个 n 阶子式可能不为零。由拉普拉斯定理：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+\cdots+n+1+2+\cdots+n} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

✓ 分块计算的思想

§ 1.5 克莱姆法则

- 主要应用： n 元线性方程组的求解

- 对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 由其系数组成的 n 阶行列式称为方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(英)马克劳林首先发现；（瑞士）克莱姆（G.Cramer, 1750），在其著作《线性代数分析导引》中阐述,因记法优越而流传。

定理1.5：（克莱姆法则）若 n 阶线性方程组的系数行列式|A|$\neq$0，则它有惟一解

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{|A_n|}{|A|}.$$

其中 $|A_j|$ (j=1,2,…,n) 是将 |A| 中的第 j 列换成常数列 b_1，b_2，…，b_n 所得到的 n 阶行列式.

$$|A_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\cdots a_{1,j} & \cdots a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_n & a_{n2}\cdots a_{n,j} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A_j|=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 表述-简洁自然
- 行列式与方程组解的关系：

1. 存在性
2. 唯一性

证明：先证 $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \cdots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$ **是方程组的解**

第 i 个方程左边 $= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} \frac{|A_1|}{|A|} + a_{i2} \frac{|A_2|}{|A|} + \cdots + a_{in} \frac{|A_n|}{|A|}$

- 将 $|A_j|$ 按第 j 列展开为 b_1，b_2，…，b_n 与其对应的代数余子式乘积之和.

$$|A_1| = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1} = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1}$$

$$|A_2| = b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2} = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k2}$$

$$\vdots$$

- 第 i 行元素 * 第 k 行元素的代数余子式

原式 $= \frac{1}{|A|}\left(a_{i1} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1} + a_{i2} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k2} + \cdots + a_{in} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kn} \right)$

➢ 第i行元素 ＊ 第 k 行元素代数余子式

$$= \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} b_k \left(a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn}\right)$$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik} = \begin{cases} |A|, \text{当 } k = i \\ 0, \text{当 } k \neq i \end{cases}$$

$$\text{左边} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} b_k |A| \delta_{ik}$$

$$= b_i$$

$$= \text{右边}$$

➢ 故 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是方程组的解。

再证：方程组的解必为 $x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \cdots,\ x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$

- 思路：将代数余子式看作具体数，利用定理**1.3** 消元（一列元素与不同列对应元素的代数余子式乘积之和为零）

- 用第一列元素的代数余子式依次乘以方程组的n个方程，得：

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}A_{11}}x_1+\boxed{a_{12}\ A_{11}}x_2+\cdots+\boxed{a_{1n}A_{11}}x_n=b_1A_{11} \\ a_{21}A_{21}x_1+a_{22}\ A_{21}x_2+\cdots+a_{2n}A_{21}x_n=b_2A_{21} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}A_{n1}x_1+a_{n2}\ A_{n1}x_2+\cdots+a_{nn}A_{n1}x_n=b_nA_{n1} \end{cases}$$

✓ 几何意义：正交向量内积

再把 n 个方程依次相加，由定理**1.3**，仅 $\mathbf{x_1}$ 的系数不为零，故

$$a_{11}A_{11}x_1+a_{21}A_{21}x_1+\cdots+a_{n1}A_{n1}x_1=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}$$ 即：$|A|x_1=|A_1|$

- 同理可证 $x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \cdots,\ x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$

- 故当$|A|\neq$**0**时，方程组有且只有唯一解.

$$设\left|A\right| = \det(\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \cdots \mathbf{a}_n)$$

证明2：先将方程组写为列向量的形式

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

- 用上式右端代替|A|的第 k 列即为 $|A_k|$
- 用上式左端代替|A|的第 k 列同样是 $|A_k|$

$$\det(\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_{k-1}, x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{k+1}, \cdots \mathbf{a}_n) = \left|A_k\right|$$

- 因为将第 j 列乘以 $-x_j$ 加到第 k 列行列式值不变 ⇨

$$\det(\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_{k-1}, x_k\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \cdots \mathbf{a}_n) = \left|A_k\right|$$

$$\Rightarrow x_k\left|A\right| = \left|A_k\right| \qquad \therefore x_k = \frac{\left|A_k\right|}{\left|A\right|}$$

$$x_1 = \frac{\left|A_1\right|}{\left|A\right|}, \quad x_2 = \frac{\left|A_2\right|}{\left|A\right|}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\left|A_n\right|}{\left|A\right|}$$

例：用克莱姆法则解方程组
$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解:首先计算系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -6 \\ 2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -3 & -6 \\ 8 & -5 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 81 \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 & -6 \\ 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad \cdots$$

- 由克莱姆法则 $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = 3,\ x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = -1,\ \ldots,\ x_4 = \dfrac{|A_4|}{|A|} = 1.$

例：求通过四点(1, 3)、(2, 4)、(3, 3)、(4, -3)的曲线 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ **Matlab 解**

解：这是一个曲线拟合问题，由题意

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = -3 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

系数行列式为

$$= (4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)$$
$$= 12 \neq 0$$

$$|A_1| = 36 \quad |A_2| = -18 \quad |A_3| = 24 \quad |A_4| = -6$$

$$\therefore a_0 = 3 \quad a_1 = -3/2 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = -1/2$$

例： 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解：

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$|A_3| = -27$$

$$|A_4| = 27$$

$$\therefore x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{81}{27} = 3, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-108}{27} = -4, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

小结

1． 用克拉默法则解方程组的两个条件

(1)方程个数等于未知量个数;

(2)系数行列式不等于零.

2． 克拉默法则建立了线性方程组的解和系数与常数项之间的关系

主要应用：(1) 低阶线性方程组的求解;

(2) 相关理论的推导、证明.

例如：判断线性方程组是否有非零解?

本章小结

1.理论部分：

(1) 2阶、3阶行列式

(2) 排列、逆序、逆序数、排列的奇偶性

(3) n 阶行列式的三种展开定义

(4) n 阶行列式的基本性质：转置、行(列)互换、数乘行(列)、两行(列)成比例、分行(列)相加、某行(列)加另一行(列) k 倍

(5) 行列式的子式、余子式、代数余子式

(6) 拉普拉斯展开、拉普拉斯定理

(7) 线性方程组的求解 — 克莱姆法则。

2. 计算行列式的方法：

(1) 按全排列展开定义计算；难点：“全排列”和“逆序数”（低阶）

(2) 按代数余子式展开计算(降阶、正交性)

(3) 化为三角行列式

(4) 利用性质、定理，化为含有较多零元素的行列式

(5) 利用已知公式计算 (范德蒙行列式)。