机器人技术数学基础

Mathematic Preparation for Robotics

2.1 位置和姿态的表示

2.2 坐标变换

2.3 齐次坐标变换

2.4 物体的变换及逆变换

2.5 通用旋转变换

机器人自由度

刚体的自由度

任何空间刚体具有6个自由度，即可任意运动。

机器人的自由度

机器人靠末端执行器工作，末端执行器具有6个自由度即可保证其灵活运动。3个位置、3个姿态自由度。

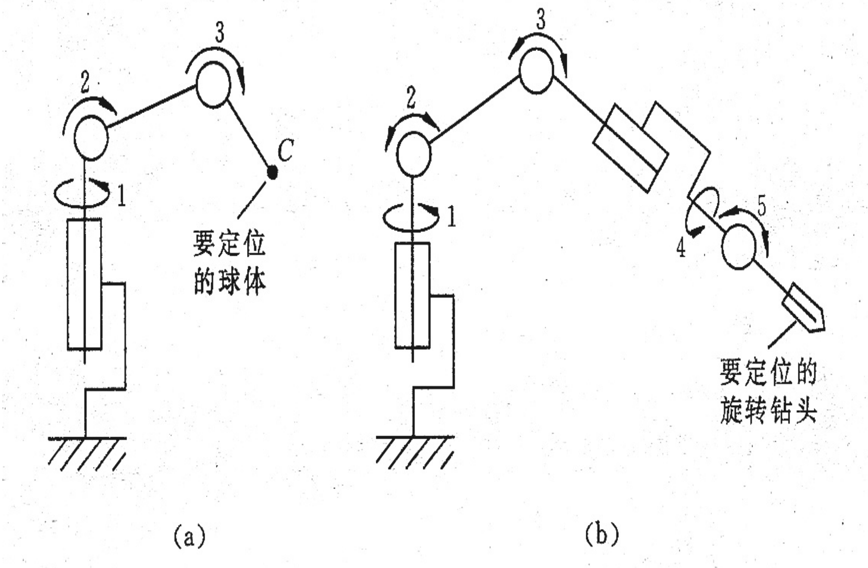
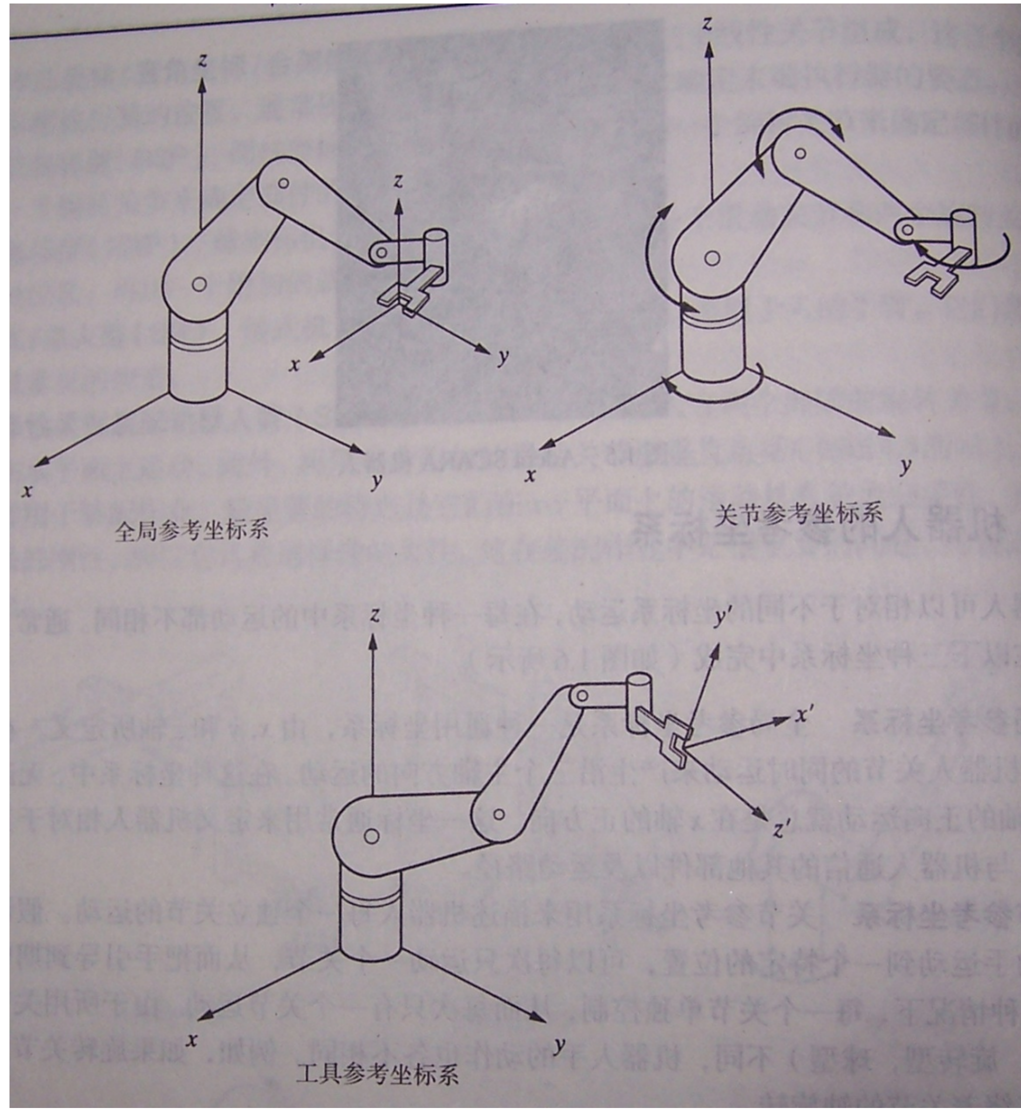


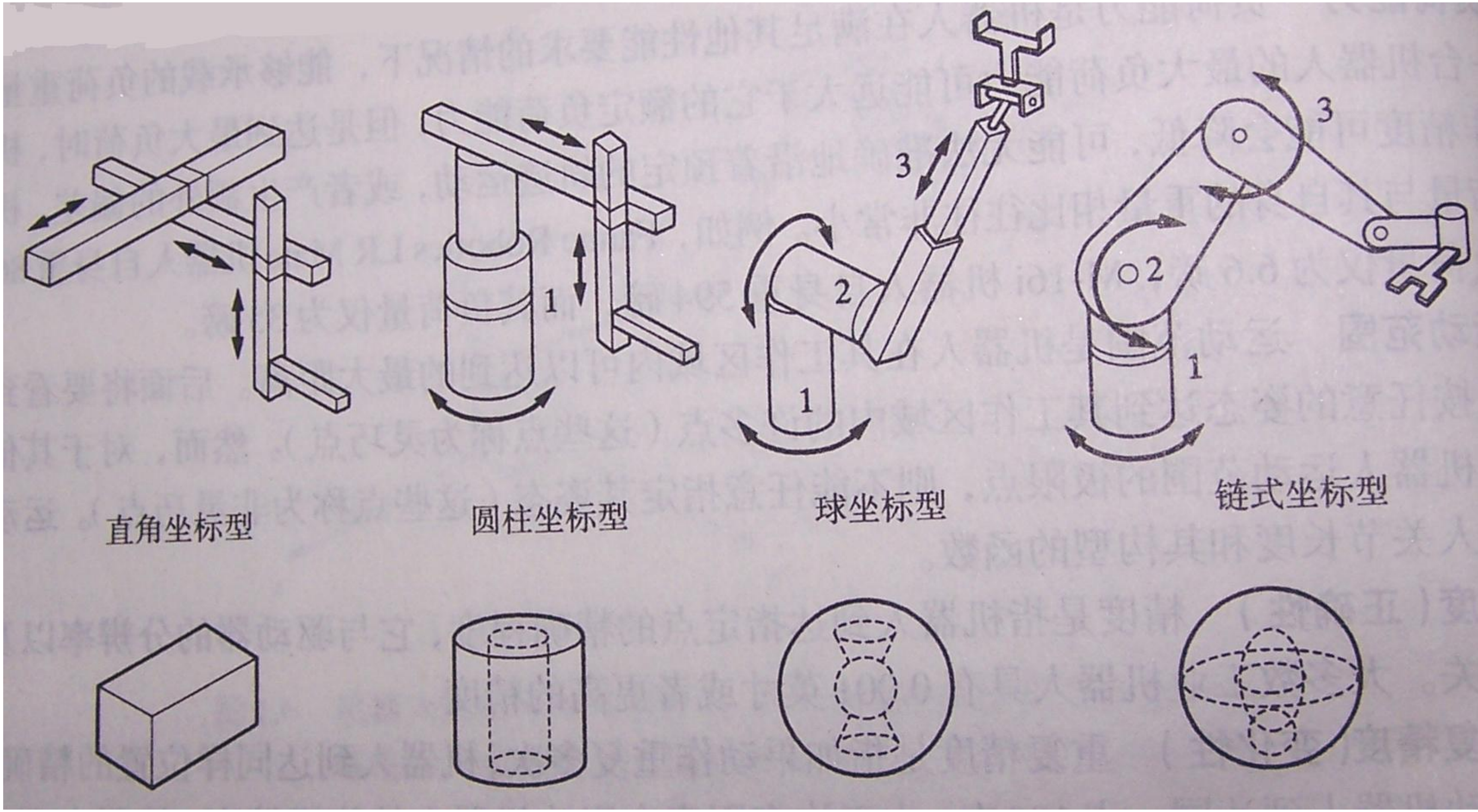
图 1-4 机器人自由度

机器人参考坐标系

- 全局参考坐标系
- 关节参考坐标系
- 工具参考坐标系



机器人工作空间



2.1 位置和姿态的表示

1.位置描述

在直角坐标系A中,空间任意一点p的位置(Position)可用3x1列向量(位置矢量)表示:

$$^{A}P = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$$

2.方位描述

空间物体B的方位(Orientation)可由某个固接于此物体的坐标系{B}的三个单位主矢量$[x_B, y_B, z_B]$相对于参考坐标系A的方向余弦组成的3x3矩阵描述.

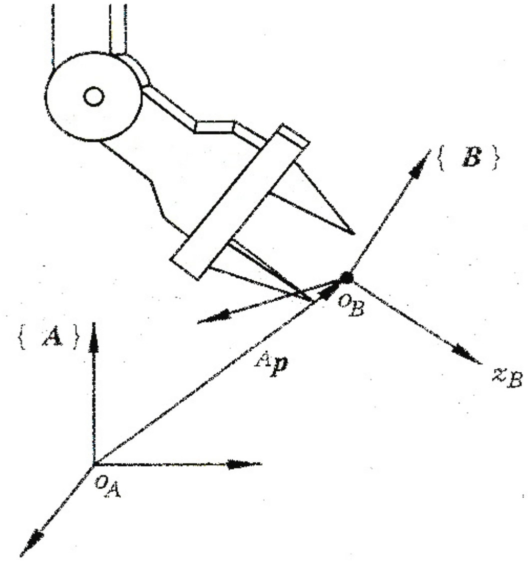


图 2-2 方位表示

2.1 位置和姿态的表示

$$ {}_B^A\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

上述矩阵称为旋转矩阵,它是正交的.即

$$ {}_B^A\mathbf{R}^{-1} = {}_B^AR^T \qquad \left| {}_B^AR \right| = 1 $$

若坐标系B可由坐标系A,通过绕A的某一坐标轴获得,则绕x,y,z三轴的旋转矩阵分别为

$$ \mathbf{R}(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}(y,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

2.1 位置和姿态的表示

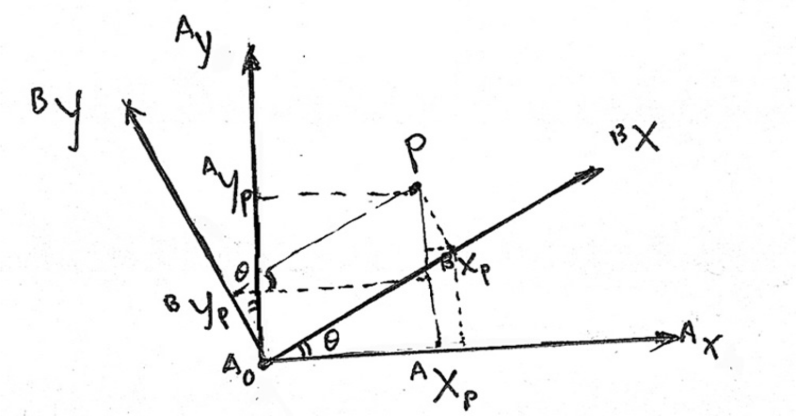
这些旋转变换可以通过右图推导

$$ {}^{A}x_{p} = {}^{B}x_{p}\cos\theta - {}^{B}y_{p}\sin\theta $$

$$ {}^{A}y_{p} = {}^{B}x_{p}\sin\theta + {}^{B}y_{p}\cos\theta $$

$$ {}^{A}z_{p} = {}^{B}z_{p} $$

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}x_{p} \\ {}^{A}y_{p} \\ {}^{A}z_{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}x_{p} \\ {}^{B}y_{p} \\ {}^{B}z_{p} \end{bmatrix} $$



这是绕Z轴的旋转. 其它两轴只要把坐标次序调换可得上页结果.

2.1 位置和姿态的表示

旋转矩阵的几何意义:

1) ${}^A_B\mathbf{R}$ 可以表示固定于刚体上的坐标系{B}对参考坐标系的姿态矩阵.

2) ${}^A_B\mathbf{R}$可作为坐标变换矩阵. 它使得坐标系{B}中的点 ${}^Bp$ 的坐标变换成{A}中点 ${}^Ap$ 的坐标 .

3) ${}^A_B\mathbf{R}$ 可作为算子, 将{B}中的矢量或物体变换到{A}中.

2.1 位置和姿态的表示

3.位姿描述

刚体位姿(即位置和姿态),用刚体的方位矩阵和方位参考坐标的原点位置矢量表示，即

$$\{\mathbf{B}\} = \left\{ {}^{A}_{B}\mathbf{R} \quad {}^{A}\mathbf{p}_{B_0} \right\}$$

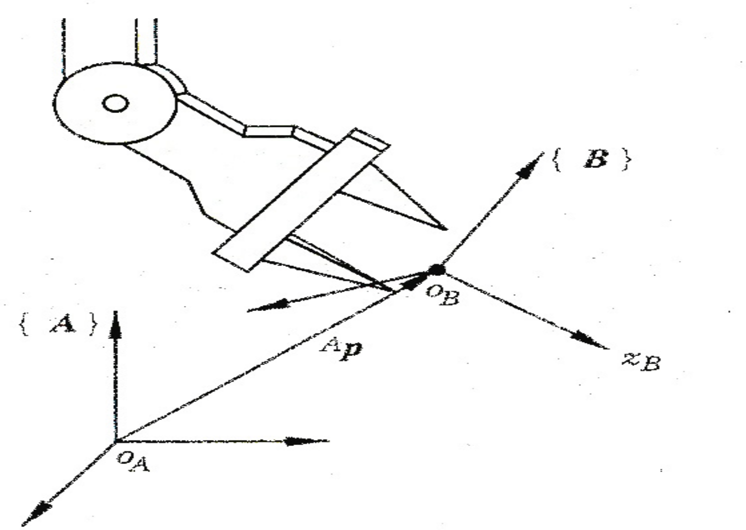


图 2-2 方位表示

2.2 坐标变换

1. 平移坐标变换

坐标系{A}和{B}具有相同的方位,但原点不重合.则点P在两个坐标系中的位置矢量满足下式:

$$^{A}\mathbf{P}={}^{B}\mathbf{P}+{}^{A}\mathbf{P}_{B0}$$

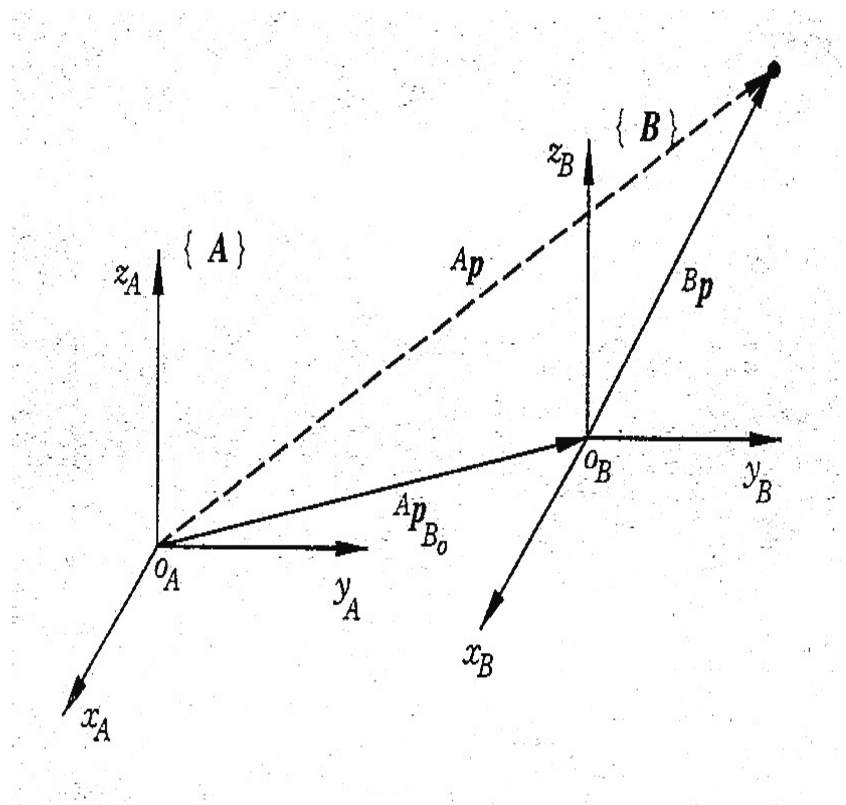


图 2-3 平移变换

2.2 坐标变换

2. 旋转变换

坐标系{A}和{B}有相同的原点但方位不同，则点P的在两个坐标系中的位置矢量有如下关系：

$$^{A}\mathbf{P}={}_{B}^{A}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\mathbf{P}$$

$$_{A}^{B}\mathbf{R}={}_{B}^{A}\mathbf{R}^{-1}={}_{B}^{A}\mathbf{R}^{T}$$

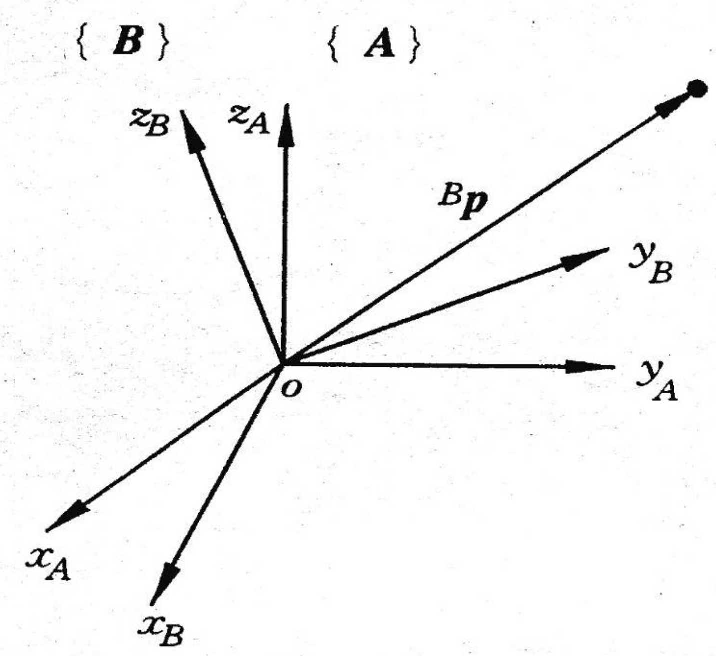


图 2-4 旋转变换

Robotics 数学基础

2.2 坐标变换

3. 复合变换

一般情况原点既不重和，方位也不同。这时有：

$$^{A}\mathbf{P}={}^{A}_{B}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\mathbf{P}+{}^{A}\mathbf{P}_{B0} \tag{2-13}$$

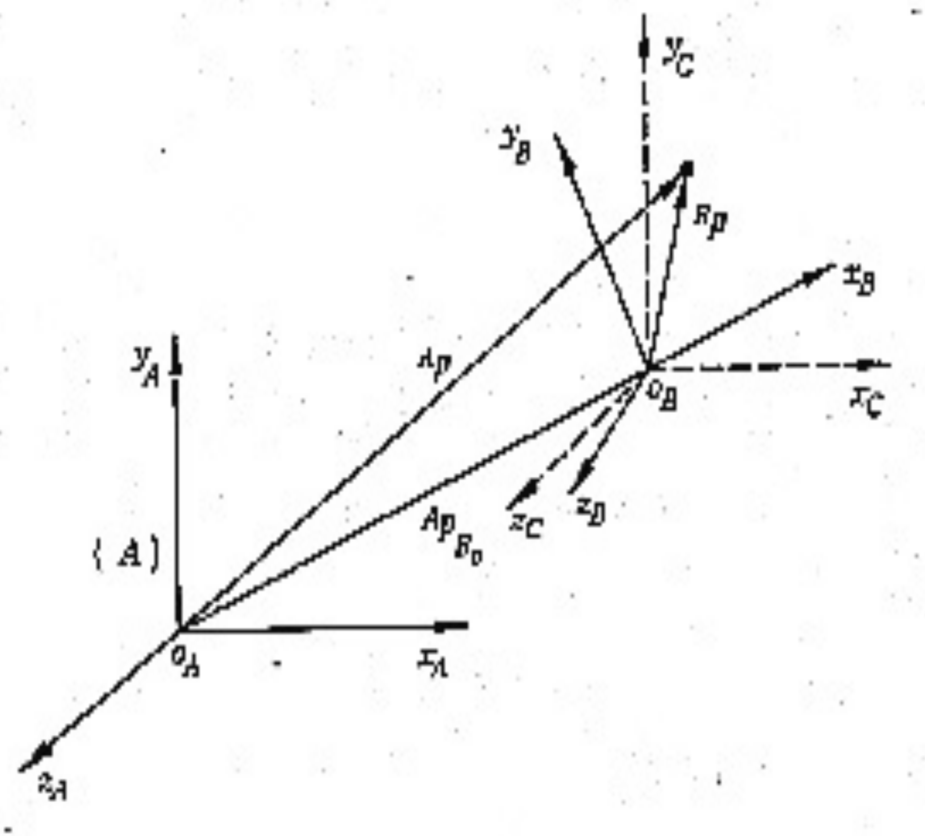


图 2-5 复合变换

2.2 坐标变换

例2.1 已知坐标系{B}的初始位姿与{A}重合，首先{B}相对于{A}的Z_A轴转30°，再沿{A}的X_A轴移动12单位，并沿{A}的Y_A轴移动6单位．求位置矢量${}^{A}P_{B0}$和旋转矩阵${}_{B}^{A}R$．设点p在{B}坐标系中的位置为${}^{B}P=[3,7,0]$，求它在坐标系{A}中的位置．

$$
{}_{B}^{A}\mathbf{R} = R(z,30^0) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ {}^{A}\mathbf{p}_{B0} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}\mathbf{p} = {}_{B}^{A}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{p} + {}^{A}\mathbf{p}_{B0} = \begin{bmatrix} -0.902 \\ 7.562 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.908 \\ 13.562 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

2.3 齐次坐标变换

1. 齐次变换

(2-13)式可以写为:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\mathbf{R} & {}^{A}\mathbf{P}_{B0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2-14)$$

P点在{A}和{B}中的位置矢量分别增广为:

$${}^{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^{A}x & {}^{A}y & {}^{A}z & 1 \end{bmatrix}^{T}, {}^{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^{B}x & {}^{B}y & {}^{B}z & 1 \end{bmatrix}^{T}$$

而齐次变换公式和变换矩阵变为:

$${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{T}\,{}^{B}\mathbf{P}, \quad {}^{A}_{B}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\mathbf{R} & {}^{A}\mathbf{P}_{B0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2-15, 16)$$

Robotics 数学基础

- 坐标系在固定参考坐标系原点的表示

$$F = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

- 坐标系在固定参考坐标系中的表示

$$F=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_X \\ n_y & o_y & a_y & P_Y \\ n_z & o_z & a_z & P_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上述也可以表示刚体，9个姿态信息，3个位置信息

约束条件：

1. 三个向量互相垂直；
2. 每个单位向量长度为1

例2.2 F坐标系位于参考坐标系3，5，7的位置，它的n轴与x轴平行，o轴与y轴相对45，a轴相对于z轴的角度为45，求该坐标系。

变换的表示

- 纯平移

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{new} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x + d_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y + d_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z + d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 绕一个轴的纯旋转

$$\mathbf{R}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}(y,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta & 0 & s\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}(z,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta & -s\theta & 0\\ s\theta & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

平移与旋转的结合

假定：

1. 绕x轴旋转a角；
2. 接着平移$[l_1, l_2, l_3]$（分别相对于x,y,z轴）；
3. 最后绕y轴旋转角

$$P_{xyz} = R(y, \beta) \times T(l_1, l_2, l_3) \times R(x, \alpha) \times P_{noa}$$

2. 3 齐次坐标变换

3. 旋转齐次坐标变换

$$\mathbf{R}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}(y,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta & 0 & s\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}(z,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta & -s\theta & 0\\ s\theta & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

将上式增广为齐次式：

$$\mathbf{R}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta & 0\\ 0 & s\theta & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}(y,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta & 0 & s\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -s\theta & 0 & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}(z,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta & -s\theta & 0 & 0\\ s\theta & c\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2.3 齐次坐标变换

引入齐次变换后，连续的变换可以变成矩阵的连乘形式。计算简化。

例2-4 ：U=7i+3j+2k,绕Z轴转90度后，再绕Y轴转90度。

例2-5：在上述基础上再平移（4，-3，7）。

$$R(z,90)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\7\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$R(y,90)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3\\7\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\7\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$Trans(4,-3,7)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Robotics 数学基础

由矩阵乘法没有交换性，可知变换次序对结果影响很大。

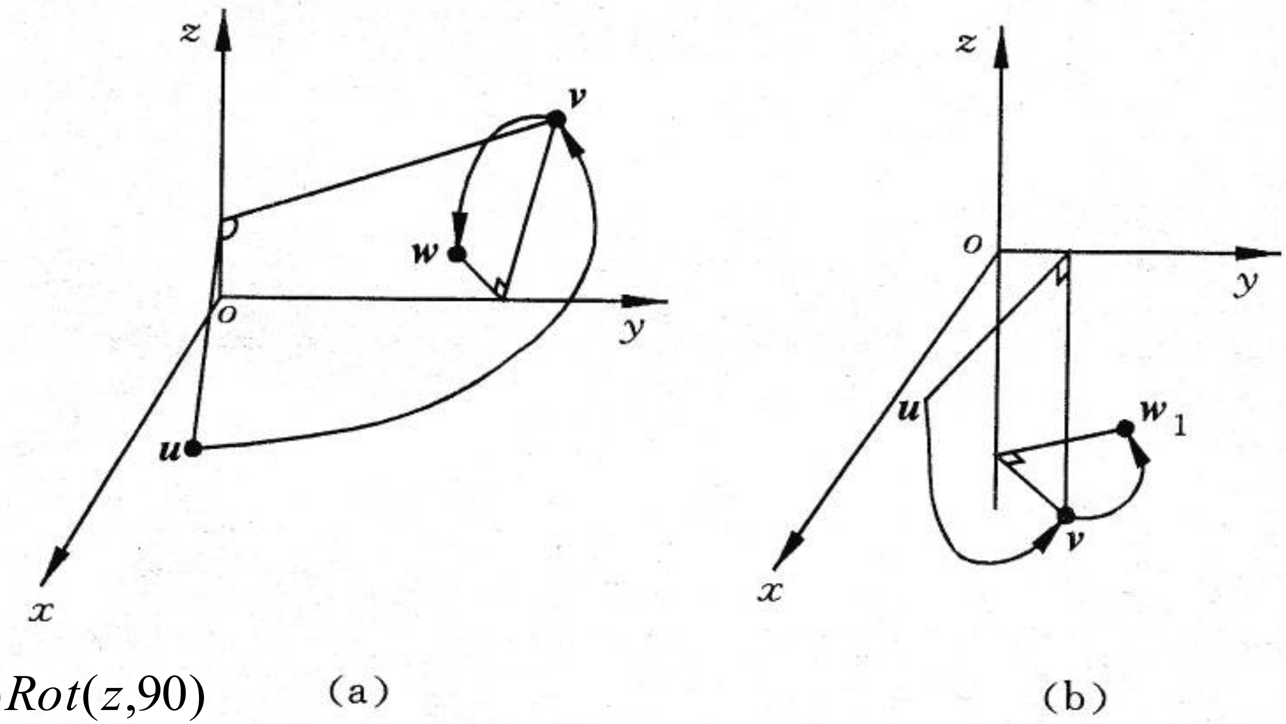


图 2-6 旋转次序对结果的影响

(a) Rot(y,90) Rot(z,90)；(b) Rot(z,90) Rot(y,90)

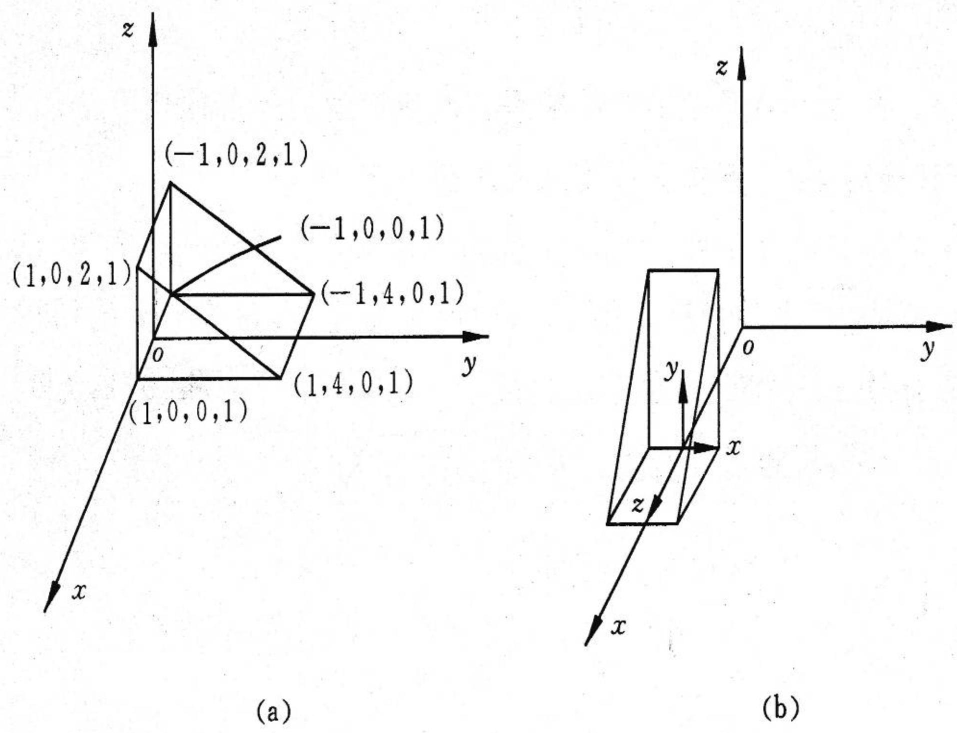
$$Trans(4,-3,7)Rot(y,90)Rot(z,90)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 物体的变换及逆变换

1. 物体位置描述

物体可以由固定于其自身坐标系上的若干特征点描述。**物体的变换**也可通过这些特征点的变换获得。



(a) (b)

图 2-8 对楔形物体的变换

2. 4 物体的变换及逆变换

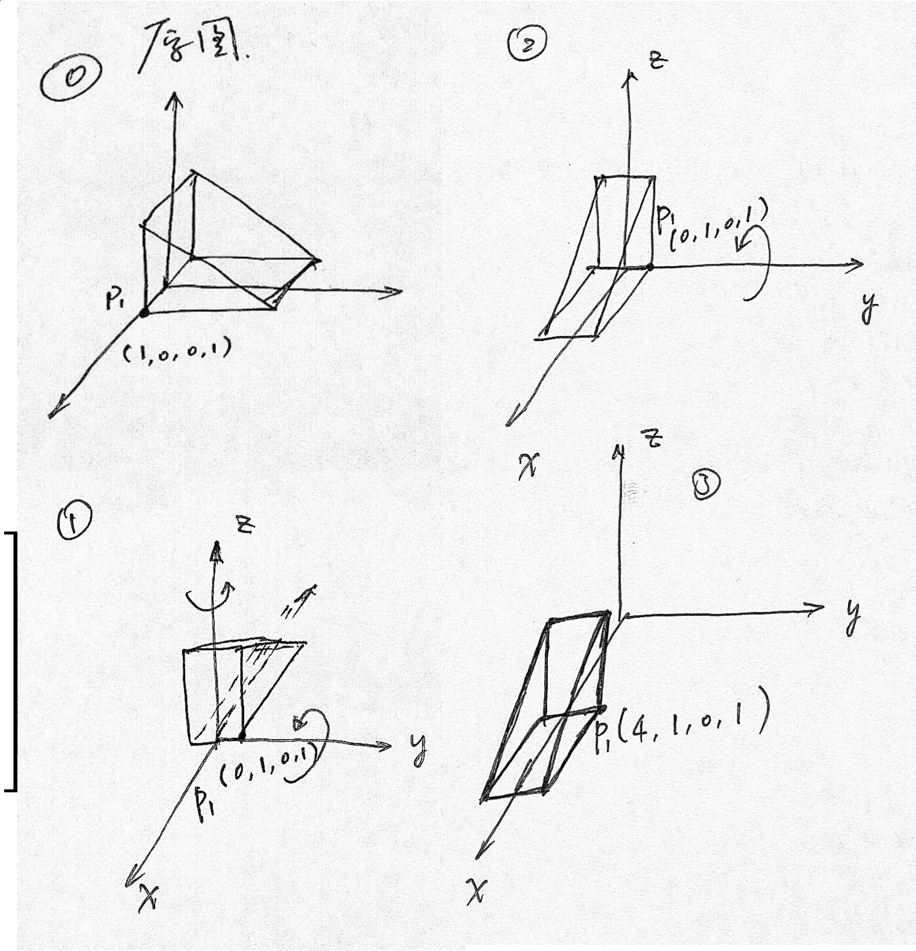
1. 物体位置描述

$$\mathbf{T} = Trans(4,0,0)Rot(y,90)Rot(z,90)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



2.4 物体的变换及逆变换

2. 齐次坐标的复合变换

{B} 相对于 {A}： ${}^{A}_{B}T$；

{C} 相对于 {B}： ${}^{B}_{C}T$；

则 {C} 相对于 {A}： ${}^{A}_{C}\mathbf{T}={}^{A}_{B}\mathbf{T}{}^{B}_{C}\mathbf{T}$

$$
=\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}\mathbf{p}_{B0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{B}_{C}\mathbf{R} & {}^{B}\mathbf{p}_{C0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\mathbf{R}{}^{B}_{C}\mathbf{R} & {}^{A}_{B}\mathbf{R}{}^{B}\mathbf{p}_{C0}+{}^{A}\mathbf{p}_{B0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

2.4 物体的变换及逆变换

3. 齐次坐标的逆变换

{B}相对于{A}：${}^{A}_{B}T$;

{A}相对于{B}：${}^{B}_{A}T$;

两者互为逆矩阵. 求逆的办法：

1. 直接求${}^{A}_{B}T^{-1}$

2. 简化方法

$$
{}^{B}_{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} {}^{B}_{A}\mathbf{R} & {}^{B}\mathbf{p}_{A0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{T} & -{}^{A}_{B}\mathbf{R}^{T}\,{}^{A}\mathbf{p}_{B0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}={}^{A}_{B}\mathbf{T}^{-1}
$$

$$
{}^{B}({}^{A}\mathbf{p}_{B0})={}^{B}_{A}\mathbf{R}\,{}^{A}\mathbf{p}_{B0}+{}^{B}\mathbf{p}_{A0}=\mathbf{0}
$$

2.4 物体的变换及逆变换

3. 齐次坐标的逆变换

一般，若

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{p}\cdot\mathbf{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{p}\cdot\mathbf{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T, \mathbf{n}=\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T, \mathbf{o}=\begin{bmatrix} o_x & o_y & o_z \end{bmatrix}^T, \mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$$

2. 4 物体的变换及逆变换

3. 变换方程初步

{B}：基坐标系

{T}：工具坐标系

{S}：工作台坐标系

{G}：目标坐标系或工件坐标系

满足方程

$$ {}^{B}_{T}\mathbf{T} = {}^{B}_{S}\mathbf{T}\,{}^{S}_{G}\mathbf{T}\,{}^{G}_{T}\mathbf{T} $$

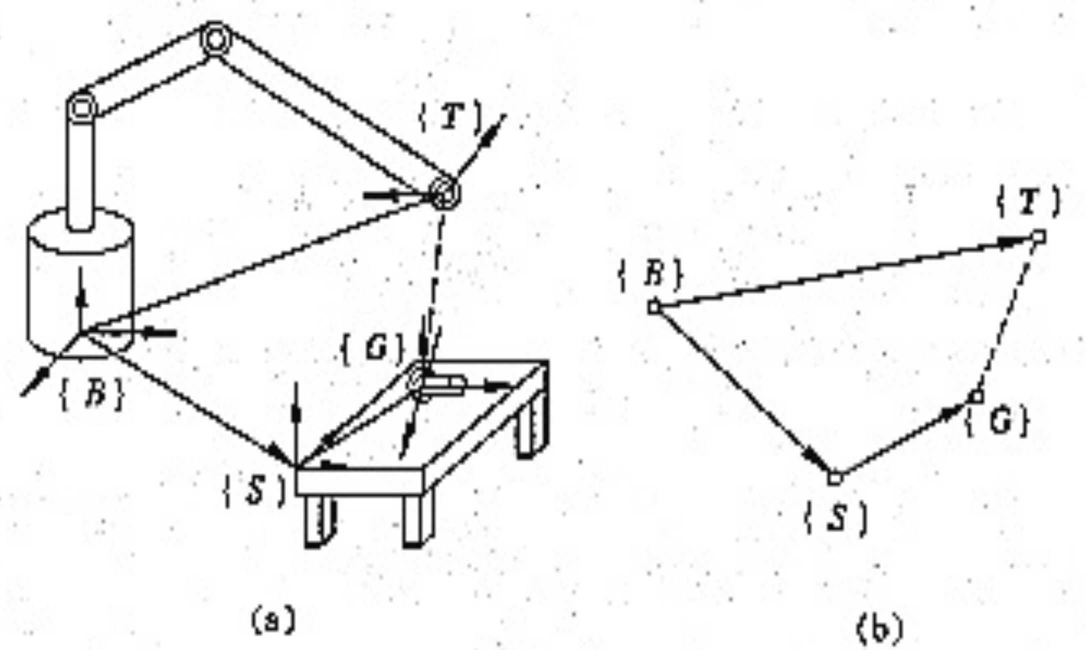
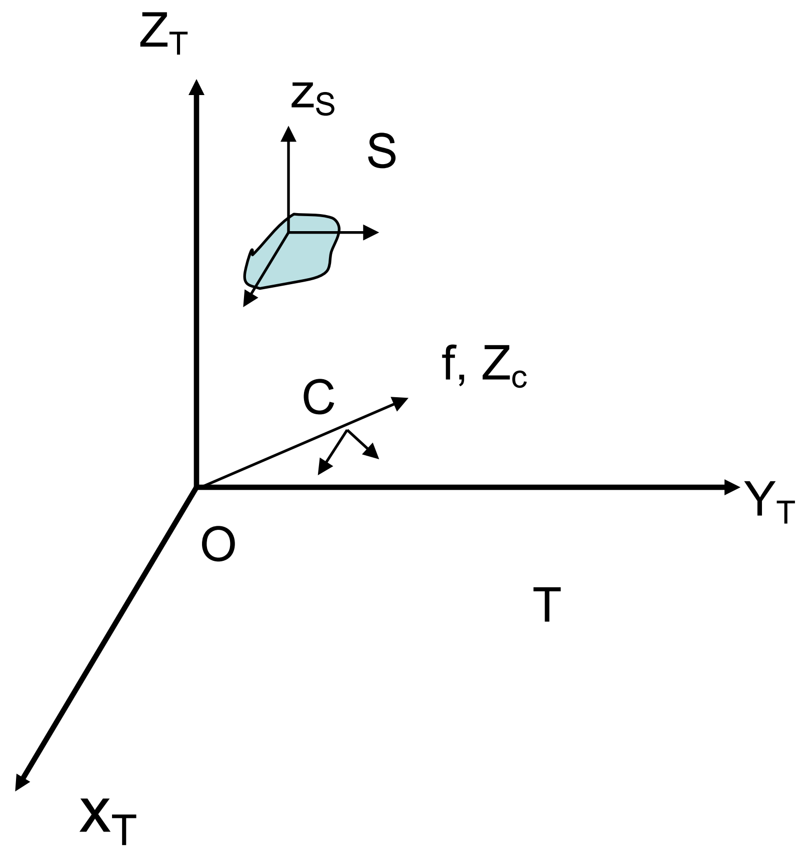


图 2-9 变换方程及其变换图

2.5 通用旋转变换

1. 通用旋转变换公式

求:绕从原点出发的f旋转θ角时的旋转矩阵. $Rot(f,\theta)$



{S}:物体上固接的坐标系

{T}:参考坐标系

{C}:Z轴与f重合的辅助坐标系

2.5 通用旋转变换

在{S}上取一点p，其坐标为向量{P}，它绕{T}中直线f旋转θ角。

1）将{S}上p点坐标变换到{T}中，其坐标为 ${}^{T}_{S}\mathbf{T}\{p\}$

2）直接计算绕f旋转的坐标为，$Rot(f,\theta){}^{T}_{S}\mathbf{T}\{p\}$

目前上式在{T}无法直接求。采取如下步骤：

3）建立辅助坐标系{C}，使其Z轴与f重合。这样问题变为绕Z_C旋转。将{S}中的点p变换到{C}中，变换为：${}^{C}_{T}\mathbf{T}{}^{T}_{S}\mathbf{T}\{p\}$

4）在{C}中绕Z轴旋转有：$R(z,\theta){}^{C}_{T}\mathbf{T}{}^{T}_{S}\mathbf{T}\{p\}$

5）将{C}中坐标变换回{T}中有，${}^{T}_{C}TR(z,\theta){}^{C}_{T}\mathbf{T}{}^{T}_{S}\mathbf{T}\{p\}$

2.5 通用旋转变换

步骤2）和5）中的结果应该相同，

$$ {}^{T}_{C}TR(z,\theta){}^{C}_{T}\mathbf{T}{}^{T}_{S}\mathbf{T}\{p\} = Rot(f,\theta){}^{T}_{S}\mathbf{T}\{p\} $$

即：

$$ Rot(f,\theta)={}^{T}_{C}TR(z,\theta){}^{C}_{T}\mathbf{T}={}^{T}_{C}TR(z,\theta){}^{T}_{C}\mathbf{T}^{-1} $$

$$ =\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

由于{C}的Z轴与f重合，所以

$$ a_x = f_x \qquad a_y = f_y \qquad a_z = f_z $$

2.5 通用旋转变换

根据坐标轴的正交性，$\mathbf{a} = \mathbf{n} \times \mathbf{o}$ ，有

$$a_x = n_y o_z - o_y n_z = f_x$$

$$a_y = n_z o_x - o_z n_x = f_y$$

$$a_z = n_x o_y - o_x n_y = f_z$$

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

令 $vers(\theta) = 1 - \cos\theta$, 则

$$Rot(f,\theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x vers\theta + c\theta & f_y f_x vers\theta - f_z s\theta & f_z f_x vers\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y vers\theta + f_z s\theta & f_y f_y vers\theta + c\theta & f_z f_y vers\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z vers\theta - f_y s\theta & f_y f_z vers\theta + f_x s\theta & f_z f_z vers\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5 通用旋转变换

2. 等效转角与转轴

给出任一旋转变换，能够由上式求得进行等效旋转θ角的转轴。已知旋转变换**R**，**令R**=Rot(f, θ)，即有

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x f_x vers\theta + c\theta & f_y f_x vers\theta - f_z s\theta & f_z f_x vers\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y vers\theta + f_z s\theta & f_y f_y vers\theta + c\theta & f_z f_y vers\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z vers\theta - f_y s\theta & f_y f_z vers\theta + f_x s\theta & f_z f_z vers\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将上式对角线元素相加，并简化得

$$n_x + o_y + a_z = (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) vers\theta + 3c\theta = 1 + 2c\theta$$

$$c\theta = \tfrac{1}{2}(n_x + o_y + a_x - 1)$$

Robotics 数学基础

2.5 通用旋转变换

非对角元素成对相减，有

$$o_z - a_y = 2 f_x s\theta$$

$$a_x - n_z = 2 f_y s\theta$$

$$n_y - o_x = 2 f_z s\theta$$

平方后有 $s\theta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}$

设 $0 \le \theta \le 180^o$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{n_x + o_y + a_z - 1} ,$$

$$f_x = (o_z - a_y)/2s\theta$$

$$f_y = (a_x - n_z)/2s\theta$$

$$f_z = (n_y - o_x)/2s\theta$$

2.5 通用旋转变换

例2-7 一坐标系{B}与参考系重合，现将其绕通过原点的轴 $f=\begin{bmatrix}0.707 & 0.707 & 0\end{bmatrix}^T$ 转30°，求转动后的{B}.

以 $f_x = f_y = 0.707 \quad f_z = 0.0 \quad \theta = 30.0^o$，代入算式，有

$$Rot(k,30^o)=\begin{bmatrix}0.933 & 0.067 & 0.354 & 0\\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0\\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2.5 通用旋转变换

一般情况，若f不通过原点，而过q点(q_x, q_y, q_z)，则齐次变换矩阵为：

$$Rot(f,\theta)=\begin{bmatrix} f_xf_x vers\theta + c\theta & f_yf_x vers\theta - f_zs\theta & f_zf_x vers\theta + f_ys\theta & A \\ f_xf_y vers\theta + f_zs\theta & f_yf_y vers\theta + c\theta & f_zf_y vers\theta - f_xs\theta & B \\ f_xf_z vers\theta - f_ys\theta & f_yf_z vers\theta + f_xs\theta & f_zf_z vers\theta + c\theta & C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_xf_x vers\theta + c\theta & f_yf_x vers\theta - f_zs\theta & f_zf_x vers\theta + f_ys\theta \\ f_xf_y vers\theta + f_zs\theta & f_yf_y vers\theta + c\theta & f_zf_y vers\theta - f_xs\theta \\ f_xf_z vers\theta - f_ys\theta & f_yf_z vers\theta + f_xs\theta & f_zf_z vers\theta + c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

2.5 通用旋转变换

例2-8 一坐标系{B}与参考系重合，现将其绕通过q=[1, 2, 3]^{T}的轴 $f=\begin{bmatrix}0.707 & 0.707 & 0\end{bmatrix}^T$转30°，求转动后的{B}.

以 $f_x = f_y = 0.707 \quad f_z = 0.0 \quad \theta = 30.0^o$, 代入算式，有

$$q_x = 1 \quad q_y = 2 \quad q_z = 3$$

$$Rot(k,30^o) = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$