线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

三、内积的坐标表示

- n 维欧氏空间 V 中任意取定 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，对 V 中任意两个向量 α，β有 $\boxed{(\alpha,\beta)=X^T AY}$

- 其中 $A=\begin{bmatrix} (\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{bmatrix}$

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\varepsilon_i \qquad \beta=\sum_{j=1}^{n} y_j\,\varepsilon_j$$

$$X=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]^T \qquad Y=\left[y_1,y_2,\cdots,y_n\right]^T$$

- 矩阵 A 称为基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 的 度量矩阵，也称格拉姆(Gram)方阵 ⇨格拉姆行列式(习题20)

四、标准正交基

- 标准正交基类似于几何空间中的直角坐标系：表示方便，计算方便，计算稳定.

<u>定义 4.11</u> 在欧氏空间 V 中，一组非零向量，如果它们两两正交，就称它为<u>正交向量组</u>。

<u>定理 4.6</u> 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ (m≤n) 是 n 维欧氏空间 V 中的一组正交向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关。

定义 4.12 在 n 维欧氏空间 V 中，由 n 个两两正交的非零向量所构成的正交向量组称为正交基；

- ✓ 由单位向量构成的正交基称为标准正交基。

- ➢ 标准正交基的度量矩阵为单位阵.

$$A=\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & & \cdots\ \cdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}=E$$

定理 4.7 任一 n 维欧氏空间($n\geq 1$) 都必有
正交基(orthogonal basis) 。

- 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是n 维欧氏空间的任意一个基，我们可以由它构造一个正交基

• 构造正交基 — 施密特正交化过程

- 可进一步求出标准正交基.

<u>定义(投影)</u> 若 α 与 β 是 **n** 维内积空间中的向量，则 β 到 α 的标量投影**(scalar projection)**为

$$\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|}$$

则 β 到 α 的向量投影**(vector projection)** η 为

$$\eta=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|}\cdot\frac{\alpha}{\|\alpha\|}=\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=proj_{\alpha}\beta$$

- **Schmidt** 正交化思路就是利用投影原理，在已有正交基的基础上构造一个新的正交基。

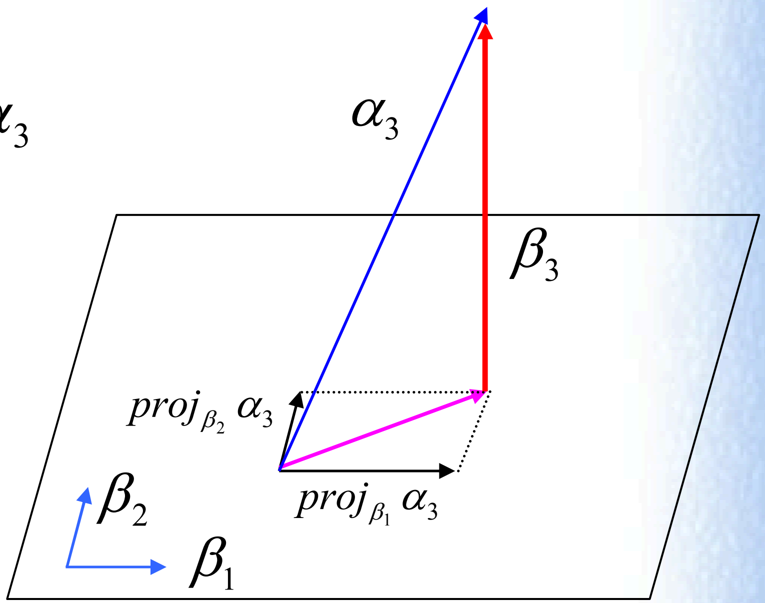
$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - proj_{\beta_1} \alpha_2$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - proj_{\beta_2} \alpha_3 - proj_{\beta_1} \alpha_3$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} proj_{\beta_j} \alpha_n$$



例：令矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\eta=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|}\cdot\frac{\alpha}{\|\alpha\|}=\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=proj_{\alpha}\,\beta$$

试求：A 的列空间的一组标准正交基。

解：显然 A 的3个列向量线性无关，它们构成 R^4 的3 维子空间的一组基，可以使用施密特正交化过程

- 正交化、标准化同时进行，令 $r_{11}=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|=5,$

$$\mathbf{q}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{r_{11}}=\left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\right)^T$$

- 令 $r_{12}=(\mathbf{q}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=-2,\qquad r_{12}\mathbf{q}_1=-2\mathbf{q}_1,$

$$\boldsymbol{\alpha}_2-r_{12}\mathbf{q}_1=\left(-\frac{8}{5},\ \frac{4}{5},\ -\frac{16}{5},\ \frac{8}{5},\right)^T,$$

$$\mathbf{q}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{r_{11}}=\left(\frac{1}{5},\quad\frac{2}{5},\quad\frac{2}{5},\quad\frac{4}{5},\right)^T$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2-r_{12}\mathbf{q}_1=\left(-\frac{8}{5},\quad\frac{4}{5},\quad-\frac{16}{5},\quad\frac{8}{5},\right)^T,$$

$$r_{22}=\left\|\boldsymbol{\alpha}_2-r_{12}\mathbf{q}_1\right\|=4,\qquad \mathbf{q}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2-r_{12}\mathbf{q}_1}{r_{22}}=\left(-\frac{2}{5},\quad\frac{1}{5},\quad-\frac{4}{5},\quad\frac{2}{5}\right)^T$$

➢ 令 $r_{13}=(\mathbf{q}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=1,\quad r_{23}=(\mathbf{q}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=-1,$

$$\boldsymbol{\alpha}_3-r_{13}\mathbf{q}_1-r_{23}\mathbf{q}_2=\left(-\frac{8}{5},\quad\frac{4}{5},\quad\frac{4}{5},\quad-\frac{2}{5}\right)^T,$$

$$r_{33}=\left\|\boldsymbol{\alpha}_3-r_{13}\mathbf{q}_1-r_{23}\mathbf{q}_2\right\|=2,$$

$$\mathbf{q}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3-r_{13}\mathbf{q}_1-r_{23}\mathbf{q}_2}{r_{33}}=\left(-\frac{4}{5},\quad\frac{2}{5},\quad\frac{2}{5},\quad-\frac{1}{5}\right)^T$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{q}_1r_{11}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{q}_1r_{12}+\mathbf{q}_2r_{22}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{q}_1r_{13}+\mathbf{q}_2r_{23}+\mathbf{q}_3r_{33}$$

$$\therefore A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$$

$$=[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3]\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ & r_{22} & r_{23}\\ & & r_{33}\end{bmatrix}$$

➢ 向量组 q_1，q_2，q_3 就是 **A** 的列空间的一组标准正交基.

定理(QR分解) 若 A 是一秩为 n 的 m×n 阶矩阵，则A 可以分解为乘积 QR，其中 Q 为列正交的m×n 阶矩阵，R 为对角线元素均为正的 n×n 阶上三角阵。

- 例中的 QR 分解为

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ & 4 & -1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

超定方程组的最小二乘解 给定一个 $m \times n$ 阶方程组 $AX=b$，其中 $m > n$，这类方程组通常是不相容的。

- 只能期望找到一个近似解 X’，使得AX’ 尽可能接近 b
- 二者的残余误差 (residual)最小 $\mathrm{r}(X') = \mathbf{b} - AX'$
- 即向量 b 和向量 AX’ 最接近，距离最小

$$\|\mathrm{r}(X')\| = \|\mathbf{b} - AX'\| = \min$$

- 使得这个距离最小化的X’ 称为方程组的最小二乘解.
- 令 p= AX’， p 就是 A 的列空间中最接近 b 的向量.
- 如何寻找X’？ 要用到子空间的直和、正交等概念
- 结论： AX=b 的最小二乘解是 $X'=R^{-1}Q^{T}b$

例：求方程组 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

的最小二乘解.

解：设 AX’ = QR X’ = b，则 R X’ = Q^T b = y

$$\mathbf{y} = Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ & 4 & -1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 回代求解 RX’ = y，得 $X' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

标准正交基上的坐标

- 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一个标准正交基，任一向量 α ∈ V，设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

标量投影

- 用 ε_i 与上式两边做内积，可得 $x_i = (\varepsilon_i, \alpha)$

$$\alpha = (\varepsilon_1, \alpha)\varepsilon_1 + (\varepsilon_2, \alpha)\varepsilon_2 + \cdots + (\varepsilon_n, \alpha)\varepsilon_n$$

- 利用标准正交基的度量矩阵，两个向量的内积变得非常简单

$$(\alpha, \beta) = X^T E Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$(\alpha, \alpha) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

☑ 定理 4.8：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一个标准正交基，若：

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\,A$$

其中 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，则向量组 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是标准正交基的充要条件是 A 为一个正交阵.

- 即：同一欧氏空间中，两组标准正交基间的过渡矩阵是正交阵。

§ 4.4 子空间的交、和、直和及正交

● 目的：了解子空间相互之间的关系与运算

一、子空间的交与和

定义 4.13 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则W_1，W_2的交是

$$W_1 \cap W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in W_1, \quad \alpha \in W_2\}$$

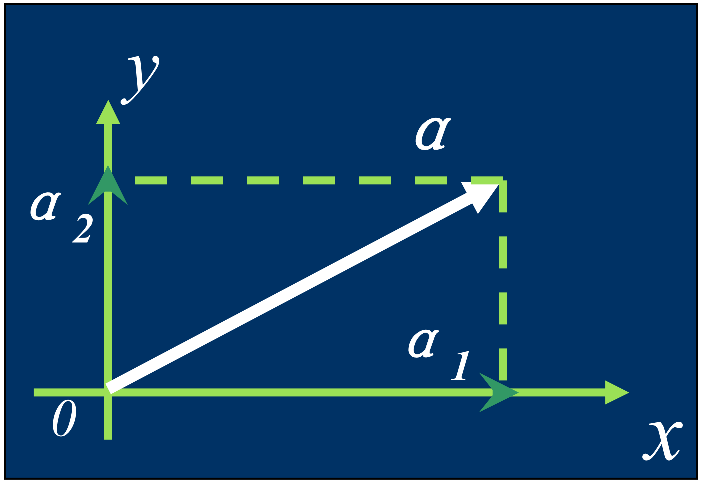
W_1，W_2的和是

$$W_1 + W_2 = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in W_1, \quad \beta \in W_2\}$$

例：在线性空间 R² 中，若

W_1, W_2分别表示 x轴与 y轴，则 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$W_1 + W_2 = R^2$



定理 4.9 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的子空间， 则 $W_1 \cap W_2$， $W_1 + W_2$ 都是V 的子空间.

证明：首先证明$W_1 \cap W_2$是V 的子空间

定理 4.1(判定子空间)：W 是 V 的子集，满足条件：

（1） W 非空；

（2） 如果α， β ∈ W， 则α + β ∈ W；

（3） 如果α ∈ W， λ ∈ P 则 λα ∈ W；

- 因为 $0 \in W_1$，$0 \in W_2$，故 $0 \in W_1 \cap W_2$，$W_1 \cap W_2$ 非空；

- 设α， $\beta \in W_1 \cap W_2$，则α， $\beta \in W_1$，
  α， $\beta \in W_2$
- 因为W_1是子空间，所以 $\forall k \in F$
  $\alpha + \beta \in W_1$ ，$k\alpha \in W_1$；
- 因为W_2是子空间，所以 $\forall k \in F$
  $\alpha + \beta \in W_2$ ，$k\alpha \in W_1$；
- 于是$\alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$，$k\alpha \in W_1 \cap W_2$，因此，
  $W_1 \cap W_2$是 V 的子空间.

再证明 W_1+W_2 是V 的子空间，记： $W=W_1+W_2$

由定义： $W=W_1+W_2=\left\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in W_1,\quad \alpha_2\in W_2\right\}$

- 因为 $0\in W_1$ ，$0\in W_2$ ，故 $0\in W_1+W_2$
  ⇨ W 非空；
- 设 α ，$\beta\in W$，则有

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2\,;$$

$$\beta=\beta_1+\beta_2,\quad \beta_1\in W_1,\beta_2\in W_2\,;$$

- 由于 W_1，W_2 是 V 的子空间：

$$\alpha_1+\beta_1\in W_1,\quad \alpha_2+\beta_2\in W_2\,;$$

$$\alpha+\beta=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta\in W_1+W_2\,;$$

- 同理， $\forall k \in F$

$$k\alpha = k(\alpha_1 + \alpha_2) = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in W_1 + W_2$$

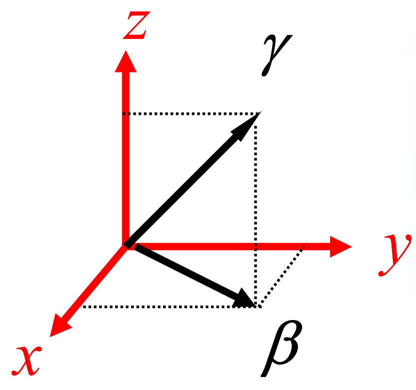
- 根据定理 4.1， $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间.

例：在线性空间 R³ 中，若

R_{xy}表示向量 $[x, y, 0]^T$ 的全体；

R_{yz}表示向量 $[0, y, z]^T$ 的全体；

R_z表示向量 $[0, 0, z]^T$ 的全体；



- 则它们都是 R³ 的子空间，并且：

$R_{xy} \cap R_{yz} = [0, y, 0]^T$ 的全体；　　$R_{xy} + R_{yz} = R^3$；

$R_{xy} + R_z = R^3$；　　$R_{yz} + R_z = R_{yz}$；

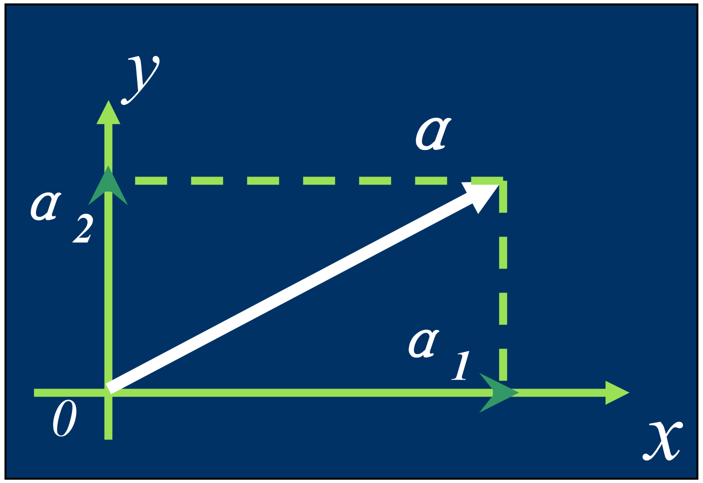
$R_{xy} \cap R_z = \{0\}$；　　$R_{yz} \cap R_z = R_z$；

☒ 两子空间的并集未必为V的子空间

例：在线性空间 R^2 中，若

W_1,W_2分别表示x轴与y轴，则W_1,W_2分别是R^2的子空间；

但是，若向量 $\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2$，$\alpha_1+\alpha_2\notin W_1\bigcup W_2$.



- 所以，$W_1 \cup W_2$对数乘封闭，对加法不一定封闭.
- *如何封闭* $W_1 \cup W_2$ ？ ✓ 生成子空间.
- $W_1 \cup W_2$的生成子空间为 W_1+W_2
- W_1+W_2是V 中含$W_1 \cup W_2$的<u>最小</u>子空间（量身定做）

- **布置习题** P 188:

30. 31. 34. 36.

☑例：设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是线性空间 V 中的两个向量组，则有

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) + L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$
$$= L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s).$$

证明：设 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l) = W_1 \subseteq V$

$$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = W_2 \subseteq V$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = W_3 \subseteq V$$

➢ 对 $W_1 + W_2$ 中任一向量 $\eta = \alpha + \beta$，其中 $\alpha \in W_1$，$\beta \in W_2$，所以 α、β 都属于W_3，即

$$\eta = \alpha + \beta \in W_3$$

$$\therefore \quad W = W_1 + W_2 \subseteq W_3;$$

- 另一方面W_3中的任一向量

$$\eta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_l\alpha_l + \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + \cdots + \mu_s\beta_s$$

- 记 $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_l\alpha_l \in W_1$

$$\beta = \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + \cdots + \mu_s\beta_s \in W_2$$

即有 $\eta = \alpha + \beta \in W_1 + W_2$

$$W_3 \subseteq W_1 + W_2$$

- 于是证明了

$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) + L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$
$= L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$.

☑ (升级为)性质：设 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{l}$ 与 $\beta_{1}, \beta_{2}, \ldots, \beta_{s}$ 是线性空间中的两个向量组，则有

$$L(\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{l}) + L(\beta_{1}, \beta_{2}, \ldots, \beta_{s}) = L(\alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{l}, \beta_{1}, \beta_{2}, \ldots, \beta_{s}).$$

性质 设 W_1，W_2，W_3 是线性空间 V 的子空间，则它们满足交换律与结合律：

(1) 交换律：$W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_1$

$$W_1 + W_2 = W_2 + W_1$$

(2) 结合律：$(W_1 \cap W_2) \cap W_3 = W_1 \cap (W_2 \cap W_3)$

$$(W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3)$$

定理4.10(维数公式) 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的子空间，$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$.

例：在三维几何空间V_3中，设W_1是过原点O的一个平面，W_2是过O的另一个平面，且它们相交于直线 L

- 则：W_1，W_2，L都是V_3的子空间，并且$W_1\cap W_2=L$
- V_3中每个向量α可以表示成W_1中一个向量与W_2中一个向量的和，所以$W_1+W_2=V_3$

$$W_1+W_2=\{\alpha+\beta \mid \alpha\in W_1,\quad \beta\in W_2\}$$

- 由于$\dim W_1=\dim W_2=2$，$\dim L=1$,$\dim V_3=3$，因此有

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$$

定理4.10(维数公式) 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的子空间，$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$.

证明：设W_1的维数是 n_1， W_2的维数是n_2，

$W_1\cap W_2$的维数是 m.

- 取$W_1\cap W_2$的一个基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$
- 将它扩充成W_1的一个基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1-m}$
- 同理可将它扩充成W_2的一个基

$$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2-m}$$

- 因此 $W_1=L(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1-m})$

$$W_2=L(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2-m})$$

$W_1 \cap W_2$的基：$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$

➢ 根据例2，我们有

$$W_1 + W_2 = L(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_1-m}, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_2-m})$$

➢ 为考察线性相关性，作线性组合

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots a_{n_1-m}\alpha_{n_1-m}$$
$$+ b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots b_{n_2-m}\beta_{n_2-m} = 0 \qquad (4.1)$$

➢ 令 $\alpha = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots a_{n_1-m}\alpha_{n_1-m}$

$$= -(b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots b_{n_2-m}\beta_{n_2-m}) \qquad (4.2)$$

➢ 由(4.2)第一行知， $\alpha \in W_1$；由第二行知$\alpha \in W_2$；
所以 $\alpha \in W_1 \cap W_2$ ⇨ α可经向量组γ线性表示

$$\alpha = l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + \cdots + l_m\gamma_m$$

➢ 由(4.2) $l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + \cdots + l_m\gamma_m + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots b_{n_2-m}\beta_{n_2-m} = 0$

$$\alpha = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots a_{n_1-m}\alpha_{n_1-m}$$
$$= -(b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots b_{n_2-m}\beta_{n_2-m}) \tag{4.2}$$

$$l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + \cdots + l_m\gamma_m + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots b_{n_2-m}\beta_{n_2-m} = 0$$

- **由于** $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_2-m}$ **是W_2的一个基**

只可能：$l_1 = l_2 = \cdots = l_m = \underline{b_1 = b_2 = \cdots = b_{n_2-m} = 0}$

- **由(4.2)，有**

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots a_{n_1-m}\alpha_{n_1-m} = 0$$

- **由于** $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_1-m}$ **是W_1的一个基**

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n_1-m} = 0$$

$$c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+\cdots+c_m\gamma_m+a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots a_{n_1-m}\alpha_{n_1-m}$$
$$+b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots b_{n_2-m}\beta_{n_2-m}=0 \qquad (4.1)$$

- 因此，要(4.1)成立，只能是

$$c_1=c_2=\cdots=c_m=a_1=a_2=\cdots=a_{n_1-m}=b_1=b_2=\cdots=b_{n_2-m}=0$$

- 所以，向量组

$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1-m},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2-m}$ 线性无关.

- 由定理4.4(2)：生成子空间的维数等于生成元的秩

$$W_1+W_2=L(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1-m},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2-m})$$

- 故W_1+W_2的维数是 $m+(n_1-m)+(n_2-m)=n_1+n_2-m$

√ 所以维数公式成立，即：

设 W_1，W_2 是线性空间 V 的子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

或

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2).$$

☑例：$W_1=L(\alpha_1,\ \alpha_2)$，$W_2=L(\beta_1,\ \beta_2)$，其中

$\alpha_1=(1, 2, 1, 0)^T$，$\alpha_2=(-1, 1, 1, 1)^T$，

$\beta_1=(2, -1, 0, 1)^T$，$\beta_2=(1, -1, 3, 7)^T$，

求W_1与W_2的和与交的基及维数.

解：因 $W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

➢ 所以，W_1+W_2 的维数是向量组 α_1，α_2，β_1，β_2 的极大线性无关组所含向量的个数；

将它们构成矩阵，做初等变换，得

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1}\cdots\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 这表明α_1，α_2，β_1是W_1+W_2的一个基，故$\dim(W_1+W_2)=3$.
- 同时也知道，β_2可经α_1，α_2，β线性表示，其形式为

$$\beta_2=-\alpha_1+4\alpha_2+3\beta_1$$

- 故：$3\beta_1-\beta_2\in W_1\cap W_2$.
- 因为α_1，α_2线性无关，β_1，β_2线性无关.
  由维数公式易得

$$\dim(W_1\cap W_2)=2+2-3=1$$

- 故$\alpha_1-4\alpha_2=(5，-2，-3，-4)$是$W_1\cap W_2$的一个基.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$$

例： 设 $R^{2\times2}$ 的两个子空间为

$$W_1=\left\{A\,\middle|\,A=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}, x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$W_2=L(B_1,B_2),\quad B_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1) 将 W_1+W_2 表示为生成子空间；

(2) 求 W_1+W_2 的基和维数；

(3) 求 $W_1\cap W_2$ 的基和维数.

$$x_1=x_2-x_3+x_4$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t_1\underset{\gamma_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}+t_2\underset{\gamma_2}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}+t_3\underset{\gamma_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

$\alpha_1=\gamma_1,\qquad \alpha_2=\gamma_1+\gamma_2,$

$\alpha_3=\gamma_2+\gamma_3$

解： 先将 W_1 表示为生成子空间

方程 $x_1-x_2+x_3-x_4=0$ 的基础解系为：

$$\alpha_1=[1\quad 1\quad 0\quad 0]^T,\alpha_2=[0\quad 1\quad 1\quad 0]^T,\alpha_3=[0\quad 0\quad 1\quad 1]^T$$

所以 W_1 的一个基是： $A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$W_1 = \left\{ A \mid A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

$$W_2 = L(B_1, B_2), \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1）将 W_1+W_2 表示为生成子空间.

W_1 的一个基是： $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

于是 $: W_1 = L(A_1, A_2, A_3)$，由前页定理

$$W_1 + W_2 = L(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2) \quad \Leftarrow \text{生成子空间}$$

(2）求 W_1+W_2 的基和维数.

思路： “全权代表” $\Rightarrow A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$在标准基下的坐标为

$$\alpha_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T, \alpha_2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T, \alpha_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\beta_1 = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]^T, \beta_2 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\alpha_1=[1\quad 1\quad 0\quad 0]^T,\alpha_2=[0\quad 1\quad 1\quad 0]^T,\alpha_3=[0\quad 0\quad 1\quad 1]^T$$

$$\beta_1=[1\quad 0\quad 2\quad 3]^T,\beta_2=[1\quad -1\quad 0\quad 1]^T$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$

- （2） W_1+W_2 的维数为 4，基为 A_1,A_2,A_3,B_2

（3）求 $W_1\cap W_2$ 的基和维数.

- 设矩阵 A $\in W_1\cap W_2$ ，则 A 可写为

$$A=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=l_1B_1+l_2B_2$$

即： $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3-l_1B_1-l_2B_2=0$

- 代入各个矩阵

- 设矩阵 $\mathbf{A} \in W_1 \cap W_2$，$\mathbf{A}$ 写为

$$A = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 = l_1 B_1 + l_2 B_2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 - l_1 B_1 - l_2 B_2 = 0$$

$$\begin{cases} k_1 - l_1 - l_2 = 0 \\ k_1 + k_2 + l_2 = 0 \\ k_2 + k_3 - 2l_1 = 0 \\ k_3 - 3l_1 - l_2 = 0 \end{cases}$$

方程组通解为：$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = l_1 B_1 + l_2 B_2 = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (3) $W_1 \cap W_2$ 的维数为 1，基为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$