



选项(A): $r(AB)=r(B) \Rightarrow r(A)=n$?

显然 $B^2X=0$ 的解是 $AB^2X=0$ 的解

下一步推: $AB^2X=0$ 的解也是 $B^2X=0$ 的解

分两步: **已知 $r(AB)=r(B)$**

第一步证明: $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解

显然, $BX=0$ 的解都是 $ABX=0$ 的解

$BX=0$ 的基础解系含 $n-r(B)$ 个解向量, 而 $ABX=0$ 的基础解系也含

$n-r(AB) = n-r(B)$ 个解向量.

所以, $BX=0$ 的这 $n-r(B)$ 个解向量, 即它的基础解系, 也是 $ABX=0$ 的 $n-r(B)$ 个解向量.

两个方程组基础解系相同, 所以 $ABX=0$ 的解也是 $BX=0$ 的解

即两个方程组同解.

第二步证明: **$ABCX=0$ 与 $BCX=0$ 同解** (把 C 换成 B 即如题)

显然: $BCX=0$ 的解都是 $ABCX=0$ 的解

反过来, 证明: **$ABCX=0$ 的解也是 $BCX=0$**

设 X_1 是 $ABCX=0$ 的解

则 $ABCX_1=0$.

即 $AB(CX_1)=0$ 故: 向量 **(CX_1) 是 $ABX=0$ 的解**

由第一步: 向量 **(CX_1) 也是 $BX=0$ 的解**

即有 **$B(CX_1)=0$** ; 所以, 若 X_1 是 $ABCX=0$ 的解, 则它也是 $BCX=0$ 的解

所以 **$ABCX=0$ 与 $BCX=0$ 同解。**

再由: 同解的齐次方程组系数矩阵秩相同, **$r(AB^2)=r(B^2)$, 即题目选 B.**

第一步: $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解 证法 2:

AB 的行向量都是 B 的行向量线性表示的结果 (课上讲过, 线性表示的系数是 A 的行向量)

B 的行向量组有 $r(B)$ 个极大无关组, 已知 $r(AB)=r(B)$, 所以这 $r(B)$ 个无关组也是 AB 的行向量的极大无关组。

由传递性, AB 的行向量组与 B 的行向量组等价

故 $ABx=0$ 和 $Bx=0$ 同解。

一道期中考试的是非题, 杨卓 同学发现问题:

一、判断正误 (每小题 4 分, 共 20 分) :

1.

2. 假设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 其秩为 r , 则 A 中必定存在一个 $r-1$ 阶子式不为零。 【 ✖ 】

原因: 对于 1 维的行 (列) 向量, $r-1$ 阶子式不存在

题目出的不严格, 应设定 $\min(m, n) \geq 2$, 答案才是 【 ✔ 】

批改说明: 这道题目判断 ✔ 或者 ✖ 都不扣分。