12.1判断下述系统是不是代数系统

(4) $[S;\oplus]$其中$S=\{[0],[1],[2],[3]\}$，$\oplus$定义为

$[i]\oplus[j]=[i+j]$；

解答：是代数系统。

取任意的i,j都能满足$[i]\oplus[j]\in S$。

例如：$[2]\oplus[3]=[1]$，$[0]\oplus[1]=[1]$，

$[2]\oplus[2]=[0]$等等。

(5)

$[S;\otimes]$其中$S=\{[1],[2],[3]\}$,$\otimes$定义为$[i]\otimes[j]=[ij]$;

解答：

因为$[2]\otimes[2]=[0]$，而$[0]\notin S$。所以$[S;\otimes]$不是代数系统。

12.2找出下述代数系统中的单位元，逆元与零元：

(1)$\left[R;+,\cdot\right]$;

(2)$\left[M_{nn}(Q);+,\cdot\right]$其中$M_{nn}(Q)$为有理数构成的$n\times n$阶矩阵；$+,\cdot$分别为矩阵的加法与乘法。

（1）$[R;+,\cdot]$

解答：

	单位元	逆元	零元
加法“+”	0	$-a,(\forall a\in R)$	无
乘法“·”	1	$\begin{cases}\frac{1}{a},(\forall a\in R,a\neq 0)\\ \text{无逆元},(a=0)\end{cases}$	0

（2）$[M_{nn}(Q);+,\cdot]$

解答：

	单位元	逆元	零元
加法“+”	n阶零矩阵	$-M_{nn}(Q)$	无
乘法“·”	n阶单位矩阵	$\begin{cases}\text{逆矩阵}M^{-1}\text{，若}M\text{为非降秩矩阵；} \\ \text{无逆元，若}M\text{为降秩矩阵；}\end{cases}$	0

12.3代数系统 $[S;*]$ 中若只有左（右）单位元,是否唯一？为什么？

解答:

不是唯一的。举反例证明。

如右图，1和2均为 $[S;*]$ 中的左单位元。

另一方面，$[S;*]$ 无右单位元。

*	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	3	1	2

12.4 证明$[S;\times]$ 之商系统$[\tilde{S};\otimes]$中的运算结果与等价类的代表元选取无关。

证明：设$[a],[b]\in\tilde{S}$,取任意的$a_1,a_2\in[a],b_1,b_2\in[b]$

$\because[\tilde{S};\otimes]$是$[S;\times]$的商系统

$\therefore[a_1]\otimes[a_2]=[a_1\times a_2]$

$[b_1]\otimes[b_2]=[b_1\times b_2]$

设$\sim$是代数系统的相容等价关系，那么

由$a_1\sim a_2,b_1\sim b_2$可得$a_1\times b_1\sim a_2\times b_2$

$\therefore[a_1\times b_1]=[a_2\times b_2]$

由a_1，a_2,b_1，b_2的任意性可得，结论成立。

12.6 证明代数系统 $[S;+]$ 与代数系统 $[T;+]$ 是同构的，其中 $S=\{a+ib \mid a,b\in Z\}, T=\{a+\sqrt{2}b \mid a,b\in Z\}$

证明：作映射Φ：$S\to T, \Phi(a+ib)=a+\sqrt{2}b$

(1)显然，映射Φ是一个双射。

（2）证明Φ（$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)$）

$$=\Phi(a_1+ib_1)+\Phi(a_2+ib_2)$$

Φ（$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)$）$=$Φ（$(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$）

$=(a_1+a_2)+\sqrt{2}(b_1+b_2)=(a_1+\sqrt{2}b_1)+(a_2+\sqrt{2}b_2)$

$=\Phi(a_1+ib_1)+\Phi(a_2+ib_2)$

12.7设$[S;*]$与$[T;\circ]$同态，φ为其同态映射，e为S之单位元，证明$\varphi(e)$为T的单位元;若$a\in S$，$a^{-1}\in S$为其逆元，则$\varphi(a^{-1})$为$\varphi(a)$之逆元。

证明:(1) $\because e$为S之单位元,φ为其同态映射

$\therefore \varphi(e)\in T.$

$\forall b\in T,\because \varphi$为满射$,\therefore \exists a\in S,\varphi(a)=b$

$\varphi(e)\circ b=\varphi(e)\circ\varphi(a)=\varphi(e*a)=\varphi(a)=b;$

$b\circ\varphi(e)=\varphi(a)\circ\varphi(e)=\varphi(a*e)=\varphi(a)=b;$

即$\varphi(e)\circ b=b=b\circ\varphi(e).$

$\therefore \varphi(e)$为T的单位元.

$(2) \because \varphi(a^{-1}) \circ \varphi(a) = \varphi(a^{-1} * a) = \varphi(e);$

$\varphi(a) \circ \varphi(a^{-1}) = \varphi(a * a^{-1}) = \varphi(e);$

$\therefore \varphi(a^{-1})$为$\varphi(a)$的逆元。

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

*	a	b	c	d
a	a	b	c	c
b	b	c	a	c
c	c	a	b	c
d	c	c	c	c

左边的单位元是a,

令φ(x)=x(x=a,b,c)

则φ(a)=a.

但φ(a)=a不是右边的单位元

13.1指出下列代数系统那些是半群，那些是拟群，并说明理由。

(1)$[Z;-]$

解答：不是半群。

$\because(a-b)-c\neq a-(b-c)$。不满足结合性。

(2)$[C;\times]$

解答：是拟群。

1.满足结合性。$(a\times b)\times c=a\times(b\times c),\forall a,b,c\in C$

2.有单位元$e=1$。　　$1\times a=a\times 1=a,a\in C$

(3) $S \neq \Phi \quad [P(S);\cup]$

解答：是拟群。

1.满足结合性。 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2.有单位元$e = \Phi$。 $\Phi \cup \mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \Phi$

(4) $[\mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(Q);+]$

解答：是拟群。

1.满足结合性。 $(\mathrm{M}^1{}_{\mathrm{m,n}}(Q) + \mathrm{M}^2{}_{\mathrm{m,n}}(Q)) + \mathrm{M}^3{}_{\mathrm{m,n}}(Q)$

$$= \mathrm{M}^1{}_{\mathrm{m,n}}(Q) + (\mathrm{M}^2{}_{\mathrm{m,n}}(Q) + \mathrm{M}^3{}_{\mathrm{m,n}}(Q))$$

2.有单位元$e = 0_{m,n}$。 $0_{m,n} + \mathrm{M}^1{}_{\mathrm{m,n}}(Q) = \mathrm{M}^1{}_{\mathrm{m,n}}(Q) + 0_{m,n}$

$(5)[Z_n;\oplus]$

解答：是拟群。

1.满足结合性。 $([i]\oplus[j])\oplus[k]=[i]\oplus([j]\oplus[k])$

2.有单位元$e=[0]$。 $[0]\oplus[i]=[i]\oplus[0]$

13.4指出下列代数系统中那些是群？那些是可交换群?为什么？

(1)$[Z;\circ]$,其中$\circ$定义如下：$\forall a,b\in Z, a\circ b=a+b-2$;

解答：是可交换群。

1.满足结合律。$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)=a+b+c-4$

2.有单位元$e=2$. $e\circ a=a\circ e=e+a-2=a$

3.每一个元素有逆元. $a^{-1}=4-a$

4.可交换. $a\circ b=b\circ a=a+b-2$

(2)$[Z;\circ]$, 其中$\circ$定义如下：$\forall a,b\in Z, a\circ b=a+b-ab$;

解答：不是群。

$\because e=0$为单位元。

$\therefore a^{-1}=\dfrac{a}{a-1}$, 当$a=1$时，无逆元；当$\dfrac{a}{a-1}$不为整数时也没有逆元。

(3)1的n次根，关于乘法$\cdot$的运算。

解答：是可交换群。

1.复数乘法满足结合律与交换律;

2.有单位元$e=1$;

3.每一个元素均有逆元。1的n次方根形式为

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}(k=0,1,\cdots n-1)$$

$$x^{-1}=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}.$$

(4)1的所有正整数次根关于乘法运算。

解答：是可交换群。

1.满足结合律与交换律显而易见;

2.有单位元$e=1$;有逆元同上;

3.封闭性.

$$x_1\cdot x_2=(\cos\frac{2k_1\pi}{n_1}+i\sin\frac{2k_1\pi}{n_1})(\cos\frac{2k_2\pi}{n_2}+i\sin\frac{2k_2\pi}{n_2})$$

$$=(\cos\frac{2(k_1n_2+k_2n_1)\pi}{n_1n_2}+i\sin\frac{2(k_1n_2+k_2n_1)\pi}{n_1n_2})=y;$$

则y为1的n_1n_2次根。

(5)$\lfloor R^*;* \rfloor$,*定义如下：$\forall a,b\in R, a*b=a^2b^2, R^* = R-\{0\}$.

解答：不是群。

不满足结合律。

$$a*(b*c)=a^2b^4c^4 \neq (a*b)*c=a^4b^4c^2$$

(6) $[F(x);+]$, 其中 $F(x)=\{a_0+\cdots+a_n x^n \mid a_i \in R, i=1,\cdots,n; n \in N\}$, + 为多项式加法运算。

解答：是可交换群。

单位元为 $f(x)=0$； $\forall g(x) \in F(x)$, 逆元为 $-g(x)$.

结合律与交换律显而易见。

(7) $\left[\{a+b\sqrt{2}\} \mid a,b \in Q;+\right]$,

解答：是可交换群。

(1)封闭

(2)满足结合律

(3)单位元$e=0$

(4) $\left(a+b\sqrt{2}\right)^{-1}=(-a)+(-b)\sqrt{2}$

(5)满足可交换性也是显然的

(8)$S=\{a,b,c,d\}$,运算如图

解答：是可交换群。

(1)满足结合律

(2)单位元$e=a$

(3) $a^{-1}=a, b^{-1}=d, c^{-1}=c, d^{-1}=b$

(4)满足可交换性也是显然的(对称)

13.6证明：$S \neq \Phi, T_S$为所有$S \to S$的一一对应所组成的集合，关于映射的复合运算$\circ$,$[T_S;\circ]$为群；S^S为所有$S \to S$的映射组成的集合，则$[S^S;\circ]$不是群。

证明： (1)$[T_S;\circ]$为群

1.封闭性。若$f, g \in T_S, f \circ g \in T_S$

2.结合性。 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

3.有单位元恒等变换I. $I \circ f = f \circ I$

4.每一个元素有逆元。

$\because f$为一一映射$, \therefore$存在逆元f^{-1}.

综上所述,$[T_S;\circ]$为群。

(2)$\left[S^{S};\circ\right]$不是群。

设f是$S\rightarrow S$的一个映射，但不是一一映射。

$\because$ f没有逆映射，即没有逆元.

$\therefore\left[S^{S};\circ\right]$不是群。

13.10$[G;\cdot]$为群，是可交换的，当且仅当，对任意 $a,b\in G$,有（ab）$^2=a^2b^2$。

证明：（1）必要性。

$\because[G;\cdot]$为可交换群，

$\therefore(ab)^2=(ab)(ab)=a(ba)b=a(ab)b=(aa)(bb)=a^2b^2$

(2)充分性。

$\because(ab)^2=a^2b^2\Rightarrow a(ba)b=a(ab)b$

$\therefore$由消去律得$ba=ab$，即$[G;\cdot]$可交换。

13.11已知$[G;\cdot]$为不可交换群，当$|G|>2$时，必存在$a,b\in G,a\neq b,a\neq e,b\neq e,$但$ab=ba.$

证明：$\because [G;\cdot]$为群

$\therefore \forall a\in G,$ 有$aa^{-1}=a^{-1}a=e.$

(1) 若$a\neq a^{-1}$，命题得证。

（2）若$a=a^{-1}$，即G中每一个元素的逆元为其自身，那么$ab=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=ba,$满足交换律，与题设矛盾。

由（1），（2）可得必存在$a,b\in G,a\neq b,ab=ba.$