# 线 性 代 数

## Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

**答疑：** 已知方阵：$AA^{\mathrm{T}}=E$，$BB^{\mathrm{T}}=E$，且$|\mathrm{A}|=-|\mathrm{B}|$，求$|A+B|$

**解：由矩阵行列式的性质：1.乘积；2. |A|=|A^T|**

$$\left|AA^{\mathrm{T}}\right|=|A|\left|A^{\mathrm{T}}\right|=1\Rightarrow|A|=\pm1$$

$$\text{同理,}|\mathrm{B}|=\pm1$$

$$\text{由已知:}|\mathrm{A}|=\text{-}|\mathrm{B}|\Rightarrow|A||B|=-1$$

$$\Rightarrow\left|A^{T}\right|\left|B^{T}\right|=-1$$

$$\text{又因为：}\ |\mathrm{A}+\mathrm{B}|=|B+\mathrm{A}|=\left|(B+A)^{T}\right|=\left|B^{T}+A^{T}\right|=\left|\mathrm{E}B^{T}+A^{T}E\right|$$

$$=\left|A^{T}AB^{T}+A^{T}BB^{T}\right|=\left|A^{T}(A+B)B^{T}\right|$$

$$=\left|A^{T}\right||A+B|\left|B^{T}\right|=\left(\left|A^{T}\right|\left|B^{T}\right|\right)|A+B|=-|A+B|$$

$$\text{所以:}|A+B|=0$$

P41： 11(11) 计算 **2n 阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$$

解：原式
$$\xlongequal[\vdots]{\substack{r_1-r_n \\ r_2-r_{n-1}}} \begin{vmatrix} a-b & & & & & & & b-a \\ & a-b & & & & & b-a & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a-b & b-a & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix} \xlongequal[\vdots]{\substack{c_n+c_1 \\ c_{n-1}+c_2}} \begin{vmatrix} a-b & & & & & & & 0 \\ & a-b & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a-b & 0 & & & \\ & & & b & a+b & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a+b & \\ b & & & & & & & a+b \end{vmatrix}$$

- 由 p31 例 7 $= \begin{vmatrix} a-b & & \\ & a-b & \\ & & \ddots & \\ & & & a-b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a+b & & \\ & a+b & \\ & & \ddots & \\ & & & a+b \end{vmatrix} = (a^2-b^2)^n$

## 三、矩阵的乘幂与矩阵多项式

定义2.7：设 $A$ 是 n 阶矩阵, 称 k 个 A的乘积为矩阵 A 的 k 次幂， 记作 $A^k$，并规定

$$A^0 = E, \qquad A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k个A}$$

定义2.8：设 $A$ 是 n 阶矩阵，称

$$f(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m$$

为矩阵A的多项式(polynomial of matrix A.

# 方阵行列式的性质

(1) 方阵 $A$ 对应的行列式应记为 $|A|$或 $\det(A)$

(2) $|kA| = k^n|A|$

(3) $|AB| = |A||B|$， $|AB| = |BA|$

(4) $|A_1 A_2 \ldots A_k| = |A_1||A_2|\ldots|A_k|$

(5) $|A^T| = |A|$

$|A^m| = |A|^m$

- 归纳到第一章

# § 2.3 可逆矩阵

## 一、逆矩阵的定义及可逆的充要条件

定义2.9：设 $A$ 是 n 阶矩阵，若存在n 阶矩阵 B 使

$$AB = BA = E$$

则称 $B$ 是 $A$ 的逆矩阵

称A是可逆矩阵 或 非奇异矩阵。

✓ 记为 $B = A^{-1}$ 或 $A^{-1} = B$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**定义2.10**：设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，$A_{ij}$ 是 $|A|$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，则称矩阵

$$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的伴随矩阵

定理 2.2： 方阵A可逆的充要条件是：

A为非奇异矩阵，即 $|A|\neq 0$，且 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$

## ☑ 可逆矩阵的性质

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$

(2) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

(3) 若数 $k\neq 0$ $\quad (kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$

(4) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

(5)若$A$，$B$为同阶可逆矩阵，则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

# § 2.4 分块矩阵及其运算

- 目的：化高阶矩阵为低阶 —简化运算

## 一、分块矩阵

定义：用若干条横线/纵线将矩阵A分成若干小块。

✓ 这样的小块称为矩阵A的子块或子矩阵；

✓ 称 A 是以子块为元素的分块矩阵。
(block matrix or partitioned matrix)

例如，A可划分为：

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}\qquad O_{12}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\qquad E_{22}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad A=\begin{bmatrix}A_{11} & O_{12}\\ A_{21} & E_{22}\end{bmatrix}$$

➢ 采用何种形式分块，完全根据实际需要而定。

例如:
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

可如下分块
$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

亦可如下分块
$$A=\left(\begin{array}{cc|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

## ➢ 特殊分块方式

按行分块

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

其中 $A_i=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix},\ i=1,2,\cdots,m.$

按列分块

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{pmatrix}$$

其中 $B_j=\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\ j=1,2,\cdots,n.$

## 二、分块矩阵的运算

(1) 分块矩阵的加法：设矩阵$A$和$B$是两个同型矩阵，且采用同样的方式进行分块，

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pq} \end{bmatrix}$$

- 易验证

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1q}+B_{1q} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2q}+B_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1}+B_{p1} & A_{p2}+B_{p2} & \cdots & A_{pq}+B_{pq} \end{bmatrix}$$

- 即分块矩阵 A 与 B 相加，只需把对应子块相加.
- 同理，分块矩阵相减，只需把对应子块相减.

例： $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\1&0&-1&0\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$

利用分块矩阵计算 A + B

解： $A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hdashline 0&0&1&-1\\1&0&-1&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}E&O\\A_1&A_2\end{bmatrix}$

$B=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\0&0&0&1\\\hdashline 0&0&1&2\\0&0&0&-1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_1&E\\O&B_2\end{bmatrix}$

$A+B=\begin{bmatrix}E+B_1&E\\A_1&A_2+B_2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\1&0&-1&-1\end{bmatrix}$

(2) 分块矩阵的数量乘法：k是一个数，矩阵$A$ 采用某种方式进行分块，

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

- 易验证

$$kA=\begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1q} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{p1} & kA_{p2} & \cdots & kA_{pq} \end{bmatrix}$$

- 即数与分块矩阵相乘等于用这个数乘每一个子块.

- **布置习题 P97:**

22. 23. (1)、(3)、(5)

24. 25. 27.

28. (2)、(4)

29. 30. 34.

32. (1)、(3)

36. (2)、(4)

37 (1)、(2)

39.

(3) 分块矩阵的乘法：设A为m×s矩阵，B为s×n矩阵，二者分块方式相同，

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \cdots & s_t \end{array} \\ & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pt} \end{bmatrix} \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{array} \end{array} \qquad B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_q \end{array} \\ & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tq} \end{bmatrix} \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} \end{array}$$

➤ 其中 $A_{ik}$ 是 $m_i\times s_k$ 阶子矩阵， $B_{kj}$ 是 $s_k\times n_j$ 阶子矩阵($A_{ik}$的列数等于 $B_{kj}$ 的行数)，则

$$AB=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pq} \end{bmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}, \qquad (i=1,\cdots,p;j=1,\cdots,q).$

例：设A为n阶矩阵，n×1阶矩阵 $e_j$ 为：

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

求证 $Ae_j$ 为矩阵 A 的第 j 列。

解：将 A 按列分块，$e_j$ 按行分块，则

$$Ae_j = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_j$$

例：设n阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} O_{(n-1)\times 1} & E_{n-1} \\ 0 & O_{1\times(n-1)} \end{bmatrix}$ 计算 $A^3$。

解：将矩阵 A 按列分块，则 $A=[0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}]$

$$A^2=A[0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}]=[A0,Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_{n-1}]$$ ⇦ 分块相乘

➢ 由上题结果知 $Ae_j$ 为矩阵 A 的第 j 列，即

$$Ae_1=0,\ Ae_2=e_1, Ae_3=e_2,\cdots,\ Ae_{n-1}=e_{n-2}$$

$$\therefore A^2=[0,\ 0,e_1,e_2,\cdots,\ e_{n-2}]$$

➢ 进而

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 \\ &= [0,\ 0,\ 0,e_1,e_2,\cdots,\ e_{n-3}] = \begin{bmatrix} O & E_{n-3} \\ O & O \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**例:** $A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&1&1\\2&2&1&1\\3&3&2&2\end{array}\right]$ $B=\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&1&1\\1&2&1&1\\\hdashline 3&1&1&1\\3&2&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$

**利用分块矩阵计算 AB**

**解：由于每个B的子块有两行，故每个A的子块必有两列。**

- **行划分有两种可能:**

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\\hline 2&2&1&1\\3&3&2&2\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&2&1&1\\\hline 3&1&1&1\\3&2&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{11}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}$$

同理, $C_{12}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix}4&5\end{bmatrix},\cdots$

$$A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3\end{bmatrix}$$

$$\therefore C_{11}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix}8&6\end{bmatrix}$$

$$AB=\left[\begin{array}{cc|cc}8&6&4&5\\\hline 10&9&6&7\\18&15&10&12\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & 4 & 5 \\ \hline 10 & 9 & 6 & 7 \\ 18 & 15 & 10 & 12 \end{array}\right]$$

➢ 第二种可能：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \therefore C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad 同理, C_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \cdots$$

$$AB = \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 6 & 7 \\ \hline 18 & 15 & 10 & 12 \end{array}\right]$$

➢ 行划分只有两种？

例：
$$A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline 0&0&1&-1\\1&0&-1&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}E&O\\A_1&A_2\end{bmatrix}\qquad B=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hdashline 0&0&1&2\\0&0&0&-1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_1&E\\O&B_2\end{bmatrix}$$

利用分块矩阵计算 **A B**

解：
$$A_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}E&0\\A_1&A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1&E\\0&B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1&E\\A_1B_1&A_1+A_2B_2\end{bmatrix}$$

$$A_1B_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

$$A_2B_2=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$AB=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hdashline 0&0&1&3\\1&0&0&-2\end{array}\right]$$

$$A_1+A_2B_2=\begin{bmatrix}1&3\\0&-2\end{bmatrix}$$

例: $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

利用分块矩阵计算 AB

解：将矩阵 A B 分块如下

$$A=\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & E_3 \\ 2E_2 & O_{2\times 3} \end{bmatrix} \quad B=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} O_{2\times 3} & B_{12} \\ B_{21} & O_{3\times 1} \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & E_3 \\ 2E_2 & O_{2\times 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O_{2\times 3} & B_{12} \\ B_{21} & O_{3\times 1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{21} & A_{11}B_{12} \\ O_{2\times 3} & 2B_{12} \end{bmatrix}\cdots$$

- **矩阵含有较多 0 和 1 时，分块计算简便**

## (4) 分块矩阵的转置：矩阵$A$ 采用某种方式分块，

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix} A_{11}{}^T & A_{21}{}^T & \cdots & A_{p1}{}^T \\ A_{12}{}^T & A_{22}{}^T & \cdots & A_{p2}{}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1q}{}^T & A_{2q}{}^T & \cdots & A_{pq}{}^T \end{bmatrix}$$

- 转置：先整体、后子块

例如 $A=\left(\begin{array}{cc:cc}2 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ \hdashline 3 & -1 & 4 & 5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$

不分块：

分块：

$$A^{\mathrm{T}}=\left(\begin{array}{cc:c}2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}}{}_{11} & A^{\mathrm{T}}{}_{21} \\ A^{\mathrm{T}}{}_{12} & A^{\mathrm{T}}{}_{22}\end{pmatrix}$$

例：设矩阵 $A_{m\times n}$ 按列分块为 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$

利用分块矩阵计算 $AA^T$ 和 $A^TA$

解：

$$AA^T=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_n^T\end{bmatrix}=\left[a_1a_1^T+a_2a_2^T+\cdots+a_na_n^T\right]$$

- ？
- 矩阵乘积的外积定义...

$$A^TA=\begin{bmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_n^T\end{bmatrix}[a_1,a_2,\cdots,a_n]=\begin{bmatrix}a_1^Ta_1 & a_1^Ta_2 & \cdots & a_1^Ta_n\\a_2^Ta_1 & a_2^Ta_2 & \cdots & a_2^Ta_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_n^Ta_1 & a_n^Ta_2 & \cdots & a_n^Ta_n\end{bmatrix}$$

## (5) 分块矩阵的求逆：

- 利用矩阵分块，可以将高阶矩阵求逆转化为低价矩阵求逆

例: 设矩阵 $P$ 可以分块为 $P=\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$

其中 A，B分别为 r 阶、s阶可逆矩阵，求$P^{-1}$

解：由行列式的拉普拉斯展开定理，及A，B可逆

$$|P|=|A||B|\neq 0$$

因而P可逆，设 $P^{-1}$可分块为 $P^{-1}=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$

由 $PP^{-1}=E$ 可得 $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{bmatrix}$$ 即 $$\begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 \\ \mathrm{C}X_1+BX_3 & \mathrm{C}X_2+BX_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{bmatrix}$$

比较等式两边，得 $$\begin{cases} AX_1=E_r & (1) \\ AX_2=O & (2) \\ \mathrm{C}X_1+BX_3=O & (3) \\ \mathrm{C}X_2+BX_4=E_s & (4) \end{cases}$$

**(1)(2)两边左乘 A^-1^ 可得** $X_1=A^{-1}, X_2=O.$

**带入(3)(4) 可得** $\mathrm{C}A^{-1}+BX_3=O,\quad X_3=-B^{-1}\mathrm{C}A^{-1},$

$BX_4=E_s \qquad X_4=B^{-1}$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}\mathrm{C}A^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$ **当$C=O$时** $$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

- **矩阵分块后，可把子阵视作“超元素”，按普通矩阵运算法则进行计算.**

练习： $A=\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ 利用分块矩阵计算 A $^{-1}$

解：二阶矩阵的逆矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

## 准对角矩阵

定义：若方阵 $A$ 除主对角线上的子块外，其余子块都为$O$，且主对角线子块均为方阵，即：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m \end{pmatrix} \quad (A_i\text{为方阵，}\ i=1,2,\ldots,\ m)$$

则称$A$为准对角矩阵。

例如：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_3 \end{pmatrix}$$

## ➢ 准对角矩阵与对角矩阵性质相似

例如：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m \end{pmatrix}$$

$$A^k=\begin{pmatrix} A_1^{\ k} & & & O \\ & A_2^{\ k} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m^{\ k} \end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{\ -1} & & & O \\ & A_2^{\ -1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m^{\ -1} \end{pmatrix}$$

# § 2.5 常用的特殊矩阵

- 主要特点： 性态良好，便于计算

- 实际应用：将普通矩阵转化为特殊矩阵，
  简化问题 / 简化计算

## 一、对角阵与准对角阵

对角矩阵（diagonal matrix）

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

记作 $diag\,[d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn}]$

纯量(标量) 矩阵（scalar matrix）$\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix} = kE$

## 对角阵的性质

设 $A = diag[a_1, a_2, \ldots, a_n]$，$B = diag[b_1, b_2, \ldots, b_n]$， 则

(1) $|A| = a_1 a_2 .. a_n$

(2) $(A \pm B) = diag[a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \ldots, a_n \pm b_n]$

(3) $kA = diag[ka_1, ka_2, \ldots, ka_n]$

(4) $AB = BA = diag[a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n]$

(5) $A^m = diag[a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m]$

(6) 若 $A$ 可逆，$A^{-1} = diag[a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}]$

$$A = diag[a_1, a_2, \dots , a_n]$$

**(7) n 阶矩阵 C，按行及列分块为**

$$C=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n],\qquad \text{则}\quad AC=\begin{bmatrix}a_1\beta_1\\ a_2\beta_2\\ \vdots\\ a_n\beta_n\end{bmatrix},\quad CA=[a_1\gamma_1,a_2\gamma_2,\cdots,\alpha_n\gamma_n].$$

➢ 行左、列右

**证明：**

$$C=\begin{array}{c|c|c|c|c} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n & \\ \hline c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \beta_1\\ \hline c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & \beta_2\\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \hline c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & \beta_n \end{array}$$

$$\therefore AC=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\beta_1\\ a_2\beta_2\\ \vdots\\ a_n\beta_n\end{bmatrix}$$

➢ C $e_j$ 为矩阵C 的第 j 列

$$CA=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{bmatrix}=[a_1\gamma_1,a_2\gamma_2,\cdots,\alpha_n\gamma_n]$$

## 定义2.11 准对角阵

➢ 方阵除主对角线上的子块外，其余子块都为*0*，且主对角线的子块均为方阵，

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix} \quad (A_i\text{都是方阵，}\ \mathrm{i}=1,2,\ldots,s)$$

记作 $diag\,[A_1\,, A_2\,, \cdots, A_s\,]$

## 准对角阵的性质(与对角阵类似)

设 $A = diag[A_1, A_2, \ldots, A_n]$，$B= diag[B_1, B_2, \ldots, B_n]$， 则

(1) $|A| = |A_1|\,|A_2| \ldots |A_n|$

(2) $(A \pm B) = diag[A_1 \pm B_1, A_2 \pm B_2, \ldots, A_n \pm B_n]$

(3) $kA = diag[kA_1, kA_2, \ldots, kA_n]$

(4) $AB = diag[A_1 B_1, A_2 B_2, \ldots, A_n B_n]$

(5) $A^m = diag[A_1^m, A_2^m, \ldots, A_n^m]$

(6) 若 A 及其每一子块均可逆，$A^{-1} = diag[A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_n^{-1}]$

**(6) 若 $A$ 及其每一子块均可逆，$A^{-1} = diag[A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_s^{-1}]$**

即，对分块对角矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_S \end{bmatrix}$

若 $|A_i| \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, s)$，则 $|A| \neq 0$，并有

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_S^{-1} \end{bmatrix}$$

例:设 $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{bmatrix}$，求 $A^{-1}$。

解:

$$A=\left[\begin{array}{c:cc}5&0&0\\ \hdashline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{bmatrix}$$

$$A_1=(5),\quad A_1^{-1}=(\frac{1}{5}),\quad A_2=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&3\end{bmatrix}$$

所以

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{c:cc}\frac{1}{5}&0&0\\ \hdashline 0&1&-1\\0&-2&3\end{array}\right]$$

# 三、对称矩阵与反对称矩阵

定义2.13：设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，若 $a_{ij}=a_{ji}$，或 $A^T = A$，则称 A 为对称矩阵（symmetric matrix）

例如 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3.1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3.1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 为实对称矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2-i & 3.1 \\ -2-i & 2 & 1 \\ 3.1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 为复对称矩阵

**对称矩阵的性质**

(1) 对称矩阵的和、数量乘积、方幂，仍为对称矩阵.

(2) 若对称矩阵可逆，其逆矩阵仍为对称矩阵.

(3) 对称矩阵乘积 $AB$ 为对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$

**(3) 对称矩阵乘积 *AB* 为对称矩阵的充要条件是 *AB*= *BA***

证明：必要性—已知 $(AB)$ 是对称阵， $A$、$B$均为对称阵，故

$(AB)^T = (AB)$；另： $(AB)^T = B^T A^T = BA$

所以： $AB = BA$

充分性—已知 $AB = BA$， $A$、$B$均为对称阵，故

$(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB$,

所以 $AB$ 是对称阵， 证毕。

■ 若方阵$A$满足 $A^T = -A$，即 $a_{ji} = -a_{ij}$,
则称$A$为反对称矩阵。

➢ 因为$a_{ii} = -a_{ii}$，$a_{ii} = 0\ (i = 1, 2, \dots n)$,
即反对称矩阵对角线元素全为零。

例如 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3.1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3.1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$