（装订线内不要答题）

20. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ $(m<n)$是 n 维欧氏空间 V 中的一组向量，而

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)=\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{vmatrix}$$

求证:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关的充要条件是格拉姆行列式$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\neq 0$

证明 1：用 G 表示格拉姆矩阵，用$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$表示格拉姆行列式

欧氏空间是定义了内积(α_i, α_j)的线性空间。

充分性：考察一组数$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 和

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+,\cdots,+\alpha_m x_m=0 \quad (1)$$

(1)可表示为线性方程组 1： $AX=0$， $A=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$

格拉姆矩阵可写为：$G=A^TA$

用α_1点乘(1)式，得 $(\alpha_1,\alpha_1)x_1+(\alpha_1,\alpha_2)x_2+,\cdots,+(\alpha_1,\alpha_m)x_m=0$

用α_2点乘(1)式，得 $(\alpha_2,\alpha_1)x_1+(\alpha_2,\alpha_2)x_2+,\cdots,+(\alpha_2,\alpha_m)x_m=0$

$$\vdots$$

用α_m点乘(1)式，得 $(\alpha_m,\alpha_1)x_1+(\alpha_m,\alpha_2)x_2+,\cdots,+(\alpha_m,\alpha_m)x_m=0$

即α_i依次点乘（1）后得线性方程组 2： $A^TAX=0$ 或 $GX=0$

我们证明过方程组 1 和方程组 2 同解;所以,若格拉姆行列式$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\neq 0$，则线性方程组 2 系数矩阵满秩 ⇨ 线性方程组 2 只有零解⇨ 线性方程组 1 只有零解，即构成 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

必要性：反之，已知$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，方程组 1 满秩只有零解⇨ 线性方程组 2 只有零解⇨其系数矩阵$G=A^TA$满秩 ⇨ 行列式 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)\neq 0$ 。

证法 2： α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m 线性无关,可对其进行 施密特 正交化，上节讲过 QR 分解：

$$A = QR \ , \quad G = A^T A = R^T Q^T QR = R^T E R = R^T R$$

由性质：$\left|R^T R\right| = \left|R^T\right| \cdot \left|R\right| = \left|R\right|^2$，

由于 R 是上三角矩阵，对角元素是向量正化交和归一化过程中所用的范数—必大于零（**非零**）

故 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \left|R^T R\right| > 0$，

即此时格拉姆行列式有所谓的正定性，后面二次型要用到。