线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

● 生成元

➢ 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是数域 P 上线性空间 V 中的一组向量，考虑这组向量所有可能的线性组合所组成的集合

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_l\alpha_l \quad (\lambda_i\in P, i=1,2,\cdots,l)$$

➢ 是V的一个子空间，称它为由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 生成/张成的子空间 **(generated/spanned by …)**，记为：

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)=\left\{\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i \,\middle|\, \lambda_i\in P\right\}$$

或 **Span** $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)=\left\{\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i \,\middle|\, \lambda_i\in P\right\}$

➢ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 称为此子空间的生成元 **(generator)**.

§ 4.2 基、维数和坐标

☑ 定义 4.3：线性空间 V 中向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，如果它满足条件：

(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 线性无关；

(2) 线性空间 V 中任一向量 α 都可经 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 线性表示.

则称此向量组是线性空间 V 的一个**基** (basis).

☑ 定义 4.4：如果线性空间 V 的一个基所含向量个数为 n, 则称 V 为 **n 维空间**，记为 $\dim V = n$.

二、向量的坐标

☑ 定义 4.5：设向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一个基，α 是 V 中任意一个向量，则有

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

称数组 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标(coordinates)，记为 $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

➢ 任意一个向量 α 在一个确定的基下的坐标是唯一的.

定理 4.2：设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 是 n 维线性空间 V 中 l 个向量，在 V 中取定一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，如果 α_j 在此基下的坐标为

$$[a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}]^T \quad (j = 1, 2, \cdots, l)$$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性相关的充要条件是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nl} \end{bmatrix}$$

坐标矩阵

的秩 $r_A < l$.

推论：定理 4.2 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性无关的充要条件是 $r_A = l$.

定理：向量组的线性相关性 ⇔ 其在同一基下坐标向量组的线性相关性 ← 坐标矩阵的秩.

三、过渡矩阵与坐标变换公式

问题： 任意 n个线性无关的向量都可以作为 n 维线性空间 V 的一组基.

- 例如：标准基：
  - R^n 的标准基 $(e_1, e_2, ..., e_n)$
  - $R^{2\times 2}$ 的标准基

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

  - $P[x]_n$的标准基 $(1, x^2, ..., x^n)$
  - 尽管标准基形式简单，但是很多实际问题中，标准基并不是最适用的，或暂时无法解得.

- 可类比直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系、切平面—法向量 坐标系、特征值问题等等.
- 同一向量，在不同的基下，坐标一般是不同的
  ⇨ 那么，其在不同基下的坐标间有什么关系？
- 不同的基可视作不同的“参考坐标系”
- 所以，这实际上是不同“参考系”下坐标的转化问题.

例如：在 R^2 中，我们希望用新的基取代标准基 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

(1) 给定一个向量 $\mathbf{x}=(x_1, x_2)^T$，求它在基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标;

(2) 给定一个向量 $\mathbf{c}$ 在$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标 $\mathbf{c}=(c_1, c_2)^T$，

即 $\mathbf{c}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2$， 求它在$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$下的坐标。

解：(2) $\begin{cases}\mathbf{u}_1=3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2\\ \mathbf{u}_2=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\end{cases}$ $\quad (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\cdot M$

➢ 由此得到 $\mathbf{c}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2=c_1(3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)+c_2(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$

$$=(3c_1+c_2)\mathbf{e}_1+(2c_1+c_2)\mathbf{e}_2$$

➢ 向量 $\mathbf{c}$ 在标准基下的坐标为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=M\,\mathbf{c}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = M\,\mathbf{c} \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（1）给定一个向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$，求它在基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标;

- 对于(1)：给定 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$，求它在基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标 $(c_1, c_2)^T$，显然是(2)的逆过程：

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \mathbf{x}$$

例如： 给定向量 $\mathbf{x} = (7, 4)^T$，求它在基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

所以， $\mathbf{x} = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$.

☑ 定义 4.6：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 是 n 维线性空间 V 中的两个基，且有：

$$\begin{cases} \varepsilon'_1 = m_{11}\varepsilon_1 + m_{21}\varepsilon_2 + \cdots + m_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon'_2 = m_{12}\varepsilon_1 + m_{22}\varepsilon_2 + \cdots + m_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \varepsilon'_n = m_{1n}\varepsilon_1 + m_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + m_{nn}\varepsilon_n \end{cases} \qquad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

借助矩阵表示为 $\boxed{[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]M}$

称矩阵**M**为由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 的 过渡矩阵(**transition matrix**).

$$\boxed{\text{或：}\quad [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]M = [\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n]}$$

- 基变换公式

坐标矩阵

$$\boxed{[\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M}$$

基变换公式

➢ 过渡矩阵是基与基之间的一个可逆线性变换？

✓ 全权代表、线性空间基向量组秩相等、等价

☑ 定理 4.3：设 ε'$_1$, ε'$_2$, ..., ε'$_n$ 和 ε$_1$, ε$_2$, ..., ε$_n$ 是 n 维线性空间 V 中的两个基，且有：

$$[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] M$$

全权代表

则：(1) 过渡矩阵 M 是可逆的；

(2) 若 $\alpha \in V$，且在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为：$[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$；

在 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 下的坐标为：$[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]^T$，

则有：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

证明：（1）由定理 4.2 推论知过渡矩阵 M 是可逆的：

M 是一个 基 在另一个基下的坐标矩阵.

（2）由于向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ ，即有.

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

同理 $\alpha = [\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n]\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ ⇦ 代入左式得

又已知 $[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]M$

$$\alpha=[\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n]\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

由于向量α在同一个基(ε$_1$，ε$_2$，...，ε$_n$)下坐标唯一，故有下式成立：

$$\boxed{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}\qquad(2.5)}$$

或：$\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{bmatrix}=M^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$

坐标变换公式

例：在线性空间 R^3 中，取定两个基：

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix}3\\7\\1\end{bmatrix},\qquad \eta_1=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix},\eta_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-6\end{bmatrix},$$

（1）求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵;

（2）设向量 α 在基 η_1, η_2, η_3 下的坐标为 $[0, -1, 1]^T$，求 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标。

解：由定义4.6，若过渡矩阵为M，则 $[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]M$

- 记 $A=[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$，$B=[\eta_1, \eta_2, \eta_3]$，A、B皆为已知矩阵，且 A 可逆，问题归结为解矩阵方程

$$B=AM \qquad \Rightarrow M=A^{-1}B$$

➢ 可通过矩阵的初等行变换求解：

$$[A,B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&4&1&-6\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&2&3&3&5&1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&1&-2&1&-4&-7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdots}\begin{bmatrix}1&0&0&-27&-71&-41\\0&1&0&9&20&9\\0&0&1&4&12&8\end{bmatrix}$$

➢ 所以, 由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵为

$$\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix}$$

(2) 设向量α在基η$_1$, η$_2$, η$_3$下的坐标为$[0, -1, 1]^T$, 求α在基ε$_1$, ε$_2$, ε$_3$下的坐标。

➢ 由坐标变换公式(2.5)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

例：设 $P[x]_3$ 的两个基分别为

(1) $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=x$, $\varepsilon_3=x^2$, $\varepsilon_4=x^3$;

(2) $f_1=1+x+x^3$, $f_2=x+x^2$,

$f_3=1+x-2x^2$, $f_4=2+x+x^2+x^3$.

求由基（1）到基（2）的过渡矩阵;

解：按过渡矩阵定义有 $[f_1,f_2,f_3,f_4]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4]M$

由已知条件即得

$$[1+x+x^3, x+x^2, 1+x-2x^2, 2+x+x^2+x^3]=[1,x,x^2,x^3]\boxed{\begin{bmatrix}1&0&1&2\\1&1&1&1\\0&1&-2&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}}$$

- 所以，过渡矩阵为
- 即基（2）在标准基下的坐标矩阵.

- 布置习题　P 184:

8.　10.　11.

12. (1)　(3)

13.　16.　17. (1)　(2)

18. (1)　(3)

四、线性子空间的维数与基

- 基/维数/坐标等概念也可以应用到线性子空间.

例：线性空间 R^n 的子空间 $N(A) = \{ X \in R^n \mid AX = 0 \}$ 的基，由齐次线性方程组解的理论，易知其为 $AX = 0$ 的基础解系，$\dim N(A) = n - r_A$.

- 线性子空间的基 $\Leftrightarrow$ 其极大无关组
- 线性子空间的基不唯一.
- 线性子空间的任意两组基等价.
- 线性子空间的维数 $\Leftrightarrow$ 向量组的秩.

定理 4.4：设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是线性空间 V 中的两个向量组。

(1) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ 的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价;

L：P146
生成子空间

(2) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 的秩.

证明：（1）必要性：因为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

所以有 $\alpha_i \in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s) \quad (i=1,2,\cdots l)$

- 因而每一个 α_i 都可以用向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示;

- 同样 $\beta_{\mathrm{j}} \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l) \quad (j = 1,2,\cdots s)$
- 因而每一个 β_j 都可以用向量组 $\alpha_{1,}\ \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性表示;
- 因此向量组 $\alpha_{1,}\ \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 等价;

充分性：由于向量组 $\alpha_{1,}\ \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 与 $\beta_{1,}\ \beta_2, \ldots, \beta_s$ 等价,

- 所以, 凡是可用向量组 $\alpha_{1,}\ \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 表示的向量, 也一定可以用向量组 $\beta_{1,}\ \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示。
- 因为 L($\alpha_{1,}\ \alpha_2, \ldots, \alpha_l$) 中的向量都是 $\alpha_{1,}\ \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 的线性组合，所以它们必定能用 $\beta_{1,}\ \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示，因此必有：$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l) \subseteq L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$

- 同理亦有： $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)$
- 综合起来即得： $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)$

(2) L(α_{1}, α_{2}, … , α_{l}) 的维数等于向量组 α_{1}, α_{2}, … , α_{l} 的秩.

- 设向量组 α_{1}, α_{2}, … , α_{l} 的一个极大线性无关组是 α_{i1}, α_{i2}, … , α_{ir}

- 那么 α_{i1}, α_{i2}, … , α_{ir} 与原向量组 α_{1}, α_{2}, … , α_{l} 是等价的， 由 (1) 的结论

$$L(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir})=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l) \quad (2.6)$$

➢ 显然 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir}$ 是生成子空间 $L(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir})$ 的一个基, 且 $\dim(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir}) = r$

$$L(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l) \quad (2.6)$$

➢ 由 (2.6) 知 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir}$ 也是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ 的一个基，且 $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) = r$

➢ 因而 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 的秩. 证毕.