第二章:矩阵

- A. 概念与理论:
- (1) 矩阵/可逆矩阵/分块矩阵/伴随矩阵
- (2) 特殊矩阵: 单位/零/对角/准对角/对称/反对称/正交/三角阵
- (3) 可逆矩阵的性质
- (4) 矩阵的初等变换,初等变换的性质
- (5) 矩阵的标准形
- (6) 矩阵的秩
- B. 计算方法与运算规律:
- (1) 矩阵/分块矩阵的基本运算: 加/减/数乘/乘/乘幂/转置
- (2) 求矩阵的逆常用两种方法: a. 利用伴随矩阵阵; b.利用矩阵的初等变换.
- (3) 求矩阵的秩常用两种方法: 行列式法: a. 求最高阶非零子式; b. 将矩阵化为阶梯形(求秩的主要方法).



矩阵A的逆矩阵A-1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$$

矩阵A的迹tr(A)

- 矩阵是一个数表
- 方阵的运算之一

$$\mathbf{A}^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{*} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

矩阵求逆、求转置、伴随矩阵(A是n阶方阵)

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1}, \qquad (\mathbf{A}^{*})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{*}, \qquad (\mathbf{A}^{*})^{\mathsf{T}} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{*}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \qquad (\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{A}^{*})^{*} = |\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A}$$

$$|k\mathbf{A}| = k^{n} |\mathbf{A}|, \qquad (k\mathbf{A})^{\mathsf{T}} = k\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

$$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}, \qquad (k\mathbf{A})^{*} = k^{n-1}\mathbf{A}^{*}$$

$$|\mathbf{A}^{\mathsf{T}}| = |\mathbf{A}|, \qquad |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}, \qquad |\mathbf{A}^{*}| = |\mathbf{A}|^{n-1}$$

设A是n阶矩阵,如AA $^T = A^T A = E$,则称A是正交矩阵(A是正交矩阵等价于 $A^{-1} = A^T$)

例:设A是3阶正交矩阵,按定义

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用矩阵乘法, 易见

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=1\\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0$$

这说明矩阵A的每个列向量都是单位向量且相互正交。

关于分块矩阵的运算法则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_4 + \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Z} & \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{W} \\ \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{Z} & \mathbf{C}\mathbf{Y} + \mathbf{D}\mathbf{W} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} & \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{C}^{\mathsf{T}} & \mathbf{D}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

初等矩阵

(1) 初等矩阵

单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵为初等矩阵。例如

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{3}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{12}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{21}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

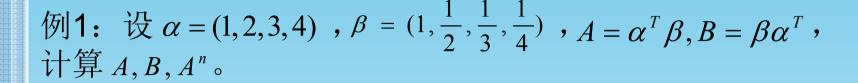
(2) 初等矩阵的性质

- ➤ 用初等矩阵F左(右)乘A,所得FA(AF)就是对矩阵A作了一次与F同样的行(列)初等变换;
- ▶初等矩阵均可逆,且其逆是同类型的初等矩阵,即

$$\mathbf{F}_{ij}^{-1} = \mathbf{F}_{ij}, \quad \mathbf{F}_{i}^{-1}(k) = \mathbf{F}_{i}(\frac{1}{k}), \quad \mathbf{F}_{ij}^{-1}(k) = \mathbf{F}_{i}(-k)$$



题型一: 矩阵的乘法运算



解:

$$A = \alpha^{T} \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \beta \alpha^{T} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 = 4$$

题型一: 矩阵的乘法运算

例1: 设 $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$, $A = \alpha^T \beta, B = \beta \alpha^T$, 计算 A,B,A^n 。

$$A^{n} = (\alpha^{T} \beta)^{n} = \underbrace{(\alpha^{T} \beta)(\alpha^{T} \beta) \cdots (\alpha^{T} \beta)}_{n}$$

利用矩阵乘 法的结合律:

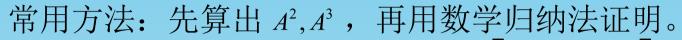
$$=\alpha^{T}\underbrace{(\beta\alpha^{T})(\beta\alpha^{T})\cdots(\beta\alpha^{T})}_{n-1}\beta$$

$$= \alpha^T 4^{n-1} \beta = 4^{n-1} (\alpha^T \beta)$$

$$= 4^{n-1} \cdot A = 4^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$



题型二: 矩阵求幂



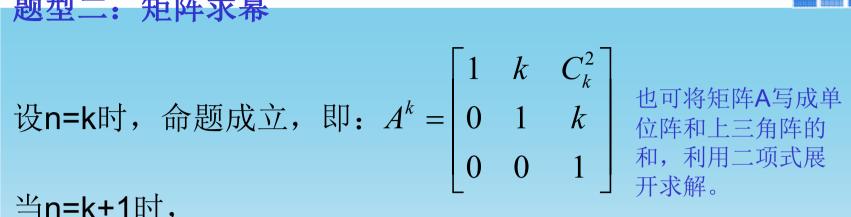
例2: 设
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
, 证明 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & C_n^2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$M:$$
 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & C_2^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & C_3^2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 n=2,n=3时,命题成立。



题型二:矩阵求幂



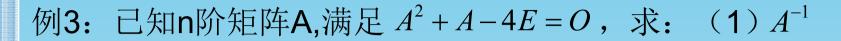
当n=k+1时,

$$A^{k+1} = A \cdot A^{k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & k & C_{k}^{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & k+C_{k}^{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & k+1 & k+\frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)k}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & C_{k+1}^2 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即n=k+1时,命题也成立。综上,命题得证。





$$(2) (A-E)^{-1}$$

分析:利用伴随矩阵或初等变换法可求逆矩阵,但此题矩阵A元素的具体 形式未给出,应根据定义求解。

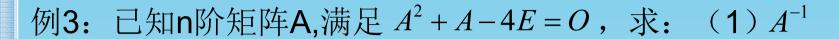
解 (1): 由
$$A^2 + A = 4E$$
,则

$$A(A+E)=4E$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}: \qquad A \bullet \frac{A+E}{4} = E$$

所以:
$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A+E)$$





$$(2) (A-E)^{-1}$$

分析:利用伴随矩阵或初等变换法可求逆矩阵,但此题矩阵A元素的具体 形式未给出,应根据定义求解。

解 (2): 由
$$A^2 + A - 4E = O$$
 ,即
$$(A - E)(A + 2E) - 2E = O$$

$$(A - E)(A + 2E) = 2E$$

所以:
$$(A-E) \bullet \frac{A+2E}{2} = E$$

类似于因式分解

故:
$$(A-E)^{-1} = \frac{1}{2}(A+2E)$$



练习: A,B均为n阶矩阵,且 AB = A + B,求 $(A-E)^{-1}$ 。

解: 因
$$AB = A + B$$
,即

$$AB - A - B = O$$

$$AB - A - B + E = E$$

$$A(B - E) - (B - E) = E$$

$$\mathbb{P}: \qquad (A-E)(B-E) = E$$

故 A-E 可逆,且

$$(A-E)^{-1}=B-E$$

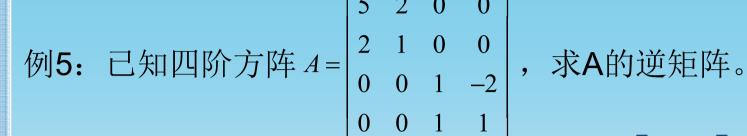


例4: 用初等行变换求矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$
 的逆矩阵。

$$\begin{bmatrix} A \mid E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \mid 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \mid 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \mid 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + (-4)r_1 \atop r_3 + (-2)r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \mid 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \mid -4 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \mid -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为
$$A$$
的变换矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不是满秩矩阵,故 A 为不可逆矩阵。





解: 利用分块矩阵求逆:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A_{1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{2}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$



题型四: 有关伴随矩阵的计算

例6: 设
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
 ,求 $(A^*)^{-1}$

解:由于 $|A|A^{-1}=A^*$,故:

$$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$



题型四: 有关伴随矩阵的计算

例7: 已知n阶方阵为
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 ,求A中所有元素的

代数余子式之和 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ 。

用初等变换求逆

$$A^* = |A| A^{-1} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = 1$$



题型四: 有关伴随矩阵的计算

例8: 已知A是n阶正交矩阵,证明A的伴随矩阵 A^* 也是正交矩阵。

解: 己知
$$AA^T = E$$
 $A^* = |A|A^{-1}$ 所以, $A^* = |A|A^T$

$$A^* (A^*)^T = |A| A^T (|A| A^T)^T$$
$$= |A|^2 A^T A$$
$$= E$$

题型五: 矩阵求秩



解:用初等变换将A化为阶梯形矩阵,有:

$$A \xrightarrow{r_2 + (-2)r_1 \atop r_3 + (-1)r_1} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1 - 2\lambda & \lambda + 2 & 1 \\ 0 & 10 - \lambda & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

则当
$$\lambda = 3$$
 时 $R(A) = 2$, $\lambda \neq 3$ 时 $R(A) = 3$



.

题型五: 矩阵求秩

例10: 求矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ (a_1+1)^3 & (a_2+1)^3 & (a_3+1)^3 & (a_4+1)^3 & (a_5+1)^3 \end{bmatrix}$$
的秩。

分析:观察矩阵的特点,此题可根据矩阵秩的定义,由高阶到低阶计算子式。

解:矩阵A是一个5阶矩阵,且:

$$A \quad \underline{r_5 - r_4 - 3r_3 - 3r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即5阶子式等于0,再看A中是否有4阶子式不为0。



题型五:矩阵求秩

例10: 求矩阵水水

$$a_1$$
 a_2 a_3 a_4 a_5
 a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2
 a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3
 a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3
 a_1^3 a_2^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3

可发现4阶范德蒙行列式:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \bullet \prod_{1 \le j < i \le 4} \left(a_i - a_j \right) \neq 0$$

因而A中不等于0的子式的最高阶数为4,故R(A)=4。



题型六: 有关初等变换的问题

例11 求

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{2011} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2012}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{12}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{13}$$

左乘初等矩阵就是对矩阵进行行变换; 右乘初等矩阵就是对矩阵进行列变换

所以

原式=
$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$