

数值研究边界可作有限变形运动的二维流动

力学与工程科学系 陈瑜

指导教师 谢锡麟

摘要：本文致力于数值研究边界可做有限变形运动的二维流动。理论上，根据映照的观点，基于显含时间的微分同胚将一般连续介质力学理论中当前物理构型对应的曲线坐标系推广至显含时间情形，籍此规则并固定参数构型，基于张量分析直接获得定义于参数构型的控制方程以及在局部基下的分量形式。方法上，通过构造显含时间的微分同胚实现了壁面可作有限变形运动的二维不可压缩流动的涡一流函数解法，及相关物理量的表示和求解方法、边界条件的处理、差分离散求解的方法等。同时，开发了数值模拟壁面可作有限变形运动的二维管道流动和表面可作有限变形运动的钝体绕流的系列计算程序。并通过对不同几何形状参数、运动参数等不同算例，初探了边界的有限变形运动对流场的影响。

关键词：边界的有限变形运动 二维数值研究。

Abstract: This paper focus on 2D numeral research on flow with boundary of finite deformable motion. According to the view of mapping, we use differential homeomorphism include time variable to transform real flow region to regular and steady parameter configuration. And generalize the theory of finite deformation to the case of using time based curvilinear coordinates. Then obtain governmental equations on parameter configuration under theory of tensor analysis. Based on these theoretical deduction, we develop the vorticity-stream function method under time based curvilinear coordinates for numeral solution of 2D unsteady flow, which include the governmental equation, boundary condition and finite differential format. We also develop the computational program for 2D pipe flow and flow around blunt body. And give some numeral examples of different cases, preliminary study the effect of finite deformable boundary motion.

Keywords: Finite Deformable Boundary Motion; 2D Numeral Research

引言（前言）

绕流体边界的形态及其有限变形运动能够显著地改变流场中的主导旋涡结构及其空间演化特性，从而大幅地改变绕流体的气动或水动性能，甚至边界变形运动同流场的相互作用可直接提供动力等。这方面自然界鱼儿游动与鸟儿飞翔给了我们启示。对此方面机制的研究与掌握对现代航空航海业具有极其重要的意义。

当前数值研究处理边界可作有限变形运动，主要可应用现有的差分方法以及有限体积法等。总体而言，当前数值分析对可变形运动边界的处理多借鉴于适用

刚性运动边界的方法；对于贴体网格的使用，多为基于笛卡儿坐标系下的方程，然后利用曲线坐标系将笛卡儿分量相对于笛卡儿坐标的偏导数转变至对曲线坐标的偏导数。现业内对二维流场的研究相对较多。

1 本文研究思想和内容

本文应用映照的观点，即基于显含时间的微分同胚将形态不规则且随时间变化的实际流动区域变换至形态规则且固定的参数区域，将一般连续介质力学理论中当前物理构型对应的曲线坐标系推广至显含时间情形，籍此规则并固定参数构型，进一步基于一般曲线坐标系上的张量场分析，可直接获得定义在参数区域上的偏微分方程及其分量形式。计算域形态随时间始终保持方体而边界条件可随时间变化，由此简化差分格式等构造上的复杂性。在壁面上，物理量由于相对于反映曲面几何性质的局部基展开，往往便于边界条件的处理。由此，可实现壁面可作有限变形运动的二维不可压缩流动的涡一流函数解法。对壁面可作有限变形运动的二维管道流动和表面可作有限变形运动的钝体绕流不同算例的研究，可验证上述理论研究以及数值求解方法的可行性。并通过对不同几何形状参数、运动参数等不同工况以及与边界静止情况的比较研究，考察边界可作有限变形运动下对流场的影响。

2 当前物理构型对应的曲线坐标系显含时间情形的有限变形理论

我们将按映照观点处理边界的有限变形运动。然而，一般连续介质力学方面的教程或专著，当前物理构型对应的曲线坐标系都不显含时间，故本章主要研究当前物理构型对应的曲线坐标系显含时间情形的有限变形理论。

世界坐标系下的速度的表达：

$$v = \dot{X} \triangleq \frac{\partial X}{\partial t}(x(\xi, t), t) = \frac{\partial X}{\partial t}(x, t) + \dot{x}^i g_i(x, t)$$

世界坐标系下的张量场的物质导数：

$$\dot{\Phi} \triangleq \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\xi, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x(\xi, t), t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) + \left(v - \frac{\partial X}{\partial t}\right) \cdot \nabla \otimes \Phi$$

变形梯度张量的性质：

$$|\dot{F}| = \theta|F|, \quad \dot{F} = (v \otimes \nabla) \cdot F, \quad \dot{F}^{-} = -F^{-} \cdot (v \otimes \nabla)$$

物质体上的输运定理：

$$\frac{d}{dt} \int_{r_t} \Phi d\tau = \frac{d}{dt} \int_{r_0} \Phi |F| d\tau = \int_{r_0} (\dot{\Phi}|F| + \Phi|\dot{F}|) d\tau = \int_{r_t} (\dot{\Phi} + \theta\Phi) d\tau$$

涡量控制方程：定义 $\omega \triangleq \nabla \times v$, $U \triangleq v \cdot F$, $\Omega \triangleq \overset{o}{\nabla} \times U$, 由 $F \cdot \overset{o}{\nabla} \times (v \cdot F) = |F| \nabla \times v$, 可推导得当前物理构形对应曲线坐标系显含时间情形的连续介质理论框架下所

推得涡量控制方程为: $\dot{\omega} = \omega \cdot (\nabla \otimes v) - \theta \omega + \nabla \times a$, 这里 $\dot{a} = \dot{v}$ 是加速度场。考虑不可压缩、体积力有势, 并展开第一项, 有:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(v - \frac{\partial X}{\partial t}(x, t) \right) \cdot \nabla \otimes \omega = (v \otimes \nabla) \cdot \omega + \frac{1}{Re} \Delta \omega$$

对于平面问题: $\omega^1 = 0, \omega^2 = 0, v^3 = 0, \Gamma_{ij}^3 = 0$, 故代入后有分量形式:

$$\frac{\partial \omega^3}{\partial t} + v^i \frac{\partial \omega^3}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^i \frac{\partial \omega^3}{\partial x^i} = \Delta \omega^3 = \frac{1}{Re} \left(g^{ki} \frac{\partial^2 \omega^3}{\partial x^i \partial x^k} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \omega^3}{\partial x^k} \right)$$

关于流函数的说明: 设: $v = \nabla \times \varphi$, 则: $\nabla \cdot v = 0, \omega = \nabla \times v = \nabla(\nabla \cdot \varphi) - \Delta \varphi$, 对于二维问题: $\omega_3 = -\Delta \varphi_3$, 令: $\psi = \varphi_3$, 即有: $\nabla \psi = -\omega_3$, 由此即有二维问题的流函数所满足的方程:

$$g^{ij} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right] = -\omega^3$$

3 数值求解方法

3.1 微分同胚构造

对于平面区域构造显含时间 t 的微分同胚

$$X(x, t) = \gamma(x^1, t) + \left(\varphi + x^2(\phi(x^1, t) - \varphi(x^1, t)) \right) \cdot n(x^1, t)$$

由此, 将物理空间上的流动区域 $D_{x^1 x^2}$ 映照为关于基线 $\gamma(x^1, t)$ 中的参数 x^1 , 以及沿法线方向的相对位置 x^2 的参数区域 $D_{x^1 x^2}$ 。

3.2 控制方程的离散方法

综合上述推导, 所需求解的方程组为(1)(2)。对于涡量控制方程采用二次近似格式。此格式的计算分二步: 第一步以步长 Δt 显式推进一步, 求出第 $n+1$ 时间层上的第一次近似值, 方程右端偏导数采用中心差, 如计算域不等距, 可采用项用三点或五点 Lagrange 插值求得。第二步由上述算出的第一步值作为 n 时间层上的近似值, 对方程从 n 层到 $n+1$ 层推进一步, 得到第 $n+1$ 时间层上的第二次近似值, 最后取二者算术平均值作为本次推进的值。

对于流函数 Poisson 方程求解采用逐次超松弛方法(SOR)迭代求解, 取超松弛因子为 1.72。

3.3 壁面流函数边界条件处理

以 γ^φ 边界为例, 又流函数的定义, 可推得壁面流函数边界条件为:

$$\psi|_{(\beta, 0)} - \psi|_{(\alpha, 0)} = \int_\alpha^\beta \left(v_{<1>}^\varphi \frac{\partial v_{<2>}^\varphi}{\partial x^1} - v_{<2>}^\varphi \frac{\partial v_{<1>}^\varphi}{\partial x^1} \right) (x^1, t) dx^1$$

由此, 再通过数值积分即可求得壁面流函数的取值。

3.4 壁面涡量边界条件处理

由无限小增量公式，以及速度表示和涡量控制方程，可推得二阶精度的壁面涡量条件为：

$$\begin{aligned} \omega_w = & g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} v_w^2) - 2g^{12} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} v_w^1) + g^{22} \frac{2}{k^2} [\psi(x^1, x_w^2) + \sqrt{g} v_w^1 k - \\ & \psi(x^1, x_w^2 + k)] - (g^{11} \Gamma_{11}^1 + g^{22} \Gamma_{22}^1 + 2g^{12} \Gamma_{12}^1) \sqrt{g} v_w^2 + (g^{11} \Gamma_{11}^2 + g^{22} \Gamma_{22}^2 + \\ & 2g^{12} \Gamma_{12}^2) \sqrt{g} v_w^1 \end{aligned}$$

3. 5 压力解的处理

在物理构形参数域显含时间的情形下，有： $\nabla p = -a - \frac{1}{Re} \nabla \times \omega \therefore g^k: \frac{\partial p}{\partial x^k} = -a^j g_{jk} - \frac{1}{Re} \epsilon^{lij} g_{kj} \nabla_l \omega_i$ 。其中： $a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \left(v^k - \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} v^i + \Gamma_{ks}^i v^s \right)$ ， $\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^k = g^{ki} \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial x^i}$ 。对： $\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla \otimes v - \frac{\partial X}{\partial t} (x, t) \nabla \otimes v = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v + f_\tau$ 两边求散度，可得压力控制方程为： $-\Delta p = (\nabla \otimes v): (v \otimes \nabla) - \left(\nabla \otimes \frac{\partial X}{\partial t} \right): (v \otimes \nabla)$

3. 6 壁面切应力

$$\tau_{n\tau} = \mu \left(n^j \tau_i \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^i v^s \right) + n^k g_{jk} \tau^i \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \Gamma_{is}^j v^s \right) \right)$$

3. 7 方法验证

本文涉及几何量如度量张量分量，Christoffel 符号由 5 点 Lagrange 插值并对比解析式确定值，相对误差在整个区域保持在 $1e-6$ 以内，以此可考察微分同胚的选取和计算域网格的划分是否适当。

通过对环形域上 Poisson 方程相应边值问题映照后在曲线坐标系下迭代求解，并与解析给出特解对比，相对误差在 $1e-4$ 以内。

另外，针对计算结果，利用经典问题进行检验，如下文绕流问题中选取参数使得为特殊情形：静止圆柱绕流 Re 数 120 下，所得 Strouhal 数为 0.16，并将流态与实验结果相比较，验证计算结果的合理性。

4 壁面可作有限变形运动的二维管道流动

4. 1 问题描述

本章叙述壁面可作有限变形运动的二维管道流动的具体算例，构造的微分同胚、控制方程及其差分方法见第 3 节中分析。进口边界条件根据平面定常 Poiseuille 流动解析解对应的速度剖面分布确定流函数取值。流函数出口边界条件： $\psi_{outer}(x^1, x^2)$ 通过内插给出。壁面流函数边界条件参见 3.3 分析处理。涡量进出口边界条件： $\omega = 0$ (进口条件)， $\frac{\partial \omega}{\partial x^2}$ (出口条件)。壁面涡量边界条件参见 3.4

中分析处理。

4. 2 算例：带有周期性振动喉部的直管

首先考查 Re 数为 200 下，带有周期性振动“喉部”的直管的二维流动，部分计算结果如下：

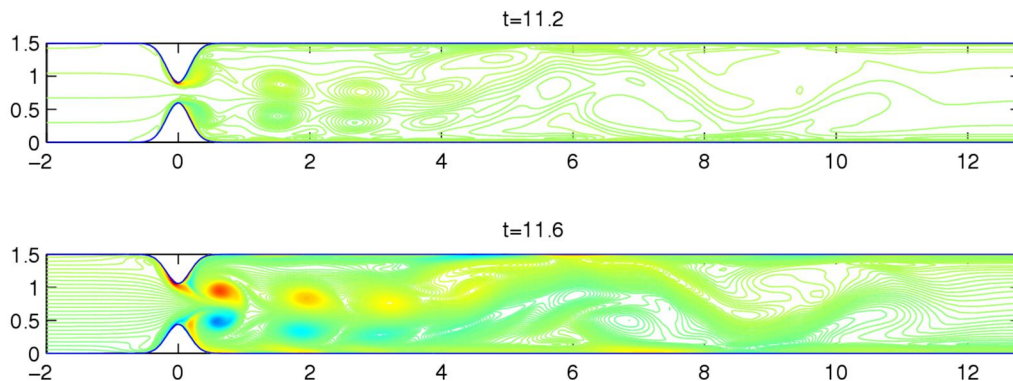


图 1 周期性振动喉部的直管等涡量图

上图中二维管道的“喉部”（对应流向区间 $X=-1\sim 1$ ）可作周期性振动（现频率为 1.0 Hz）。如以上等涡量图和等流函数图演化可见：喉部的周期性振动明显激发了从喉部尖端处生成的剪切层中旋涡的卷起及归并。作为对比，下图为喉部固定情形， $t=11.5$ 时的等涡量图（其他对应时间的云图类似）。

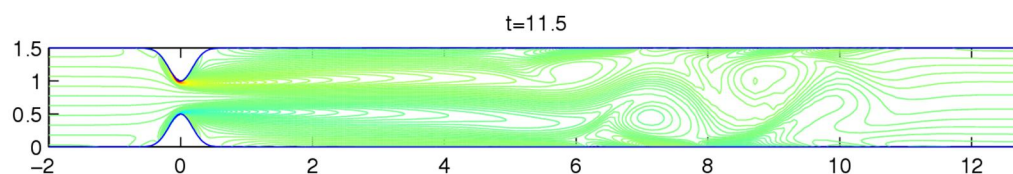


图 2 静止喉部的直管等涡量图

4. 3 算例：带有周期性振动喉部的圆管

以下考查 Re 数为 120 下，圆管壁作“喉部”1.0Hz 周期性振动，其等涡量图一个周期变化如图 3。和直管情形类似，其喉部的周期性振动明显激发了从喉部尖端处生成的剪切层中旋涡的卷起及归并。涡量场的整体强弱、喉部一对旋涡的卷起和脱落的过程呈现周期性：从收缩到恢复平衡位置的过程中生成，在扩张再恢复到平衡位置之间脱落、发生归并。同时，受到管道形状，曲率影响，与直管有所不同，一出喉部射流区就关于管道中心线不对称，并且外侧旋涡发展相对充分。

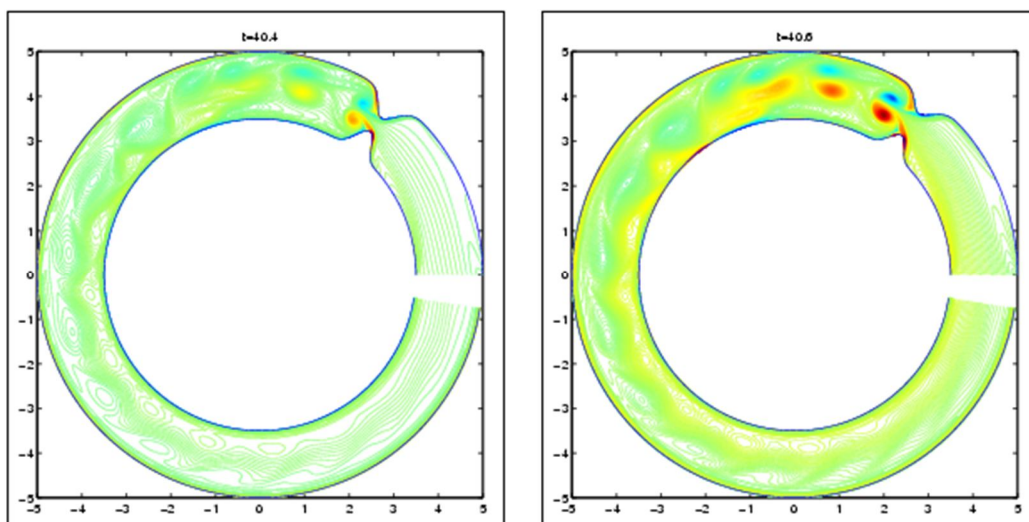


图 3 周期性振动喉部的圆管等涡量图

5 表面可作有限变形运动的钝体绕流

5.1 问题描述

本章叙述表面可作有限变形运动的钝体绕流的具体算例，构造的微分同胚、控制方程及其差分方法同第3节中分析，只是在这里 $x^1 \in (-\pi, \pi)$ 为极角。 $\gamma_\phi, \gamma_\varphi$ ，分别刻画远端边界和壁面边界。远场的进口边界条件和初始条件根据理想流体圆柱绕流的均匀流与偶极子的叠加组合流场的复势求出相应的流函数。流函数出口边界条件： $\psi_{outer}(x^1, x^2)$ 通过内插给出。壁面流函数边界条件参见3.3分析处理，速度环量引起的流函数多值性通过位势流抵消。涡量进出口边界条件： $\omega = 0$ (进口条件)， $\frac{\partial \omega}{\partial x^2}$ (出口条件)。壁面涡量边界条件参见3.4中分析处理。 Re 数均取200。

5.2 算例：静止固体绕流情形

齿轮状静止柱体绕流情形等流函数图、等涡量图。此情形与静止圆柱绕流相近，有涡街交替脱落，但由于几何形状复杂，壁面附近流场较为复杂，凹陷处有死水区。

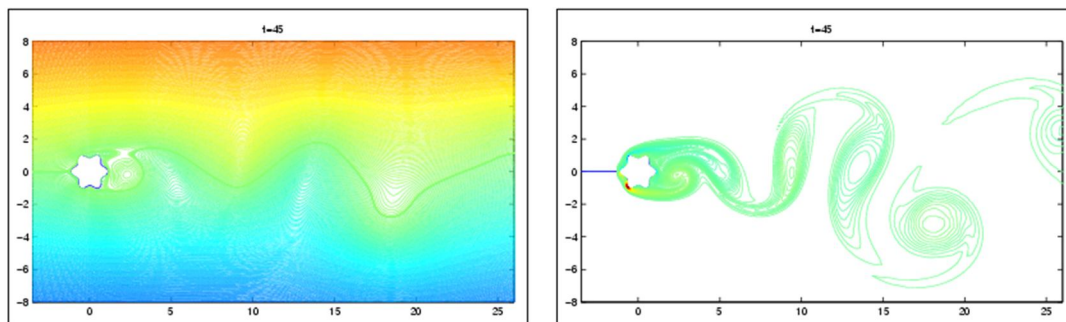


图 4 静止固体绕流情形

5. 3 算例：圆柱整体胀压

以下考查圆柱随时间整体作周期性胀压的情形，即运动过程中保持圆柱，但半径的变化规律为正弦函数。取部分等涡量图、等流函数图如下：

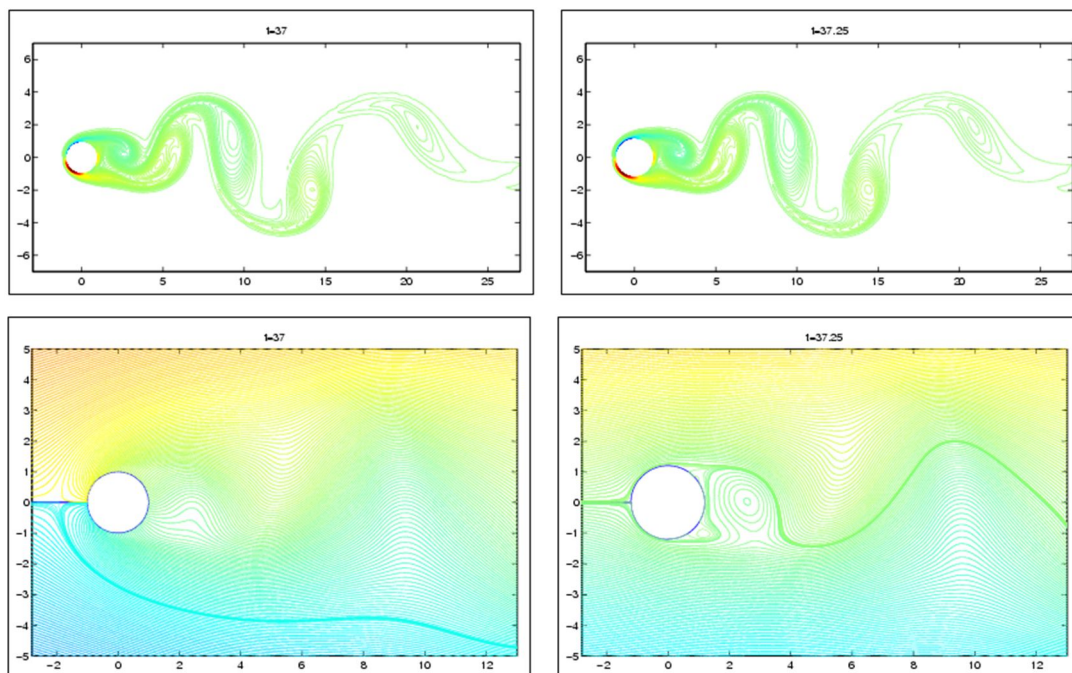
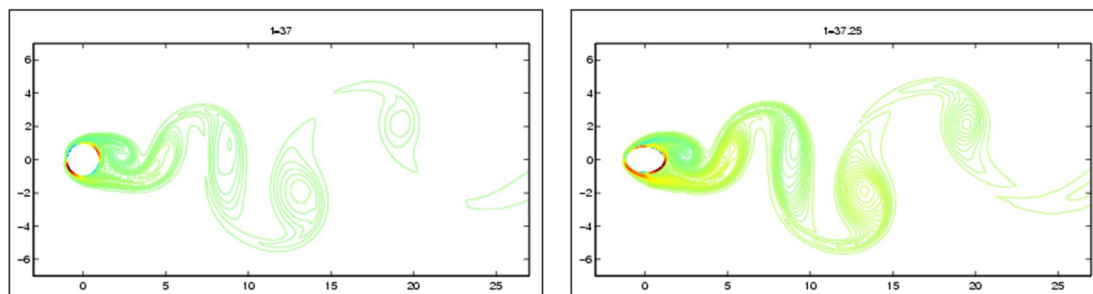


图 5 圆柱整体胀压运动情形

可以看到，37.25 和 37.75 时刻，壁面运动速度为 0，此时，0 流线绕过壁面。图中流线密集区为 0 流线附近区域。当壁面运动速度不为 0 时，流线与壁面相交，且 0 流线不在壁面，相当于有源和汇的存在。壁面附近流场与圆柱绕流有很大不同。但是整体仍有卡门涡街周期性交替脱落。

5. 4 算例：椭圆双向变形运动

以下考查椭圆横纵轴分别作周期性振动的情形，相位差为 π ，部分等涡量图、等流函数图如下：



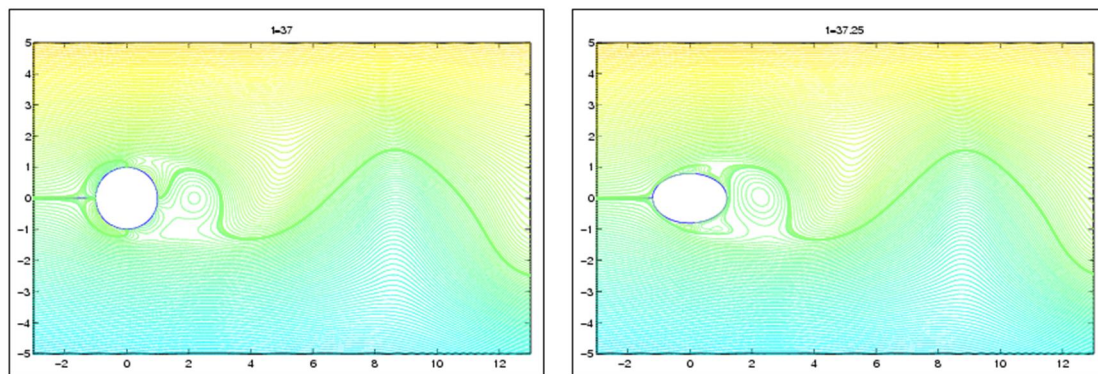


图 6 椭圆双向变形运动情形

当壁面运动速度为 0，此时，0 流线绕过壁面。图中流线密集区为 0 流线附近区域。当壁面运动速度不为 0 时，流线与壁面相交，且 0 流线不在壁面，相当于有源和汇的存在。壁面附近流场与壁面静止情形的绕流也有很大不同，整体仍有卡门涡街周期性交替脱落。这种情形比椭圆单向轴运动更为复杂，甚至在前端也出现了圈状流线。

5. 5 算例：圆柱周向作驻波状变形运动

以下考查圆柱周向作驻波状变形运动的绕流情形。如 $t=37$ ，壁面运动速度为 0，此时，0 流线绕过壁面。壁面附近流场与前文几种算例绕流也有很大不同。上文椭圆双向运动的情形中提到的周向圈状流线也在变化到圆时出现，并且结构更为复杂。同样可以观察到静止齿轮状算例中所提到的死水区。

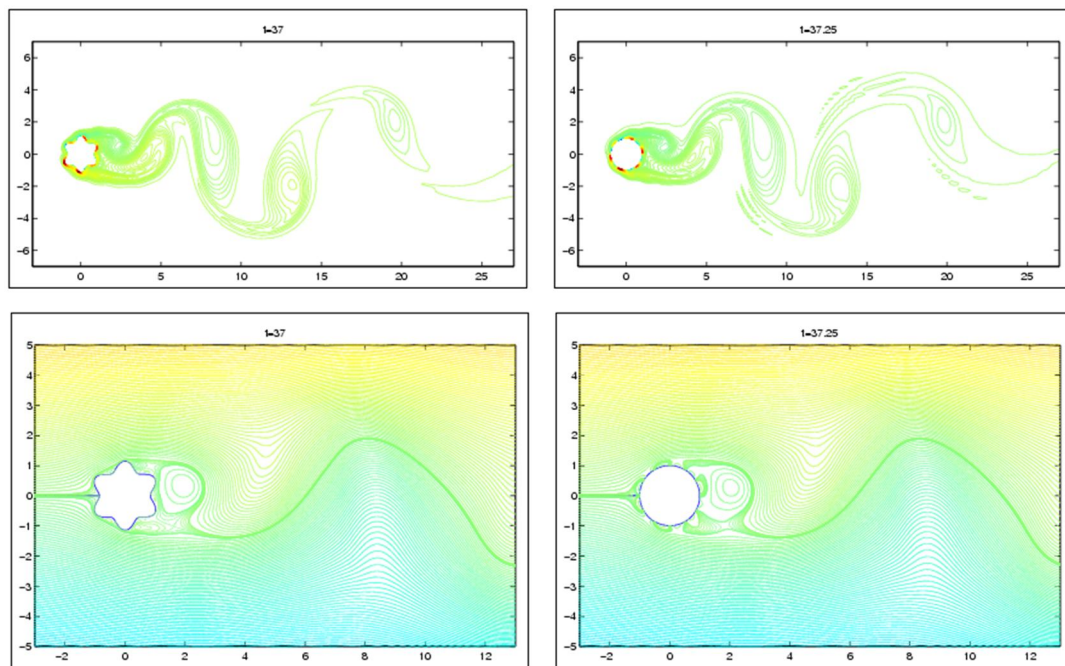


图 7 圆柱周向作驻波状变形运动情形

5.6 零流函数重组——有限变形运动钝体绕流流函数奇异性机制

谢锡麟在论文[5]中提出了按照“流函数奇异性机制”的观点解释钝体绕流启动过程和脱落过程的旋涡动力学行为。对于静止情形，一根始于并终止于壁面的禁闭零流线和一根始于壁面向下游无限延伸的零流线包含了两个旋涡，考察其演化过程可以描述对称性破列以及交替脱落机制。

对于本文中的绕流体，几何形态与圆柱不同，表面局部流线分布也随之而异。对于作有限变形运动的情形，零流线又往往不在壁面。周期内部演化复杂，但周期与周期间规律明显。如每个周期中表面速度恰为 0 时，流线分布总是接近于静止物体绕流的演化过程。因此，可提取同相位不同时刻的流线分布，考察启动过程；提取同周期不同相位时零流线的演化，考察壁面变形运动和几何形态是如何影响壁面附近流场以及对于交替脱落所起的作用。

椭圆双向运动启动过程：以下选取表面速度恰为 0 时的 4 个不同时刻流线图（也可选取其它同相位、不同周期的流线图），此相位下零流线（图中加密部分为零流线附近区域）绕过物体表面，故可联系对比静止情形的圆柱绕流。整个启动过程也有禁闭区与对外开放区的不断粘合交换，再到对称性破裂与开放区的完全释放这一变化规律。

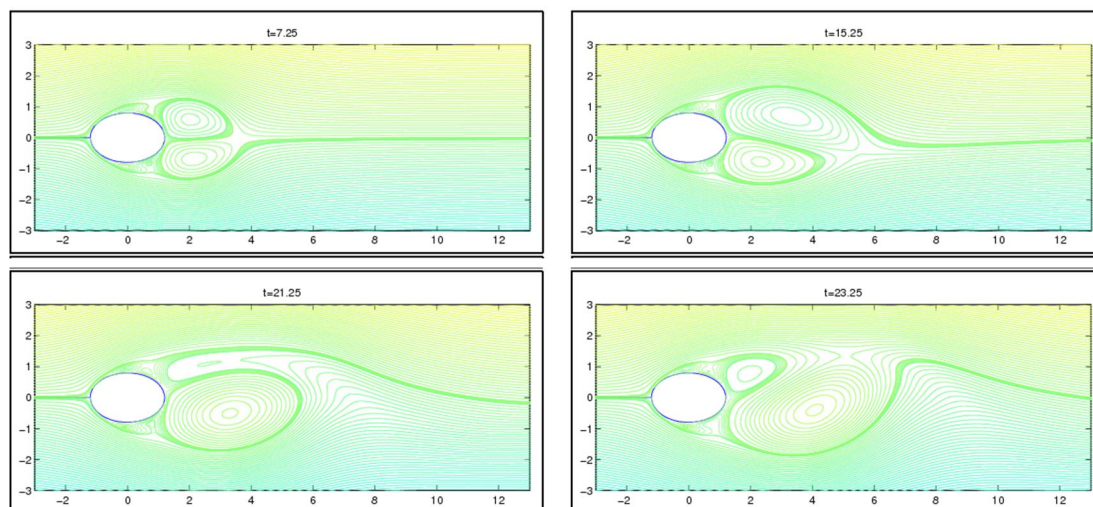


图 8 椭圆双向运动启动过程

第一阶段，如 $t=7.25$ 上下两个涡区总体上呈现很好镜面对称，但在附着涡对的后缘有一鞍点，形成了“禁闭区”和“开放区”，随着时间推移，两区域会在零流线的粘合重组过程 (snap) 中发生交换，但总体对称性基本不变。第二阶段，如 $t=15.25$ ，“禁闭区”和“开放区”仍随零流线 snap 过程交换，虽两涡同时附着，但对称性已经发生变化，禁闭区由小至大再到顶破开放区流线。第三阶段，“鞍点之门”完全打开，向外释放，如 $t=23.25$ ，启动阶段结束，进入周期脱落阶段。

周向驻波状运动启动过程：同样选取表面速度恰为 0 时的 4 个不同时刻流线图，类似于圆柱绕流，也有禁闭区与对外开放区的不断粘合交换，再到对称性破裂与开放区的完全释放这一过程。可以看到，这一相位下，表面存在死水区，为周围流线所包覆。

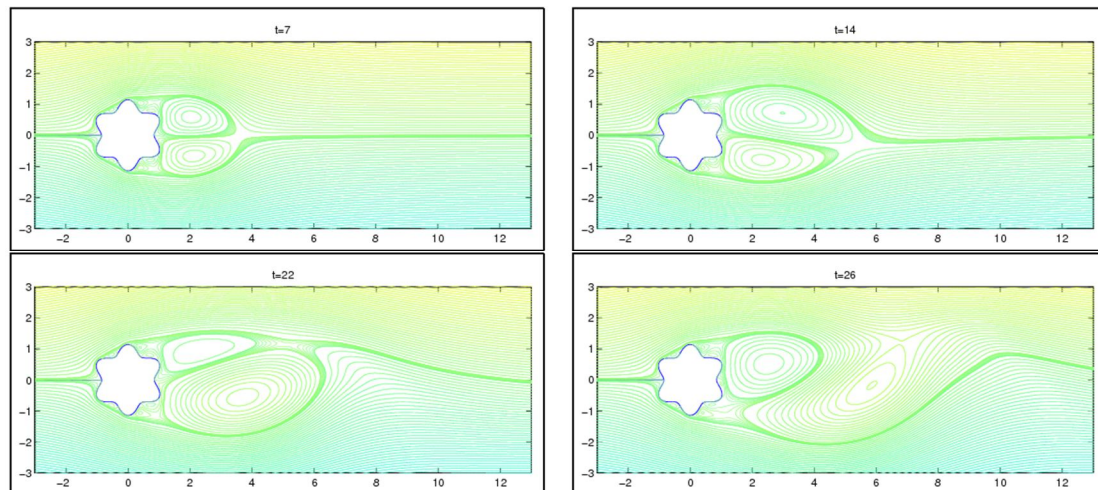
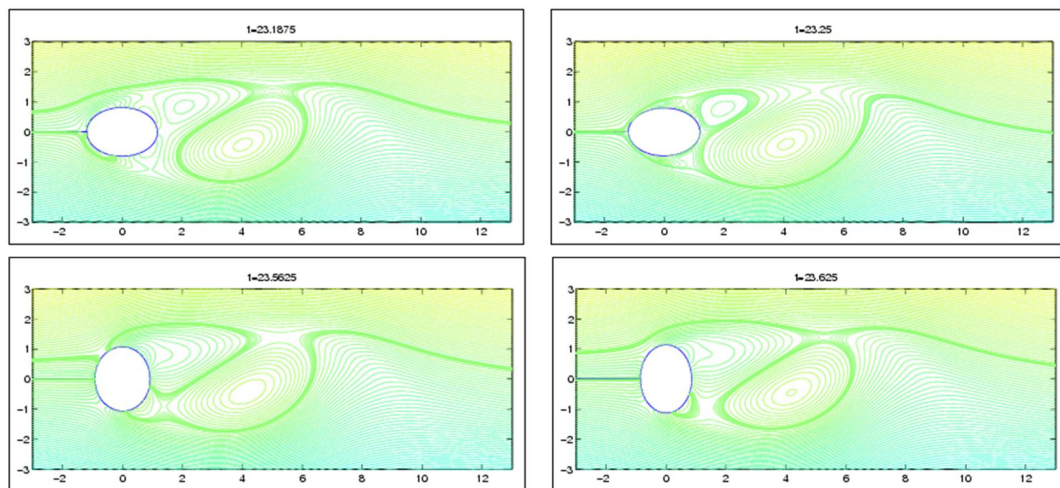


图 9 周向驻波状运动启动过程

椭圆双向运动脱落过程：考察一个周期内不同相位时流态演化， $t=23.1875$ 至 $t=23.25$ ，随着物体表面速度减为 0，零流线向物体表面收，右侧涡区开放。 $t=23.5$ 至 $t=23.625$ ，随着椭圆流向轴的收缩，上部零流线环向外扩张，致使右上鞍点发生 snap，左下小涡与右下大涡的鞍点也发生 snap，但紧接着随着物体速度减小，零流线上缩，左下与右上两个鞍点又发生 snap 致使这一区域整体联通，形成大涡区。到 $t=24$ ，随着椭圆流向轴的扩张，椭圆前后各有上下对称的环状流线穿入其中。椭圆右下角零流线向右上推移，右侧大涡向右推进，左上零流线与右侧零流线粘合并向外推，进一步带动右侧大涡向右推进。直至 $t=24.1875$ ，较之 $t=23.1875$ ，大涡右上开放区已经无法再粘合，开放并释放。此即脱落的过程。



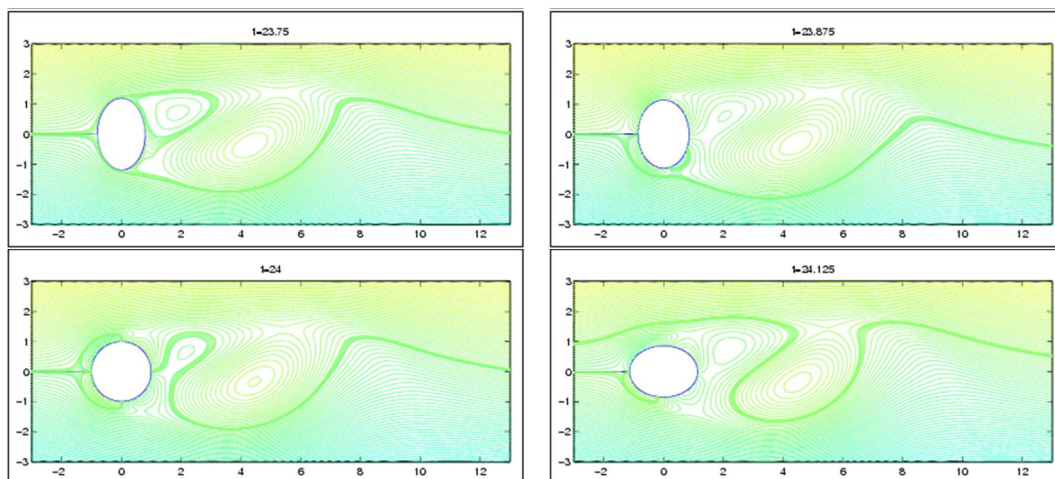


图 10 椭圆双向运动脱落过程

周向驻波状运动脱落过程：考察一个周期内不同相位时流态演化，较之椭圆双向运动，表面驻点增加，使得穿入表面的圈状流线更多更复杂，与附着涡的作用也更为丰富，如 $t=22.75$ 至 $t=22.8125$ ，至 $t=22.8125$ ，右侧大涡有更多流线上下粘合并左右分离，之后该开放点已无法向 $t=22$ 时刻那样再封闭了，由此旋涡脱落。

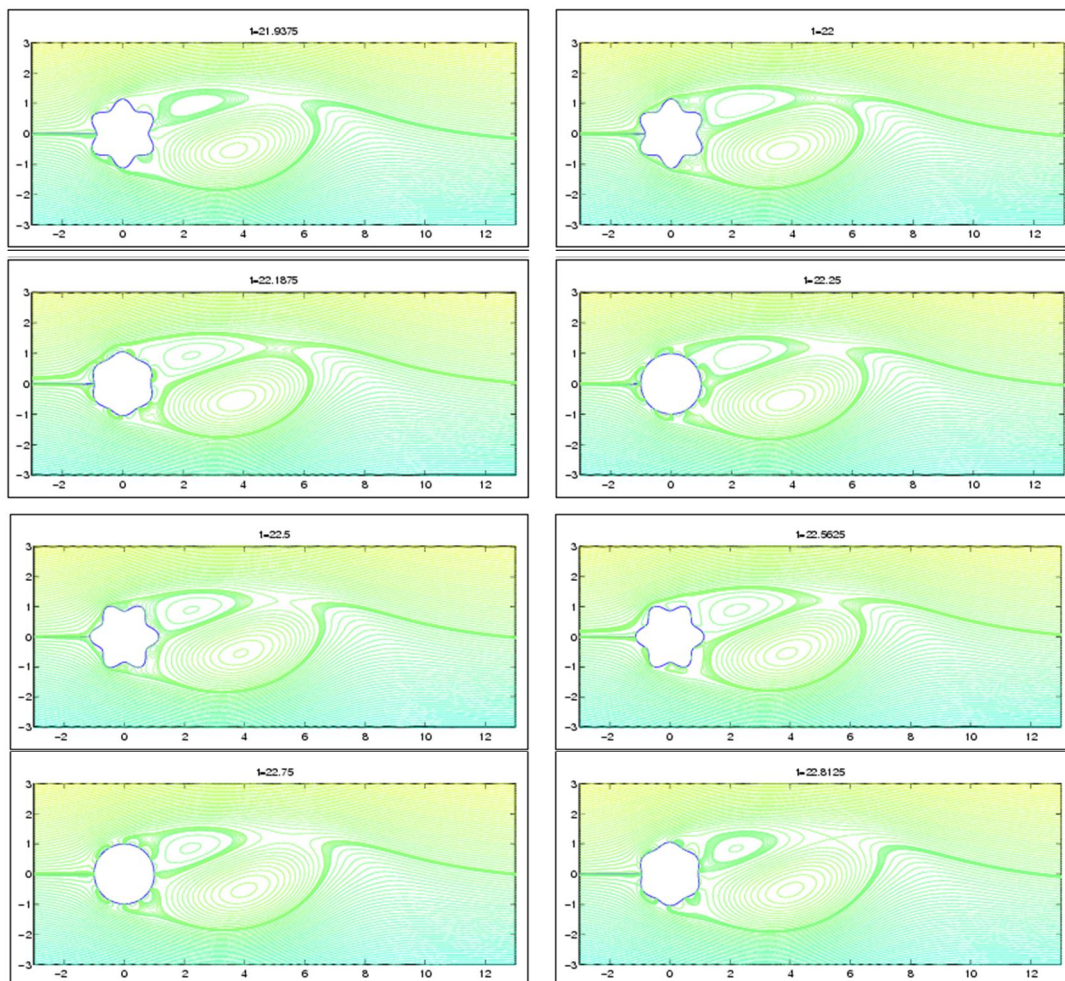


图 11 周向驻波状运动脱落过程

6 总结与展望

本毕业设计初步数值研究了边界可做有限变形运动的二维流动。从理论、数值方法、算例研究等方面初探了边界可作有限变形运动下对流场的影响。

本文的创新点在将当前物理构型对应的曲线坐标系推广至可显含时间的情形，并基于一般曲线坐标系下的张量分析。编制的两类程序具有通用性。并从机制上初步探索研究。

进一步，可完善文中两类流动问题的二维数值分析程序，并进行多工况试算，对比分析，包括流场局部及全局空间动力学行为的分析。数值方法和效率上也可作进一步研究。

也可进一步尝试壁面可作有限变形运动的渠道流动的三维数值计算。

参考文献

- [1] 吴介之，马晖扬，周明德： 涡动力学引论. 工程力学丛书. 高等教育出版社, 1993 年。
- [2] Saffman P.G., Vortex Dynamics. Cambridge University Press, 1992 年。
- [3] Wu J.C.: Elements of Vorticity Aerodynamics. 清华大学出版社, 2005 年。
- [5] 谢锡麟： 开放流场空间动力学行为的一种实验研究框架及几类经典流场研究. 复旦大学博士论文, 2004。
- [6] 郭仲衡： 张量分析(理论和应用). 科学出版社, 1988 年。
- [7] 郭仲衡： 非线性弹性理论. 科学出版社, 1980 年。

后记（致谢）： 本文是在谢锡麟老师的精心指导下完成的。四年来，从《数学分析》、《经典力学数学名著选讲》再到《实变函数与泛函分析基础》，从《张量分析与微分几何基础》、《连续介质力学基础》再到《涡量与涡动力学基础》，谢老师的课，无论是知识的深度和广度，还是从中折射出的高尚人格、敬业精神、谦虚务实的作风，以及对于教书育人倾注的大量心血，所带给我的收获和潜移默化，是学分和绩点远远无法衡量的。能够得到谢老师的言传身教，我感到非常幸运。谢老师强调基于坚实的数理基础和专业基础下的专业研究，以及教书育人对于自身业务的促进，同时在学术上能兼容并包，我希望以后能以此不断努力追求进步。同时感谢东华大学麻伟巍老师的帮助和我的家人及好友的支持与帮助。