

21.1 设 $C=\{c_1\}$, $X=\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $T_1=\{f_1^1\}$, 求相应的项集 I

解答:

$$\begin{aligned} I_0 &= X \cup C = \{x_i \mid x_i \in X\} \cup \{c_1\} \\ I_1 &= \{(f_1^1, \partial i) \mid \partial i \in I_0\} = \{(f_1^1, x_i) \mid x_i \in c\} \cup \{(f_1^1, c_1)\} \\ I_2 &= \{(f_1^1, \partial i) \mid \partial i \in I_1\} = \{(f_1^1, (f_1^1, x_i)) \mid x_i \in X\} \cup \{(f_1^1, (f_1^1, c_1))\} \\ &\vdots \\ I_n &= \{(f_1^1, \partial i) \mid \partial i \in I_{n-1}\} \\ I &= \bigcup_0^\infty I_i \end{aligned}$$

21.2 设 $C=\{c_1\}$, $X=\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $T_1=\{f_1^1, f_2^2\}$, $R=\{R_2^{(1)}\}$

(1) 写出五个不同的原子公式

(2) 若 x_1, x_2, \dots 表示自然数 n_1, n_2, \dots , c_1 表示 0, f_1^1 和 f_2^2 分别表示 “+” 和 “*”, $R_2^{(1)}$ 表示 “=”, 试给出缩写的原子公式的算术解释

解答:

$$\begin{aligned} (1) & R_2^{(1)}(x_1, x_2), R_2^{(1)}(x_1, c_1), R_2^{(1)}(x_1, f_2^1(x_2, x_3)), R_2^{(1)}(f_2^2(x_2, x_3), x_1) \\ & R_2^{(1)}(f_2^2(x_2, x_3), x_1), R_2^{(1)}(f_2^1(x_1, x_2), f_2^2(x_3, x_4)) \\ (2) & x_1 = x_2, x_1 = 0, x_1 = x_2 + x_3, x_2 * x_3 = x_1, x_1 + x_2 = x_3 * x_4 \end{aligned}$$

21.6 指出下列公式中的自由变元和约束变元, 并指明量词的辖域:

$$\begin{aligned} (1) & \forall x(R_1^1(x) \rightarrow R_2^1(x, y)) \rightarrow (\forall x R_1^1(x) \rightarrow R_2^1(x, y)) \\ (2) & \exists x(R_2^1(x, y) \rightarrow \forall y R_2^2(x, y)) \rightarrow (\forall x R_2^1(x, y) \rightarrow R_2^2(x, y)) \\ (3) & (\forall x R_1^1(x) \rightarrow \neg R_1^2(x)) \rightarrow (\exists x R_1^1(x) \rightarrow R_1^2(y)) \end{aligned}$$

解答:

(1) 第一个 $\forall x$ 的辖域是 $R_1^1(x) \rightarrow R_2^1(x, y)$, 第二个 $\forall x$ 的辖域是 $R_1^1(x)$

x 既是约束变元也是自由变元, y 是自由变元

(2) $\exists x$ 的辖域是 $R_2^1(x, y) \rightarrow \forall y R_2^2(x, y)$, $\forall y$ 的辖域是 $R_2^2(x, y)$, $\forall x$ 的辖域是

$$R_2^1(x, y)$$

x, y 既是约束变元也是自由变元

(3) $\forall x$ 的辖域是 $R_1^1(x)$, $\exists x$ 的辖域是 $R_1^1(x)$

x 既是约束变元也是自由变元, y 是自由变元

21.7 在上述各合式公式中, 项 $f_2^1(x, z)$ 对 y 是不是自由的, 并说明理由

解答:

- (1) $f_2^1(x, z)$ 对 y 是不自由的, 理由: y 出现在第一个 $\forall x$ 的辖域中
- (2) $f_2^1(x, z)$ 对 y 是不自由的, y 出现在 $\forall x$ 的辖域中
- (3) $f_2^1(x, z)$ 对 y 是自由的, y 在 $\forall x, \exists x$ 的辖域中均没出现

21.8 指出谓词合式公式

$$p = \forall x_1 R_2^1(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_2 (R_2^2(x_2, x_3) \rightarrow R_2^3(x_1, x_2))$$

中的自由变元和约束变元。项 $f_2^1(x_1, x_3)$ 对 p 中的哪个自由变元是自由的，对哪个自由变元不是自由的

解答： x_1, x_2 既是约束变元也是自由变元， x_3 是自由变元

$f_2^1(x_1, x_3)$ 对 x_1, x_2 是不自由的, 对 x_3 是自由的