线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

答疑： 假设n阶方阵A满足：$(A+aE)(A+bE)=0$，其中$a\neq b$,

证明：(1) $r(A+aE)+r(A+bE)=n$；

(2)方阵A定相似于一对角阵。

解：(1) $r(A+aE)+r(A+bE)=r\begin{pmatrix} A+aE & O \\ O & A+bE \end{pmatrix}$

$$=r\begin{pmatrix} A+aE & (b-a)E \\ O & A+bE \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A+aE & E \\ O & \dfrac{A+bE}{(b-a)} \end{pmatrix}$$

$$=r\begin{pmatrix} A+aE & E \\ O & A+bE \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} O & E \\ -(A+aE)(A+bE) & A+bE \end{pmatrix}$$

$$=r\begin{pmatrix} O & E \\ (A+aE)(A+bE) & -(A+bE) \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} O & E \\ O & O \end{pmatrix}=n$$

➢ (2)与矩阵的特征值、对角化有关~

答疑：

假设n阶方阵A满足：$(A+aE)(A+bE)=0$，其中$a\neq b$，

证明：(1) $r(A+aE)+r(A+bE)=n$

证2：不等式 $\mathbf{n}=r(E)=r[(a-b)E]=r(aE-bE)$

$$=r(A+aE-bE-A)\leq r(A+aE)+r(A+bE)$$

即：$r(A+aE)+r(A+bE)\geq \mathbf{n}$ **(I)**

- **对 n 阶线性方程组 $(A+aE)X=0$，设 rank $(A+aE)=r$**
- **则，其基础解系的秩为 (n-r)，故 rank $(A+bE)\leqslant$ (n-r)**
- **故 rank $(A+aE)$+ rank $(A+bE)\leqslant$ n** **(II)**
- **由 (I) 和 (II) 得证。**

§ 5.2 线性变换的矩阵

一、线性变换的矩阵表示

☑ 定义 5.3：设 ε $_1$, ε $_2$, ..., ε $_n$ 是线性空间 **V** 的一个基， **T** 是**V** 的一个线性变换，基的像可以表示为：

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\cdots T(\varepsilon_n)]$$

$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\,A$$

A 称为 **T** 在基 ε $_1$, ε $_2$, . . . , ε $_n$下的矩阵.

☑ **定理 5.1**：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一个基，对于V 中任意 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，总有唯一的线性**变换** T，使得：

$$T(\varepsilon_i)=\alpha_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

☑ **定理 5.3**：设在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下线性变换T 的矩阵为A，向量 ξ 的坐标为 $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$，$T(\xi)$ 的坐标为 $Y=[y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$，则有

$$Y=AX$$

向量坐标与其像坐标的关系

➢ 另一种定义 T 的矩阵的方式.

☑ 定理 5.2：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一个基，线性变换 T_1, T_2 在此基下的矩阵分别为 A、B，则

（1）线性变换的和对应于矩阵的和，即

$$T_1 + T_2 \leftrightarrow A + B$$

（2）线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积，即

$$kT_1 \leftrightarrow kA$$

（3）线性变换的乘积对应于矩阵的乘积，即

$$T_1 T_2 \leftrightarrow AB$$

(4) 可逆线性变换对应于可逆矩阵，且逆变换对应于逆矩阵.

二、线性变换在不同基下的矩阵间的关系

☑ 定义 5.4：对于n 阶矩阵A和B，若存在一个 n 阶满秩矩阵P，使得 $P^{-1}AP = B$

则称A相似于B.　　记为 A ~B

☑ 定理 5.4：n 维线性空间 V 中，设线性变换 T 在两个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B，

从 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 M，则

$$B=M^{-1}AM$$

二、线性变换在不同基下的矩阵间的关系

所以定理 5.4也可表述为：同一个线性变换，

在不同的基下的矩阵是相似的.

☑ 定理 5.5：两个n 阶相似方阵可以看作同一个线性变换在不同基下的矩阵.

- 相似矩阵的重要意义在于简化对矩阵的各种运算，先通过相似变换，将矩阵变成与之相似的对角矩阵，再用对角矩阵进行运算.

§ 5.3 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念

定义 5.5：设 T 是数域 P 上线性空间 V 中的一个线性变换，对于数域 P 上一个数 λ_0，如果存在一个非零向量 ξ，使得 $\boxed{T(\xi)=\lambda_0\xi}$

则称 λ_0 为 T 的一个特征值(eigenvalue, characteristic value)，而称 ξ 为属于特征值 λ_0 的一个特征向量(eigenvector, characteristic vector).

- 几何解释：经过线性变换后，特征向量方向不变.
- “特征”来自德语eigen，由希尔伯特在1904年首先在此意义下使用.

- 最简单的线性变换 T 就是数乘变换—— T 对非零向量的作用是等比例放大

矩阵T与向量相乘，原向量一般会发生旋转、伸缩…
如果T使某些向量只发生伸缩，不产生旋转—

- 特征值就是这个数乘变换的变换比，

- 对应的非零向量就是特征向量，

- 进一步，如果能把线性空间分解成与特征向量相关的子空间的直和，

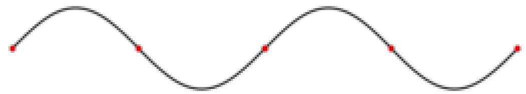
- 那么，对原线性空间的研究转化成对特征向量子空间的研究—简化、方便.

- 力、波动、场等物理量的分解都用到特征值和特征向量(函数)的概念：特征值—振动的自然频率，特征向量—振动的模态 .

- 线性系统A对于某些输入x，其输出y 恰巧是输入x的 λ 倍，即 y= λ x ；对某些输入，其输出与输入就不存在这种按比例放大的关系。

- 所以，给定一个线性系统A，到底对哪些输入，能使其输出按比例放大，放大倍数等于多少？这显然是控制论中感兴趣的问题 ☞ $L x = \lambda x$

- 驻波、弦振动：



特征值：频率；特征函数：驻波对应的三角函数

- 对应的线性变换：微分算子

- 类似的，振动频率、光谱、功率谱、能级等等都包含特征值概念.

- 例如，对变换 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，若输入 $x=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$
- 像 $$y=Ax=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 15\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=5x$$
- 若输入 $x=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$，则

$$y=Ax=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 26\end{pmatrix}\neq\lambda x$$

- 一个特征向量只能属于一个特征值. 因为，若有一个非零向量 ξ 属于两个特征值 λ_1, λ_2，则有

$$T(\xi)=\lambda_1\xi\,,\quad T(\xi)=\lambda_2\xi$$

$$即\ \lambda_1\xi=\lambda_2\xi,\quad (\lambda_1-\lambda_2)\xi=0$$

- 即 λ_1“统领”的特征向量全体 与 λ_2“统领”的特征向量全体 无交集.

— 属于特征值 λ_i 的子空间?

如果 λ_0 为 T 的一个特征值，则有如下事实：

(1) 如果 ξ_1，ξ_2 是 T 的属于特征值 λ_0 的两个特征向量，则当 $\xi_1+\xi_2 \neq 0$ 时，$\xi_1+\xi_2$ 也是 T 的属于特征值 λ_0 的特征向量，因为

$$T(\xi_1+\xi_2) = T(\xi_1)+T(\xi_2)$$

$$= \lambda_0\xi_1 + \lambda_0\xi_2 = \lambda_0(\xi_1+\xi_2)$$

(2) 如果 ξ 是 T 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则 ξ 的任何一个非零倍数 $k\xi$ 也是 T 的属于特征值 λ_0 的特征向量，因为

$$T(k\xi) = kT(\xi) = k\lambda_0\xi = \lambda_0 k\xi$$

这两点说明：若把T的属于特征值λ_0的全部特征向量和零向量组成V的一个子集，

- 则该子集对加法和数乘封闭，即构成V的一个子空间，记为

$$V_{\lambda_0}=\{\xi \mid T(\xi)=\lambda_0\xi,\ \xi\in V\}$$

☑ 定义 5.6：V_{λ_0}称为线性变换T的属于特征值λ_0的特征子空间.

- T的属于特征值λ_0的特征向量有无穷多个，可以用V_{λ_0}的基线性表示. 所以只要求出一个基就可以代表全体了。

二、特征值与特征向量的求法

- 由特征值、特征向量的定义，方程两边都有未知数：

$$T(\xi) = \lambda_0 \xi, \qquad \xi \neq 0$$

- 因此，无法直接求解...

- 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是数域 P 上线性空间 V 的一个基，线性变换 T 在这个基下的矩阵是 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$

- 设 λ_0为 T 的特征值，属于特征值 λ_0 的特征向量 ξ 在这个基下的坐标为

$$X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$

➢ 则 $T(\xi)$ 的坐标为 AX (定理5.3).

由定义：$T(\xi)=\lambda_0\xi,\quad \xi\neq 0$

➢ 因此，它们的坐标之间满足关系式

$$AX=\lambda_0 X,\quad X\neq 0$$

即 $[\lambda_0 E-A]X=0$

➢ 这说明特征向量 ξ 的坐标X满足齐次线性方程组

$$[\lambda_0 E-A]X=0$$

即
$$\begin{cases}(\lambda_0-a_{11})x_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n=0\\-a_{21}x_1-(\lambda_0-a_{22})x_2-\cdots-a_{2n}x_n=0\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\cdots-(\lambda_0-a_{nn})x_n=0\end{cases}\qquad(3.1)$$

- 由齐次线性方程组由非零解的充要条件，可得

$$|\lambda_0 E - A| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_0 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0 - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

- 因此要求出特征值 λ_0，以及属于特征值 λ_0 的特征向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 下的坐标 X，必须求解特征多项式和特征方程组.

定义 5.7:设 A 是数域 P 上一个 n 阶矩阵， λ 是一个未知量，矩阵 λE-A 的行列式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

称为 A 的特征多项式(characteristic polynomial)，记为

$$f(\lambda) = |\lambda E - A|$$

$f(\lambda) = 0$ 的根称为 A 的 特征根 ,特征多项式的根记为 A 的 特征值，记为 λ_0

- 如果对重根也计数，特征多项式将恰有 n 个根，因此 $\boldsymbol{A}$ 将有 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
- 将这 n 个特征值代入线性方程组

$$[\lambda_i E - A]X = 0$$

- 得到的非零解称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量，简称 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.
- 为了方便，我们把 $[\lambda E - A]X = 0$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的<u>特征方程组</u>(characteristic equations).

☑ 求矩阵特征值与特征向量的步骤：

1. 计算A的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$;

2. 求特征方程 $\det(\lambda E - A) = 0$ 的全部根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 即A的全部特征值 ；

3. 对于特征值λ_i,求齐次方程组

$$(\lambda_i E - A) X = 0$$

非零解即对应于λ_i的特征向量.

例：求矩阵 **A** 的特征值与特征向量：

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

解：先由特征多项式求特征值：

$$f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right| =\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} =(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

∴ **A** 的特征值为 $\lambda_1=2$， $\lambda_2=\lambda_3=1$

➢ 将 $\lambda_1= 2$ 代入特征方程组 $[\lambda_i E - A]X = 0$

得：$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$ ➢ 它的基础解系是 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

➢ 因此属于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量是 $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

➢ 属于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量是 $k_1 X_1$ $(k_1 \neq 0)$.

➢ 将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 代入特征方程组，得

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$ ➢ 它的基础解系是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

- 因此属于$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$的特征向量是 $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

- 属于$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$的全部特征向量是 $k_2 X_2$ $(k_2 \neq 0)$.

- 综上所述，线性空间中取定基后:
  向量与它的坐标一一对应;
  线性变换 T 与它的矩阵 A 也是一一对应的.

- 因此，A 的特征值就是线性变换 T 的特征值；
  A 的特征向量就是 T 的特征向量在此基下的坐标.

- 因此，求线性变换T的特征值与特征向量可用如下方法.

例：在三维线性空间V中，线性变换T在基 ε_1， ε_2， ε_3 下的矩阵是:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

求线性变换T的特征值与**特征向量**.

解：先求矩阵A的特征值与特征向量:

$$f(\lambda)=|\lambda E-A| =\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix} =(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

∴ A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\quad \lambda_3=5$

➢ 它们也是线性变换T的特征值

- 将 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 代入特征方程组，得到属于特征值 -1 的两个线性无关的特征向量是

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 同理，可求得属于 $\lambda_3 = 5$ 的特征向量是 $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 于是 T 属于特征值 -1 的线性无关的特征向量是

$$\xi_1 = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] X_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3; \quad \xi_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

- 属于 -1 的全部特征向量就是 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$
- 属于特征值 5 的线性无关的特征向量是 $\xi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
- 属于特征值5的全部特征向量是 $k_3 \xi_3$ $(k_3 \neq 0)$.

☑ 定理 5.6：相似矩阵有相同的特征多项式.

证明：设 A ~ B， 即对矩阵 A, B，存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP = B$$

于是 $|\lambda E - \mathrm{B}| = |\lambda E - P^{-1}AP|$

$$= |P^{-1}(\lambda E)P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P|$$

$$= |P^{-1}||(\lambda E - A)||P| = |(\lambda E - A)|$$

- 因此，线性变换的特征值与基的选择无关，由线性变换本身决定.
- 线性变换的特征向量也与基的选择无关？

☑ 定理 5.4：n 维线性空间 V 中，设线性变换 T 在基(I) 和 基(II) 下的矩阵分别是 A 和 B，从基(I)到基(II)的过渡矩阵为M，则

$$B=M^{-1}AM$$

- 设 X 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，由于

$$\begin{aligned} B(M^{-1}X) &= M^{-1}AM(M^{-1}X) \\ &= M^{-1}AX = \lambda(M^{-1}X) \end{aligned}$$

- 可知非零向量$M^{-1}X$是矩阵 B 属于特征值 λ 的特征向量.
- 而$M^{-1}X$与 X 正是同一特征向量在不同基下的坐标.
- 所以，特征向量也仅由线性变换所决定.

- 布置习题 P 226:

15. 17.

19. (2) 、(4) 、(5)

20. 23

三、特征多项式的基本性质

- 由特征多项式的展开式

$$f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right| =\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\left|A\right|$$

- 展开式中必有一项是主对角线元素连乘 ⇨ λ^n 与 λ^{n-1} 的系数只能由前者产生.
- 其余项至多包含n-2个对角线元素，所含 λ 的幂次至多为 n-2.

$$f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

☑ 这说明：

（1） f(λ)是 λ 的首项系数为 1 的 n 次多项式；

（2） f(λ)的 λ^{n-1} 项的系数为 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$

➢ 括 号 中 为 矩 阵 A 的 迹 (trace) ，即A的主对角线元素之和，记为：

$$t_r(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

（3） f(λ)的常数项为 $(-1)^n|A|$

$$f(0)=\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^n|A|$$

（4） f(λ)的其它项不具备代表性，一般不研究它们.

$$f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A| \quad (*)$$

- 我们知道，n 次多项式在复数域内恰有n个根.
- 设这n个根为： λ_1, λ_2, . . . , λ_n.

则： $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

比较(*)式可得：

$$\boxed{(1)\quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)}$$

$$\boxed{(2)\quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|}$$

- 即：(1) 矩阵的迹是其全体特征值的和（按代数重数计算）.
- (2) 矩阵的行列式等于其全体特征根的乘积.

验证：$A=\begin{bmatrix} 5 & -18 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A|=-5+18=13$$

$$tr(A)=5-1=4$$

$$f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

$$=\lambda^n-t_r(A)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

$$=\lambda^2-4\lambda+13$$

由定义：$f(\lambda)=|\lambda E-A| =\begin{vmatrix} \lambda-5 & 18 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+13$

定理 5.7(哈密顿-凯莱定理)：设A是数域 P 上一个 n 阶方阵，f(λ)=| λE-A| 是 A的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n\left|A\right|E=0$$

- 即：A 是自身矩阵特征多项式的根.

证明：设 B(λ)是 λ E-A 的伴随矩阵，由伴随矩阵的性质

$$C^{-1}=\frac{C^*}{|C|} \qquad C^*C=\left|C\right| E$$

$$B(\lambda)(\lambda E-\mathrm{A})=\left|\lambda E-A\right|E=f(\lambda)E$$

- 因为B(λ)的元素是| λE-A| 的各元素的代数余子式，所以它们都是 λ 的多项式，且其次数不超过 n-1 次.
- 由矩阵运算的性质知，B(λ) 可写成

$$B(\lambda)=\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1}$$

$$B(\lambda)=\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1}$$

其中B_0，B_1,…，B_{n-1}是n阶数字矩阵 .

设: $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$, 则

$$f(\lambda)E=\lambda^n E+a_1\lambda^{n-1}E+\cdots+a_{n-1}\lambda E+a_n E \quad (3.3)$$

又因：$B(\lambda)(\lambda E-\mathrm{A})=|\lambda E-A|E=f(\lambda)E$

$$B(\lambda)(\lambda E-\mathrm{A})=(\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1})(\lambda E-\mathrm{A})$$

$$=\lambda^n B_0+\lambda^{n-1}(B_1-B_0A)+\lambda^{n-2}(B_2-B_1A)+$$

$$\cdots+\lambda(B_{n-1}-B_{n-2}A)-B_{n-1}\mathrm{A} \qquad (3.4)$$

即: (3.3) = (3.4)

即：$f(\lambda)E = \lambda^n E + a_1\lambda^{n-1}E + \cdots + a_{n-1}\lambda E + a_n E \quad (3.3)$

$$= \lambda^n B_0 + \lambda^{n-1}(B_1 - B_0 A) + \lambda^{n-2}(B_2 - B_1 A) + \cdots + \lambda(B_{n-1} - B_{n-2}A) - B_{n-1}\mathrm{A} \qquad (3.4)$$

$$\text{故：}\begin{cases} B_0 = \mathrm{E} \\ B_1 - B_0 A = a_1 E \\ B_2 - B_1 A = a_2 E \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n-1} - B_{n-2}A = a_{n-1}E \\ -B_{n-1}\mathrm{A} = a_n E \end{cases} \qquad \begin{cases} B_0 A^n = \mathrm{E}A^n = A^n \\ B_1 A^{n-1} - B_0 A^n = a_1 E A^{n-1} = a_1 A^{n-1} \\ B_2 A^{n-2} - B_1 A^{n-1} = a_2 E A^{n-2} = a_2 A^{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n-1}\mathrm{A} - B_{n-2}A^2 = a_{n-1}EA = a_{n-1}A \\ -B_{n-1}\mathrm{A} = a_n E \end{cases} \quad (3.6)$$

因此有：$f(A) = (3.6)$右端矩阵之和 $= 0$

☑ 由哈密顿-凯莱定理，对于n 阶方阵A，当 k≥n 时，可以降幂，将A^k 用A的小于n的幂次表示

⇨ 简化矩阵多项式的运算.

➢ 因为 f(λ)是方阵 A 的化零多项式(annihilator).

例 计算矩阵 A 的多项式：$g(A)=2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

解：先求特征多项式：

$$f(\lambda)=|\lambda E-A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda+1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^3-2\lambda+1$$

$$g(A)=2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E$$ $$f(\lambda)=\lambda^3-2\lambda+1$$

令: $g(\lambda)=2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4$

则: $$g(\lambda)=f(\lambda)(2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14)+(24\lambda^2-37\lambda+10)$$

$$g(A)=f(A)(2A^5+4A^3-5A^2+9A-14E)+(24A^2-37A+10E)$$

- 由于 f(A)= 0，所以

$$g(A)=(24A^2-37A+10E)=\begin{bmatrix}-3 & 48 & -26\\ 0 & 95 & -61\\ 0 & -61 & 34\end{bmatrix}$$

- 故又称 f(λ)是方阵 A 的化零多项式.