线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

§ 2.6 矩阵的初等变换与初等矩阵

一、矩阵的初等变换与矩阵的标准形

定义2.15：矩阵的初等行(列)变换指以下三种：

（1）互换矩阵中任意两行（列）的位置； $\xrightarrow{R_{ij}}$

（2）以一个非零数乘矩阵的某一行(列)； $\xrightarrow{kR_i}$

（3）将矩阵的某一行（列）乘以一个常数加到另一行（列）对应元素上. $\xrightarrow{R_i + kR_j}$

- 初等变换的逆变换仍为初等变换，且 变换类型相同.

$R_i \leftrightarrow R_j$ 逆变换 $R_i \leftrightarrow R_j$;

$R_i \times k$ 逆变换 $R_i \times (\frac{1}{k})$ 或 $R_i \div k$;

$R_i + k R_j$ 逆变换 $R_i + (-k)R_j$ 或 $R_i - kR_j$.

□ 矩阵的标准形

定理 2.3:任意一个非零矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, 可经初等变换化为矩阵的标准形

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [1\le r\le \min(m,n)]$$

- 所有与矩阵 A 等价的等价类中最简单的形式

  ⇨ （ $E+O$ ）

二、初等矩阵

初等矩阵：对单位阵实施一次初等变换后得到的矩阵

- 三种初等变换对应的初等矩阵：

（1）互换单位阵中任意两行（列）的位置；

$$
E \xrightarrow{R_{ij}} \left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\overset{\text{记}}{=\!=} F_{ij}
$$

（2）以一个非零数乘以单位阵的某一行(列)；

$$E \xrightarrow[\text{或}\, kC_i]{kR_i} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} i\text{行} \stackrel{\text{记}}{=\!=} F_i(k)$$

（3）将单位阵的某一行（列）乘以一个常数加到另一行（列）对应元素上.

$$E \xrightarrow[\text{或} C_j + kC_i]{R_i + kR_j} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \xlongequal{\text{记}} F_{ij}(k)$$

➢ 初等矩阵都是可逆矩阵，且它们的逆阵仍是初等矩阵，并且：

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij},$$

$$F_i^{-1}(k) = F_i\left(\frac{1}{k}\right), \qquad F_{ij}^{-1}(k) = F_{ij}(-k),$$

定理 2.4：对矩阵 A 实施一次初等行变换，相当于对A 左乘一个初等矩阵；

对A实施一次初等列变换，相当于对A 右乘一个初等矩阵.

推论：任意一个非零矩阵 $A_{m\times n}$ 必存在m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q ，使

$$A = P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

其中 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 为 A 的标准形.

三、用初等变换求逆矩阵

定理 2.5：设阵 A 为 n 阶可逆矩阵，则有

（1）A 的标准形为单位矩阵，

（2）A 总可以表示为初等矩阵的乘积，

（3）A 仅经初等行变换可化为单位矩阵.

➢ 用初等变换求逆矩阵：

$$[A,E]\xrightarrow{\text{经若干次初等行变换}}[E,A^{-1}]\qquad \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{经若干次初等列变换}}\begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

注意：求逆时，若用初等行变换必须坚持始 终，不能夹杂任何列变换；反之亦然。

例：将矩阵A表示成初等矩阵的乘积： $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

解： $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-3R_1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ $\quad F_{21}(-3)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad F_2(-\frac{1}{2})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_1-2R_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad F_{12}(-2)=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore$ 由(6.3) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

例：将矩阵A表示成初等矩阵的乘积 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$

解：$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$ $F_{21}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ $F_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

$F_2(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $F_3(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$$\because \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\mathrm{A}=E$$

$$\therefore \mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

☑ 四、用矩阵的初等变换解矩阵方程

设矩阵方程 $AX = B$

其中 A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 n×m 阶矩阵， X 为 n × m 阶未知矩阵，两边同时左乘 A^{-1}，得

$$X = A^{-1} B$$

- 可以先求 A^{-1}, 再计算 $A^{-1}B$.
- 更好的方法：直接计算 $A^{-1}B$.

$$A^{-1}[A \vdots B] = [A^{-1}A \vdots A^{-1}B] = [E \vdots A^{-1}B]$$

- 相当于 $[A, B] \xrightarrow{\text{经若干次初等行变换}} [E, A^{-1}B]$

例：　解矩阵方程 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 6 & -1 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$

解：

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ **矩阵可逆，初等变换求解：**

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & -8 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -8 & 5 & 18 & 19 \\ 0 & 5 & -3 & -11 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 5 & -3 & -11 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 5R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 30 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 + R_3]{R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right] \quad \therefore X = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 7 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}$$

练习：解矩阵方程

$$X\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\ --\\ B\end{bmatrix}A^{-1}=\begin{bmatrix}AA^{-1}\\ ----\\ BA^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E\\ ----\\ BA^{-1}\end{bmatrix}$$

解：

由于 $\begin{vmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\neq 0$ ➢ **矩阵可逆，求解 X = B A⁻¹：**

$$\begin{bmatrix}A\\ --\\ B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\\ \hdashline 1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow[C_3+C_2]{C_1-2C_2}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\3&-1&0\\3&-1&2\\-2&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}C_1]{C_2-C_3}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\\1&-3&2\\-2/3&-2&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2+C_1}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\1&-2&2\\-2/3&-8/3&5\end{bmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_3]{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-2&2&1\\-8/3&5&-2/3\end{bmatrix}\quad \therefore X=\begin{bmatrix}-2&2&1\\-8/3&5&-2/3\end{bmatrix}$$

解矩阵方程 $X\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

法2: ➢ **求解 $A^T X^T = B^T$,**

$$\left[A^T \,\vdots\, B^T\right]=\left[\begin{array}{ccc|cc}2 & 2 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2\end{array}\right]\xrightarrow[R_3+\frac{1}{2}R_1]{R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccc|cc}2 & 2 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3/2 & 7/2 & 4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1-2R_2]{R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|cc}2 & 0 & 1 & -3 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & -1\end{array}\right]\xrightarrow[R_1-2R_2]{R_1-\frac{2}{3}R_3}\left[\begin{array}{ccc|cc}2 & 0 & 0 & -4 & -16/3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & -1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{2}{3}R_3]{\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & -2 & -8/3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3}\end{array}\right]$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ -8/3 & 5 & -2/3\end{bmatrix}$$

§ 2.7 矩阵的秩

- 矩阵的秩反映了矩阵的固有特性.

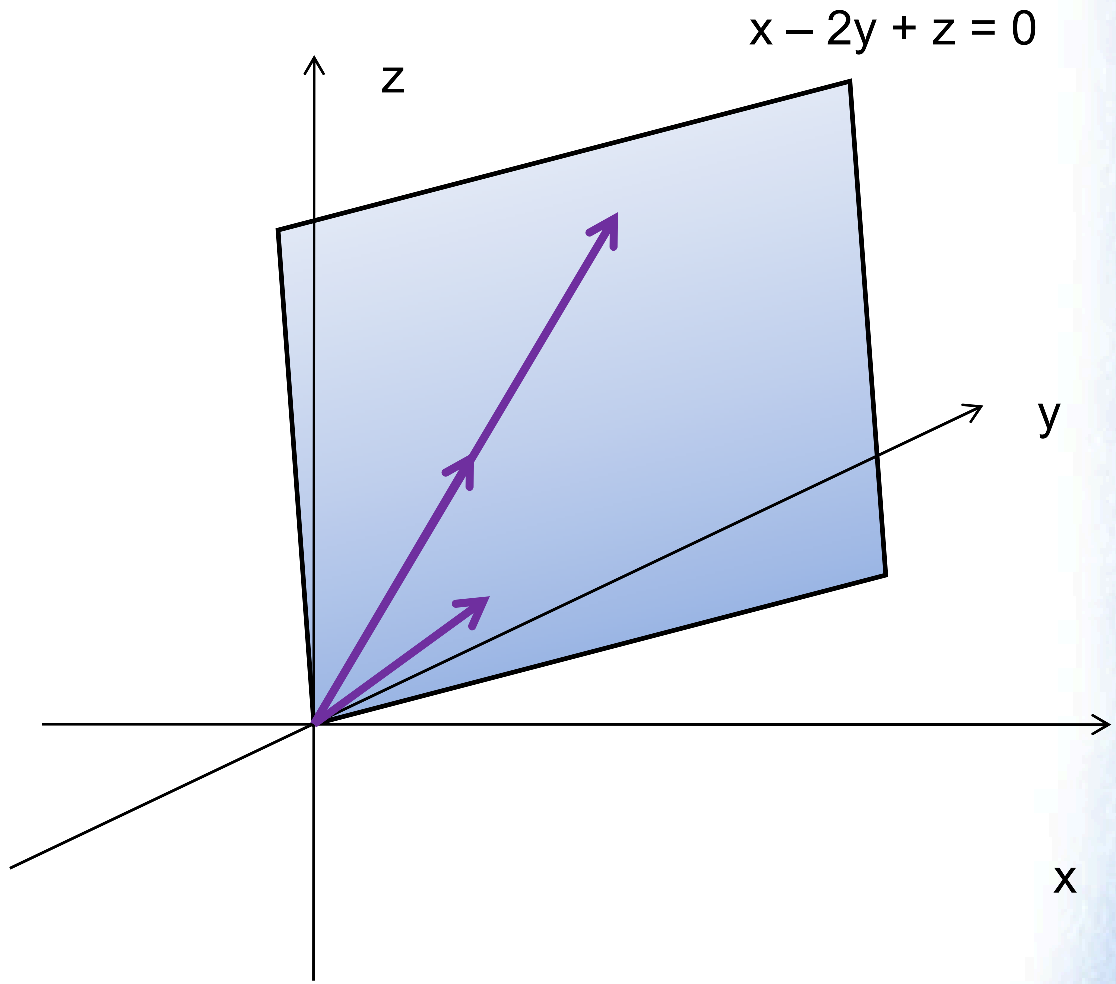
  - m×n阶矩阵总可经初等变化变为标准形

$$A \xrightarrow{\text{经若干次初等变换}} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

  - 标准形由 m、n、r 三个数唯一确定.
  - 故秩 r 反映了矩阵的固有特性.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Rank = 2



两个向量足以描述该平面.

定义2.17：设矩阵中，任取k行和k列，由这些行和列交叉点处的元素按原有次序组成一个 k 阶行列式，称为矩阵的一个 k 阶子式.

$$m \times n \text{ 矩阵 } A \text{ 的 } k \text{ 阶子式共有 } C_m^k \bullet C_n^k \text{ 个.}$$

例如： $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- 再比如： $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

- 由1-3行与1-3构成的三阶子式 $A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$
- 由1-3行与1、2、4列构成的三阶子式 $\neq 0$, …
- 但是四阶子及以上子式均为零.

定义2.18：m×n 阶矩阵 A 的非零子式的最高阶数称为矩阵的秩(rank)，记作 r_A，r(A)，或 rank A.

- 如果矩阵A有一个 r 阶子式 $|D| \neq 0$，而所有(r+1)阶子式都等于0，则矩阵A 的秩为r，即rank A = r .
- 设A是n阶矩阵，若A的秩等于n，则称A为 满秩矩阵；否则称为降秩矩阵.
- 规定：零矩阵的秩为零.
- 矩阵A可逆，$|A| \neq 0$，所以rank A= n .

$$A\text{满秩} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A\text{可逆}$$

- n阶矩阵A不可逆，$|A| = 0$，所以rank A＜ n .
- 对于m×n 阶矩阵 A， rank A≤ min(m,n). ？
- 矩阵线性无关的行/列向量数目，行秩、列秩 ...

- 秩的概念由 J. Sylvester 于 1861年引进；
  记法(notation) 由 Frobenius 于 1879 年引入.

- 秩是矩阵最重要的特征之一：行(列)向量组的相关性；空间直线、平面的相互关系；线性空间的维数等等。

例：计算矩阵 A 的秩

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解：二阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

➢ 所有三阶及以上子式全为零，或有一行为零，或有两行成比例；故 $r_A=2$

例：计算矩阵 A 的秩

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{r\,r} & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,r)$$

解：A 的左上角 r 阶子式 $=a_{11}a_{22}\cdots a_{rr}\neq 0$

- 所有 r+1 及以上子式全为零，故 $r_A=r$

例: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 7 & 6 & -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ 的秩=?

- 对于一个阶数很高的矩阵来说，按定义求秩非常麻烦☹.

☑ 用矩阵的初等变换求秩

定理 2.6：任何矩阵经过初等变换后其秩不变

证明：→ 初等变换对行列式是否为零没有影响；

（1）第一种行变换：交换 A 某两行得矩阵 B，B的任意子式经过行重新排列必是A的一个子式，二者只有符号差别，不改变是否为零的性质

（2）第二种行变换：用非零常数 k 乘 A 的第 i 行得矩阵 C. C的任意子式或是 A的子式，或是A的子式的k倍，而不改变是否为零的性质

（3）对 A 实施第三种行变换：A 的第 i 行元素加上第j行元素的 k 倍， 得矩阵 D.

- 设 $r_A = r$，考虑 D 中的 (r+1) 阶子式M，那么有三种可能：

(a) M 不包含第 i 行元素，这时 M 也是 A 中的 (r+1) 阶子式，故 M = 0 .

(b) M 包含第 i 行元素，同时也包含第 j 行元素，这时由行列式性质 6 (P16)， M = 0 .

(c) M 包含第 i 行元素，但不包含第 j 行元素，这时

$$M = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i t_1} + k a_{j t_1} & a_{i t_2} + k a_{j t_2} & \cdots & a_{i t_{r+1}} + k a_{j t_{r+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i t_1} & a_{i t_2} & \cdots & a_{i t_{r+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j t_1} & a_{j t_2} & \cdots & a_{j t_{r+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad (P16\text{性质}5)$$

$= M_1 + k M_2$

- M_1 是 A 的一个 (r+1) 阶子式，故 $M_1 = 0$.
- M_2 经过行重新排列也是 A 的一个 (r+1) 阶子式，故 $M_2 = 0$， 于是 M =0 ==> $r_D \leqslant r_A$.

- 另一方面，D 的第 i 行元素加上第j行元素的 -k 倍，得矩阵 A， 重复上述步骤可得 $r_A \leqslant r_D$.
- 所以 $r_A = r_D$ ，对 A 实施第三种行变换后秩不变.

- 证2： 初等变换⇔左(右)乘初等矩阵
  ⇔ $|FA| = |F|\cdot |A|, |F| \neq 0$

- 所以,做任何一种初等变换对行列式是否为零没有影响.

- 可逆矩阵可表示为初等矩阵的乘积 ⇨
  <u>可逆矩阵左(右)乘任何矩阵，不改变其秩.</u>

✓ 矩阵的秩不随初等变换而改变，说明秩是反映矩阵某类固有性质的一个数。

- 矩阵经过初等变换化为标准形，保持固有性质不变，
- 而标准形的秩等于左上角单位阵的阶数，于是有

推论 1：任何阵矩阵 A 经过初等变换可化为唯一的标准形.

$$A \xrightarrow{\text{经若干次初等变换}} \begin{bmatrix} E_{r_A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

推论 2：设 A 为 m×n 阶矩阵，P 和 Q 分别为 m, n 阶可逆矩阵，则

$$r_{PAQ} = r_{PA} = r_{AQ} = r_A$$

比较：矩阵的秩与行列式

	det	rank
数的类型	• 实数	• 整数
适用的矩阵	• 方阵	• 任何矩阵 $A_{m\times n}$
矩阵可逆	• $\det A \neq 0$	• $\operatorname{rank} A = n$，满秩
	• 无法推断更多矩阵内部信息	• 由 rank A 可进一步得到：矩阵的标准形、行/列向量的最大线性无关组个数...

☑ 用矩阵的初等变换求秩

- 将矩阵经过初等变换化为标准形，标准形的秩等于左上角单位阵的阶数.
- 实际上化为阶梯形矩阵即可，秩等于左上角矩阵的阶数.

例：计算矩阵 A 的秩 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1&4&0\\2&5&2&5&3\\0&1&-5&-4&3\\3&8&5&6&6\end{bmatrix}$

解：对A实施初等变换

$$A\xrightarrow[R_4-3R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&4&0\\0&1&4&-3&3\\0&1&-5&-4&3\\0&2&8&-6&6\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-2R_2]{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&4&0\\0&1&4&-3&3\\0&0&-9&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 阶梯形矩阵非零行个数为3，故 $r_A=3$

练习：计算矩阵 A 的秩

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

答案：Matlab — r = rank(A) = 2

例：计算 n 阶矩阵 A 的秩

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

解：由P19 例4

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

（1）当 $a \neq -(n-1)$ 且 $a \neq 1$ 时， $|A| \neq 0$，故 $r_A = n$

（2）当 $a=1$ 时 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ➢此时 $r_A = 1$

（3）当 $a=-(n-1)=1-n$ 时

$$A=\begin{bmatrix}1-n & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-n\end{bmatrix}\xrightarrow[i=2,3,\cdots n]{R_i-R_1}\begin{bmatrix}1-n & 1 & 1 & \cdots & 1\\ n & -n & 0 & \cdots & 0\\ n & 0 & -n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ n & 0 & 0 & 0 & -n\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[j=2,3,\cdots n]{C_1+C_j}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n\end{bmatrix}\xrightarrow[i=2,3,\cdots n]{-\frac{1}{n}R_i}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,\cdots n]{R_1-R_i}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[C_{1n}]{R_{1n}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 此时 $r_A = n-1$
- 求秩与求标准形一样，可行、列变换混用

定义2.19：若矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，则称 A与 B 等价，记 A $\cong$ B .

等价关系的性质

（1） 反身性： A $\cong$ A ;

（2） 对称性： 若 A $\cong$ B，则 B $\cong$ A ;

（3） 传递性： 若 A $\cong$ B， B $\cong$ C ，则 A $\cong$ C .

- 显然：矩阵与其标准形等价.

• 例如: 两个线性方程组同解，就称这两个线性方程组等价 ⇨ 二者的增广矩阵等价.

定理 2.7：同阶矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价的三种充分必要条件为：

（1） $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 的秩相等.

（2） $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 具有相同的标准形.

（3） 存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $PAQ = B$.

- 可将标准形视作桥梁 或 参考标准.

➢ 全体 $m\times n$ 矩阵可用 等价类 来划分：

➢ 同一等价类的矩阵 秩 相同 ⇨ 标准型相同

$$\mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

例如，一切 2×3 实数矩阵,分为 3 个等价类:

r = 0: 仅有一个元素 $\mathbf{0}_{2\times3}$;

r = 1: 无穷多元素，标准型 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

r = 2: 无穷多元素，标准型 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

求证：两个矩阵乘积的秩 rank(*AB*) ≤ rank(*A*)，且 rank(*AB*) ≤ rank(*B*) .

证明：设 rank(*A*)=*r*，rank(*B*)=*s*，则存在可逆矩阵 P_1，P_2 及 Q_1，Q_2 使得

$$A = P_1\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_1 \qquad \mathrm{B} = P_2\begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_2$$

$$AB = P_1\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_1P_2\begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_2 = P_1MQ_2$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_1P_2\begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{r\times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *AB* 与 *M* 等价，因此 rank(*AB*) = rank(*M*) = rank(*D*)，*rank(AB)* ≤ *min(r,s)* ⇨ *rank(AB)* ≤ *r*，*rank(AB)* ≤ *s* .

本章小结

A. 重要概念与理论：

(1) 矩阵/可逆矩阵/分块矩阵/伴随矩阵

(2) 特殊矩阵：单位/零/对角/准对角/对称/反对称/三角阵

(3) 可逆矩阵的性质

(4) 矩阵的初等变换，初等变换的性质、对矩阵的影响

(5) 矩阵的标准形

(6) 矩阵的秩

B. 计算方法与运算规律：

(1) 矩阵/分块矩阵的基本运算：加/减/数乘/乘/乘幂/转置

(2) 求矩阵的逆常用两种方法：a. 利用伴随矩阵阵；
b. 利用矩阵的初等变换.

(3) 求矩阵的秩常用两种方法：

a. 求最高阶非零子式(行列式法)；

b. 将矩阵化为阶梯形(求秩的主要方法).