13.27设G=(a)，|G|=n. 证明：

(1)它的任意子群是循环群.

证明：1. H={e}，显然成立；

2. a∈H, 此时H=(a)=G, 显然成立；

3. $a \notin H$. 取H中幂指数为最小正整数的元素a^l，

$\forall x \in H, \because x \in G, \therefore \exists k \in Z, s.t. x = a^k$，

令$k = ql + t, (0 \le t \le l-1)$，则$a^k = a^{ql+t} = (a^l)^q \cdot a^t$，

$a^l \in H \Rightarrow (a^l)^q \in H \Rightarrow ((a^l)^q)^{-1} \in H$，

$\therefore a^t = ((a^l)^q)^{-1} \cdot a^k \in H \Rightarrow t = 0$，否则矛盾.

$\therefore x = a^{ql} = (a^l)^q$. 由$x$的任意性，可得$H$为循环群.

(2)它的任意元的阶可以整除n.

证明:

设$b=a^k \in G$.p为b的阶.

$\because b^n=(a^k)^n=(a^n)^k=e$,

$\therefore p|n$.(定理14.12)

(3)设d为n的因子，则G必存在唯一一个阶为d的子群.

证明:1.存在性.

令$H=(a^{n/d})$,显然H是G阶为d的子群.

2.唯一性.

假设$S=(a^{m})$也是G的阶为d的子群.则$a^{md}=e$.

$\because a$的阶为n. $\therefore n\,|\,md \Rightarrow (n/d)\,|\,m$.

令$m=(n/d)k, k\in \mathrm{Z}$.

$a^{m}=(a^{n/d})^{k}\in H. \therefore S\subseteq H$.

又$\because |S|=|H|=d, \therefore S=H$.

13.28设$G=(a)$,$b=a^k$,$|G|=n$.讨论当b为G的生成元时，k具有什么性质？当b为G的一个子群的生成元时，k又具有什么性质？

(1)当b为G的生成元时,$(n,k)=1$.

解答:$\because b$为G的生成元,$\therefore b=a^k$的阶为n.

令$d=(n,k),k=td$.

则由$(a^k)^{n/d}=(a^{td})^{n/d}=(a^n)^t=e$.

$\therefore n\mid(n/d)$.

$\therefore d=1$. 即$(n,k)=1$.

(2)当b为G的一个子群的生成元时，(k,n)=n/p.

解答：设H为G的一个子群，b为H的生成元，记H的阶为p，可以证明n/p=(k,n).

设(k, n)=t, 则t|k, 有 $(a^k)^{n/t} = (a^n)^{k/t} = e,$

$\therefore p \mid n/t$

$\because \langle b \rangle$的阶为p $\therefore (a^k)^p = e$

$\therefore n \mid kp \to (n/t) \mid (kp/t)$

而(k, n)=t, ∴ n/t | p

综合，$p = n/t.$

13.29证明：指数为2的子群一定是正规的。

证明:

设该子群为H.

∵H指数为2,

∴H存在两个不同的右(左)陪集。

∵eH=He=H,

∴两个陪集一个为H，一个为G-H.

$\forall g \in G$,

(1)若$g \in H$,$gH=H=Hg$;

(2)若$g \notin H$， $gH=G-H=Hg$.

由(1)(2)可得，H为正规子群。

13.30G为群, C⊆G, C={x|x ∈G,且∀g ∈G, xg=gx},称C为G的中心。证明它是正规子群。

证明:

(1)证明C为G的子群;

$\forall a, b \in C, g \in G,$

$(ab)g = a(bg) = (ag)b = g(ab), i.e. ab \in C,$

满足封闭性。

$ag = ga \Rightarrow a^{-1}aga^{-1} = a^{-1}gaa^{-1} \Rightarrow a^{-1}g = ga^{-1},$

$i.e. a^{-1} \in C.$

由定理14.14可得, C为G的子群。

（2）证明C为G的正规子群；

$\because \forall a \in C, g \in G, s.t. ag = ga,$

$\therefore gC = Cg.$

$\therefore C$为G的正规子群。

13.31群G中所有与给定元素a ∈G可换的元素全体N(a)={x∈G| xa=ax}构成G的一个子群；循环群(a)是N(a)的正规子群。

证明：

(1)证明$N(a)$构成G的一个子群。

(2)证明(a)为$N(a)$的正规子群。

$\because \forall a^k \in (a), k \in Z, s.t. a^k a = a a^k = a^{k+1}$,

$\therefore a^k \in N(a)$,

$\therefore (a) \subseteq N(a). s.t. (a)$为$N(a)$的子群。

又$\because \forall a^k \in (a), x \in N(a)$,

$\therefore a^k x = a^{k-1}(ax) = a^{k-1}(xa) = a^{k-2}(ax)a$

$= \cdots = x a^k$,

$\therefore x(a) = (a)x.$

$s.t. (a)$为$N(a)$的正规子群。

13.34证明交换群G，关于子群的商群G/H是交换群。

证明:

任取xH,yH $\in$G/H, x,y$\in$G,

$\because$G为交换群,

$\therefore$ **xH⊙yH=xyH=yxH=yH ⊙xH,**

$\therefore$ G/H是交换群。

13.40证明:

(1)[D;·] ≌[R;+], 其中D={x>0|x∈R}.

证明:

定义映射φ: $D \to R,\ \forall x \in D, \varphi(x) = \ln x.$

1.证明φ为同态映射。

$\forall x_1, x_2 \in D, \varphi(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2$

$= \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$

$\therefore \varphi$为同态映射。

2.证明φ为一一映射。

$\forall y \in R, \exists x = e^y \in D, s.t. \varphi(x) = y,$

$\therefore \varphi$为满射。

$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$，成立$\ln x_1 \neq \ln x_2$,

$\therefore \varphi$为内射。

$\therefore \varphi$为双射。

由1,2得$[D;\cdot] \cong [R;+]$.

(2)[Q₊;·]与[Q;+]不同构，其中 $Q_+=\{x\in Q|x>0\}$。

证明:

假设$[Q_+;\cdot]$与$[Q;+]$同构，则存在一个

同构映射$\varphi: Q_+ \to Q, \varphi$为一一映射。

对于$2\in Q_+$，必有$\varphi(2)=y\in Q$;

又$\because \varphi$为满射,

$\therefore \exists x\in Q_+, s.t.\varphi(x)=y/2;$

$\therefore \varphi(x \cdot x) = \varphi(x) + \varphi(x) = (y/2) + (y/2) = y,$

$\because \varphi$为双射,

$\therefore x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \notin Q_+$,矛盾。

$\therefore [Q_+;\cdot]$与$[Q;+]$不同构。

(3)Z_4不同构于K_4(四元克莱茵群)。

证明：K_4(四元克莱茵群)如右图。

$K_4 = \{e, \alpha, \beta, \gamma\}$

$\circ$	e	α	β	γ
e	e	α	β	γ
α	α	e	γ	β
β	β	γ	e	α
γ	γ	β	α	e

假设存在一一映射

φ: $Z_4 \to K_4, s.t. \forall a, b \in Z_4,$

成立$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \circ \varphi(b).$

$\because [0], e$为Z_4, K_4的单位元,

$\therefore \varphi([0]) = e.$

取$a = b = [1] \in Z_4,$

$\varphi([1] \oplus [1]) = \varphi([2]) = \varphi([1]) \circ \varphi([1])$

$= e = \varphi([0]),$矛盾。$\therefore Z_4$与K_4不同构。

(4)G与G’同态,φ为其同态映射, G与G’同构，当且仅当K={e}。

证明:

1.必要性;

$\because G \cong G'$,

$\therefore \phi$为一一映射。

设e为G的单位元，则$\phi(e)$为G'的单位元。

$K = \{x \in G \mid \phi(x) = \phi(e)\}$,

由ϕ为一一映射,可得$\forall x \in K, x = e.$

即$K = \{e\}$。

2.充分性；

$\because G$与G'同态，

$\therefore \phi$为满射，

$\therefore \phi(G) = G'.$

$\because G/K \cong \phi(G)$(定理14.20)$, K = \{e\},$

$\therefore G/K = G.$

$\therefore G \cong \phi(G) = G'.$

即G与G'同构。