线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

答疑1：设 A 是方阵， $A^k = O$, 对某个正整数k 成立.
证明下列方阵可逆，并求之.

$$(1)\ I-A;\quad (2)\ I+A;\quad (3)\ I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

解 (1) 思路：级数 $(I-A)[I+A+A^2+\cdots+A^{(k-1)}]$

$$=[I+A+A^2+\cdots+A^{(k-1)}]-\left(A+A^2+\cdots+A^k\right)$$

$$=I-A^k=I$$

➢故 I – A 可逆，且逆矩阵为

$$\left[I+A+A^2+\cdots+A^{(k-1)}\right]$$

➢ $A^k = O$，A 为幂零阵， 由 $|A^k|=0$ ⇨ $|A|=0$，
⇨ 幂零阵必不可逆.

$$(2): \quad (I+A)[I-A+A^2+\cdots+(-1)^{(k-1)}A^{(k-1)}]$$

解 : $(I+A)[I-A+A^2+\cdots+(-1)^{(k-1)}A^{(k-1)}]$

$$=[I-A+A^2+\cdots+(-1)^{(k-1)}A^{(k-1)}]$$

$$+[A-A^2+\cdots+(-1)^{(k-1)}A^k]$$

$$=I+(-1)^{(k-1)}A^k=I$$

$$(3)\ I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

解： $e^x=1+\dfrac{x^1}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}\cdots\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

答疑2：设 A 是 n 阶方阵，证明：

若 $A^2 = E$, 且 $A \neq E$，则 A+ E 不是可逆矩阵。

证明： 由 $A^2 = E \Rightarrow A^2 = E^2 \Rightarrow A^2 - E^2 = O$

- $(A+E)(A-E)=O$
- 反证法：假设 A+E 可逆，则

$$(A+E)^{-1}(A+E)(A-E)=(A+E)^{-1}O$$

$$E(A-E)=O$$

$$\Rightarrow (A-E)=O,\ A=E$$

- 与已知 $A \neq E$ 矛盾，故 A+E 不是可逆矩阵.

答疑3：设 A 是n阶方阵，满足 $A^2 = E$，求证：

rank(A-E) + rank(A+E) = n .

证明：$$rank\begin{pmatrix} A & E \\ E & A \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 0 & E - A^2 \\ E & A \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & A \end{pmatrix} = n$$

又：$$rank\begin{pmatrix} A & E \\ E & A \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A & E \\ A+E & A+E \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} A-E & E \\ 0 & A+E \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A-E & E \\ 0 & \frac{1}{2}(A+E) \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A-E & 2E \\ 0 & A+E \end{pmatrix}\uparrow$$

$$= rank\begin{pmatrix} A-E & E-A \\ 0 & A+E \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A-E & 0 \\ 0 & A+E \end{pmatrix}$$

$$= rank(A-E) + rank(A+E)$$

➢**故 rank(A-E) + rank(A+E) = n .**

分块初等变换的应用

定理：任何矩阵经初等变换后秩不变

⇨ 对分块矩阵亦成立

➢ 可逆矩阵可表示为初等矩阵的乘积 ⇨

可逆矩阵左(右)乘任何矩阵，不改变其秩.

⇨ 对分块矩阵亦成立

➢ 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价 ⇔ 它们的秩相同

⇨ 分块亦成立

☑ 将矩阵分块与初等变换两个工具相结合 ⇨

一组行或者一组列的初等变换

- 将单位矩阵分块 $E_n = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{bmatrix}$

  ⇨ 做初等变换：

$$R_{r,s} \to \begin{bmatrix} O & E_s \\ E_r & O \end{bmatrix} \qquad C_{r,s} \to \begin{bmatrix} O & E_r \\ E_s & O \end{bmatrix}$$

$$R_r(k) \to \begin{bmatrix} k & O \\ O & E_s \end{bmatrix} \qquad C_s(k) \to \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & k \end{bmatrix}$$

$$R_{r,s}(k) \to \begin{bmatrix} E_r & k \\ O & E_s \end{bmatrix} \qquad C_{r,s}(k) \to \begin{bmatrix} E_r & O \\ k & E_s \end{bmatrix}$$

例如：

$$R_{r,s} \to \begin{bmatrix} \mathrm{O} & E_s \\ E_r & \mathrm{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & \mathrm{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} & D \\ A & \mathrm{B} \end{bmatrix}$$

$$C_{r,s} \to \begin{bmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & \mathrm{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{O} & E_r \\ E_s & \mathrm{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{B} & A \\ D & \mathrm{C} \end{bmatrix}$$

$$R_r(k) \to \begin{bmatrix} k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & E_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & \mathrm{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\mathrm{A} & kB \\ C & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

$$R_{r,\mathrm{s}}(k) \to \begin{bmatrix} E_r & \mathrm{k} \\ \mathrm{O} & E_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & \mathrm{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}+\mathrm{kC} & B+kD \\ C & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

$$C_{r,s}(k) \to \begin{bmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & \mathrm{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{k} & E_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}+\mathrm{kB} & B \\ C+\mathrm{kD} & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

例1 求证： $rank\left(A \mid B\right) \le rank(A) + rank(B)$

证1：A 与 B 的行向量组 ⇨ 线性无关的最大可能形式

证2: $rank(A) + rank(B) = rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$

$$= rank\left\{\begin{bmatrix} E & 1 \\ \mathrm{O} & E \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right\} \quad = rank\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}\right\}$$

- **子阵的秩 ≤ 矩阵的秩**

$$\therefore rank\left(A \mid B\right) \le rank(A) + rank(B)$$

例2 求证：

(1)对$A \in \mathrm{F}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}, B \in \mathrm{F}^{\mathrm{p}\times q}, C \in \mathrm{F}^{\mathrm{p}\times\mathrm{n}}$,有

$$rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B) \le rank\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

(2)对$A, B \in \mathrm{F}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$,有：$rank(A+\mathrm{B}) \le rank(A) + rank(B)$

(3)对$A \in \mathrm{F}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}, B \in \mathrm{F}^{\mathrm{n}\times p}$,有

$$rank(A) + rank(B) - n \le rank(AB)$$

$$\le \min\{rank(A), rank(B)\}$$

(1)对$A\in \mathrm{F}^{m\times n}, B\in \mathrm{F}^{p\times q}, C\in \mathrm{F}^{p\times n}$,有

$$rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = rank(A)+rank(B) \le rank\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

证(1)：设 rank(A)=r，rank(B)=s，则存在可逆矩阵 P_1，P_2 及 Q_1，Q_2 使得

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \qquad P_2 B Q_2 = \begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

取可逆方阵：$P = \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}$， $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{bmatrix}$

则：$P\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} P_1 A Q_1 & O \\ O & P_2 B Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & & & \\ & O & & \\ & & E_s & \\ & & & O \end{bmatrix}$

➢ 矩阵经初等变换后秩不变

$$\text{故：}\quad rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$$

(1)再考虑：$rank\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix},\quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$P\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}Q = \begin{bmatrix} P_1AQ_1 & O \\ P_2CQ_1 & P_2BQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & & & \\ & O & & \\ & & E_s & \\ C_1 & & & O \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ rank\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \geq rank(A) + rank(B)$$

$$rank\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \geq rank(A) + rank(B)$$

例:

$$rank\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & 1 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right) = 4$$

$$\geq rank(A) + rank(B) = 2$$

(2)对$A, B \in \mathrm{F}^{m\times n}$,有：$rank(A+\mathrm{B}) \le rank(A) + rank(B)$

证明： $$rank(A)+rank(B)=rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

$$=rank\left\{\begin{bmatrix} E_{\mathrm{m}} & \mathrm{O} \\ 1 & E_m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right\}=rank\left\{\begin{pmatrix} A & O \\ A & B \end{pmatrix}\right\}$$

$$=rank\left\{\begin{pmatrix} A & O \\ A & B \end{pmatrix}\begin{bmatrix} E_{\mathrm{n}} & \mathrm{O} \\ 1 & E_n \end{bmatrix}\right\}=rank\left\{\begin{pmatrix} A & O \\ A+B & B \end{pmatrix}\right\}$$

$\therefore$由子阵与矩阵秩的关系：$rank(A+B) \le rank(A)+rank(B)$

或：$$rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} A & A \\ O & B \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix}\ge rank(A+B)$$

(3)对$A \in \mathrm{F}^{m \times n}, B \in \mathrm{F}^{n \times p}$,有

$$rank(A) + rank(B) - n \le rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$$

证明：**矩阵AB的列向量组是A的列向量的线性组合**

⇨ r(AB) ⩽ r(A)

矩阵AB的行向量组是B的行向量的线性组合

⇨ r(AB) ⩽ r(B)

$$\therefore \quad rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$$

- **矩阵AB的列向量组是A的列向量的线性组合,**
  —B为线性表示的系数矩阵;
- **矩阵AB的行向量组是B的行向量的线性组合,**
  — A为线性表示的系数矩阵。

(3)对$A \in \mathrm{F}^{m\times n}, B \in \mathrm{F}^{n\times p}$,有

$$rank(A)+rank(B)-n \le rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$$

由 (1) 的结果: $rank(A)+rank(B) \le rank\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$

$$\le rank\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A-AE & O-AB \\ E & B \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} O & -AB \\ E & B \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} O & -AB \\ E & O \end{pmatrix}$$

$$= rank(AB)+n$$

$$\therefore \quad rank(A)+rank(B)-n \le rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$$

线性空间补充说明

- 组成空间的基本元素：研究对象的集合、运动（变换/运算）、运动（变换/运算）规则
- 空间的本质特征是容纳运动 —— 容纳(符合规则)的运动（变换/运算）
- 基和坐标：选定基和坐标后
  - ⇨ 对象可用坐标向量“全权代表”
  - ⇨ 用向量/矩阵描述对象及其运动.
- 第五章：线性变换
- 变换这个词不陌生吧？

第五章　线 性 变 换

- 从一个集合到另一个集合的映射在数学中扮演着重要的角色. 本章学习线性空间中的映射理论.

- 主要内容：线性空间内对象的运动，
  线性空间间对象的运动

- 研究对象 — 向量；　运动 — 运算、变换；
  工具 — 矩阵.

- 向量之间的联系可通过映射来实现.

§ 5.1 线性变换的定义、性质及运算

一、映射

定义 5.1:设 M 和 N 是两个集合， 如果给定一个法则σ，使 M 中的每一个元素α，都有N中一个确定的元素β与它对应，则称σ是集合 M 到 N 的一个映射.

- β称为元素α，在映射σ下的像，记为$\sigma(\alpha)=\beta$
- α称为 β在映射σ下的一个原像(源).
- 如果映射σ是M 到 N 的一个映射，可记为

$$\sigma : M \to N$$

σ：M → N

- 称 M 为映射 σ 的定义域或源集，
- 把 M 在映射 σ 下的像的全体称为值域或像集，记为 σ(M).
- 显然，像集 σ(M) 是 N 的子集 $\sigma(M) \subseteq N$
- 如果 σ(M)= N ，就称 σ 是满射.
- 如果不同的元素像也不同，即若 $a_1 \neq a_2$ ，一定有 $\sigma(a_1) \neq \sigma(a_2)$ ，就称 σ 是单射.
- 如果 σ 即是单射又是满射，就称 σ 是一一映射.

例： M 是全体整数的集合，N是全体偶数的集合，定义

$$\sigma(n) = 2n \quad (n \in M)$$

这是 M 到 N 的一个映射，且是一一映射，
—可以看作是把 n 放大 2 倍的线性运算.

例： M 是全体实 n 阶矩阵的集合， 定义

$$\sigma(A) = |A| \quad (A \in M)$$

这是 M 到 **R** 的一个映射，且是满射。

例： M 是全体实 n 阶矩阵的集合， 定义

$$\sigma(a) = aE \quad (a \in R)$$

其中 E 是 n 阶单位阵，这是 **R** 到 M 的一个映射，
且是单射。

例：设 M 是一个集合，定义

$$\sigma(a)=a \quad (a\in M)$$

即 σ 把每个元素都映射到自身，σ 称为集合 M 的恒等映射或单位映射.

- 显然，恒等映射是一一对应的.

如果 σ_1，σ_2 是 M 到 N 的两个映射，且对任一元素 $a\in M$，都有

$$\sigma_1(a)=\sigma_2(a)$$

那么，称 σ_1，σ_2 是相等的，记为 $\sigma_1=\sigma_2$

二、线性变换的定义

- 线性空间中向量之间的联系，可以通过线性空间内的映射来实现
- 线性空间 V 到自身的映射，称为 V 的一个变换，用 **T** 表示，即 若 $\alpha \in V$， $\beta = T(\alpha) \in V$
- β 称为 α 在变换 **T** 下的像， α 称为 β 的原像.
- 变换的概念是函数概念的推广

  数的函数 $y = f(x)$ ⇨ 向量的函数 $\beta = T(\alpha)$

☑ 定义 5.2(线性变换)：数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个变换 T，对于任意两个向量 α、$\beta \in V$，$k \in P$，如果满足下列条件：

(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$

(2) $T(k\alpha) = k\,T(\alpha)$；

则称变换 T 为线性变换(linear transformation).

例：在平面上，所有从原点出发的向量构成线性空间V，把平面绕原点旋转 θ 角，就是一个变换，记作 T_θ.

- 它使 V 中任一向量α，有唯一的向量α'与之对应，即

$$\alpha' = T_\theta(\alpha)$$

并且：$T_\theta(\alpha+\beta) = T_\theta(\alpha) + T_\theta(\beta)$

$$T_\theta(k\alpha) = k\,T_\theta(\alpha)$$

故 T_θ 为线性变换.

☑ 说明：

1. 线性变换就是保持线性运算(即保持加法和数乘）的映射.

2 . 一般用大写字母表示线性变换，

如： T, D, E, . . .

而向量 α 在 T 下的像，记为$\mathrm{T}(\alpha)$或$\mathrm{T}\alpha$.

3. 线性变换可以在线性空间内部进行，也可以在不同的线性空间之间进行.

- 有时也称线性变换 T：$\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ 为线性算子

  (linear operator)

例：设 A 为一 n 阶实矩阵，对任意向量 $\alpha\in R^n$，

令 $T(\alpha)=\alpha A$, 则 T 为R^n 中的线性变换.

证： $T(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A=T(\alpha)+T(\beta)$

$T(k\alpha)=(k\alpha)A=k(\alpha A)=kT(\alpha)$

故 T 为 R^n 中的线性变换.

例：如果 T(α)= 1 ，那么 T 是变换，但不是线性变换.

因为 T(α+β)= 1 ≠ T(α)+T(β)=2

例：在线性空间 $P[x]_n$ 中，求导数也是一种变换，记为 D，对任意 $f(x)\in P[x]_n$，

$$D[f(x)] = f'(x)$$

- 由求导法则 $$D(f+g) = D(f) + D(g)$$ $$D(kf) = kD(f)$$
- 故 D 是一种线性变换.

例：几何空间R^3中，将任一向量正投影到 xoy 平面上，称为投影变换，记为 Π_{xy}，设：

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\in R^3,\quad \beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\in R^3$$

则 $\Pi_{xy}(\alpha)=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\0\end{bmatrix},\quad \Pi_{xy}(\beta)=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\0\end{bmatrix}$

设：$\alpha+\beta=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix},\quad k\alpha=\begin{bmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\end{bmatrix}$

则 $$\Pi_{xy}(\alpha+\beta)=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\Pi_{xy}(\alpha)+\Pi_{xy}(\beta)$$

$$\Pi_{xy}(k\alpha)=\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ 0 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}=k\Pi_{xy}(\alpha)$$

- 故 Π_{xy} 是一种线性变换.

两类特殊的线性变换

1. 恒等变换或单位变换 T_E

$$T_E(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$$

2. 零变换 T_0

$$T_0(\alpha) = 0\alpha, \quad \forall \alpha \in V$$

三、线性变换的性质

1. 设 T 是线性空间 V 中的一个线性变换，则

$$T(0)=0,\quad T(-\alpha)=-T(\alpha);$$

由线性变换的性质， $T(k\alpha)=kT(\alpha)$

k取 0得，$T(0)=T(0\cdot\alpha)=0T(\alpha)=0$

k取 -1得，$T(-\alpha)=T((-1)\cdot\alpha)=-T(\alpha)$

2. 线性变换保持线性组合与线性关系式不变

若： $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

则： $T(\beta)=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\cdots+k_mT(\alpha_m)$

3. 线性相关的向量经线性变换后，仍保持线性相关.

若：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$

$(k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零 $)$

则：
$$T(0) = T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m)$$
$$= k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + \cdots + k_mT(\alpha_m)$$
$$= 0$$

注意 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则 $T\alpha_1, T\alpha_2, \cdots, T\alpha_m$ 不一定线性无关.

- **事实上，线性变换可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组，比如：零变换 T_0**

$$T_0(\alpha) = 0\alpha, \quad \forall \alpha \in V$$

四、线性变换的运算

设 V 是数域 P 上的一个线性空间，以 $L(V)$ 表示 V 上全体线性变换所构成的集合，在 $L(V)$ 内可以引进加法、数量乘法和乘法，以及逆变换的运算.

（1）加法　如果 $T_1, T_2 \in L(V)$，在 V 中定义一个变换

$$(T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha)$$

称为 T_1 与 T_2 的和

(2) **数量乘法** 对于数域 P 中任意一数， $T \in L(V)$，在 V 中定义一个变换

$$(kT)(\alpha) = k[T(\alpha)]$$

称为 k 与 T 的<u>数量乘积</u>

- 可以证明，$L(V)$ 构成线性空间（对加法和数乘封闭）.

(3) **乘法** 如果 $T_1, T_2 \in L(V)$，在 V 中定义一个变换

$$(T_1 T_2)(\alpha) = T_1[T_2(\alpha)]$$

称为 T_1 与 T_2 的<u>乘积</u>

$T_E(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$

(4) 逆变换 设$T \in L(V)$，如果存在一个变换 S, 使得

$$ST = TS = T_E$$

➢ 例如逆矩阵

称变换 S 为 T 的逆变换

➢ 如果 T 的逆变换存在，就说T是可逆的

➢ 可以证明，逆变换是唯一的，也是线性变换.

证明： $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k \in P$

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha + \beta) &= T^{-1}\left((TT^{-1})(\alpha) + (TT^{-1})(\beta)\right) \\ &= T^{-1}\left(T(T^{-1}(\alpha) + T^{-1}(\beta))\right) \\ &= T^{-1}T\left(T^{-1}(\alpha) + T^{-1}(\beta)\right) \\ &= T^{-1}(\alpha) + T^{-1}(\beta) \end{aligned}$$

$$T^{-1}(k\alpha)=T^{-1}\Big(k(TT^{-1})(\alpha)\Big)$$

$$=T^{-1}\Big(k(T(T^{-1}(\alpha)))\Big)$$

$$=T^{-1}\Big(T(k(T^{-1}(\alpha)))\Big)$$

$$=k(T^{-1}(\alpha))=kT^{-1}(\alpha)$$

- **所以，T^{-1} 也是线性变换.**

(唯一性证明略)

例：设在 R^2 中，线性变换

$$T_1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \quad T_2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

求 $\alpha=[3,\ -4]^T$ 在 T_1T_2 与 T_2T_1 的像.

解：由线性变换乘法的定义

$$(T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha)) = T_1(T_2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}) = T_1\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(T_2T_1)(\alpha) = T_2(T_1(\alpha)) = T_2(T_1\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}) = T_2\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- 由本例可知，线性变换的乘法一般不满足交换律.
- *本例几何解释？* T_2—镜面反射， T_1—顺时针旋转 90°

(5) 方幂 设$T \in L(V)$，规定线性变换的方幂为

$$T^k = \overbrace{T \cdot T \cdots T}^{k个} \qquad T^0 = T_E$$

(6) 线性变换的多项式

如果给定系数在数域 P 上的一个多项式

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

则定义

$$f(T) = a_0 T^m + a_1 T^{m-2} + \cdots + a_{m-1} T + a_m T_E$$

为线性变换 T 的多项式