线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

三、几个重要定理

定理 3.4：向量组 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{s}$（s ≥2）线性相关的充要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理 3.5：设向量组 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{s}$线性无关，而向量组 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{s}, \alpha$ 线性相关，则 α 必是 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{s}$的线性组合，且线性表示式唯一.

✓ 即 唯一表示定理：

向量可用线性无关组表示,

— 则表示法必然唯一.

定理：若 n 元向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，则在每个向量中添加 m 个分量, 得到的 n+m 元"加长"向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性无关.

✓ 即短的向量组无关，则长的也无关

定理 3.6：设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示，若 r ＞ s， 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关.

✓ 即被个数较少的向量组线性表示的向量组一定线性相关.

推论 1：设向量组 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{r}$ 可经向量组 $\beta_{1}, \beta_{2}, \dots, \beta_{s}$ 线性表示，若 $\alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{r}$ 线性相无关，则 $r \leqslant s$.

- ✓ 即线性无关向量组不能被比它数目小的向量组线性表示.

推论 2：等价线性无关组向量个数相等.

四、极大线性无关组与向量组的秩

定义 3.6：设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个部分向量组，若它满足：

(1) 线性无关.

(2) 再加入原向量组任意其它一个向量(如果有的话)，所形成的新的部分向量组都线性相关.

则称向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

✓ 能完全代表原向量组的最小部分组.

定理 3.7: 一个向量组的任意两个极大线性无关组必等价，且所含向量的个数相等.

定义 3.7: 向量组的极大线性无关组所含向量个数称为向量组的 秩 (rank).

定理 3.8: 矩阵的秩与矩阵各列(行)向量构成的向量组的秩相等.

或：矩阵的列秩 = 矩阵的行秩

= 矩阵的秩

§ 3.4 线性方程组解的结构

● 目的：用**向量组**理论研究线性方程组

一、齐次线性方程组的基础解系

➢ 考虑齐次线性方程组

$$AX = 0$$

其中$A_{m\times n}$ 为系数矩阵，X 为 n 元列向量

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{212}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

定理 3.9 设 $X_1, X_2, \dots, X_s$ 都是齐次线性方程组的解

则它们的线性组合也是线性方程组的解.

证明： 由已知

$$AX_i = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots s)$$

$$A(k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s)$$
$$= k_1AX_1 + k_2AX_2 + \cdots + k_sAX_s = 0 \quad ,$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是常数,

- 所以 $X_1, X_2, \dots, X_s$ 的线性组合也是 $AX = 0$ 的解.

- 齐次线性方程组的解是一个 **n** 元向量，我们称之为解向量(solution vector).
- 当齐次线性方程组有非零解时，
  由 定理 3.2 **(P112)**，它必有无限多个解向量。
- 设齐次线性方程组系数矩阵 **A** 的秩为 **r**
- 则经过初等行变换，总可把 **A** 化为阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

➢ 由(2.11)式，齐次线性方程组的解表示为

$$
\begin{cases}
x_1 = -c_{1,r+1}t_1 - c_{1,r+2}t_2 - \cdots - c_{1,n}t_{n-r} \\
x_2 = -c_{2,r+1}t_1 - c_{2,r+2}t_2 - \cdots - c_{2,n}t_{n-r} \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r = -c_{r,r+1}t_1 - c_{r,r+2}t_2 - \cdots - c_{r,n}t_{n-r} \\
x_{r+1} = t_1 \\
x_{r+2} = t_2 \\
\quad \vdots \qquad\qquad\qquad (t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}\text{为任意常数}) \\
x_n = t_{n-r}
\end{cases}
$$

➢ 即解表示为通解的形式：

(1)无限多个解向量由有限个(n-r个)解向量线性表示.

(2)这组解向量若线性无关 — 那么找不到更少的了，是最基础的了.

☑ 基础解系

定义 3.8：设 $X_1, X_2, \ldots, X_s$ 是齐次线性方程组的一组解向量，若它满足条件

（1）线性无关；

（2）方程组的任一解向量都能表示为 $X_1, X_2, \ldots, X_s$ 的线性组合；

则称 $X_1, X_2, \ldots, X_s$ 为齐次线性方程的基础解系 (basic system of solutions) .

- 同学们联想到了什么概念？
- 若将所有解向量看作一个向量组，则基础解系就是该向量组的极大无关组.

定理 3.10：齐次线性方程组有非零解时，一定有基础解系，且基础解系含有 n-r 个解向量，

- 其中， n 是未知量的个数，r 是系数矩阵的秩

证明： 将齐次线性方程组的通解改写为向量形式

$$
\begin{cases}
x_1 = -c_{1\,r+1}t_1 - \cdots - c_{1n}t_{n-r} \\
x_2 = -c_{2\,r+1}t_1 - \cdots - c_{2n}t_{n-r} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r = -c_{r\,r+1}t_1 - \cdots - c_{rn}t_{n-r} \\
x_{r+1} = t_1 \\
x_{r+2} = t_2 \\
\cdots\cdots \\
x_n = t_{n-r}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
= t_1 \begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
+ t_2 \begin{bmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
+ \cdots + t_{n-r} \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

记：X $\quad X_1 \quad X_2 \quad X_{n-r}$

- 则线性方程组的通解可表示为

$$X = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + t_{n-r} X_{n-r} \qquad (4.2)$$

其中 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$ 是任意常数 .

- 线性方程组的任一解可表示为 $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ 的线性组合.
- 所以，$X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ 为方程组的基础解系.
- (4.2)式中分别令

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ t_{n-r} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \\ \quad \vdots \\ t_{n-r} = 0 \end{cases} \cdots, \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \\ \vdots \\ t_{n-r} = 1 \end{cases} \qquad (4.3)$$

✓ 就分别得到齐次线性方程组的解 $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

记：X $\qquad X_1$ $\qquad X_2$ $\qquad X_{n-r}$

- 矩阵 $[X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}]$的秩为 n-r，向量组 $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ 线性无关.

- 由基础解系的定义，任意两个基础解系是等价的线性无关组.

- 根据定理3.6推论2,任意两个基础解系所含向量个数相等，都是 n-r 个.

➢ **定理(补充)：若 n 元向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，则在每个向量中添加 m 个分量, 得到的 n+m 元“加长”向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 也线性无关.**

例如：

$$\underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = t_1 \underset{X_1}{\begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + t_2 \underset{X_2}{\begin{bmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + \cdots + t_{n-r} \underset{X_{n-r}}{\begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

☑ 求齐次线性方程组基础解系的方法

设齐次线性方程组为： $AX=0$

(1) 求齐次线性方程组的通解；

(2) 再分别令 n-r 个任意常数取(4.3)的 n-r 组数，就得到 n-r 个解，即所求基础解系.

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ t_{n-r} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \\ \quad\vdots \\ t_{n-r} = 0 \end{cases} \cdots, \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \\ \vdots \\ t_{n-r} = 1 \end{cases} \qquad (4.3)$$

例：求齐次线性方程组的基础解系

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解：对方程组系数矩阵实施初等行变换

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 - 2R_1]{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 4R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 + R_2]{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}R_3]{R_4 - \frac{4}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{记}}{=\!=} B$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 得 $r_A = 3$ ；
- 取位于第1，2，3行；1，3，5列的不等于零的 3 阶子式，
- 并且用初等行变换将其对应的 3 阶子阵单位化：

$$B\xrightarrow[R_2-R_3]{R_1+R_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -6 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -6 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -6 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 得线性齐次方程组的通解 $\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{t}_1+6\boldsymbol{t}_2\\ \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{t}_1\\ \boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{t}_1-2.5\boldsymbol{t}_2\\ \boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{t}_2\\ \boldsymbol{x}_5=3\boldsymbol{t}_2\end{cases}$

- 分别令 2 个任意常数取(4.3)的形式 $\begin{cases}t_1=1\\ t_2=0\end{cases}$ $\begin{cases}t_1=0\\ t_2=1\end{cases}$

- 得到方程组的基础解系为 $X_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $X_2=\begin{bmatrix}6\\0\\-2.5\\1\\3\end{bmatrix}$

- 亦可表示为 $X_1= t_1x_1 + t_2x_2$

例：设 A 为$m \times n$ 矩阵，且 $r_A = r$，求证：必存在一个秩为 n-r 的 $n \times (n-r)$ 矩阵 B， 使 $AB = 0$.

证明：考虑齐次线性方程组 $AX = 0$

- 由定理3.10可知，必存在基础解系，且含有 n-r 个解.
- 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ 为方程组的基础解系，令

$$B = \left[X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}\right]$$

- 显然 B 是 $n \times (n-r)$ 矩阵，$r_B = n-r$，且

$$\begin{aligned} AB &= A\left[X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}\right] \\ &= \left[AX_1, AX_2, \cdots, AX_{n-r}\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

证毕

- 布置习题 P 140:

18 （1）、(3)

19. (2)

21. 23. 25.

二、非齐次线性方程组解的结构

- 考虑非齐次线性方程组

$$AX = b \qquad (4.4)$$

其中$A_{m\times n}$为系数矩阵，X为 n 元列向量，b为 m 元列向量，其对应的齐次线性方程组为

$$AX = 0 \qquad (4.5)$$

定理 3.11：若 X_0 是非齐次线性方程组(4.4)的一个特定的解(一般称特解，particular solution)， Y 是相应齐次线性方程组(4.5)的通解，则方程组(4.4)的通解为

$$X = X_0 + Y \qquad (4.6)$$

$$X = X_0 + Y \tag{4.6}$$

证明：先证 $X = X_0 + Y$ 是非齐次方程组(4.4)的解

$$A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = b + 0 = b$$

- 所以 $X = X_0 + Y$ 是(4.4)的解.
- 再证(4.4)的任一解可表示为 $\overline{X} = X_0 + \overline{Y}$

其中$\overline{Y}$是齐次线性方程组的一个解

- 因 $\overline{X} = X_0 + (\overline{X} - X_0) = X_0 + \overline{Y}$
- 其中 $\overline{Y} = \overline{X} - X_0$

$$A\overline{Y} = A\overline{X} - AX_0 = b - b = 0$$

- 所以 $\overline{Y}$ 是齐次方程组的解，必包含在 Y 中，
- 因此非齐次方程组(4.4) 的任一解都包含在(4.6)式中，即它是(4.4)的通解.

➢ 若 $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ 为齐次线性方程组(4. 5)的基础解系，则非齐次线性方程组(4. 4)的通解可表示为

$$X = X_0 + t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + + t_{n-r} X_{n-r} \qquad (4.7)$$

其中 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$ 是任意常数 .

- 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 也称为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的导出组.

例：求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$

的通解，并表示为(4.7)的形式.

解：对增广矩阵实施初等行变换

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}R_2]{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，方程组有解，且通解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + x_2 + x_4 \\ x_3 = \frac{1}{2} + \qquad 2x_4 \end{cases}$$

- 取 $x_2=t_1$，$x_4=t_2$ （t_1，t_2为任意常数），得通解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = \frac{1}{2} + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

或：$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **其中特解为** $X_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

- **基础解系为** $\mathrm{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

即：$X = X_0 + t_1 X_1 + t_2 X_2 \quad —(4.7)$

例：求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

的通解，并表示为(4.7)的形式.

解：对增广矩阵实施初等行变换

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-3R_1]{\substack{R_2-2R_1\\ R_3-R_1}}\begin{bmatrix}1&-1&2&1&1\\0&1&-3&0&1\\0&1&-3&0&1\\0&2&-6&0&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-2R_2]{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&-1&2&1&1\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&1&2\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 得方程组的通解 $\begin{cases}x_1=2+t_1-t_2\\x_2=1+3t_1\\x_3=t_1\\x_4=t_2\end{cases}$ (t_1,t_2为任意常数).

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 2 + \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 = 1 + 3\boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{t}_2 \end{cases} \quad (\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2 \text{为任意常数}).$$

➢ **写成向量形式为** $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{t}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{t}_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

即：$X = X_0 + t_1 X_1 + t_2 X_2 \quad —(4.7)$

练习：求一个以 $(1,2,-3,4)^{\mathrm{T}}+c(2,1,-4,3)^{\mathrm{T}}$ 为全部解的非齐次线性方程组。

分析：是解线性方程组的反问题，目的是求方程组的系数矩阵 A 和右端向量 b。

解：首先，判断出有 4 个未知量，n= 4；
其次，基础解系有 1 个向量，故 n - r(A) = 1，
⇨ r(A) = 3

- 故方程组至少有3个方程，不妨设其为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 \end{cases}$$

练习：求一个以 $(1,2,-3,4)^{\mathrm{T}}+c(2,1,-4,3)^{\mathrm{T}}$ 为全部解的非齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 \end{cases}$$

因 $\xi=(2,1,-4,3)^T$ 为导出组 $\mathbf{AX=0}$ 的解，有

$$\begin{cases} 2a_{11}+a_{12}-4a_{13}+3a_{14}=0 \\ 2a_{21}+a_{22}-4a_{23}+3a_{24}=0 \\ 2a_{31}+a_{32}-4a_{33}+3a_{34}=0 \end{cases}$$

- 也就是说，**A** 的行向量都是方程

$2y_1+y_2-4y_3+3y_4=0$ 的解，解之得： $y_2=-2y_1+4y_3-3y_4$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=t_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t_3\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

不妨取基向量，所求方程组为

$$\begin{cases} x_1-2x_2=b_1 \\ 4x_2+x_3=b_2 \\ -3x_2+x_4=b_3 \end{cases}$$

练习：求一个以 $(1,2,-3,4)^{\mathrm{T}}+c(2,1,-4,3)^{\mathrm{T}}$ 为全部解的非齐次线性方程组。

$$\begin{cases} x_1-2x_2=b_1 \\ 4x_2+x_3=b_2 \\ -3x_2+x_4=b_3 \end{cases}$$

- 再由 $(1,2,-3,4)^{\mathrm{T}}$ 为上面方程组的一个特解，得：

$$b_1=-3, b_2=5, b_3=-2$$

- 所求非齐次线性方程组为：

$$\begin{cases} x_1-2x_2=-3 \\ 4x_2+x_3=5 \\ -3x_2+x_4=-2 \end{cases}$$

练习：求一个以 $(1,2,-3,4)^{\mathrm{T}}+c(2,1,-4,3)^{\mathrm{T}}$ 为全部解的非齐次线性方程组。

➢**法 2 (何占魁同学)：**

$(1, 2, -3, 4)^{\mathrm{T}}$ 为导出组的解向量：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 1c \\ -4c \\ 3c \end{pmatrix}$$

➢ **可直接看出** $x_1 = 2x_2$, $x_3 = -4x_2$, $x_4 = 3x_2$

即所求导出组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

所求非齐次方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = b_1 \\ 4x_2 + x_3 = b_2 \\ -3x_2 + x_4 = b_3 \end{cases}$$

➢ **…**

本章小结

A. 概念与理论：

(1) 高斯消元法

(2) 线性方程组的相容性定理

(3) 向量的概念和运算，向量运算常用基本性质

(4) 向量组线性相关、线性无关、相关性判定方法

(5) 等价向量组，向量组的极大无关组，向量组的秩

(6) 齐次/非齐次线性方程组解的结构，基础解系.

B. 计算方法：

(1) 利用矩阵的初等变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵

(2) 利用系数矩阵/增广矩阵的秩判定线性方程组的解

(3) 判断向量组的线性相关性以及求向量组秩的方法

(4) 求齐次、非齐次线性方程组的通解.