第四章：线性空间与欧氏空间

主要内容：

一、向量空间、子空间与基、维数、坐标

（一）向量空间与子空间

➢**向量空间**

设V是n维向量的非空集合，且V中向量对于加法及数乘这两种运算封闭，则称V是向量空间。

➢**子空间**

设W是向量空间V的一个非空子集，如W对V的加法及数乘两种运算都封闭，则称W是V的子空间。

(二) 基、维数和坐标

➢基及维数

设V是向量空间，若V中有r个向量线性无关，且V中任一向量都可由这r个向量线性表出，则称这r个向量为向量空间V的一组基，r称为向量空间V的**维数**，并称V为**r维向量空间**。

复旦大学

➢ 坐标

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是n维向量空间V的一组基，那么 $\forall \boldsymbol{\beta}\in V$ ，有唯一的一组数，使

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

称有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标 。

二、基坐标与坐标变换

➢基变换公式及过渡矩阵

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是n维向量空间V的两组基，则基变换公式为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{C}$$

其中C是可逆矩阵，称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵 。

> 坐标变换公式

若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 是n维向量空间V中的任一向量，它在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与基与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的坐标分别是

$$\mathbf{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

即 $\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n$ ，则向量坐标变换公式为

$$\mathbf{X}=\mathbf{C}\mathbf{Y}\quad \text{或}\quad \mathbf{Y}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}$$

其中C是从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵。

三、 标准（规范）正交基与Schmidt正交化

> 正交基与标准正交基

向量空间一组基中的向量如果两两正交，就称为正交基；若正交基中每个向量都是单位向量，就称其为标准（规范）正交基。

➢ Schmidt正交化

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则可构造 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 使其亮亮正交，且 $\boldsymbol{\beta}_i$ 仅是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$ 的线性组合（$i=1,2,\cdots,s$），再把 $\boldsymbol{\beta}_i$ 单位化，记 $\boldsymbol{\gamma}_i=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_i}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 是规范正交向量组。其中 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_{s-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{s-1},\boldsymbol{\beta}_{s-1})}\boldsymbol{\beta}_{s-1}$$

例1：问下列各子集合是否为 R^3 的子空间？

（1）$V_1=\{x=(x_1,x_2,x_3)\mid x_1\cdot x_2\geq 0, x_i\in R\}$ ；

（2）$V_2=\{x=(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_i\in R\}$ ；

解：V_1 不是 R^3 上的子空间。取 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)=(2,2,1)$ $\beta=(y_1,y_2,y_3)=(-1,-5,0)$

因为 $x_1\cdot x_2>0, y_1\cdot y_2>0$ ，$\alpha,\beta\in V_1$ ，而 $\alpha+\beta=(1,-3,1)$，即 $\alpha+\beta\notin V_1$

解：V_2 不是 R^3 上的子空间。设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)\in V_2$ ，则 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$

令 $\lambda\in R,\lambda^2\neq 1$，$\lambda\alpha=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$ ，$(\lambda x_1)^2+(\lambda x_2)^2+(\lambda x_3)^2=\lambda^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\lambda^2\neq 1$

所以，$\lambda\alpha\notin V_2$ ，从而，V_2 不是 R^3 上的子空间。

例2：在 R^4 中取两个基：$e_1=(1,0,0,0)^T$，$e_2=(0,1,0,0)^T$，$e_3=(0,0,1,0)^T$，$e_4=(0,0,0,1)^T$ 和 $\alpha_1=(2,1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,0)^T$，$\alpha_3=(5,3,2,1)^T$，$\alpha_4=(6,6,1,3)^T$

（1）求前一个基到后一个基的过渡矩阵。

（2）求向量 $(1,1,1,1)^T$ 在后一个基下的坐标。

（3）求在两个基下有相同坐标的向量。

解：（1）由题设，知：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$$

则过渡矩阵为：

$$C=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$$

例2：在 R^4 中取两个基：$e_1=(1,0,0,0)^T$，$e_2=(0,1,0,0)^T$，$e_3=(0,0,1,0)^T$，$e_4=(0,0,0,1)^T$ 和 $\alpha_1=(2,1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,0)^T$，$\alpha_3=(5,3,2,1)^T$，$\alpha_4=(6,6,1,3)^T$

（1）求前一个基到后一个基的过渡矩阵。

（2）求向量 $(1,1,1,1)^T$ 在后一个基下的坐标。

（3）求在两个基下有相同坐标的向量。

解：（2）：

设向量 $(1,1,1,1)^T$ 在第二个基下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，则有

$$(1,1,1,1)^T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-39/27\\-19/27\\-1/3\\25/27\end{pmatrix}$$

例2：在 R^4 中取两个基：$e_1=(1,0,0,0)^T$，$e_2=(0,1,0,0)^T$，$e_3=(0,0,1,0)^T$ ，$e_4=(0,0,0,1)^T$ 和 $\alpha_1=(2,1,-1,1)^T$ ，$\alpha_2=(0,3,1,0)^T$，$\alpha_3=(5,3,2,1)^T$，$\alpha_4=(6,6,1,3)^T$

（1）求前一个基到后一个基的过渡矩阵。

（2）求向量 $(1,1,1,1)^T$ 在后一个基下的坐标 。

（3）求在两个基下有相同坐标的向量。

解：（3）：

设向量 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ 在这两个基下的坐标相同 ，即

$$\alpha=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=(e_1,e_2,e_3,e_4)C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

得：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$ $\quad (C-E)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$

例2：在 R^4 中取两个基：$e_1=(1,0,0,0)^T$，$e_2=(0,1,0,0)^T$，$e_3=(0,0,1,0)^T$，$e_4=(0,0,0,1)^T$ 和 $\alpha_1=(2,1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,0)^T$，$\alpha_3=(5,3,2,1)^T$，$\alpha_4=(6,6,1,3)^T$

（1）求前一个基到后一个基的过渡矩阵。

（2）求向量 $(1,1,1,1)^T$ 在后一个基下的坐标 。

（3）求在两个基下有相同坐标的向量。

解：（3）：

$$(C-E)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$$

解这个方程组得：

$$\alpha=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix},(k\in R)$$

例3：设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$，已知齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的维数为2.求常数 a 的值，并求出方程组 $AX=0$ 的用基础解系表示的通解。

解：$AX=0$ 为4元齐次线性方程组，即n=4。又解空间的维数为：

$$2=n-r(A)=4-r(A)$$

得到 $r(A)=2$ 。

对系数矩阵作初等行变换，得到：$A\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&0&(a-1)^2&(a-1)^2\end{pmatrix}$

所以，$a=1$ $\quad A\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

得到方程组得一般解为：$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3-x_4\end{cases}$

可得方程组得一个基础解系为：$\xi_1=(1,-1,1,0)^T,\xi_2=(0,-1,0,1)^T$

于是方程组得通解为：$X=c_1\xi_1+c_2\xi_2$

例4：设A为n阶实反对称矩阵，即 $A=-A^T$，且存在列向量 $\alpha,\beta\in R^n$，使 $A\alpha=\beta$。证明 α 与 β 正交。

证：α 与 β 的内积是

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\alpha^T(A\alpha)$$

$$=\alpha^T(-A^T\alpha)=-(\alpha^T A^T)\alpha$$

$$=-(A\alpha)^T\alpha=-\beta^T\alpha=-(\alpha,\beta)$$

故 $(\alpha,\beta)=0$，所以 α 与 β 正交。

例5：设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 是 R^3 的两个基，其中 ,$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,$

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 。试求 $\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$ 分别在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 下的坐标。

解：由 $\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$ ，显然可知，α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为

$$(x_1,x_2,x_3)^T=(1,-2,3)^T$$

由题设可知，由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为：

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

于是，α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标 $(y_1,y_2,y_3)^T$ 能由坐标变换公式得到：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\3\end{pmatrix}$$

例6：设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T,(i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是n维实向量，且
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。已知$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

的非零解向量。试判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性。

解：由题设β 是线性方程组的解向量，即：$(\beta,\alpha_i)=\beta^T\alpha_i=0,(i=1,2,\cdots,n)$

设有一组数 $k_1,k_2,\cdots k_r,k_0$ ，使得：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_0\beta=0$

等式两边与向量 β 取内积，并由于 $\beta^T\alpha_i=0$ ，得到：

$$k_0\beta^T\beta=0$$

因β为非零向量，即有 $\beta^T\beta\neq 0$ ，故有 $k_0=0$ ，则上式成为：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

复旦大学

例6：设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T,(i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是n维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。已知 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

的非零解向量。试判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性。

解：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

由已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，则有：

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$$

于是有：$k_1=k_2=\cdots=k_r=k_0=0$

所以，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关。

例7 设B是秩为2的 5×4 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 的解向量，求 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基。

解：因为秩 $r(\mathbf{B})=2$ ，所以解空间的维数为 $n-r(\mathbf{B})=4-2=2$ 。又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是解空间的一组基。

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{3}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}(-4,2,10,-6)^{\mathrm{T}}$$

再单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}}$$

即是解空间的一个标准正交基。

例8：设 n阶矩阵A为正交矩阵。证明：

（1）对任意 $\alpha_1,\alpha_2 \in R^n$，令 $\beta_1 = A\alpha_1, \beta_2 = A\alpha_2$，则 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)$

（2）对任意 $\alpha \in R^n$，令 $\beta = A\alpha$，则 $\|\alpha\| = \|\beta\|$

证（1）：

$$(\beta_1,\beta_2) = \beta_1^T\beta_2 = (A\alpha_1)^T(A\alpha_2)$$

$$= \alpha_1^T(A^TA)\alpha_2 = \alpha_1^T\alpha_2 = (\alpha_1,\alpha_2)$$

（2）：

$$\|\beta\|^2 = (\beta,\beta) = (A\alpha, A\alpha)$$

$$= (A\alpha)^T(A\alpha) = \alpha^T(A^TA)\alpha$$

$$= \alpha^T\alpha = \|\alpha\|^2$$

由于向量长度都是非负数，所以有：$\|\beta\| = \|\alpha\|$

例9：证明：对于任意实数 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 均有：

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$$

分析：利用柯西不等式证明，$|(\alpha, \beta)| \le \|\alpha\| \|\beta\|$

证明：构造向量：

$$\alpha = (|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)^T \qquad \beta = (1, 1, \cdots, 1)^T$$

根据 $|\alpha^T \beta| \le \|\alpha\| \|\beta\|$ ，可得到：

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$$

例10：设 α,β 是R^n 中两个向量，证明：如果 α,β 正交，则对任意实数 k ，均有：$\|\alpha+k\beta\|\geq\|\alpha\|$

证明：由题设知，$\alpha^T\beta=0$

$$\begin{aligned}\|\alpha+k\beta\|^2&=(\alpha+k\beta)^T(\alpha+k\beta)\\&=\|\alpha\|^2+2k\alpha^T\beta+k^2\|\beta\|^2\\&=\|\alpha\|^2+k^2\|\beta\|^2\end{aligned}$$

故有：$\|\alpha+k\beta\|^2-\|\alpha\|^2=k^2\|\beta\|^2\geq 0$

所以，$\|\alpha+k\beta\|\geq\|\alpha\|$