线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

第四章　线性空间与欧氏空间

- 加法和数乘运算在很多数学、物理和工程领域中都广泛使用。
- 可进行这类线性运算的对象：数 、多项式、函数、向量、矩阵、方程…
- 而且，这类运算都遵循统一的代数法则 ，例如:加法的交换律、结合律，数乘的分配率…
- 这类运算和相关定理可否以归纳一下?
- 空间(space) 是现代数学最基本的概念之一：线性空间、巴那赫空间、内积空间、希尔伯特空间…
- 线性空间是最基础，也是应有最广泛的空间；同时，也是线性代数最基本的概念之一。

- 同学们熟悉的是我们生活的三维空间: 点、距离、运动… —— (对象)集合+变换 (运动)
- 在一定意义下， 线性代数就是研究线性空间和线性变换的学科…(比如：矩阵× 向量 —向量的运动)
- 因此，线性空间是对事物特征的抽象 —把实际问题看(抽象)作向量空间，
- 进而，通过研究向量空间来解决更广泛的实际问题.

§ 4.1 线性空间的概念

一、线性空间的定义

- 我们已熟知向量的运算规律

设 α 、 β 、 γ 是 n 元 向 量 (例 如 n=2) ， k、l 是数域 P 中任意的数

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ 加法交换律

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ 加法结合律

(3) $\alpha+0=\alpha$ 零向量

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$ 负向量

(5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ 数量乘法和加法

(6) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ *数量乘法和加法*

(7) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$ *数量乘法*

(8) $1\cdot\alpha = \alpha$ *数量乘法*

- 向量对数乘和加法两种基本运算是封闭的，
  例如二维、三维几何空间中的向量.
- 即n元向量运算之后的结果仍是 n 元向量.
- 满足上述8条运算定律的数学对象还有很多，
  例如： 实数、复数、矩阵，. . .
- 我们这类对象的共同属性抽象出来 — 线性空间

定义 4.1:设 V 是一个非空集合, P 为一数域,如果以下三个条件被满足,则称非空集合V 是数域 P 上的一个线性空间.

(I)在 V 的元素间给出一个法则,称为加法,使 V 中任意两个元素 α 与 β,总有唯一确定的一个元素 γ 与之对应,称为 α 与 β 的和,记作 $\gamma=\alpha+\beta$.

(II)在 V 的元素间给出一个法则,称为数量乘法,使数域 P 中任意一数 k 与V 中任意一个元素 α,在V 中总有唯一确定的一个元素 δ 与之对应,称为 k 与 α 的数量乘积,记作 $\delta=k\alpha$.

(III) 对于所给定的加法与数乘两种运算满足以下 8 种运算规律(公理)

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$　　(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+0=\alpha$　　(4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$　　(6) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(7) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$　　(8) $1\cdot\alpha=\alpha$

- 当 P 为实数域 R 时，则称此线性空间为实线性空间.

- 当 P 为复数域 R 时，则称此线性空间为复线性空间.

说明

1. 凡满足以上八条运算规律的加法及数乘运算，称为<u>线性运算</u>.

2 ．判别线性空间的方法：

一个集合，它如果

- 对于定义的线性运算不封闭(不满足闭包性)；
- 或者，不满足八条运算性质的任一条；

则不能构成线性空间.

例：数域 P 上的全部 n元向量所组成的集合，按 n 元向量的加法和数乘运算构成数域 P 上的线性空间，记作 P^n ，称为 n 元向量空间.

- P 取实数域 R ，n=3 ，则 R^3 就是大家熟悉的三维几何空间.

例： 实数域上全体 $m\times n$ 阶矩阵的集合，对矩阵的加法和数乘运算封闭，构成实数域上的线性空间，记作 $R^{m\times n}$.

$$\because A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}, \qquad \lambda A_{m\times n}=D_{m\times n},$$

- 另外，满足八条线性运算性质

$\therefore R^{m\times n}$是一个线性空间.

例：数域 P 上一元多项式的全体(包括零多项式)组成的集合，按多项式的加法和数与多项式的乘法，构成数域 P 中的线性空间，记作 P [x] .

- 多项式加法和数乘多项式满足线性运算规律：

例如次数不大于 n 的一元多项式：

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)$$

$$= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \quad \in P[x]_n$$

$$\lambda(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)$$

$$= (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in P[x]_n$$

- 另外，满足八条线性运算性质，
- 所以，构成数域 P 中的线性空间.

例：定义在区间 [a, b]上的全体实连续函数的全体所组成的集合，对函数的加法和数与函数的数量乘法，构成实数域上的线性空间，记为 C[a, b].

- $f(x) + g(x) = h(x)$，新函数 $h(x)$ 也是定义在区间 [a,b]上的实连续函数，即是C[a, b]的元素 —— 加法满足封闭性
- $k \cdot f(x) = d(x)$，新函数 $d(x)$ 也是定义在区间 [a,b]上的实连续函数，是C[a, b]的元素 —— 乘法满足封闭性
- 另外，满足八条线性运算性质,
- 所以，构成实数域上的线性空间.

- 由于线性空间与 n 元向量空间有许多本质上相同的性质，人们经常把线性空间称为<u>向量空间</u> **(vector space)**，
- 把线性空间中的元素称为<u>向量</u>.
- 此向量非彼向量.

练习：求一个以 $(1,2,-3,4)^{\mathrm{T}}+c(2,1,-4,3)^{\mathrm{T}}$ 为**全部**解的非齐次线性方程组。

➢法 3 (孙启唐同学) 由题意：
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2c \\ 2+1c \\ -3-4c \\ 4+3c \end{pmatrix}$$

➢ 注意到
$$\begin{cases} c = x_1/2 - 1/2 \\ c = x_2 - 2 \\ c = -x_3/4 - 3/4 \\ c = x_4/3 - 4/3 \end{cases}$$

由 $r_A = 3$ 和上式，方程组为：
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 4x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

二、子空间的概念（线性空间局部与整体的关系）

- 考虑过原点的平面，平面上所有向量对于加法和数量乘法构成一个线性空间.
- 一方面，这些向量是三维几何空间的一部分；另一方面，它们对于原来的运算构成一个线性空间.

☑ 定义 4.2：设 W 是数域 P 上线性空间 V 的一个子集，若满足条件：

(1) W 是非空的；

(2) 如果 $\alpha, \beta \in W$，则 $\alpha+\beta \in W$;

(3) 如果 $\alpha \in W$，$\lambda \in P$ 则 $\lambda\alpha \in W$;

那么 W 是 V 的一个子空间.

- 由定义，子空间非空且对加法和数乘封闭，
- 子空间满足8条公理 ← 从原线性空间继承.

例：几何空间R^3中，过原点的平面上所有向量构成几何空间R^3 的一个子空间.

例：齐次线性方程组全部解的集合是线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，称为该齐次线性方程组的<u>解空间</u>.

例： 在线性空间 V 中，由一个零元素组成的子集，是 V 的一个线性子空间，称它为

零子空间(null subspace)，记为 $\{0\}$.

- 线性空间 V 也是自身 的一个线性子空间.

✓ $\{0\}$和V 称为线性空间 V 的平凡子空间 (trivial subspaces).

✓ V 的其他线性子空间称为 V 的非平凡子空间 (或真子空间).

例：对于向量组 $S=\left\{\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ a\text{为任意实数}\right\}$

由于 $2\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a \\ 2 \end{bmatrix}\notin S,$

所以向量组 S 不是 R^2 的子空间.

- 本例也说明了运算封闭性的必要性，
- 本例也对加法运算不封闭.

例： $R^{2\times 3}$的下列子集是否构成子空间?为什么?

$$(1)\ W_1=\left\{\begin{pmatrix}1 & b & 0\\ 0 & c & d\end{pmatrix}\middle| b,c,d\in R\right\};$$

$$(2)\ W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\middle| a+b+c=0, a,b,c\in R\right\}.$$

解：(1)不构成子空间.

因为对 $A=B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in W_1$

有 $A+B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\notin W_1,$

即 $\mathbf{W_1}$ 对矩阵加法不封闭，不构成子空间.

$$(2)\ W_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\middle|\, a+b+c=0, a,b,c\in R\right\}.$$

- 显然，W_2 非空，

对任意

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0\\ 0 & 0 & c_1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & c_2\end{pmatrix}\in W_2$$

有 $\quad a_1+b_1+c_1=0, \quad a_2+b_2+c_2=0,$

于是 $$A+B=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0\\ 0 & 0 & c_1+c_2\end{pmatrix}$$

$$(2)\ W_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \middle| a+b+c=0, a,b,c\in R\right\}.$$

满足 $\left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right)+\left(c_1+c_2\right)=0,$

即 $A+B\in W_2$，对任意 $k\in R$ 有

$$kA=\begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & 0 & kc_1 \end{pmatrix}$$

且 $$ka_1+kb_1+kc_1=0,$$

即 $\boldsymbol{kA}\in \boldsymbol{W_2}$， 故 W_2 是 $R^{2\times 3}$ 的子空间 .

讨论：令 $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)^T \;\middle|\; x_1=x_2\right\}$

问 S 是否为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间？

解：由于 $\mathbf{x}=(1,1,0)^T$

所以向量组 S 非空；

- 再验证满足两个闭包性：

若 $\mathbf{x}=(a,a,b)^T$，$\mathbf{y}=(c,c,d)^T$ 为 S 中任意向量，

(1) $k\cdot\mathbf{x}=(ka,ka,kb)^T\in S$，

(2) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(a+c,a+c,b+d)^T\in S$，

- 故 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间.

☑ 生成元

- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是数域 P 上线性空间 V 中的一组向量，考虑这组向量所有可能的线性组合所组成的集合

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_l\alpha_l \quad (\lambda_i\in P, i=1,2,\cdots,l)$$

- 显然该集合非空，且对于 V 的两种线性运算封闭.

- 因此它也是V的一个子空间，称它为由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 生成/张成的子空间 **(generated/spanned)**，记为：

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)=\left\{\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i \middle| \lambda_i\in P\right\}$$

或 **Span** $$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)=\left\{\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i \middle| \lambda_i\in P\right\}$$

- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 称为此子空间的生成元 **(generator)**.

例： 在 R^3 中, 向量组 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

张成的子空间为： $\alpha e_1 + \beta e_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

- 可以验证 Span (e_1 , e_2) 是 R^3 的一个子空间.
- 该子空间几何上表示 x-y 平面内的三维空间向量.
- 若 x 是 R^3 中的非零向量，则 Span (x) 几何上表示？
- 一条过原点的直线.

- 布置习题　P 183:

1. （1）、(3)

2.

3.

4.

5.

7. （1）

§ 4.2 基、维数和坐标

在 R^n 中，线性无关的向量组可能最多由 r 个向量组成，而任意 r+1个向量都是线性相关的.

$\boxed{\text{设}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\text{线性相关}}$

α_4能用其余向量线性表示 ↓ 去掉α_4

$\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\text{线性相关}}$

α_1能用其余向量线性表示 ↓ 去掉α_1

$\boxed{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\text{ 线性无关}}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$能由$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$线性表示

问题：线性空间的重要特征——在线性空间中，最多能有多少线性无关的向量？

一、基与维数

☑ 定义 4.3：线性空间 V 中向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，如果它满足条件：

(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$线性无关；

(2) 线性空间 V 中任一向量α都可经$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$线性表示.

则称此向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是线性空间 V 的一个**基** (basis).

- 线性空间 V 中任一向量都可经基线性表示，即线性空间可由基张成，
- 所以基中的元素是构成 V 的基础 — basis.

由向量组的讨论，线性空间的基不是唯一的，但是, 每个基所含向量的个数是唯一的。

☑ 定义 4.4：如果线性空间 V 的一个基所含向量个数为 n, 则称 V 为 n 维空间.

- n 为线性空间 V 的维数， 记为 dim V = n.

- 当一个线性空间 V 中存在任意多个线性无关的向量时，就称V 是无限维的 (infinite-dimensional).

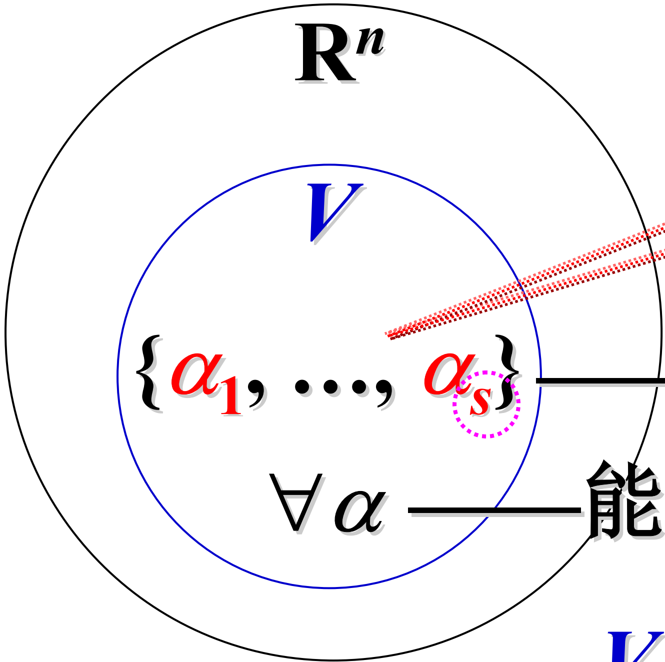
➢ 例如：所有多项式构成的空间是无限维的(why?)

n可任意取

- 如果线性空间 V 没有基, 那么V的维数为0.

- 零空间没有基, dim θ = 0.

基和维数



V的一组**基**

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$——线性无关

$\forall\alpha$——能由$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$线性表示

V的**维数**$\dim V = s$

例： 在 R^n 中,向量组 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \cdots, e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$

- 是线性无关的, 且是 R^n 的极大无关组,所以 $e_1, e_2, \cdots, e_n$
- 是 R^n 的一个基， 称为常用基/标准基 (standard basis of $\mathbf{R}^n$)
  - 从而 R^n 的维数是 n， dim R^n = n
  - R^n 中的任一向量 α 都可用标准基线性表示.

$$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$$

例: $V=\{(x, y, z)^{\mathrm{T}} \mid x+2y-3z=0\}$ ➢ 几何意义?

$= \{\underline{(-2y+3z, y, z)^{\mathrm{T}}} \mid y, z\in \mathbf{R}\}$

$$\left.\begin{aligned}&\begin{pmatrix}-2y+3z\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\text{线性无关}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\text{为}V\text{的一组基}, \dim V=2.$$

例：求向量组 $\alpha_1=[1,2,2]^T$, $\alpha_2=[1,0,-1]^T$, $\alpha_3=[2,2,1]^T$， $\alpha_4=[2,4,4]^T$，的基和维数.

解：将向量组构成矩阵 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&2&4\\2&-1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&-2&-2&0\\0&-3&-3&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2]{R_3-\frac{3}{2}R_2}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 可见 $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=2$,
- (α_1, α_2), (α_1, α_3) ，（α_2、α_3）等都是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_4)$ 的基。

- 对于线性方程组 AX=0, 方程组的一个基础解系即为其解空间一个基，所有解都可以用基础解系线性表示.
- 这些非零解向量 张成的线性空间叫做AX=0 的 解空间，也叫零空间(null space)—这个空间的基就是基础解系.
- 基础解系不是唯一的，方程组解空间的基也不是唯一的.
- 系数矩阵A满秩，解空间 就是 0 维的.

例：在二次一元多项式构成的线性空间$P[x]_2$中，向量组

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = x, \quad \varepsilon_3 = x^2$$

是$P[x]_2$中的一个基，故 $\dim P[x]_2 = 3$.

- 也是 $P[x]_2$ 的标准基.

二、向量的坐标

☑ 定义 4.5：设向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一个基，α 是 V 中任意一个向量，则有

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

称数组 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标(coordinates)，记为 $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

- 任意一个向量 α 在一个确定的基下的坐标是唯一的.

- 这是因为，若向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下有两个不同的的坐标

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \quad \text{和} \quad \alpha = x_1'\varepsilon_1 + x_2'\varepsilon_2 + \cdots + x_n'\varepsilon_n$$

- 两式相减得

$$(x_1 - x_1')\varepsilon_1 + (x_2 - x_2')\varepsilon_2 + \cdots + (x_n - x_n')\varepsilon_n = 0$$

- 由于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性无关的，故必须有

$$x_1 = x_1', x_2 = x_2', \cdots, x_n = x_n'$$

- 因此，坐标是唯一的.

例：在线性空间 R^3 中，设向量 $\alpha=[1,-1,7]^T$ 求 α 在下面两个基下的坐标.

（1）$e_1=[1,0,0]^T$, $e_2=[0,1,0]^T$, $e_3=[0,0,1]^T$ ；

（2）$\varepsilon_1=[1,0,0]^T$ ，$\varepsilon_2=[1,1,0]^T$ ，$\varepsilon_3=[1,1,1]^T$ ；

解：由于 $$\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(7)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=e_1-1e_2+7e_3$$

$$\therefore\alpha\text{在基}e_1,e_2,e_3\text{下的坐标为}[1,-1,7]^T$$

（2）设 α 在基 $\varepsilon_1=[1,0,0]^T$ ，$\varepsilon_2=[1,1,0]^T$ ，$\varepsilon_3=[1,1,1]^T$ 下的坐标为 $[x_1,x_2,x_3]^T$

于是有 $$\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\7\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

即 $$\begin{bmatrix}1\\-1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3\\x_3\end{bmatrix}$$

- 理解非齐次线性方程组？
- 唯一/无穷多解

解方程组得 $x_1=2, x_2=-8, x_3=7$

$\therefore \alpha$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $[2,-8,7]^T$

- 在线性空间中，基一般不是唯一的.
- 同一向量在不同的基下，坐标亦是不同的.

例： 对于向量 $\alpha=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}$

$$\alpha=3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \alpha=1\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$$

- α 在基$\{e_1, e_2, e_3\}$下，坐标为$(3,3,3)^T$. 　➢（尺）
- α 在基$\{3e_1, 3e_2, 3e_3\}$下，坐标为$(1,1,1)^T$. 　➢（米）
- 不同的基也可视作“不同度量单位、不同方向”的参考坐标系.

例： 对于$R^{2\times 2}$中的矩阵

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

有

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\\ k_3 & k_4\end{pmatrix}$$

因此

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad k_1=k_2=k_3=k_3=0,$$

即 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 线性无关 .

对于任意二阶实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in V,$$

有

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

因此 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 为 V 的一组基 .

而矩阵 A 在这组基下的坐标是

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T.$$

- E_{ij} 也是 $R^{2\times 2}$ 的标准基.
- 非标准基的例子~

例：在$P[x]_2$中，求多项式 $(x-5)^2$ ✓ 跳板：标准基

在基 $S=\{1, x-2, (x-2)^2\}$ 下的坐标 **X**.

解：在$P[x]_2$中，取标准基 1，x，x^2，可得

$$(x-5)^2 = 25-10x+x^2 = [1 \quad x \quad x^2]\begin{bmatrix} 25 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \quad x \quad x^2]\, b$$

基：$S = [1 \quad x \quad x^2]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad x \quad x^2]\, A$

- 计算方程组 **AX=b**，得 **X** = $(9, -6, 1)^T$, 即得多项式 $(x-5)^2$ 在基**S**下的坐标.

其他方法：泰勒展开，或凑系数

定理 4.2：设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 是 n 维线性空间 V 中 l 个向量，在 V 中取定一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，如果 α_j 在此基下的坐标为

$$[a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}]^T \quad (j = 1, 2, \cdots, l)$$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性相关的充分必要条件是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nl} \end{bmatrix}$$

的秩 $r_A < l$.

证明：　由已知 $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i \quad (j = 1,2,\cdots l)$

- 表示为矩阵形式，有

$$\alpha_j = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots l)$$

- l 个式子合并在一起，有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n][A]$$

- 考察等式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_l x_l = 0$$

➢ 即有 $\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_l\end{bmatrix}=0 \quad (2.2)$ ➢ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性相关.

➢ 代入 $\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\right]=\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right][A]$ 得

$$\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right][A]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_l\end{bmatrix}=0$$

➢ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性相关的充要条件是 $r_A<l$.

➢ 由于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性无关的，故只能是

$$[A]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_l\end{bmatrix}=0$$

➢ 由齐次线性方程组有非零解的充要条件，$r_A<l$.

➢ 又由于存在不全为零的数 $x_1, x_2, \ldots, x_l$ 使得 (2.2)成立

推论：定理 4.2 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性无关的充要条件是 $r_A = l$.

- ☑ 向量组的坐标是其线性相关性的全权代表

或：向量组的线性相关性与其在某组基下坐标的线性相关性相同。

例：在P[x]$_3$中，取向量组

$$f_1=1+2x+x^3\ ;\quad f_2=1+x+x^2$$

$$f_3=1+x^2\ ;\qquad f_4=1+3x+x^3$$

向量组是否线性相关?

解：在P[x]$_3$中，先取定一个基为 1， x， x^2， x^3 ，可得

$$[f_1,f_2,f_3,f_4]=[1,x,x^2,x^3]A$$

$$=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&0&3\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

- 计算 **A** 的秩，得 $r_A=3$ ， 由 定理**4.2,** 向量组线性相关**.**

例：验证向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

是$\boldsymbol{R}^3$的一个基，并求向量 $\alpha=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ 在该基下的坐标。

解：首先讨论向量组的线性相关性，因为

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是$\boldsymbol{R}^3$的一个基。其次求坐标

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha)=\begin{bmatrix}1&2&0&2\\1&1&0&1\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r}\begin{bmatrix}1&2&0&2\\0&-1&0&-1\\0&3&1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+3r}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1+2r_2\\ (-1)r}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

所以有 $\alpha=0\cdot\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，故向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为(0，1，-1).

☑ 矩阵行空间和列空间的概念(补充)

- 矩阵$A_{m\times n}$ 可以看作由行向量/列向量构成.

定义：由A 的行向量张成的子空间为A 的行空间(row space)；由A 的列向量张成的子空间为A 的列空间(column space).

例：设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

- A 的行空间为如下形式

$$\alpha\,(1,0,0)+\beta\,(0,1,0)=(\alpha,\beta,0)$$

- A 的列空间为 $\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$

- A 的行/列空间的维数为矩阵的秩.
- A 的行空间维数 = 列空间维数.

☑ 用行/列空间的概念研究线性方程组

➤ 方程组 $AX=b$ 可以写作

$$x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

➤ $C(A_{m\times n})=\{Ax \mid x\in \mathbf{R}^n\}\subseteq \mathbf{R}^m$

—— 系数矩阵 A 的 **列空间**

定理(线性方程组相容)：$AX=b$ 相容的充要条件是 b 在 A 的列空间中，或A的列空间包含 b .

- 若 A 的列向量组线性无关，它是列空间的一个基.
- 向量 b 在一个确定的基下的坐标是唯一的.
- 第三章的结论，方程组 $AX=b$ 只有唯一解.
- 如果把 b 换成零向量 θ， θ 必然在列空间中(平凡解).

定义:矩阵$A_{m\times n}$的零空间，又称核空间(null space)，是一组由下列公式定义的 n 维向量 x

- $N(A_{m\times n}) = \{x \mid Ax = \theta\} \subseteq \mathbf{R}^n$

  ——$Ax = \theta$ 的解空间，零空间

- 零空间就是 $Ax = 0$ 的全部解向量的集合 .
- A 的列向量组线性无关，r(A)=n，此时 A 的零空间只有一个 0 向量 .
- A 的列向量组线性相关，r(A)< n，$Ax = 0$ 的基础解系就是它的一组基.