线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

第二章　矩 阵

? 方程组系数行列式为零，克莱姆法则能否应用

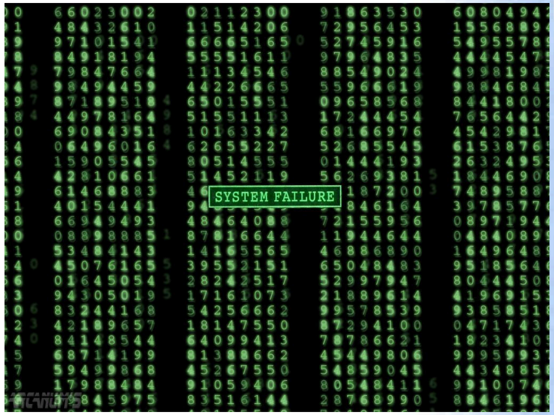
? 当方程个数与未知数个数不相等时，克莱姆法则能否应用

➢ **行列式解线性方程组的局限性 ⇨ 寻找新的工具**

□ 矩阵 — 基本概念 + 重要工具

- **数学研究中常用的工具**
- **广泛应用于工程技术各个领域**

- 矩阵这个词由英国数学家 J.Sylvester首先使用（1850）。

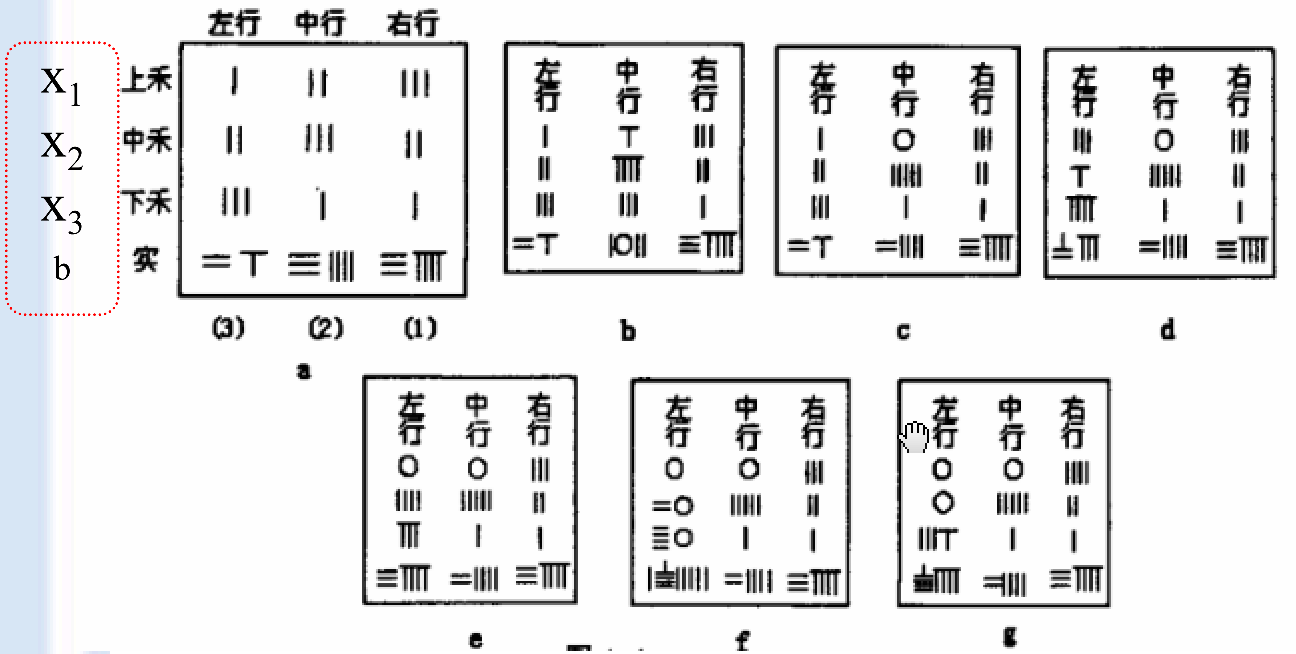


- 矩阵（Matrix）本意是子宫、母体—来自拉丁文的“母亲”(mater)。

- 矩阵理论的创始人—英国数学家凯莱(Cayley):矩阵的简化记法，理论体系，零矩阵、单位矩阵、矩阵的和、乘积、逆、转置、对称矩阵、凯莱－哈密顿定理等等

  - 重要贡献者：埃尔米特、拉普拉斯、范德蒙，弗罗贝尼乌斯、威尔斯特拉斯、雅可比等等。

- 中国：公元一世纪《九章算术》，用算筹解线性方程组 — 矩阵的雏形。



- 筹码排列 → 方程组系数的增广矩阵；
  筹算过程 → 矩阵的行列变换；
  筹算口诀 → 算法语言/程序(适合计算机做)；
  核心思想 →直除法消元，减少未知数数目.

- 系统总结了战国、秦、汉时期的数学成就。
- 风格：密切联系实际，以解决生产、生活中的数学问题为目的(无推理证明)。
- 第一章“方田”： 平面几何图形面积计算. …
- 第三章“衰分” （音cui）：比例分配、开平方/立方….
- 第八章“方程”：采用分离系数的方法表示线性方程组，相当于现在的矩阵；解线性方程组时使用的直除法，与矩阵的初等变换一致。
- 在西方，直到17世纪才由莱布尼兹提出完整的线性方程的解法法则。
- 九章算术中许多数学问题都是世界上记载最早的。

§ 2.1 矩阵的概念

- 一般线性代数方程组

方程个数≠未知数个数

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- 其解取决于系数 a_{ij} 和 常数项 b_i 及其排列位置
- 线性方程组的系数与常数项按位置可排为矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

◢ 对方程组的研究转化为对矩形数表的研究

◢ 直观、方便

- 矩阵的应用不仅限于解线性方程组

例： 某产品从 m 个产地 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ 运往 n 个销售地$F_1, F_2, \cdots, F_n$，不同地域间的产品流通量可以用矩形数表表示

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & \cdots & F_n \end{array} \\
\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{array} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 其中 c_{ij} 表示由 E_i 运往F_j 数的产品数量

定义2.1：数域 F 中的 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为数域 F 上的一个 m 行 n 列 矩阵（matrix），简称矩阵. 这 $m \times n$ 个数叫做矩阵的元素（element），其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素。

- 当元素都是实数时称为实矩阵（real matrix)
- 当元素都是复数时称为复矩阵（complex matrix)

主对角线

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

副对角线

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ 是一个 2×4 阶实矩阵

$$\begin{pmatrix} 3-0.7i & 6 & 1+2i \\ 2-2i & 2 & 2 \\ 2 & 0 & e^{2-3i} \end{pmatrix}$$ 是一个 3×3 阶复矩阵

- 矩阵通常用大写字母A，B，C，…来表示
- 强调矩阵的阶数，也可写为 $A_{m\times n}$ 或 $[a_{ij}]_{m\times n}$
- 当 $m=n$ 时，$A_{n\times n}$称为 n 阶方阵(square matrix)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 只有一行的矩阵 $A_{1\times n}=[a_1a_2\ldots a_n]$ 叫做

行矩阵(row matrix)、行向量 $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$

- 只有一列的矩阵叫做 **列矩阵**(column matrix) 、 **列向量**(column vector)

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- **向量**是既有大小又有方向的量 ⇨ 力、速度、加速度、电磁场等等都可以用向量表示。

- 元素都是零的矩阵称作**零矩阵**(zero matrix)，记作 **O**

不同阶的零矩阵是不相等的，如：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✓ 几种常用的特殊矩阵

1.**对角矩阵**（diagonal matrix）

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

记作： $diag\,[\lambda_1\,\lambda_2\cdots\lambda_n]$

2.**上三角矩阵**

（upper triangular matrix）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其中

$a_{ij} = 0,\ i > j$

3. **n 阶单位矩阵**（identity matrix）

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

阶行列式与矩阵的区别？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 矩阵是一个数表(有顺序有组织的数据块)
- 矩阵的行数和列数可以不同
- 行列式仅仅是对方阵的运算之一
- 行列式可看作一个算式或函数，可求得其值.

§ 2.2 矩阵的代数运算(矩阵代数)

- 两个矩阵 A、B，若行数、列数都相等，则称 A、B 是同型的.

- 矩阵相等：若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ 是同型的，且 $a_{ij}=b_{ij}$，则称 A 与 B 相等(equal)，记作 $A=B$

例如 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1+2 & 2+2 \end{bmatrix}$

一、矩阵的加减法与数量乘法

定义2.2：设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$，则矩阵 $C=[c_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$，称为矩阵 A 与 B 的和(sum)，记作 $C = A + B$，即

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意：只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

性质

设 A，B，C，O 都是 $m \times n$ 矩阵，则

(1) $A + B = B + A$（交换律）

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$（结合律）

(3) $A + O = O + A = A$

例：　求$C = A + B$：$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 7 & 0 & -40 \end{bmatrix}$

解：由定义有

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+(-6) & 1+3 & 3+21 \\ (-1)+7 & 3+0 & 8+(-40) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 6 & 3 & -32 \end{bmatrix}$$

练习：求 $C = A + B$： $A=\begin{bmatrix}12 & 3 & -5\\ 1 & -9 & 0\\ 3 & 6 & 8\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 8 & 9\\ 6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

解：由定义有

$$C=A+B=\begin{bmatrix}12+1 & 3+8 & -5+9\\ 1+6 & -9+5 & 0+4\\ 3+3 & 6+2 & 8+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}13 & 11 & 4\\ 7 & -4 & 4\\ 6 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

定义2.3：设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，则矩阵 $[-a_{ij}]_{m\times n}$ 称为 A 的负矩阵，记作 $-A$，即

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 根据矩阵加法的定义，显然有：$A+(-A)=0$
- 矩阵减法也可用负矩阵表示为加法：

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

定义2.4：设 k 是数域 F 中的任意数，k 与矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的每一个元素相乘，所构成的新矩阵记作 kA，称为矩阵 A 与 数 k 的数量乘积， 即

$$kA = Ak = [ka_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

数与矩阵相乘的运算简称数乘

- 数乘可以看作连加：$A+A+A=3A$

注意：数乘矩阵和数乘行列式不同！

数乘矩阵的性质

设 A，B都是 m×n 矩阵，k，l 为数，则

(1) $(k+l)A = kA + lA$ （分配律）

(2) $k(A+B) = kA + kB$ （分配律）

(3) $k(lA) = kl(A)$ （结合律）

(4) $1 \cdot A = A$；$0 \cdot A = O$；$(-1) \cdot A = -A$

练习： 求$C=3A-2B$. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ -3 & -4 & 0\end{bmatrix}$

解：由矩阵数乘与减法运算的定义

$$C=3A-2B=3\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ -3 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & -3 & 6\\ 0 & 12 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\ -6 & -8 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -3 & 2\\ 6 & 20 & 3\end{bmatrix}$$

❖ 布置习题

P. 94:

1.　　3.

4.　　5.　　7.

11.　　13.

二、矩阵的乘法

定义2.5：设 $A=[a_{ij}]_{m\times l}$, $B=[b_{ij}]_{l\times n}$, 则A与B的乘积定义为 $C=AB=[\,c_{ij}\,]_{m\times n}$，其元素

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}$$

$$(i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,n)$$

注意： 只有第一个矩阵的列数 l 等于第二个矩阵的行数 l 时，两个矩阵才能相乘.

- 乘积的行数等于矩阵 A 的行数
- 乘积的列数等于矩阵 B 的列数

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \times B_{kj}$$

例

$$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = (1\times 3+2\times 2+3\times 1) = (10).$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}(1 \quad 2) = \begin{pmatrix}2\times 1 & 2\times 2\\2\times 1 & 2\times 2\\3\times 1 & 3\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 4\\3 & 6\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = ?$$

不存在

例:
$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

➢ 可视作行向量与列向量逐一点积。

练习： $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}$ 求乘积**AB**和**BA**

解： $$A_{2\times3}B_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&1\\7&3\end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$B_{3\times2}A_{2\times3}=\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&12\\1&1&-3\\2&0&6\end{pmatrix}$$

➢ 一般地， $AB\neq BA$，矩阵乘法不满足交换律

也有例外，比如 A 为对角阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=BA.$$

例：设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$,

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

证明：（1） $AB=0$ （2） $AC=AD$

证明: $$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times(-2)+1\times 2 & 1\times 1+1\times(-1)\\ (-1)\times(-2)+(-1)\times 2 & (-1)\times 1+(-1)\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad =O$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$AD=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

故 $AC = AD$

比较：矩阵的乘法与数的乘法

- 在数的乘法中，若 $ab=0 \Rightarrow a=0$ 或 $b=0$

  在矩阵乘法中,若 $AB=O \nRightarrow A=O$ 或 $B=O$

  - 两个非零矩阵乘积可能为 O。

- 在数的乘法中，若 $ac=ad$，且 $a\neq 0 \Rightarrow c=d$

  (消去律成立)

在矩阵乘法中,若 $AC=AD$, 且 $A\neq O \nRightarrow C=D$

(消去律不一定成立)

矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C = A(BC)$ (结合律)

(2) $A(B+C) = AB + AC$ (分配律)

$(B+C)A = BA + CA$ (分配律)

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (其中 k 为常数)

例： 验证结合律 $(AB)C = A(BC)$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

解：

$$BC=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 0\end{bmatrix} \qquad A(BC)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 10\\ 1 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

故 $(AB)C = A(BC)$