线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

§ 4.4 子空间的交、和、直和及正交

一、子空间的交与和

定义 4.13 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 W_1，W_2 的交是

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha \in W_1, \quad \alpha \in W_2 \right\}$$

W_1，W_2 的和是

$$W_1 + W_2 = \left\{ \alpha + \beta \,\middle|\, \alpha \in W_1, \quad \beta \in W_2 \right\}$$

定理 4.9 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的子空间，则 $W_1 \cap W_2$，$W_1 + W_2$ 都是V 的子空间.

☒ 两子空间的并集未必为V的子空间

✓ W_1+W_2是V中含$W_1 \cup W_2$的最小子空间(量身定做)

☑ (升级为)性质： 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 与

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

是线性空间 V 中的两个向量组，则有

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) + L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s).$$

性质 设 W_1，W_2，W_3 是线性空间 V 的子空间，则它们满足交换律与结合律：

(1) 交换律： $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_1$

$$W_1 + W_2 = W_2 + W_1$$

(2) 结合律： $(W_1 \cap W_2) \cap W_3 = W_1 \cap (W_2 \cap W_3)$

$$(W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3)$$

定理4.10(维数公式) 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

或

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2).$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$$

例： 设 $R^{2\times 2}$ 的两个子空间为

$$W_1=\left\{A \;\middle|\; A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$W_2=L(B_1,B_2),\quad B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 将 W_1+W_2 表示为生成子空间;

(2) 求 W_1+W_2 的基和维数;

(3) 求 $W_1\cap W_2$ 的基和维数.

$$x_1=x_2-x_3+x_4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=t_1\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\gamma_1}+t_2\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\gamma_2}+t_3\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\gamma_3}$$

$\alpha_1=\gamma_1$, $\alpha_2=\gamma_1+\gamma_2$,

$\alpha_3=\gamma_2+\gamma_3$

解： 先将 W_1 表示为生成子空间

方程 $x_1-x_2+x_3-x_4=0$ 的基础解系为：

$$\alpha_1=[1\quad 1\quad 0\quad 0]^T,\alpha_2=[0\quad 1\quad 1\quad 0]^T,\alpha_3=[0\quad 0\quad 1\quad 1]^T$$

所以 W_1 的一个基是： $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$W_1=\left\{A \mid A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$$

$$W_2 = L(B_1, B_2),\quad B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 将 W_1+W_2 表示为生成子空间.

W_1 的一个基是： $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

于是 $:W_1 = L(A_1, A_2, A_3)$，由前页定理

$$W_1 + W_2 = L(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2) \quad \Leftarrow \text{生成子空间}$$

(2) 求 W_1+W_2 的基和维数.

思路：“全权代表” $\Rightarrow A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$在标准基下的坐标为

$$\alpha_1=[1\quad 1\quad 0\quad 0]^T, \alpha_2=[0\quad 1\quad 1\quad 0]^T, \alpha_3=[0\quad 0\quad 1\quad 1]^T$$

$$\beta_1=[1\quad 0\quad 2\quad 3]^T, \beta_2=[1\quad -1\quad 0\quad 1]^T$$

$$\alpha_1=[1\quad 1\quad 0\quad 0]^T,\alpha_2=[0\quad 1\quad 1\quad 0]^T,\alpha_3=[0\quad 0\quad 1\quad 1]^T$$

$$\beta_1=[1\quad 0\quad 2\quad 3]^T,\beta_2=[1\quad -1\quad 0\quad 1]^T$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$

- （2） W_1+W_2 的维数为 4，基为 A_1,A_2,A_3,B_2

（3）求 $W_1\cap W_2$ 的基和维数.

- 设矩阵 A $\in W_1\cap W_2$ ，则 A 可写为

$$A=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=l_1B_1+l_2B_2$$

即： $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3-l_1B_1-l_2B_2=0$

- 代入各个矩阵

➢ 设矩阵 $A \in W_1 \cap W_2$，A 写为

$$A = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 = l_1 B_1 + l_2 B_2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 - l_1 B_1 - l_2 B_2 = 0$$

$$\begin{cases} k_1 - l_1 - l_2 = 0 \\ k_1 + k_2 + l_2 = 0 \\ k_2 + k_3 - 2l_1 = 0 \\ k_3 - 3l_1 - l_2 = 0 \end{cases}$$

方程组通解为：$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = l_1 B_1 + l_2 B_2 = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

➢ (3) $W_1 \cap W_2$ 的维数为 1，基为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- 所以直和首先是和，然后满足向量分解的唯一性.

二、子空间的直和

- 目的：方便空间分解—能和能分，
  解决向量表示的唯一性问题

定义 4.14 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，如果和 W_1+W_2 中，每个向量 η 的分解式是唯一的(或者说都能唯一地表示为)

$$\eta = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (\alpha_1 \in W_1, \quad \alpha_2 \in W_2)$$

并非在
同一空间

那么称这个和是子空间 W_1，W_2 的直和（direct sum），记作

$$\boxed{W = W_1 \oplus W_2}$$

定理 4.11 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，W_1+W_2 是直和的充要条件是等式

$$\alpha_1+\alpha_2=0,\quad (\alpha_1\in W_1,\quad \alpha_2\in W_2)$$

只有在 α_1，α_2 全为零向量时才成立.

证明：(1) 充分性，设向量 $\eta \in W_1+W_2$

- 若向量 η 有两个分解式

$$\eta=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2\quad (\alpha_i\in W_i,\quad \beta_i\in W_i, i=1,2)$$

- 于是 $(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)=0$
- 其中 $(\alpha_i-\beta_i)\in W_i\quad (i=1,2)$ $(\alpha_i-\beta_i)=0$
- 由定理条件，零向量的分解式唯一： $\alpha_i=\beta_i$

- 即：对于任意向量 $\eta \in W_1+W_2$，分解式唯一
- 因此 W_1+W_2 是直和.

(2) 必要性：由定义，即和空间 W_1+W_2 中，如果每个向量的分解式唯一，则是直和；必要性显然成立.

若 $\alpha_1+\alpha_2=0$, $(\alpha_1 \in W_1, \quad \alpha_2 \in W_2)$

$\because W_1+W_2$是直和，而 0有分解式 $0=0+0$

$\therefore$ 必然有： $\alpha_1=0, \alpha_2=0.$

☑ 判断是否为直和，只需检验零向量分解的唯一性

推论1 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，W_1+W_2 是直和的充要条件是等式

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

证明：(1) 充分性，设和空间有零向量的表示方法

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (\alpha_i \in W_i, i = 1, 2)$$

- 则 $\alpha_1 = -\alpha_2 \in W_1 \cap W_2$
- 由假设，交空间只有一个零向量 故：$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
- 由零向量表示方法唯一 ⇨ W_1+W_2 是直和.

推论1 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，W_1+W_2 是直和的充要条件是等式

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

证明(2) 必要性：任取向量 $\alpha \in W_1 \cap W_2$，

因为零向量可表示为

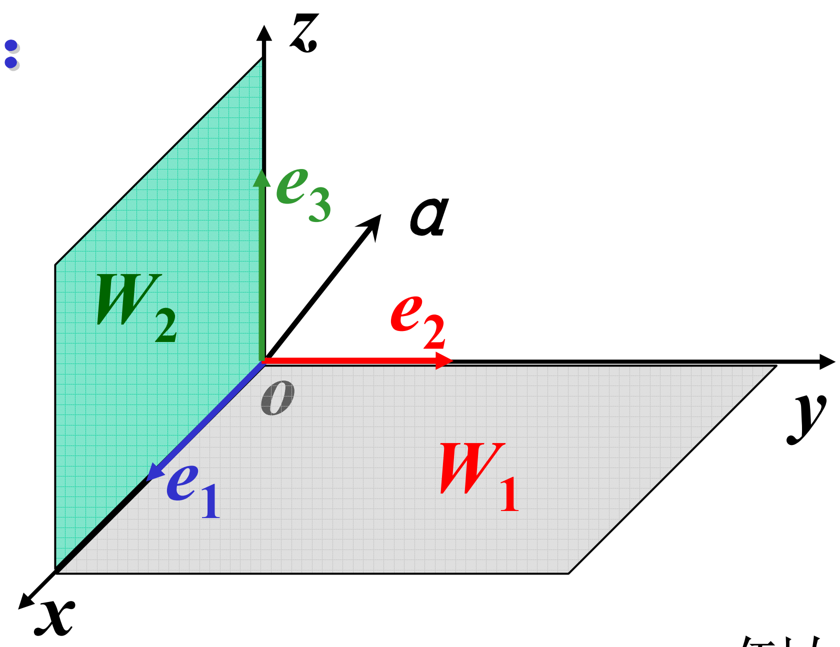
$$0 = \alpha + (-\alpha) \quad (\alpha \in W_1, -\alpha \in W_2)$$

- 已知和是直和 ⇨ 零向量的分解式唯一，

即：$\alpha = -\alpha = 0$

- 因而证明了 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

反例:



例如:

$W_1 \cap W_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ 零向量分解不唯一

$\Rightarrow W_1 + W_2$不是直和

$\Rightarrow \alpha$ 向量的分解不唯一

$$\alpha = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$= (\frac{1}{2}xe_1 + ye_2) + (\frac{1}{2}xe_1 + ze_3)$$

$$= (\frac{1}{3}xe_1 + ye_2) + (\frac{2}{3}xe_1 + ze_3)$$

➢ 我们已证明：

☑ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 是线性空间 V 中的两个向量组，则有

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) + L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$$
$$= L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s).$$

➢ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 是子空间 W_1 的基，$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 是子空间 W_2 的基

☑ 则 W_1+W_2 是直和的充要条件是

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$$

是 W_1+W_2 的基。

推论2 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，W_1+W_2 是直和的充要条件是：

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2) \qquad (4.4)$$

证明：若 W_1+W_2 是直和，则 $W_1 \cap W_2=\{0\}$

- 由维数公式得（4.4）成立
- 反之，由(4.4)成立，可知 $\dim W_1 \cap W_2=0$
- 即可推出 $\dim(W_1 \cap W_2)=\{0\}$
- 所以 W_1+W_2 是直和.

推论3 设 W_1，W_2 是 n 维线性空间 V 的子空间，如果：

$$\dim W_1 + \dim W_2 > n$$

则 W_1，W_2 必含有非零公共向量.

证明：因为，由

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) > n$$

- 又由于 $W_1 + W_2 \subseteq W$，$\dim(W_1 + W_2) \le \dim(W) = n$
- 即可推出 $\dim(W_1 \cap W_2) > 0$
- 所以 W_1，W_2 必含有非零公共向量.

总结定理4. 11及其3个推论：设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，则下列陈述彼此等价：

- 和W_1+W_2是直和；
- 和W_1+W_2中零向量的表法唯一，即若$\alpha_1+\alpha_2=\theta$，$\alpha_1\in W_1$，$\alpha_2\in W_2$，则$\alpha_1=\alpha_2=\theta$；
- $W_1\cap W_2=0$；
- $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

定义 4.15 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，如果

$$W_1 \oplus W_2 = V$$

那么称子空间 W_1 是 W_2 的补(余)子空间 **(complementary subspace)**.

- 由定义，显然 W_1 和 W_2 互为补子空间.

定理 4.12 设 W_1 是 n 维线性空间 V 的一个子空间，则一定存在 W_1 的补子空间 W_2，使得：

$$W_1 \oplus W_2 = V$$

证明：设 $\dim W_1 = s$，令 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 为 W_1 的一个基，我们把它扩充为 V 的一个基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_n$$

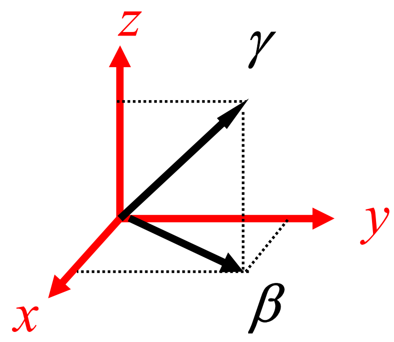
- 取 $W_2 = L(\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \ldots, \alpha_n)$，则有 $V = W_1 + W_2$，并且 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 故

$$V = W_1 \oplus W_2$$

- 于是证明了 W_2 就是所求的 W_1 的补子空间.

- V 的每一个子空间都有补空间.
- 但是，一个子空间的补空间未必唯一.
- 例如，在V_3中，设W是过原点O的一个平面，则任意一条经过点O，但不在W上的直线都是W的补空间.
- 显然，补空间与补集的概念不同.

例：在线性空间 R³ 中，显然有



$$R^3 = R_{xy} + R_{yz}$$

$$R_{xy} \cap R_{yz} = R_y \neq \{0\} \;;$$

所以R^3是R_{xy}与R_{yz}的和空间，但不是直和，又

$$R^3 = R_{xy} + R_z$$

且 $R_{xy} \cap R_z = \{0\};$

所以R^3是R_{xy}与R_z的直和，且二者互为补 子空间.

☑ 子空间的交、和、直和的概念可推广到多个子空间的情况：

$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_s = \bigcap_{i=1}^{s} W_i = \{\alpha \mid \alpha \in W_1, \cdots \alpha \in W_s\}$$

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_s = \sum_{i=1}^{s} W_i = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s \mid \alpha_i \in W_i, i = 1, \cdots, s\}$$

➢ 如果和空间每一个向量的分解式唯一：

$$\eta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s, \quad \{\alpha_i \in W_i, i = 1, \cdots, s\}$$

➢ 则称它为直和，记为：

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

二、子空间的正交

定义 4.16 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，如果对于任意的 $\alpha \in W_1$，$\beta \in W_2$，都有

$$(\alpha, \beta) = 0$$

那么称子空间 W_1 与 W_2 正交，记作

$$W_1 \perp W_2$$

- 若 V 中的一个向量 η 对 W_1 中任一向量 α 都满足

$$(\alpha, \eta) = 0$$

- 则称向量 η 与子空间 W_1 正交，记为 $\eta \perp W_1$.

- 因为只有零向量与自身正交，于是有

(1) 若 $W_1 \perp W_2$，则 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(2) 若 $\alpha \in W_1$，且 $\alpha \perp W_1$，则 $\alpha = 0$.

定理 4.13 若子空间 W_1，W_2，…，W_s 两两正交，则

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_s = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

证明：在每个子空间W_i中取一个正交基 $\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}$

- 由于子空间两两正交，所以如下向量组也是一个正交向量组

$$\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s}$$

- 且 $\sum W_i$ 中任一向量α可由此向量线性表示，故它可以作为 $\sum W_i$ 的一个基，则

$$\begin{aligned}\alpha=&(x_{11}\varepsilon_{11}+x_{12}\varepsilon_{12}+\cdots x_{1n_1}\varepsilon_{1n_1})+\\&(x_{21}\varepsilon_{21}+\cdots+x_{2n_2}\varepsilon_{2n_2})+\cdots\\&+(x_{s1}\varepsilon_{s1}+\cdots+x_{sn_s}\varepsilon_{sn_s})\\=&\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\quad\{\alpha_i\in W_i,i=1,\cdots,s\}\end{aligned}$$

- 由于表示式唯一，故和是直和

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_s = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

定义 4.17 设 W_1，W_2 是线性空间 V 的两个子空间，如果 $W_2 \perp W_1$，且 $W_1 + W_2 = V$，那么称子空间 W_1 是 W_2 的正交补.

- 显然正交补是相互的.

例：设 **W** 是齐次线性方程组的**解空间**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

则系数矩阵**行向量**的生成子空间 L($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$) 是 W 的正交补.

证明： 设 X= $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ 是 W 中的任一解向量，显然

$$(\alpha_i, X) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0. \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

- 对任一向量 α ∈ L($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$) ，有

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m \qquad (\alpha, X) = 0$$

- 即 $W \perp L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$

- 设 $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r$
- 则 $\dim W = n-r$

又因为 $W \subseteq R^n$, $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \subseteq R^n$ (行向量)

- 且 $\dim W + \dim L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = n = \dim R^n$
- W 的基向量 ∪ $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的基向量必然是 R^n 的基向量
- 即 $W + L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = R^n$

✓ 由定义知 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 是 W 的正交补.

定理 4.14 n 维欧氏空间 V 的每一个子空间 W 都存在**唯一的正交补**，记为 $W^{\perp}$. (证明略)

推论 $W^{\perp}$ 是所有与 W 正交的向量所组成.

- 若W是 n 维欧氏空间 V 的一个子空间，则

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

- 因此，对任一向量 α ∈ V，都可以被唯一地分解成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (\alpha_1 \in W, \ \alpha_2 \in W^{\perp})$$

- 我们称 α_1 为 α 在子空间 W 上的**内射影**(或正射影).

例：设 W 是欧氏空间 R^5 的一个子空间，已知 $W=L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，其中

$\alpha_1=(1, 1, 1, 2, 1)^T$， $\alpha_2=(1, 0, 0, 1, -2)^T$，

$\alpha_3=(2, 1, -1, 0, 2)^T$，

求$W^{\perp}$与向量 $\alpha=(3, -7, 2, 1, 8)^T$ 在W上的正投影.

解：由定理4. 14推论， $W^{\perp}$中任一向量 $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ 与向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交， 由此得到齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_1+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_5=0 \end{cases}$$

- 其基础解系为

$\alpha_4=(2, -1, 3, -2, 0)^T$， $\alpha_5=(4, -9, 3, 0, 2)^T$

求$W^{\perp}$与向量$\alpha = (3, -7, 2, 1, 8)^T$在$W$上的正投影.

- 则 α_4，α_5构成 $W^{\perp}$ 的一个基，即$W^{\perp} = L(\alpha_4, \alpha_5)$
- 现在，求 α 在W上的正射影，将α用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性表示，得

$$\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_4 + \alpha_5$$

- 其中

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 \in W,$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_4 + \alpha_5 \in W^{\perp}$$

- 故 α 在W上的正射影为

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = [0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 6]^T$$

本章小结

A. 概念与理论：

(1) 线性空间，子空间的定义

(2) 线性空间，子空间常用基本性质

(3) 基、维数和坐标的概念

(4) 过渡矩阵、度量矩阵、坐标变换公式

(5) 欧几里得空间，内积、范数、夹角、标准正交基

(6) 子空间的交、和、直和及正交.

B. 计算方法：

(1) 判断向量组是否构成线性空间

(2) 给定基求向量坐标，基变换、坐标变换

(3) 欧氏空间内的各种运算

(4) 施密特正交化过程.