线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

证明：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right)\bullet\prod_{1\le j<i\le 4}\left(a_i-a_j\right)$$

分析：此行列式与范德蒙行列式很相似，但缺少 a 的3次幂。
因此可用加边法添上一行一列，使其成为范德蒙行列式。
注意，加上的行列先不要随意定为零。

证明：令

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & x^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & x^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

行列式A的第4行第5列元素 x^3 的代数余子式

$$A_{45}=(-1)^{(4+5)}D$$

而行列式

$$A=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\prod_{1\le i<j\le 4}(a_i-a_j)$$

行列式A按照第4行展开后x^3项的系数就是A_{45}

$$A_{45}=(-a_1-a_2-a_3-a_4)\prod_{1\le i<j\le 4}(a_i-a_j)$$

所以

$$D=\left(\sum_{i=1}^{4}a_i\right)\bullet\prod_{1\le j<i\le 4}\left(a_i-a_j\right)$$

(5) 分块矩阵的求逆

- 利用矩阵分块，可将高阶矩阵求逆转化为低价矩阵求逆

- 形成分块矩阵方程组
  (分块矩阵乘积运算、矩阵求逆运算)

§ 2.5 常用的特殊矩阵

一、对角阵与准对角阵

对角矩阵（diagonal matrix） $\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$

纯量(标量) 矩阵（scalar matrix） $\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix} = kE$

对角阵的性质

设 $A = diag[a_1, a_2, \dots, a_n]$， $B = diag[b_1, b_2, \dots, b_n]$， 则

(1) $|A| = a_1 a_2 \dots a_n$

(2) $(A \pm B) = diag[a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n]$

(3) $kA = diag[ka_1, ka_2, \dots, ka_n]$

(4) $AB = BA = diag[a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n]$

(5) $A^m = diag[a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m]$

(6) 若 A 可逆，$A^{-1} = diag[a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}]$

定义2.11 准对角阵

- 方阵除主对角线上的子块外，其余子块都为*0*，且主对角线的子块均为方阵，

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix} \quad (A_i\text{都是方阵，} \mathrm{i}=1,2,\ldots,s)$$

记作 $diag\,[A_1, A_2, \cdots, A_s]$

准对角阵的性质(与对角阵类似)

设 $A = diag[A_1, A_2, \dots, A_n]$，$B= diag[B_1, B_2, \dots, B_n]$， 则

(1) $|A| = |A_1|\,|A_2| \dots |A_n|$

(2) $(A \pm B) = diag[A_1 \pm B_1, A_2 \pm B_2, \dots, A_n \pm B_n]$

(3) $kA = diag[kA_1, kA_2, \dots, kA_n]$

(4) $AB = diag[A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n]$

(5) $A^m = diag[A_1^m, A_2^m, \dots, A_n^m]$

(6) 若 A 及其每一子块均可逆，$A^{-1} = diag[A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_n^{-1}]$

三、对称矩阵与反对称矩阵

定义2.13：设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, 若 $a_{ij}=a_{ji}$, 或 $A^T=A$, 则称 A 为对称矩阵(symmetric matrix)

对称矩阵的性质

(1) 对称矩阵的和、数量乘积、方幂，仍为对称矩阵.

(2) 若对称矩阵可逆，其逆矩阵仍为对称矩阵.

(3) 矩阵乘积 AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$

■ 若方阵A满足 $A^T = -A$，即 $a_{ji} = -a_{ij}$，则称A为反对称矩阵。

➢ 因为$a_{ii} = - a_{ii}$， $a_{ii} = 0\ (i = 1, 2, \dots n)$，即反对称矩阵对角线元素全为零。

四、正交矩阵

定义2.13：若 n 阶方阵 A 满足

$$AA^T = A^TA = E$$

则称 A 为正交矩阵(**orthogonal matrix**)

- 据定义易得 A 为正交矩阵的三种充要条件：

(1) $A^{-1}=A^T$ $\quad AA^T=E \quad A^TA=E$

(2) 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, 有 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$ 或 $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$

(3) 设 A 按列分块为 $A=[\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n]$, 有

$$\alpha_i^T\alpha_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

- 即A的行向量（列向量）之间相互正交。

正交矩阵的例子

1×1 矩阵 [1] 和 [−1]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 恒等变换；

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ 相对 x 轴镜面反射；

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 第一类初等变换，试一下：

- A 的行（列）向量组是单位正交向量组。

验证矩阵 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 是正交矩阵。

解：

$$AA^T=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同理，$A^TA = E$；根据定义，A 是正交矩阵。

正交矩阵的性质

(1) 两个正交矩阵的乘积还是正交矩阵

(2) 正交矩阵的逆矩阵也是正交矩阵

(3) 正交矩阵的转置矩阵也是正交矩阵

(4) 正交矩阵 A 的行列式 det A=1 或 -1

(1) 两个正交矩阵A、B的乘积AB还是正交矩阵

证明：$(AB)^{T}(AB)=B^{T}A^{T}AB=B^{T}B=E$

$(AB)(AB)^{T}=ABB^{T}A^{T}=AA^{T}=E$

- 故 AB 还是正交矩阵.

(4) 正交矩阵 A 的行列式 det A=1 或 -1

证明： A是正交矩阵 $\rightarrow A^{T}A=E$ ➢ $|A^{T}A|=|E|=1$

➢ $|A|^{2}=1$ ➢ 故 det A=1 或 -1.

- 当 | A | = 1时，称A 为第一类正交变换 (旋转)；
- 当 | A | = -1时，称A 为第二类正交变换(镜面反射+旋转).

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$$

练习 :设A、B都是正交矩阵，证明 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 也是正交矩阵.

证明: $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & O \\ O & B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}$

故 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 是正交矩阵。

➢ 准对角阵的性质

正交矩阵的重要性

- 正交变换：保持图形形状和大小不变的几何变换
- 许多重要的矩阵分解都涉及到正交矩阵

➢ QR分解：　$M = QR$，Q正交，R上三角

➢ 奇异值分解(SVD)：

$$M = U\Sigma V^T,\ U和V正交，\Sigma非负对角$$

➢ 谱分解：$S = Q\Lambda Q^T$，S对称，Q正交，Λ对角

在信号分析、图像处理、数值计算等领域大量应用 (Google) .

§ 2.6 矩阵的初等变换与初等矩阵

- 目的： 将矩阵变换为简单形式
- 应用：解线性方程组/求逆矩阵/矩阵性质研究
- 给定一个线性方程组：$Ax=b$，能否不使用行运算求解？
- 通过矩阵乘法，(1) $A^{-1}Ax= A^{-1}b$
- 更好(常用) （2） $Ax = b$ 两端同时乘以系列特殊矩阵，得到一个等价的行梯形方程组，以及一个重要的矩阵分解 — LU 分解。

一、矩阵的初等变换与矩阵的标准形

定义2.15：矩阵的初等行(列)变换指以下三种变换：

（1）互换矩阵中任意两行（列）的位置；

（2）以一个非零数乘矩阵的某一行(列)；

（3）将矩阵的某一行（列）乘以一个常数加到另一行（列）对应元素上.

- 初等行变换与列变换统称为矩阵的初等变换(变形)(**elementary transformation**)

(1) $R_i \leftrightarrow R_j$ (Row switching)

- 矩阵初等行变换的记号：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{ij}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 注意：用 $\rightarrow$ 是因为经初等变换所得矩阵不等于原矩阵.

(2) $k \times R_i$ (Row multiplication)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{k R_i} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(3) $R_i + k\,R_j$ (Row addition)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_i + kR_j} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 相应地，矩阵的初等列变换记为：

  C_{ij}, kC_i, $C_i + kC_j$

- 初等变换的逆变换仍为初等变换，且 变换类型相同.

$R_i \leftrightarrow R_j$ 逆变换 $R_i \leftrightarrow R_j$;

$R_i \times k$ 逆变换 $R_i \times (\frac{1}{k})$ 或 $R_i \div k$;

$R_i + k R_j$ 逆变换 $R_i + (-k)R_j$ 或 $R_i - kR_j$.

□ 矩阵的标准形

定理 2.3:任意一个非零矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, 可经初等变换化为下面形式的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [1\le r\le \min(m,n)]$$

➢ $E+O$

➢ 该矩阵称为矩阵 A 的标准形(*standard form*).

➢ 所有与矩阵 A 等价的矩阵组成的集合，称为等价类，标准形是这个类中最简单的矩阵：

证明：因为 $A \neq 0$，不妨假设 $a_{11} \neq 0$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a_{11}}R_1} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\cdots,m]{R_i - a_{i1}R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[j=2,3,\cdots,n]{C_j - b_{1j}C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \overset{\text{记}}{=\!=} B$$

令 $A_1 = \begin{bmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ •如果 $A_1 = O$ ，则 B 已是标准形（ $E + O$ ）;

•如果 $A_1 \neq 0$，不妨设$b_{22} \neq 0$ 。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{b_{22}}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[C_j - C_{2j}C_2,\ j=2,3,\cdots,n]{R_i - b_{i2}R_2,\ i=3,4,\cdots,m}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \cdots$$

➢ 重复上述步骤，必可得到矩阵的标准形.

例:将矩阵 A 化为标准形

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{C_{34}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&4\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{C_4+C_1+C_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&4\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[3C_2+3C_3]{C_5-4C_1-}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_3&0\\0&0\end{bmatrix}$$

练习:将矩阵 A 化为标准形

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-2R_1]{\substack{R_4-R_2\\R_2-R_1-R_3}}\begin{bmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&-1&2&-2\\0&0&-3&6&-6\\0&0&-1&2&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_4-R_2\\R_3-3R_2}}\begin{bmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&-1&2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{(-1)\cdot R_2\\ \vdots}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}E_2&0\\0&0\end{bmatrix}$$

二、初等矩阵

<u>定义2.16</u>：对单位矩阵 E 实施一次初等变换后得到的矩阵称为<u>初等矩阵</u>(elementary matrix).

➢ 三种初等变换对应的初等矩阵分别为：

（1）互换单位阵中任意两行（列）的位置；

$$E \xrightarrow{R_{ij}} \left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\xlongequal{\text{记}} F_{ij}$$

（2）以一个非零数乘以单位阵的某一行(列)；

$$E \xrightarrow[\text{或}\,kC_i]{kR_i} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} i\text{行} \overset{\text{记}}{=\!=} F_i(k)$$

（3）将**单位阵**的某一行（列）乘以一个常数加到另一行（列）对应元素上.

$$
E \xrightarrow[\text{或}C_j + kC_i]{R_i + kR_j}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & \cdots & k & & \\
& & & \ddots & \vdots & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\overset{\text{记}}{=\!=} F_{ij}(k)
$$

➢ **初等矩阵都是可逆矩阵，且其逆阵仍是初等矩阵：**

$$
F_{ij}^{-1} = F_{ij}, \qquad F_i^{-1}(k) = F_i\left(\frac{1}{k}\right), \qquad F_{ij}^{-1}(k) = F_{ij}(-k),
$$

例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

初等矩阵与初等变换有什么关系呢？

定理 2.4：对矩阵$A_{m\times n}$ 实施一次初等行变换，相当于对A 左乘一个相应的 m 阶初等矩阵；

对$A_{m\times n}$ 实施一次初等列变换，相当于对A 右乘一个相应的n 阶初等矩阵.

证明：将 $A_{m\times n}$按行分块，则 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$,

（1）对A 左乘一个m 阶初等矩阵 F_{ij}，得

$$F_{ij}A=\begin{bmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&\cdots&\cdots&\cdots&1&&&\\&&&\vdots&1&&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&&1&\vdots&&&\\&&&1&\cdots&\cdots&\cdots&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{array}{r} \\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}$$

- **显然，这相当对 A实施第一种初等行变换：**

$$A\xrightarrow{R_{ij}}$$

(1) 例 $A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

$$F_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

(1) 例 $A \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

$$A\,F_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$：左乘F_{12}

$C_1 \leftrightarrow C_2$：右乘F_{12}

（2）对**A** 左乘一个**m** 阶初等矩阵 $F_i(k)$，得

$$F_i(k)A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\\\\\i\text{行}\\\\\\\\\end{array}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_i\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\k\alpha_i\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\\\i\text{行}\\\\\\\end{array}$$

➤ 显然，这相当对 A实施第二种初等行变换：

$$A\xrightarrow{kR_i}$$

(2) 例 $F_3(3)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A\,F_3(3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

（3）对A 左乘一个m 阶初等矩阵 F_{ij}（k），得

$$F_{ij}(k)A=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{array}{r}\\\\i\text{行}\\\\j\text{行}\\\\\\\end{array}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_i\\\vdots\\\alpha_j\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_i+k\alpha_j\\\vdots\\\alpha_j\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\i\text{行}\\\\j\text{行}\\\\\\\end{array}$$

- 显然，这相当对 A实施第三种初等行变换：

$$A\xrightarrow{R_i+kR_j}$$

(3) 例 $F_{13}(3)\,A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+3a_{31}&a_{12}+3a_{32}&a_{13}+3a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$A\,F_{13}(3)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&3a_{11}+a_{13}\\a_{21}&a_{22}&3a_{21}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&3a_{31}+a_{33}\end{pmatrix}$$

- 初等矩阵：左乘行变，右乘列变。

行左列右

推论：任意一个非零矩阵 $A_{m\times n}$ 必存在m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使

$$A = P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

其中 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 为 A 的标准形.

证明：由定理 2.3 知 $A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

➢ 由定理 2.4，初等变换 ⇔ 左乘/右乘初等矩阵；故必存在(m 阶)初等矩阵 P_1，P_2，… , P_s 及(n 阶)初等矩阵 Q_1，Q_2，… , Q_t，使

$$P_s \cdots P_2 P_1\ A\ Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_s \cdots P_2 P_1 \, A \, Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 于是

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1},$$

- 记

$$P = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}, \qquad Q = Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1},$$

- **显然 P 为m 阶可逆矩阵， Q 为 n 阶可逆矩阵，且**

$$A = P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

三、用初等变换求逆矩阵

定理 2.5：设阵 A 为 n 阶可逆矩阵，则有

（1）A 的标准形为单位矩阵，

（2）A 总可以表示为初等矩阵的乘积，

（3）A 仅经初等行变换可化为单位矩阵.

证明：(1) 由(6.1)式得 $|A| = |P|\begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}|Q|$

➢ A 为 n 阶可逆矩阵，所以$|A|\neq 0$，必有 $r = n$，即 A的标准形为 E_n. 否则?

(2) 由(6.2)式得，存在n 阶初等矩阵P_1，P_2，…，P_s 及 Q_1，Q_2，…，Q_t，使

$$A = P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}\left[\mathrm{E}_n\right]Q_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$$

$$= P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}\,Q_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1} \qquad (6.3)$$

$$\overset{\text{记}}{=\!=} F_1F_2\cdots F_m \quad (m = s + t),$$

- **因初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵，因此 F_1，F_2， ... , F_m 都是初等矩阵；所以可逆矩阵A 可表示为初等矩阵的乘积.**

(3) 由(6.3)式得 $Q_1Q_2\cdots Q_t\, P_s\cdots P_2P_1\, A = E$

- **其中 P_1，P_2， ... , P_s 及 Q_1，Q_2， ... , Q_t 都是初等矩阵，根据定理 2.4, 上式相当于**

$$A \xrightarrow{\text{经若干初等 行变换}} \mathrm{E}, \quad \text{证毕.}$$

✓ 同理，可逆矩阵仅通过列初等变换，可化为单位阵.

☑ 利用初等变换求逆矩阵—逆矩阵的计算方法(2)

➢ 设A 为 可逆矩阵，则A 可经初等行变换化为单位矩阵，即存在初等矩阵 S_1，S_2，…，S_m 使

$$S_m \cdots S_2 S_1 \ A = E \quad (i)$$

➢ 方程两边同时右乘 A^{-1}，得 $S_m \cdots S_2 S_1 \ E = A^{-1} \quad (ii)$

➢ 两式合并 $S_m \cdots S_2 S_1 [A, E] = [E, A^{-1}]$

$$\text{或}: S_m \cdots S_2 S_1 [A \vdots E] = A^{-1}[A \vdots E] = [A^{-1}A \vdots A^{-1}E] = [E \vdots A^{-1}]$$

➢ 这相当于 $[A, E] \xrightarrow{\text{经若干次初等行变换}} [E, A^{-1}]$

- 用初等变换求逆矩阵的方法：对 $[A, E]$ 实施初等行变换，当子块 A 化为单位阵的同时，子块 E 化为 A^{-1}.

✓ 同理可得 $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{经若干次初等 列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$

- 相较于法1： $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^{*}$ 简便、实用

- 矩阵阶数较高时，初等变换法的优势更明显。

注意：求逆时, 若用初等行变换必须坚持始 终, 不能夹杂任何列变换；反之亦然.

例： **设** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{bmatrix}$ **求** A^{-1}

解：

$$[A \mid E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-5R_1]{R_2-3R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -14 & 6 & -5 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_3]{R_3-7R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1\end{array}\right]\xrightarrow[R_2-R_3]{R_1+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -15 & 7 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 13 & -6 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2]{R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1\end{array}\right]=\left[E \mid A^{-1}\right]\quad \therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ -16 & 7 & -1\end{bmatrix}$$

练习： 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$ 求 A^{-1}

答案： $$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -1.5 & -3 & 2.5\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

例：将矩阵A表示成初等矩阵的乘积。 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

解：$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-3R_1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ $\quad F_{21}(-3)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad F_2(-\frac{1}{2})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_1-2R_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad F_{12}(-2)=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore$ 由(6.3) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

例：将矩阵A表示成初等矩阵的乘积 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$

解：$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$ $F_{21}(-2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ $F_{23}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$F_2(-1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $F_3(-1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

$$\because \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\mathrm{A}=E$$

$$\therefore \mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$