线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

设$A\in \mathrm{F}^{m\times n}, B\in \mathrm{F}^{n\times m}$,求证：如果$E-AB$可逆，则$E-BA$可逆，并求之.

证明1：已知 $(E-AB)$ 可逆，设 $C=(E-AB)^{-1}$

- 则 $(E-AB)C=E$
- $BA=BEA=B[(E-AB)C]A$

  $=BCAE-BABCA$
- $BCAE-BABCA-BA=O$
- $EBCA-BABCA-BA=O$
- $(E-BA)BCA-BA=O$
- $(E-BA)BCA+(E-BA)=E$
- $(E-BA)(BCA+E)=E$
- 所以 $(E-BA)^{-1}=BCA+E=B(E-AB)^{-1}A+E$

证明2： 由$(E-AB)$可逆知$\left|E-AB\right|\neq 0$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} E & \\ & E-AB \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\Rightarrow rank\begin{pmatrix} E & O \\ O & E-AB \end{pmatrix}\xleftarrow[r2-r1\cdot A]{c2-c1\cdot B} rank\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} E-BA & O \\ A & E \end{pmatrix}\xleftarrow{r1-B\cdot r2} rank\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} E-BA & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

所以，$(E-BA)$也可逆.

✓ 求逆：利用分块对角阵和分块初等矩阵求逆的性质，上述推导去掉“rank”，从后往前，依次改写为 左/右 乘分块初等矩阵的形式：

$$\boxed{rank\begin{pmatrix} E-BA & O \\ O & E \end{pmatrix}} \quad \boxed{rank\begin{pmatrix} E-BA & O \\ A & E \end{pmatrix}}$$

⇦ 列变换消 A

$$\begin{pmatrix} E-BA & O \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E-BA & O \\ A & E \end{pmatrix}\begin{bmatrix} E & \mathrm{O} \\ -\mathrm{A} & E \end{bmatrix}$$

行变换消 B ⇦ $\boxed{rank\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} E-BA & O \\ A & E \end{pmatrix}\begin{bmatrix} E & \mathrm{O} \\ -\mathrm{A} & E \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} E & -B \\ \mathrm{O} & E \end{bmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}\right\}\begin{bmatrix} E & \mathrm{O} \\ -\mathrm{A} & E \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E-BA & O \\ A & E \end{pmatrix}\begin{bmatrix} E & \mathrm{O} \\ -\mathrm{A} & E \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} E & -B \\ \mathrm{O} & E \end{bmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}\right\}\begin{bmatrix} E & \mathrm{O} \\ -\mathrm{A} & E \end{bmatrix}$$

行变消 A 、列变消B $rank\begin{pmatrix} E & O \\ O & E-AB \end{pmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} E & -\mathrm{B} \\ \mathrm{O} & E \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} E & 0 \\ \mathrm{A} & E \end{bmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ O & E-AB \end{pmatrix}\begin{bmatrix} E & \mathrm{B} \\ \mathrm{O} & E \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} E & \mathrm{O} \\ -\mathrm{A} & E \end{bmatrix}$$

- 因此

$$\begin{pmatrix} E-BA & O \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & -B \\ O & E \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ O & E-AB \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & B \\ O & E \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} E & O \\ -A & E \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} E-BA & O \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (E-BA)^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E & O \\ -A & E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E & B \\ O & E \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & O \\ O & E-AB \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E & -B \\ O & E \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} E & O \\ A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -B \\ O & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ O & (E-AB)^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & B \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E+B(E-AB)^{-1}A & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

林士翰： (四)20. 设： $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \ (m < n)$ 是n维欧氏空间V中的一组向量，而

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m) \end{vmatrix}$$

求证： $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关的充要条件是格拉姆行列式 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \neq 0$

证明1：Gram 方阵的性质： （1）对称 ← 内积的对称性

（2）向量组线性无关时 G 正定

$$设\ \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + , \cdots , + x_m\alpha_m$$

$$(\alpha, \alpha) = X^T G X > 0$$

- 正定矩阵顺序主子式 > 0 ⇨ |G| >0

证2：必要性—反证法，假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关的条件下 |G| =0 ，则如下齐次线性方程组有非零解

$$GX = 0; \quad X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$$

则向量： $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + , \cdots, + x_m\alpha_m \neq 0$

则内积 ： $(\alpha, \alpha) > 0 \quad (\neq 0)$

由格拉姆矩阵的定义 ：

$$(\alpha, \alpha) = X^T G X > \mathbf{0}$$

但是由假设 ： $GX = 0 \quad \Rightarrow$ 矛盾

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关则 $|\mathbf{G}| \neq \mathbf{0}$

证2：充分条件—反证法，已知|G|≠0，假设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关，不妨设

$$\alpha_m = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ,\cdots, + k_{m-1}\alpha_{m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} k_i\alpha_i$$

$$\text{则格拉姆行列式}\quad |G| = \begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\sum_{i=1}^{m-1}k_i\alpha_i) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\sum_{i=1}^{m-1}k_i\alpha_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\sum_{i=1}^{m-1}k_i\alpha_i) \end{vmatrix}$$

$$\text{由内积的性质} = \begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & \sum_{i=1}^{m-1}k_i(\alpha_1,\alpha_i) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & \sum_{i=1}^{m-1}k_i(\alpha_2,\alpha_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & \sum_{i=1}^{m-1}k_i(\alpha_m,\alpha_i) \end{vmatrix}$$

$$|G|=\begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & \sum_{i=1}^{m-1} k_i(\alpha_1,\alpha_\mathrm{i}) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & \sum_{i=1}^{m-1} k_i(\alpha_2,\alpha_\mathrm{i}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_\mathrm{m},\alpha_1) & (\alpha_\mathrm{m},\alpha_2) & \cdots & \sum_{i=1}^{m-1} k_i(\alpha_\mathrm{m},\alpha_\mathrm{i}) \end{vmatrix}$$

由行列式的分列相加性质：

$$|G|=\sum_{i=1}^{m-1} k_i \begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_\mathrm{i}) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_\mathrm{i}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_\mathrm{m},\alpha_1) & (\alpha_\mathrm{m},\alpha_2) & \cdots & (\alpha_\mathrm{m},\alpha_\mathrm{i}) \end{vmatrix} = 0$$

这与充分条件的假设 $|G|\neq 0$ 矛盾，故如果 $|G|\neq 0$ 则

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **必线性无关。**

§ 5.1 线性变换的定义、性质及运算

- 线性空间 V 到自身的映射，称为 V 的一个变换，

  用 T 表示，即 若 $\alpha \in V$， $\beta = T(\alpha) \in V$

☑ 定义 5.2(线性变换)：数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个变换 T，对于任意两个向量 α、$\beta \in V$，$k \in P$，如果满足下列条件：

(1) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

(2) $T(k\alpha) = kT(\alpha)$；

则称变换 T 为线性变换(linear transformation).

☑ 线性变换就是保持线性运算的映射.

三、线性变换的性质

1. 设 **T** 是线性空间 V 中的一个线性变换，则

$$T(0)=0,\quad T(-\alpha)=-T(\alpha);$$

2. 线性变换保持线性组合与线性关系式不变

若：$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

则：$T(\beta)=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\cdots+k_mT(\alpha_m)$

3. 线性相关的向量经线性变换后，仍保持线性相关.

四、线性变换的运算

设 V 是数域 P 上的一个线性空间，以 $L(V)$ 表示 V 上全体线性变换所构成的集合，在 $L(V)$ 内可以引进加法、数量乘法和乘法，以及逆变换的运算.

（1）加法　如果 $T_1, T_2 \in L(V)$，在 V 中定义一个变换

$$(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$$

称为 T_1 与 T_2 的和

(2) 数量乘法　对于数域 P 中任意一数，　$T \in L(V)$，
在 V 中定义一个变换

$$(kT)(\alpha) = k[T(\alpha)]$$

称为 k 与 T 的数量乘积

- 可以证明，$L(V)$ 构成线性空间
(对加法和数乘封闭).

(3) 乘法　如果 $T_1, T_2 \in L(V)$，在 V 中定义一个变换

$$(T_1 T_2)(\alpha) = T_1[T_2(\alpha)]$$

称为 T_1 与 T_2 的乘积

$$T_E(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$$

(4) 逆变换 设$T \in L(V)$，如果存在一个变换 S, 使得

$$ST = TS = T_E$$

➢ 例如逆矩阵

称变换 S 为 T 的逆变换

➢ 逆变换是唯一的，也是线性变换.

(5) 方幂 设$T\in L(V)$，规定线性变换的方幂为

$$T^k = \overbrace{T\cdot T\cdots T}^{k\text{个}} \qquad T^0 = T_E$$

(6) 线性变换的多项式

如果给定系数在数域 P 上的一个多项式

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

则定义

$$f(T) = a_0T^m + a_1T^{m-2} + \cdots + a_{m-1}T + a_mT_E$$

为线性变换 T 的多项式

§ 5.2 线性变换的矩阵

一、线性变换的矩阵表示

设 V 是数域 P 上的一个 n 维线性空间，

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个基，

T 是V 的一个线性变换，

- 则V 中任何一个向量 ξ， 都可由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 线性表示，即

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

- 其中系数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是唯一确定的

- 由于线性变换保持线性关系不变，因此有

$$T(\xi) = x_1 T(\varepsilon_1) + x_2 T(\varepsilon_2) + \cdots + x_n T(\varepsilon_n)$$

- 也就是说，知道了基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 在线性变换 T 下的像 $T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)$ ，那么任意向量 ξ 在 T 下的像也知道了.

- 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 在线性变换 T 下的像 $T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)$ 一般可线性表示为

$$\begin{cases} T(\varepsilon_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ T(\varepsilon_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ T(\varepsilon_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

- 为应用方便，把 $[T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)]$ 记为 $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$，并引入如下定义

☑ 定义 5.3：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一个基，T 是V 的一个线性变换，基在T下的像可以表示为：

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\cdots T(\varepsilon_n)]$$

$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\,A$$

矩阵 A 称为 T 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵.

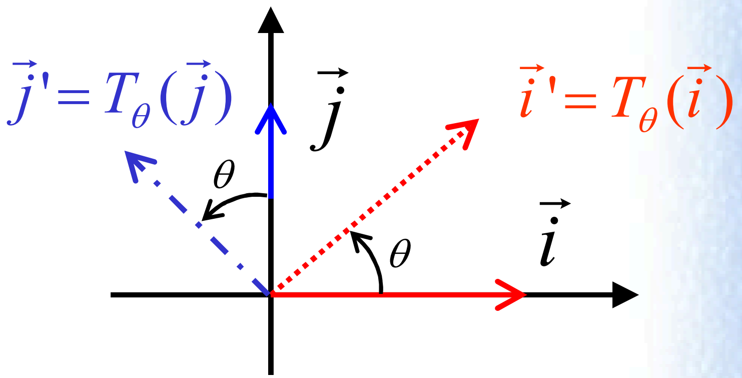
- 即，给定V的基，线性变换T ⇔ 矩阵A

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]A$$

例：设所有从原点出发的向量构成线性空间V, 把平面绕原点旋转 θ 角，就是一个变换，记作 T $_\theta$，求线性变换 T $_\theta$ 在直角坐标系下的矩阵 A.

解： 设直角坐标系下单位坐标向量分别为 $\vec{i}$, $\vec{j}$

➢ 由解析几何知



$$T_\theta(\vec{i})=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

$$T_\theta(\vec{j})=-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}$$

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\vec{i}'=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$
$$\vec{j}'=-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}$$

$$T_\theta(\vec{i},\vec{j})=[\vec{i},\vec{j}]\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$T(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=[\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n]\,A$$

例：n+1 维线性空间P[x]$_n$中，取定基

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_1=x,\quad \varepsilon_2=x^2,\cdots,\varepsilon_n=x^n$$

求线性变换 D[f(x)]=f'(x) 在此基下的矩阵 A.

解：因为

$$\begin{aligned}
&D(\varepsilon_0)=0\\
&D(\varepsilon_1)=1=1\cdot\varepsilon_0\\
&D(\varepsilon_2)=2x=2\cdot\varepsilon_1\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&\varepsilon_n=nx^{n-1}=n\cdot\varepsilon_{n-1}
\end{aligned}$$

所以 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$

例：在线性空间 R^3 中，取一个基为

$\varepsilon_1 = [2,3,5]^T$，$\varepsilon_2 = [0,1,2]^T$，$\varepsilon_3 = [1,0,0]^T$；

已知变换 $T(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, T(\varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

求线性变换 T 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

解：由定义知 $[T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), T(\varepsilon_3)] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] A$

$$\text{即} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 在给定基下向量的坐标是唯一的；因此，线性变换 T 在给定基下的矩阵 A 是唯一的(T在给定基下像的坐标).

- 反之，对于任一 n 阶矩阵 A，在给定的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下，是否总对应唯一的线性变换 T？

☑ 定理 5.1：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一个基， 对于V 中任意 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$， 总有唯一的线性变换 T，使得：

$$T(\varepsilon_i) = \alpha_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

证明：若 ξ 是V 中任意向量，在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下有

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$$

- 在 V 中定义一个变换 T，为如下形式

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$$

即：以该向量在基 ε_i 下的坐标对 α_i 作线性组合

- 首先，可证明此变换是线性变换：

$$T(\xi)=\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$$

- **在V 中任取两个向量**

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\ ,\quad \beta=\sum_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i$$

则 $\alpha+\beta=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\ \varepsilon_i\ ,\qquad k\alpha=\sum_{i=1}^{n} ka_i\varepsilon_i$

- **由变换 T 的定义有** $T(\alpha+\beta)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\ \alpha_i$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i\quad =T(\alpha)+T(\beta)$$

$$T(k\alpha)=\sum_{i=1}^{n} ka_i\alpha_i=kT(\alpha)$$

且 ε_i 的坐标： $\varepsilon_i=0\varepsilon_1+\cdots+0\varepsilon_{n-1}+1\varepsilon_i+0\varepsilon_{i+1}+\cdots+0\varepsilon_n$

$$T(\varepsilon_i)=1\alpha_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

- 因此， T 符合定理条件，是一个线性变换.
- 最后，证明 T 唯一：
- 假设，还有另一线性变换 T_1 使 $T_1(\varepsilon_i) = \alpha_i$
- 则对 ξ 有

$$
\begin{aligned}
T_1(\xi) &= x_1 T_1(\varepsilon_1) + x_2 T_1(\varepsilon_2) + \cdots + x_n T_1(\varepsilon_n) \\
&= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \\
&= x_1 T(\varepsilon_1) + x_2 T(\varepsilon_2) + \cdots + x_n T(\varepsilon_n) \\
&= T(\xi)
\end{aligned}
$$

- 故$T=T_1$． 证毕.

☑ 定理 5.2：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一个基， 线性变换 T_1, T_2 在此基下的矩阵分别为 A、B，则

（1）线性变换的和对应于矩阵的和，即

$$T_1 + T_2 \leftrightarrow A + B$$

（2）线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积，即

$$kT_1 \leftrightarrow kA$$

（3）线性变换的乘积对应于矩阵的乘积，即

$$T_1 T_2 \leftrightarrow AB$$

（4）可逆线性变换对应于可逆矩阵，且逆变换对应于逆矩阵.

☑ 定理 5.3：设线性变换在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为A，向量 ξ 在同一基下的坐标为 $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$，$T(\xi)$ 在同一基下的坐标为 $Y=[y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$，则有

$$Y=AX$$

全权代表

证明：由假设 $\xi = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] X$

$$\begin{aligned} T(\xi) &= [T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \cdots, T(\varepsilon_n)] X \\ &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] AX \end{aligned}$$

又：$T(\xi) = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] \mathrm{Y}$

由坐标的唯一性知： $Y=AX$ ， 证毕.

- 布置习题　P 226:

1.　(2) 、(4)
2.　4.
5.　7.
9.　11.
12.　13.

二、线性变换在不同基下的矩阵间的关系

- 线性变换 T 的矩阵与所取的基联系在一起，对于不同的基，T 可能有不同的矩阵.
- T 在不同基下的矩阵间的有何关系？

☑ 定理 5.4：n 维线性空间 V 中，设线性变换 T 在两个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B，

从 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 M，则

$$B=M^{-1}AM$$

证明：由假设，A是T在基 ε 1，ε 2，. . . ，ε n下的矩阵，B是T在基 η 1， η 2，. . . ， η n下的矩阵

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]A$$

$$T(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]B$$

- 由于从基 ε 到 基 η 的过渡矩阵为 M，即

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M$$

$$\begin{aligned}T(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)&=T([\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M)\\&=T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)M\\&=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]AM\\&=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]M^{-1}AM\end{aligned}$$

- 由此得： $B=M^{-1}AM$. 证毕.

☑ 定义 5.4：对于n 阶矩阵A和B，若存在一个n 阶满秩矩阵P，使得 $P^{-1}AP=B$

则称A相似于B.　　记为 A ~B

✓ 相似矩阵的性质

（1）反身性：　对任意方阵A，　有 A ~A；

（2）对称性：若 A ~B，　则 B ~ A；

（3）传递性：若 A ~B，　B ~ C，则 A~C .

所以，定理 5.4 表明，同一个线性变换，在不同的基下的矩阵是相似的.

$$B=M^{-1}AM$$

例：设 ε $_1$，ε $_2$，ε $_3$ 是线性空间 *V* 的一个基，线性变换 T 在 ε $_1$，ε $_2$，ε $_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

设 η $_1$，η $_2$，η $_3$ 为V的另一个基，且已知

$$\eta_1=\varepsilon_1 \qquad \eta_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \qquad \eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

求线性变换T在基 η $_1$，η $_2$，η $_3$ 的矩阵B.

解：由假设知

由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$的过渡矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以线性变换T在基 η $_1$，η $_2$，η $_3$ 的矩阵为

$$B=M^{-1}AM=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\ -3 & -4 & -6\\ 2 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

☑ 定理 5.5：两个n 阶相似方阵可以看作同一个线性变换在不同基下的矩阵.

证明：设A~B，即存在满秩矩阵P，使得 $P^{-1}AP=B$

任取一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，把A看作是线性变换T在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵，因此有

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]A$$

令 $$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]P$$

由于P是可逆矩阵，说明 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$线性无关，因此它也是一个基；在基η下，由定理5.4

T 的矩阵就是 $P^{-1}AP=B$

- 综上所述，线性变换在某个基下与矩阵一一对应
- 因此，线性变换可以用矩阵来研究.
- 而矩阵中最简单的一类是对角阵；于是，对于线性变换T，我们希望找到一个基，使得T在该基下的矩阵为 对角阵.
- 由定理5.5，若T 在某个基下的矩阵为A ，则T在其它基下的矩阵就是A的相似阵.
- 因此T 的矩阵对角阵化问题转化为能否找到与 A 相似的对角阵。
- 要研究矩阵的对角化问题，首先要介绍特征值与特征向量。