线 性 代 数
Linear Algebra

刘 鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

§ 5.3　特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念

定义 5.5: 设 T 是数域 P 上线性空间 V 中的一个线性变换， 对于数域 P上一个数 λ_0，如果存在一个非零向量 ξ，使得

$$\boxed{T(\xi)=\lambda_0\xi}$$

则 称 λ_0为 T 的一个特征值，称 ξ 为属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

二、特征值与特征向量的求法

定义 5.7:设 A 是数域 P 上一个 n 阶矩阵， λ 是一个未知量，矩阵 λE-A 的行列式

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

称为 A 的特征多项式(characteristic polynomial)，记为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|$$

$f(\lambda)=0$ 的根称为 A 的 特征根

- 特征根 即为 A 的 特征值.

☑ 求矩阵特征值与特征向量的步骤：

1. 计算A的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$;

2. 求特征方程 $\det(\lambda E - A) = 0$ 的全部根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 即A的全部特征值 ；

3. 对于特征值λ_i,求齐次方程组

$$(\lambda_i E - A)X = 0$$

其非零解,就是对应于λ_i的特征向量.

➢ λ_i 的特征子空间是 $\lambda_i E\text{-}A$ 的 零空间

☑ 定理 5.6：相似矩阵有相同的特征多项式.

- 线性变换的特征值与基的选择无关
- 线性变换的特征向量也与基的选择无关.
- 但是，矩阵特征多项式相同，不一定相似：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

的特征多项式都等于（$\lambda-1$）^{2}，但它们不相似，

- 因为与单位阵相似的矩阵只有它本身。

三、特征多项式的基本性质

- 特征多项式的展开式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|}$$

- 括号中为**A** 的迹 **(trace)**： $t_r(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

定理 5.7(哈密顿-凯莱定理)：设 f(λ)=| λ ***E-A***| 是**A**的特征多项式，则

$$\boxed{f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|E=0}$$

四、特征向量的线性无关性

定理 5.8:属于互异(不同)特征值的特征向量线性无关.

证明： （自学） 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 是矩阵A 的互异特征值，

$X_1, X_2, \ldots, X_k$ 是分别属于它们的特征向量.

- k=1 时，特征向量非零，显然线性无关.
- 设分属 k-1 个不同特征值的特征向量线性无关，

下面证明➡对于 k 个互异特征值定理也成立：

设： $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_{k-1}X_{k-1} + a_kX_k = 0 \quad (3.7)$ 成立

则： $a_1\lambda_kX_1 + a_2\lambda_kX_2 + \cdots + a_{k-1}\lambda_kX_{k-1} + a_n\lambda_kX_k = 0 \quad (3.8)$

A左乘**(3.7)：** $a_1AX_1 + a_2AX_2 + \cdots + a_{k-1}AX_{k-1} + a_kAX_k = 0$

由$AX_i = \lambda_iX_i$： $a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 + \cdots + a_{k-1}\lambda_{k-1}X_{k-1} + a_k\lambda_kX_k = 0 \quad (3.9)$

$$a_1\lambda_k X_1 + a_2\lambda_k X_2 + \cdots + a_{k-1}\lambda_k X_{k-1} + a_k\lambda_k X_k = 0 \quad (3.8)$$

$$a_1\lambda_1 X_1 + a_2\lambda_2 X_2 + \cdots + a_{k-1}\lambda_{k-1} X_{k-1} + a_k\lambda_k X_k = 0 \quad (3.9)$$

- (3.8)-(3.9)得

$$a_1(\lambda_k - \lambda_1)X_1 + a_2(\lambda_k - \lambda_2)X_2 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})X_{k-1} = 0$$

- 由假设，属于 **k-1** 个不同特征值的特征向量 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，..., $\mathbf{X}_{n-1}$ 是线性无关的，于是

$$a_i(\lambda_k - \lambda_i) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,k-1)$$

但是 $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$

所以只能 $a_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,k-1)$

由假设： $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_{k-1}X_{k-1} + a_k X_k = 0 \quad (3.7)$

$\Rightarrow a_k X_k = 0$， 又 $X_k \neq 0$ (定义5.5), 只能 $a_k = 0$

- 所以，k 个不同特征值的特征向量
  X_1，X_2，..., X_k 是线性无关的；
- 由数学归纳法原理，定理成立，即：
  属于不同特征值的特征向量是线性无关的.
- 定理5.8 可进一步推广为：

定理 5.9：设 λ_1，λ_2，...，λ_k 是矩阵A 的互异特征值，X_{i1}，X_{i2}，. . . ，$X_{i\,ri}$ 是属于 λ_i 的线性无关的特征向量，那么向量组

$$X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1r_1}, X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2r_2}, \cdots, X_{k1}, X_{k2}, \cdots, X_{kr_k},$$

线性无关.

§ 5.4 矩阵的对角化

- 线性变换可以用其矩阵来“全权代表”.
- 而矩阵中最简单的一类是对角阵 ⇨ 我们希望找到一个基，使得T 的矩阵变为 对角阵.
- 由定理5.5，若T 在某个基下的矩阵为A ，则T在其它基下的矩阵就是A的相似阵.
- 我们已具备特征值与特征向量的知识，可以解决矩阵的对角化问题。

定理 5.10：n 阶矩阵A 与对角阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量.

证明： 必要性—设 A 与对角阵 B 相似

$$B = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

- 即存在一个满秩矩阵 $P = [\,X_1, X_2, \dots, X_n\,]$ 使得

$$P^{-1}AP = B = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

- 等式两边左乘以 P，得 $AP = PB$

$$A[X_1, X_2, \cdots, X_n] = [X_1, X_2, \cdots, X_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

即：$A X_i = \lambda_i X_i$,

且：$X_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

- 可见 X_i 是矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量
- 又因为P是满秩矩阵，所以 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 线性无关，

即： A 有 n 个线性无关的特征向量 。

- 充分性：设A有n个线性无关的特征向量$X_1, \ldots, X_n$ ，即有

$$A X_i = \lambda_i X_i, \quad X_i \neq 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

令： $\mathrm{P} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$

- 显然，P 是满秩矩阵，且

$$\begin{aligned} A\mathrm{P} &= A[X_1, X_2, \cdots, X_n] \\ &= [AX_1, AX_2, \cdots, AX_n] \\ &= [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_n X_n] \end{aligned}$$

$$= [X_1, X_2, \cdots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

即得： $P^{-1}AP = B = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

- **即 A 与对角阵相似，证毕.**

推论1：一个 n 阶矩阵A，如果它有n个不同的特征值(特征值全部是单根时)，则A一定可以对角化.

推论2: 当A的特征值包含重根时，只要重根特征值对应的线性无关特征向量的个数都等于特征值的重数(特征子空间的维数)，则A一定可以对角化；

- 当A的线性无关特征向量的个数小于 n，则A不能对角化.
- 此时称A为退化的(defective)，退化矩阵无法对角化.
- 例如 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$ B只有唯一的特征值 $\lambda = 1$
- 对应的特征向量是 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- A是退化的.

例：问矩阵 A 能否对角化？若能，怎样对角化？

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解：先由特征多项式求特征值：

$$f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right| =\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix} =(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

∴ A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

➢ 将 $\lambda_1=-1$ 代入特征方程组 $[\lambda_i E-A]X=0$

得：$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

- 解得属于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量是 $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- 将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 代入特征方程组，得

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

- 解得属于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的线性无关的特征向量是 $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$， $X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

➢ 由定理5.9知， X_1，X_2，X_3 线性无关.

由定理 5.10：n 阶矩阵A 与对角阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量⇨A可以对角化.

令： $P=[X_1,X_2,X_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\-2&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

➢ 对角化完成.

例：问矩阵 A 能否对角化？ $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

解：由 P 206 例 1： $\begin{cases}\lambda_1=2,\\ \lambda_2=\lambda_3=1\end{cases}$

$\lambda_1=2$ 对应的特征向量 $X_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$

$\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的特征向量 $X_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}.$

- 二重根1所对应的特征向量的个数为1， 少于重数，
- 故A 是退化矩阵，不能对角化。

例： $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$， 求 A^n.

解1： 数学归纳法

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^2 & 1-3^2\\ 1-3^2 & 1+3^2\end{bmatrix}$$

$$A^2A=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -13\\ -13 & 14\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^3 & 1-3^3\\ 1-3^3 & 1+3^3\end{bmatrix}$$

$$A^{n-1}A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^{n-1} & 1-3^{n-1}\\ 1-3^{n-1} & 1+3^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^n & 1-3^n\\ 1-3^n & 1+3^n\end{bmatrix}$$

解2： 将 A 对角化

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

∴ A 的特征值为 $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=3$

- 将 $\lambda_1=1$ $\lambda_2=3$ 分别代入特征方程组 $[\lambda_i E-A]X=0$
  - 解得属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量是 $X_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
  - 属于 $\lambda_2=3$ 的特征向量是 $X_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

令： $P=[X_1, X_2]$

则 $P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \\ & 3\end{bmatrix}$

$$A=P\begin{bmatrix}1 & \\ & 3\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$A^{n}=P\begin{bmatrix}1^{n} & \\ & 3^{n}\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^{n} & 1-3^{n}\\1-3^{n} & 1+3^{n}\end{bmatrix}$$

☑ 小结：

1. n阶矩阵A若可对角化，则对角化矩阵 P 的列向量为A的特征向量，对角阵 Λ 的对角元素为A的特征值.

2. 对角化矩阵 P 不是唯一的

— λ_i 取不同的基础解系得新的对角化矩阵

3. 可否对角化取决于A是否有：n个、线性无关的特征向量.

4. A若可以对角化，则对角化的形式为 $P^{-1}AP$.

- 布置习题　P 230:

24.　(1) 、(3) 、(5)

25.　26.　27.　28

29.　(1) 、(3)

* 30

§ 5.5 化实对称阵为对角阵

- 并非所有n 阶矩阵都能对角化；但是，实对称阵一定可以对角化.
- 许多物理问题都会生成实对称矩阵
  — 物理量间相互作用的互易性.
- 这些问题与特征值及特征向量密切相关.
- 另外，实对称矩阵A对应于二次型 X^TAX，因此，化实对称阵为对角阵在二次型的研究中也有重要意义.

定理 5.11：实对称阵的特征根都是实数.

证明 ：（略）

定理 5.12：设A是一个实对称阵，则属于A的不同特征值的特征向量一定正交.

定理 5.12：设A是一个实对称阵，则属于A的不同特征值的特征向量一定正交.

证明：设 X_1，X_2 分别是 A 的属于不同特征值 λ_1，λ_2的特征向量，即 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \quad AX_2 = \lambda_2 X_2$$

则内积：$(AX_1, X_2) = (\lambda_1 X_1, X_2) = \lambda_1 (X_1, X_2)$

又 AX_1是向量：$(AX_1, X_2) = (AX_1)^T X_2 = X_1^T A^T X_2$

$$= X_1^T A X_2 = X_1^T \lambda_2 X_2 = \lambda_2 (X_1, X_2)$$

所以：$\lambda_1 (X_1, X_2) = \lambda_2 (X_1, X_2)$ $\quad (\lambda_1 - \lambda_2)(X_1, X_2) = 0$

已知 $:\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (X_1, X_2) = 0$ ➢ 故 X_1 与 X_2 正交.

定理 5.13：对于n 阶实对称阵A，总能找到一个 n 阶正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

证明：数学归纳法

- n=1 时显然成立.
- 设对于任意 n-1 阶实对称阵结论仍然成立

➔ 证明能找到(构造)一个 n 阶正交矩阵 P ...

- 不妨设 λ_1 是A的一个特征值，由定理 5.11，λ_1是一个实数.
- 设 X_1 是属于λ_1的单位特征向量，即

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \quad \|X_1\| = 1$$

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \quad \|X_1\| = 1$$

➢ 以 X_1 为第一列作一个正交阵：

$$P_1 = [X_1, X_2, \cdots, X_n]$$

由于 $P_1^{-1}P_1 = [P_1^{-1}X_1, P_1^{-1}X_2, \cdots, P_1^{-1}X_n] = E$

$$P_1^{-1}X_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而有 $P_1^{-1}A\,P_1 = P_1^{-1}A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$

$$= P_1^{-1}[\lambda_1 X_1, AX_2, \cdots, AX_n]$$

$$= [\lambda_1 e_1, P_1^{-1}AX_2, \cdots, P_1^{-1}AX_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

$$P_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

- **因 P_1 是正交阵，A是对称阵：**

$$(P_1^{-1} A P_1)^T = P_1^T A^T (P_1^{-1})^T = P_1^{-1} A P_1$$

$$\Rightarrow P_1^{-1} A P_1 \text{ 也是对称阵}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \text{中 } \alpha = 0\text{，} A_1 \text{是 } n-1 \text{阶对称阵}$$

即：$P_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$

➢ 由假设，对于 n-1 阶实对称阵结论仍然成立，即存在n-1阶正交矩阵P_2 使得：

$P_2^{-1} A_1 P_2$ 为对角阵： $P_2^{-1} A_1 P_2 = diag\,[\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n]$

再构造： $$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

➢ 则 P_3 也是一个正交阵：

$$P_3 P_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$P_1^{-1}A\,P_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & A_1\end{bmatrix}$$

$$P_2^{-1}A_1\,P_2=diag\,[\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n]$$

于是： $$P_3^{-1}(P_1^{-1}A\,P_1)\,P_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & P_2^{-1}A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & P_2^{-1}A_1P_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=diag\,(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

- **而 P_1P_3 也是一个正交阵，这样，我们就找到了正交阵 $P=P_1P_3$，使得：**

$$P^{-1}A\,P=diag\,[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n].$$ 证毕

- 即：设A是n阶实对称矩阵, 则必有<u>正交矩阵</u>P使得

$$P^{-1}AP = P^T AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的n个特征值.

- 简而言之：实对称阵必<u>正交相似</u>于对角阵.

☑ 利用正交矩阵将实对称矩阵对角化

➢ 根据上述结论，任何实对称阵都可以对角化，具体步骤为：

1. 求A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

2. 由$(A - \lambda_i E)x = 0$, 求出属于λ_i的线性无关的特征向量;

3. 单根对应的特征向量 — 单位化，
   重根对应的特征向量 — 找出线性无关组，
   施密特正交化、单位化

4. 写出正交矩阵P和相应的对角矩阵.

例：求一正交矩阵P，将实对称阵A对角化.

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

解：先由特征多项式求特征值：

$$f(\lambda)=\left|\lambda E-A\right| =\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix} =(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

∴ A 的特征值为 $\lambda_1=-2$， $\lambda_2=\lambda_3=1$

➢ 将 $\lambda_1=-2$ 代入特征方程组 $[\lambda_i E-A]X=0$

得：$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

- 解得属于 $\lambda_1=-2$ 的特征向量，单位化得 $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$

- 将 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 代入特征方程组，得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

- 解得属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$的线性无关的特征向量是 $X_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$， $X_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

- 将X_2，X_3 正交化，单位化，得

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

- 所求正交阵为 $P = \begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = P^TAP$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

注意：对角阵中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的顺序要与特征向量的排列顺序一致。

例：设3阶**实对称阵**A的特征值为1、2、3，属于特征值1、2的特征向量为

$$X_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},X_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

求（1)属于特征值3的特征向量；（2）矩阵 A .

解:(1)设属于特征值3的特征向量为 X_3 ，由于A是实对称阵，3个特征向量**彼此正交**:

$$\Rightarrow\begin{cases}X_1^T X_3=0\\X_2^T X_3=0\end{cases}$$

解齐次线性方程组，得 $X_3=k\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

(2) 记： $P=[X_1,X_2,X_3]$

$$\text{则}\ P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix},$$

$$A=P\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{bmatrix}$$

☑小结—实对称阵A的性质：

1. 特征值为实数.

2. 属于不同特征值的特征向量正交.

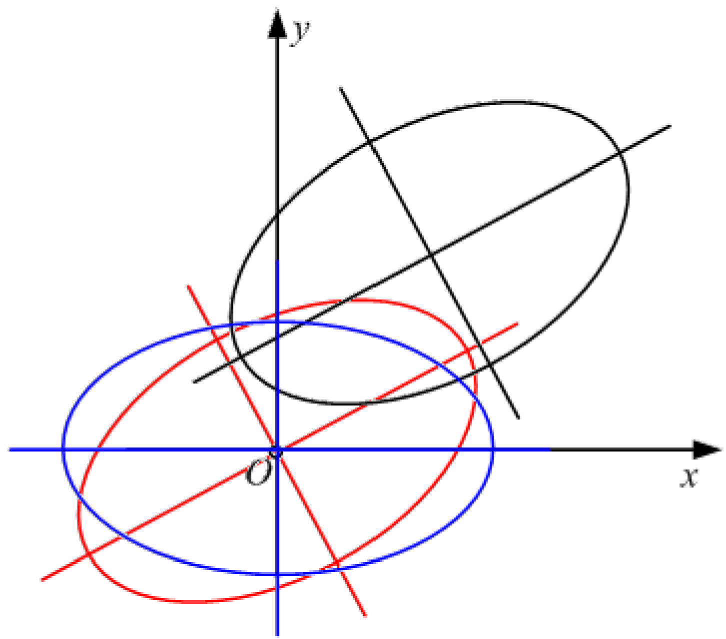
3. 必存在正交阵将A对角化，对角阵元素为A的特征值.

4. A若可以对角化，则对角化的形式为 P^TAP .

*§ 5.6　正交变换

- 正交变换是欧氏空间中的一种重要的线性变换
  ⇨满足数量乘法&加法封闭.
- 正交变换是保持内积不变的线性变换
- 所有通过内积定义的属性不会随正交变换而改变.
- 例如曲线或曲面的长度、大小、夹角、形状等等.
- 例如: 图形经过平移、反射、或旋转变换后
  只是形状和大小都没有改变，所有的长度、角度
  都保持不变.

➢正交变换在二次型的研究中也有重要的应用。



定义 5.8: 对于欧氏空间V中的线性变换T, 如果它保持向量内积不变，即对任意的α,β ∈V，都有

$$(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta)$$

则称 T 是一个正交变换(orthogonal transformation).

- 根据定义，正交变换显然保持欧氏空间中向量的长度、向量间的距离及夹角(正交)等属性不变。

定理 5.14：对于欧氏空间V中的线性变换T，下列命题是相互等价的：

（1） T是正交变换；

（2）对任意的α ∈V， 都有 $\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$；

（3）若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V的一组标准正交基，则 $T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \dots, T(\varepsilon_n)$ 也是 V 的一组标准正交基 —即T 实现了两个正交坐标系间的变换；

T 的矩阵A 是正交坐标系间的过渡矩阵；

（4）T 在 V 的任意一组标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

证明:(1)与(2)等价根据正交变换的定义可证。

- 下面证明(1)-(3)等价:
- 因为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是标准正交基，所以

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases}$$

- 如果T是正交变换，那么

$$(T(\varepsilon_i), T(\varepsilon_j)) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases}$$

- 因此 $T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)$是标准正交基。

- 反之，若T(ε$_1$), . . . , T(ε$_n$)是标准正交基，对任意的α, β ∈V，

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n$$

$$T(\alpha) = x_1T(\varepsilon_1) + x_2T(\varepsilon_2) + \cdots + x_nT(\varepsilon_n)$$

$$T(\beta) = y_1T(\varepsilon_1) + y_2T(\varepsilon_2) + \cdots + y_nT(\varepsilon_n)$$

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = (T(\alpha), T(\beta))$$

- 因而，T是正交变换.

最后证明（4)：T 在 V 的任意一组标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

- 设 T 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为A，即

$$[T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \cdots T(\varepsilon_n)] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] A$$

- 如果 $T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)$是标准正交基，那么A可以看作由标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到 $T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)$ 的过渡矩阵，因而A是正交矩阵；

- 反过来，如果A是正交矩阵，那么显然 $T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \ldots, T(\varepsilon_n)$就是V的一个标准正交基.
- 于是，我们证明了 (1)-(4)的等价性.

由线性变换与矩阵的一一对应可推知：

（1） 正交变换的乘积还是正交变换；

（2）正交变换是可逆变换，且其逆变换仍然是正交变换.

（3）正交变换T在 V 的一组标准正交基下的矩阵为A，则A是正交矩阵，因此有正交矩阵 A 的行列式 det A=1 或 -1；

证明： A是正交矩阵 → $A^{T}A=E$ ➢ $|A^{T}A| = |E| = 1$

➢ $|A|^2 = 1$ ➢ 故 det A=1 或 -1.

- 当 | A | = 1时，称A 为第一类正交变换 (或旋转);

右手系⇨右手系

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

- 当 | A | = -1时，称A 为第二类正交变换(镜面反射+旋转).

例如：$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$ 右手系⇨左手系

轴反射变换：$T\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x \\ -y\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 在e_1,e_2下：$A=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$

- 两类正交变换不能互相替换；
  例如，仅靠平移+旋转无法完成轴反射变换.

本章小结

A. 概念与理论：

(1) 线性变换的定义

(2) 线性变换的基本性质，线性变换的运算

(3) 线性变换的矩阵表示，在不同基下的转换

(4) 特征值、特征向量、特征多项式的概念、性质

(5) 哈密顿-凯莱定理，特征向量的线性无关性

(6) 一般矩阵的对角化、化实对称阵为对角阵.

B. 计算方法：

(1) 判断是否构成线性变换，给定基求线性变换的矩阵；

(2) 线性变换在不同基下的转换，线性变换的运算.

(3) 特征值、特征向量的求法，矩阵多项式的计算；

(4) 判断矩阵能否对角化，将(实对称)矩阵对角化.