第五章：线性变换

线性变换的定义

- 线性空间 V 到自身的映射，称为 V 的一个变换，用 T 表示，即 若 $\alpha \in V$， $\beta = T(\alpha) \in V$

- 线性变换：数域 P 上 n 维线性空间V 的一个变换 T，对于任意两个向量 α、$\beta \in V$，$k \in P$，如果满足下列条件：

(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$

(2) $T(k\alpha)=kT(\alpha)$

则称变换 T 为线性变换.

线性变换的矩阵

➢ 线性变换的矩阵表示

设 ε $_1$, ε $_2$, …, ε $_n$ 是线性空间 V 的一个基， T 是V 的一个线性变换，基的像可以表示为：

$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\cdots T(\varepsilon_n)]$$

$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]A$$

矩阵 A 称为 T 在基 ε $_1$, ε $_2$, . . . , ε $_n$下的矩阵.

复旦大学

线性变换的矩阵

设线性变换在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为A，向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$，$T(\xi)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $Y=[y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$，则有：

$$Y=AX$$

线性变换在不同基下的矩阵间的关系

n 维线性空间 V 中，设线性变换 T 在两个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B，

从 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 M，则

$$B=M^{-1}AM$$

相似矩阵的性质：

1.若$A\sim B$，则$r(A)=r(B)$

2.若$A\sim B$，则$|A|=|B|$

3.若$A\sim B$，则A与B或者都可逆或者都不可逆，且可逆时$A^{-1}\sim B^{-1}$

4.若$A\sim B$，则$A^m\sim B^m$，m是正整数

5.若$A\sim B$，则A与B有相同的特征值（特征值相同的矩阵不一定相似）

6.若$A\sim B$，则$tr(A)=tr(B)$

特征值与特征向量

特征值与特征向量的概念

设 T 是数域 P 上线性空间 V 中的一个线性变换， 对于数域 P上一个数 λ_0，如果存在一个非零向量 ξ，使得

$$\boxed{T(\xi)=\lambda_0\xi}$$

则 称 λ_0为 *T* 的一个特征值，而称 ξ 为属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

☑ 求矩阵特征值与特征向量的步骤：

1. 计算A的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$;

2. 求特征方程 $\det(\lambda E - A) = 0$ 的全部根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，即A的全部特征值；

3. 对于特征值 λ_i，求齐次方程组

$$(\lambda_i E - A) X = 0$$

其非零解，就是对应于 λ_i 的特征向量.

特征多项式的基本性质

- 特征多项式的展开式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

- 括号中为矩阵A 的迹 (trace)，即A的主对角线元素之和，记为：

$$t_r(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

- 由方程根与系数的关系有下面结果：

$$(1)\quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=t_r(A)\quad (2)\quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$$

- 即一个矩阵的迹是其特征值的总和（按代数重数计算）.
- 而全体特征根的乘积等于|A|.

(哈密顿-凯莱定理):设A是数域 P 上一个 n 阶方阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是A的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|E=0$$

定理 5.8:属于不同特征值的特征向量线性无关.

定理 5.9:设 λ_1，λ_2，. . . ，λ_k 是矩阵A 的互异特征值，X_{i1}，X_{i2}，. . . ，$X_{i\,ri}$ 是属于 λ_i 的线性无关的特征向量，那么向量组

$$X_{11},X_{12},\cdots,X_{1r_1},X_{21},X_{22},\cdots,X_{2r_2},\cdots,X_{k1},X_{k2},\cdots,X_{kr_k},$$

线性无关.

矩阵的对角化

定理 5.10: n 阶矩阵A 与对角阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量.

推论1: 一个 n 阶矩阵A，如果它有n个不同的特征值(特征值全部是单根时)，则A一定可以对角化.

推论2:当A的特征值是重根时，只要每一个重根的特征值对应的线性无关特征向量的个数都等于特征值的重数，则A一定可以对角化；否则不能对角化.

n 阶矩阵A若可以对角化，则对角化矩阵X的列向量为A的特征向量，对角阵的对角元素为A相应的特征值.

化实对称阵为对角阵

- 实对称阵一定可以对角化.

定理 5.11：实对称阵的特征多项式的根都是实数.

定理 5.12：设A是一个实对称阵，则属于A的不同特征值的特征向量一定正交 .

定理 5.13：对于n 阶矩阵A， 总能找到一个 n 阶正交矩阵 P， 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

➢即：设A是n阶实对称矩阵，则必有正交矩阵P使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是A的$n$个特征值.

☑ 利用正交矩阵将对称矩阵对角化

➢ 根据上述结论，任何实对称阵都可以对角化，具体步骤为：

1. 求A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

2. 由$(A-\lambda_i E)x = 0$，求出属于λ_i的线性无关的特征向量；

3. 单根对应的特征向量 — 单位化，
   重根对应的特征向量 — 找出线性无关组，
   施密特正交化、单位化

4. 写出正交矩阵P和相应的对角矩阵.

复旦大学

例1：设 $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & a & 3\\ 6 & -6 & b\end{bmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4$ ，求 a,b 的值。

解：因为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4$ 均为 A 的特征值，故

$$\left|\lambda_1 E-A\right|=0,\left|\lambda_2 E-A\right|=0$$

即：

$$\left|-2E-A\right|=\begin{vmatrix}-3 & 3 & -3\\ -3 & -2-a & -3\\ -6 & 6 & -2-b\end{vmatrix}=3(5+a)(4-b)=0$$

$$\left|4E-A\right|=\begin{vmatrix}3 & 3 & -3\\ -3 & 4-a & -3\\ -6 & 6 & 4-b\end{vmatrix}=3[(a-7)(2+b)+72]=0$$

解得：$a=-5,b=4$

例2：已知 λ_1,λ_2 是矩阵A的不同特征值，x_1,x_2 分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明：x_1+x_2 不是A的特征向量。

证明：若 x_1+x_2 是矩阵A属于特征值 λ_3 的特征向量，则

$$A(x_1+x_2)=\lambda_3(x_1+x_2)=\lambda_3 x_1+\lambda_3 x_2$$

且：$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$$

两式相减得：$$(\lambda_3-\lambda_1)x_1+(\lambda_3-\lambda_2)x_2=0$$

由于属于不同特征值的特征向量线性无关，所以：$\lambda_3-\lambda_1=\lambda_3-\lambda_2=0$

$$\lambda_3=\lambda_1=\lambda_2$$

与题设条件矛盾，所以 x_1+x_2 不是A的特征向量。

例3：设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 2 & 0 \\ 2 & 3 & c & 2 \end{bmatrix}$，问 a,b,c 为何值时，A可以对角化？

解：由

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -2 & -b & \lambda-2 & 0 \\ -2 & -3 & -c & \lambda-2 \end{bmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

故A的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=\lambda_4=2$

要使A可对角化，当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，从特征方程组 $(1\cdot E-A)X=0$ 应解得两个线性无关向量，即基础解系有两个解，那么 $r(1\cdot E-A)=4-2=2$ ，即：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -b & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -c & -1 \end{bmatrix}$$

的秩为2，则必有 $a=0$

复旦大学

例4：设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\2&b&2&0\\2&3&c&2\end{bmatrix}$，问 a,b,c 为何值时，A可以对角化？

解：由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&0\\-a&\lambda-1&0&0\\-2&-b&\lambda-2&0\\-2&-3&-c&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

故A的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=2$

同理，当$\lambda_3=\lambda_4=2$ 时，$r(2E-A)=4-2=2$ ，即

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-a&1&0&0\\-2&-b&0&0\\-2&-3&-c&0\end{bmatrix}$$

的秩为2，则必有 $c=0$

综上所述，当 $a=c=0,b$ 为任意值时，A可对角化。

复旦大学

例5：设 $A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$，求 A^{100}

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$

得：$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=-2$ 时，由 $(-2E-A)X=0$

$$\begin{bmatrix}-6&-6&0\\3&3&0\\3&6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

得特征向量 $\xi_1=[-1,1,1]^T$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，由 $(E-A)X=0$

$$\begin{bmatrix}-3&-6&0\\3&6&0\\3&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

得两个线性无关特征向量

$\xi_2=[0,0,1]^T,\xi_3=[-2,1,0]^T$

复旦大学

例6：设 $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$，求 A^{100}

解： $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

由 $P^{-1}AP=B$，得到 $A=PBP^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

故： $A^{100}=(PBP^{-1})^{100}=PBP^{-1}PBP^{-1}\cdots PBP^{-1}=PB^{100}P^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^{100} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2^{100}+2 & -2^{101}+2 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-1 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-2 & 1\end{bmatrix}$$

复旦大学

例7：若3阶矩阵A的3个特征值为1，1，2，对应的特征向量为 $\xi_1=[1,2,1]^T$，$\xi_2=[1,1,0]^T,\xi_3=[2,0,-1]^T$，求矩阵A。

解：设 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

由 $|P|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，知A有3个线性无关的特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3

则：$P^{-1}AP=B$

那么：

$$A=PBP^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&3&-4\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&2\\0&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

例8：设A为n阶方阵，$2,3,4,\cdots,(n+1)$ 是A的n个特征值，E为n 阶单位矩阵，求 $|A-E|$ 。

解：因n阶方阵A有n个互异的特征值，故存在可逆矩阵P，使得：

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 \end{bmatrix}=B$$

则： $$|A-E|=\left|PBP^{-1}-PEP^{-1}\right|=\left|P(B-E)P^{-1}\right|$$

$$=|P|\cdot|B-E|\cdot\left|P^{-1}\right| \quad =|B-E|$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!$$

复旦大学

例9：已知3阶方阵B的特征值为1,2，-1， $A=B^3-2B$。

（1）方阵A的特征值及其相似对角阵。

（2）$|A|$ ，$|B^2+2E|$

解：因为B的特征值为1,2，-1，故A的3个特征值分别为：

$$1^3-2\times1=-1 \quad 2^3-2\times2=4 \quad (-1)^3-2\times(-1)=1$$

且A的相似对角阵为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（2）：$|A|=(-1)\times4\times1=-4$

由于B的特征值1,2，-1，故存在可逆矩阵P，使得 $P^{-1}BP=C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$B=PCP^{-1} \quad B^2=PC^2P^{-1}$$

所以，

$$|B^2+2E|=|PC^2P^{-1}+2PEP^{-1}|$$

$$=|P|\cdot|C^2+2E|\cdot|P^{-1}| \quad =|C^2+2E| \quad =\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=54$$