线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

§ 3.3 n 元向量的一般关系

定义 3.1: 由n个数组成的有序数组$[a_1, a_2, \dots, a_n]$称为n元(维)向量(n-dimensional vector), 记作:

$$\alpha = [a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_n] \quad 或者 \quad \alpha = [a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_n]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

定义 3.2: 设 k 为常数, 定义

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad 及 \quad \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

分别为向量α与向量β的和, 向量α的数量乘积

✓ 将加减和数乘两种运算统称为向量的线性运算

定义 3.3:对于一组向量 β，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，若存在一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称向量 β 是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的线性组合

- 称向量 β 可经向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示

☑ 向量β用向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示

$$\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \alpha_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} \cdots \alpha_m=\begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

若β可用 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示

- 等价于线性方程组 $\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m = b_n \end{cases}$ 相容.

□ 向量组等价

定义3.4：若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中每一个向量 α_i (i=1, 2, . . . , r) 都可经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 矩阵线性表示，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示；

⇨ 若两个向量组可以相互线性表示，

则称这两个向量组 等价.

向量组线性相关/线性无关

定义3.5：对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（s ≥1），若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_s$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关；

若仅当 $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$ 时，上式才成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关.

✓定理3.3：向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{bmatrix},\cdots,\alpha_s=\begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \cdots \\ a_{ns} \end{bmatrix},$

线性相关的充要条件是：

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{bmatrix}$$

的秩小于向量组中向量的个数 s

即 $r_A < s$ ⇦ "向量个数大于维数必相关"

线性无关的充要条件是：$r_A = s$

线性相关与线性表示之间的区别

1. 线性相关是一组向量内部之间的关系；

- 而线性表示是一个向量与一组向量之间的关系.

2. 线性相关对一组数的要求是不全为0；

- 而线性表示对一组数没有要求。
  可以不全为0，可以全部为0，还可以全不为0。

三、几个重要定理

- 目的：讨论线性组合、线性相关、线性无关等概念的内在联系，为研究线性方程组解的结构作准备.

<u>定理 3.4</u>：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$（s ≥2）线性相关的充要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

证明： 先证充分性

- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中向量 α_i 是其余向量的线性组合，即

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s$$

- 则有 $k_1\alpha_1 \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} - \alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s = 0$
- 其中向量 α_i 的系数为 -1，不为零，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

再证必要性：

- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，则一定存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

- 不妨设 $k_i \neq 0$，则有

$$\alpha_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\alpha_1 \cdots + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\alpha_{i-1} + \left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\alpha_{i+1} + \cdots + \left(-\frac{k_s}{k_i}\right)\alpha_s$$

- 所以，若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，则必有一个向量是其余向量的线性组合，可以用其余向量线性表示.

- 反之，若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，则其中任何一个向量都不能被其余向量线性表示. (不可或缺，无法替代)

定理 3.5：设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \alpha$ 线性相关，则 α 必是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合，且线性表示式唯一.

证明：由已知 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \alpha$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_s, k$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + k\alpha = 0$$

- 只要证明 $k \neq 0$，就可得 α 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的线性组合.
- 反证法：设 $k = 0$，则 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 不全为零，可得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

- 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关，与已知条件矛盾，所以只有 $k \neq 0$，得

$$\alpha = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$$

再证上面的表达式唯一：

- 假设 α 经 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性表达不唯一，有

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s$$

- 又有

$$\alpha = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots + \mu_s\alpha_s$$

- 二式相减，得

$$(\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda_s - \mu_s)\alpha_s = 0$$

- 因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，由定义3.5，得

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \cdots = \lambda_s - \mu_s = 0$$

- 所以线性表示式唯一，证毕.

✓ “唯一表示定理”：

一个向量可用线性无关组表示,

—— 则表示法必然唯一.

定理：若 n 元向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，则在每个向量中添加 m 个分量, 得到的 n+m 元“加长”向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性无关.

例如：

$$\underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = t_1 \underset{X_1}{\begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + t_2 \underset{X_2}{\begin{bmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + \cdots + t_{n-r} \underset{X_{n-r}}{\begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

“向量组—短的无关，长的也无关”

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ 线性无关

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \times \\ 1 \\ \times \\ 2 \\ \times \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} \times \\ 3 \\ \times \\ 4 \\ \times \end{bmatrix}$$ 也线性无关

定理 3.6：设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 可经向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示，若 r ＞ s， 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性相关.

- 即能被个数较少的向量组线性表示的向量组一定线性相关.

证明：已知向量 $\alpha_j\,(j=1,2,\ldots,r)$ 可经向量 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示，设

$$\alpha_j = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \cdots + a_{sj}\beta_s$$

$$= [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s]\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{bmatrix}, (j = 1,2,\cdots, r)$$

- 将 $j=1,2,\ldots,r$ 共 r 个线性表示合在一起，用矩阵表示

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sm} \end{bmatrix}$$

$$\overset{记}{=\!=}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]A$$

- 于是 $[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+,\cdots,+k_r\alpha_r]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix}$

$$=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]AK \qquad (3.8) \qquad K=[k_1,k_2,\cdots,k_r]^T$$

- 若证 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性相关，需证右端 = 0 .

$$[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+,\cdots,+k_r\alpha_r]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]AK \qquad (3.8)$$

其中：A $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sr} \end{bmatrix}, \quad s<r$

- 按线性相关定义，若能找到不全为零的数 $k_1, k_2, ..., k_r$ 使上式等于零，即证明了向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性相关.
- 由齐次线性方程组 $AX=0$，由已知得

$$r_A \le \min(r,s)=s<r$$

- A的秩小于未知量的个数，故齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解．设其为 $K=[k_1, k_2, ..., k_r]^T$，即 $AK=0$，代入（3.8)得

$$[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+,\cdots,+k_r\alpha_r]=0$$

- 即我们能找到不全为零的数使上式等于零.　　　证毕

推论 1：设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示，若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相无关，则 $r \leqslant s$.

- 推论1是定理 3.6的逆否命题：即向量组若线性无关，则一定不能被比它数目小的向量组线性表示.

推论 2：任意两个等价的线性无关向量组所含向量个数相等.

- 能够相互线性表示的向量组称为等价向量组.

证明：设线性无关向量组 I 与 II 等价，分别含有 r 和 s 个向量.

- 由推论1， I 可由 II 线性表示 => $r \leqslant s$
- II 可由 I 线性表示 => $s \leqslant r$
- 所以 $s = r$

- 布置习题 P 139:

7．8.

11. （1）、(2)

13.

15. （1）、(3)

17.

四、极大线性无关组与向量组的秩

- 作用与意义：能完全代表原向量组的最小部分组.

定义 3.6：设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的一个部分向量组，若它满足：

（1） 线性无关.

（2） 再加入原向量组任意其它一个向量(如果有的话)，所形成的新的部分向量组都线性相关.

则称向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}\right\}$$

线性无关

not span R^3

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right\}$$

A basis for R^3

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}\right\}$$

Span R^3 *but*

linear dependent

- 显然，一个向量组线性无关, 则它的极大线性无关组就是它本身.
- 向量组中只包含一个零向量时, 没有极大线性无关组.
- 任何含有非零向量的向量组一定有极大线性无关组.
- 由定理3.5可知，向量组的任一向量都可经该向量组的极大线性无关组线性表示.

☑ 向量组与它的极大线性无关组等价.

例：求向量组 $\alpha_1=[1,2,2]^T$，$\alpha_2=[1,0,-1]^T$，$\alpha_3=[2,2,1]^T$，$\alpha_4=[2,4,4]^T$，的极大线性无关组.

解：思路 — 利用定理3.3，向量组线性无关的充要条件是矩阵 A 的秩等于向量组向量的个数

- 向量组构成的矩阵 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2]{R_3-\frac{3}{2}R_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 经初等行变换后 $[\alpha_1,\alpha_2]\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，

- 初等行变换不改变列向量间的线性关系 — (秩)

- 矩阵$[\alpha_1, \alpha_2]$的秩为2，等于向量个数 (定理3.3)

  → α_1, α_2线性无关

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 同样可得矩阵[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$]、[$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$] 的秩为2，小于向量个数，线性相关；
- 因此 [α_1, α_2]是**极大线性无关组**.
- 另外，[α_1, α_3] [α_2, α_3] 等都是极大线性无关组，
- 所以，极大线性无关组不唯一.
- 但是，各极大线性无关组所含向量的个数相等.

定理:初等行变换不改变列向量间的线性关系

证明： 将列向量组构成矩阵 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$

- 则列向量组的线性相关性等价于线性方程组 $AX=0$ 解的情况…
- 对 $AX=0$ 进行初等行变换得新的方程组 $BX=0$，$BX=0$ 与 $AX=0$ 同解
- 而矩阵 B 列向量组的线性相关性与 $BX=0$ 解的情况等价
- 故 B 与 A 的列向量组的线性相关性等价，初等行变换不改变列向量间的线性关系。

求秩 — 初等行变换/初等列变换都可以使用

- 混合使用初等行/列变换亦可。

依据 ？

— “初等变换”（不论行列变换）

不改变矩阵的秩（P89，定理2.6）

- 上例引出如下极大线性无关组的定理：

定理 3.7：　一个向量组的任意两个极大线性无关组必等价，且所含向量的个数相等.

证明：由于向量组与其极大线性无关组等价，

- 等价关系具有传递性，所以一个向量组的任意两个极大线性无关组等价.
- 根据定理3.6推论2，任意两个等价线性无关组所含向量的个数相等，
- 所以，向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相等.

定义 3.7:向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为该向量组的 秩 (rank).

- 若将矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$的每一列(行)看作向量,
- 这n(m)个向量组的秩与矩阵的秩联系密切:

- 如果称矩阵的行向量组的秩为矩阵的行秩;
- 称矩阵的列向量组的秩为矩阵的列秩;

定理 3.8：矩阵的秩与矩阵各列(行)向量构成的向量组的秩相等.

或：矩阵的列秩 ＝ 矩阵的行秩
＝ 矩阵的秩

证明：设有矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

将A中各个列向量记作 $\alpha_j=\left[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right]^T \ (j=1,2,\cdots,n)$

要证明的是：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的秩等于矩阵的秩

- 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的秩为 n (n≤m)，
- 则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关，
- 由定理3.3知，矩阵的秩 $r_A = n$, 定理成立.

- 若向量组 $\alpha_{1,}\ \alpha_{2,\ldots,}\ \alpha_n$ 的秩为 r＜n，则 $\alpha_{1,}\ \alpha_{2,\ldots,}\ \alpha_n$ 的极大线性无关组包含 r 个向量，
- 不妨设 $\alpha_{1,}\ \alpha_{2,\ldots,}\ \alpha_r$ 为 $\alpha_{1,}\ \alpha_{2,\ldots,}\ \alpha_n$ 的极大线性无关组，则它们组成的矩阵

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix}$$ 的秩为r,

因 B 包含A中，故有

$$r_B = r \le r_A$$

要证明：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的秩等于矩阵的秩

- 还需证 $r \geqslant r_A$ ：

⇨ 只要证明 A 所有的 $r+1$ 阶子式全为零.

- 反证法:假设A有一个 $r+1$ 阶子式不为零,
- 那么该 $r+1$ 阶子式对应的矩阵的秩等于$r+1$,
- 该子式所对应的 $r+1$ 个向量线性无关,
- 但，它们可经向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表示,
- 则得 $r+1 \leqslant r$ (定理3.6 推论1, p124)，矛盾.
- 所以A 所有 $r+1$ 阶子式全为零， $r \geqslant r_A$

- 综上得 $r_A = r$，即矩阵 A 的秩等于 A 的列秩.
- 由 $r(A) = r(A^T)$，
- 而矩阵 A 的各行向量就是 A^T 的各列向量，
- 于是 A 的秩也等于 A 的行秩，证毕.

证2：由行列式不为零的充要条件是其对应的行(列)向量组线性无关

- 设矩阵A的秩为r，A 的列向量组的秩为 s
- 由矩阵的秩 $r_A = r$ ⇨ A 必有r 阶子式非零
  ⇨ 该子式对应的(短)列向量组线性无关
  ⇨ 该 (短)列向量组所在的A的(长)向量组线性无关
  ⇨ 由向量组的秩的定义，可知 $r \leqslant s$.
- 由 A 的列向量组的秩为 s
  ⇨ 其极大无关组有 s 个列向量
  ⇨ 该极大无关组构成的矩阵必包含s 阶非零 子式
  ⇨ 该矩阵是 A 的子阵，可知 $s \leqslant r$
- 即矩阵 A 的秩等于 A 的列秩.

例：设A, B分别为$m\times l$、$l\times n$ 阶矩阵，求证 $r_{AB}\leqslant r_A$.

证明：设 C＝AB，将 A, C 按列分块

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l] \qquad C=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n]$$

- 设 B = $[b_{ij}]_{l\times n}$, 由 C＝AB 得

$$[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{l} b_{i1}\alpha_i,\sum_{i=1}^{l} b_{i2}\alpha_i,\cdots,\sum_{i=1}^{l} b_{in}\alpha_i\right]$$

- 所以 $\gamma_j = \sum_{i=1}^{l} b_{ij}\alpha_i, \quad j = 1,2,\cdots,n$
- 即，向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 可经向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性表示.
- 显然，$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 的极大线性无关组可经向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性表示.
- 且 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 可经自身的极大线性无关组线性表示.
- 于是，$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 的极大线性无关组可经 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 的极大线性无关组线性表示.

- 根据定理3.6推论1，
- $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 的极大线性无关组的向量个数 $\leqslant$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$的极大线性无关组的向量个数.
- 再由定理3.8得 $r_{AB} \leqslant r_A$， 证毕.
- 更简单的表述？

矩阵 AB 的列向量组可由矩阵A的列向量组线性表示，故： $r_{AB} \leqslant r_A$