机器人学导论

Introduction to Robotics

张 文 强

Tel: 51355536

Email: wqzhang@fudan.edu.cn

地址：计算机楼314

位置的正运动学方程

- 笛卡儿(台式,直角)坐标系统
  - 没有旋转运动,只有平移
  - 线性驱动机构,如液压活塞

$$
{}^{R}T_{P} = T_{cart} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

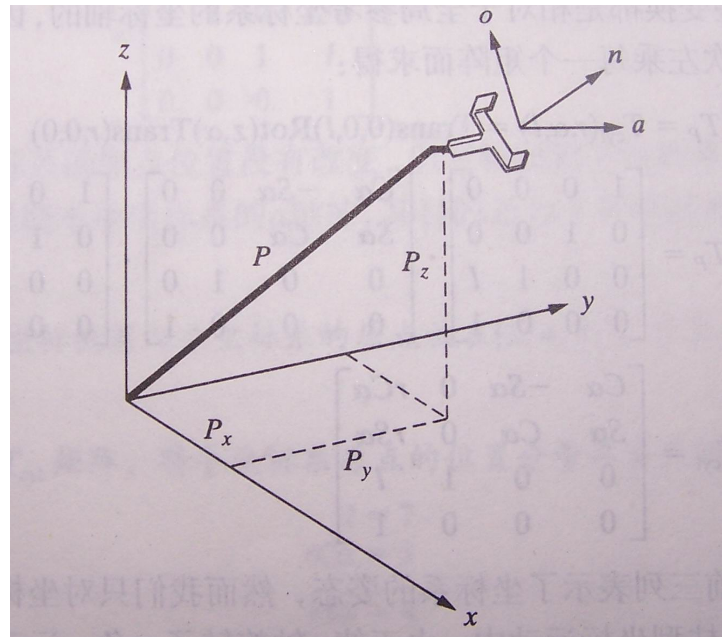


图 2.18　直角坐标

□ 圆柱坐标系统

- 两个线性平移运动和一个旋转运动

$$
{}^{R}T_{P} = T_{cyl}(r,\alpha,l) = Trans(0,0,l)Rot(z,\alpha)Trans(r,0,0)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

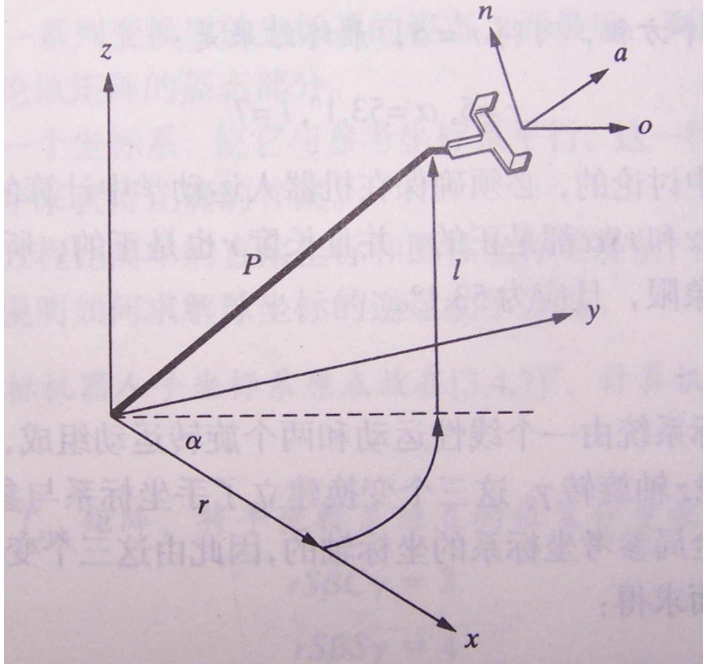


图 2.19　圆柱坐标

球坐标系统

- 一个线性运动和两个旋转运动

$$
{}^{R}T_P = T_{sph}(r,\beta,\gamma) = Rot(z,\gamma)Rot(y,\beta)Trans(0,0,r)
$$

$$
= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

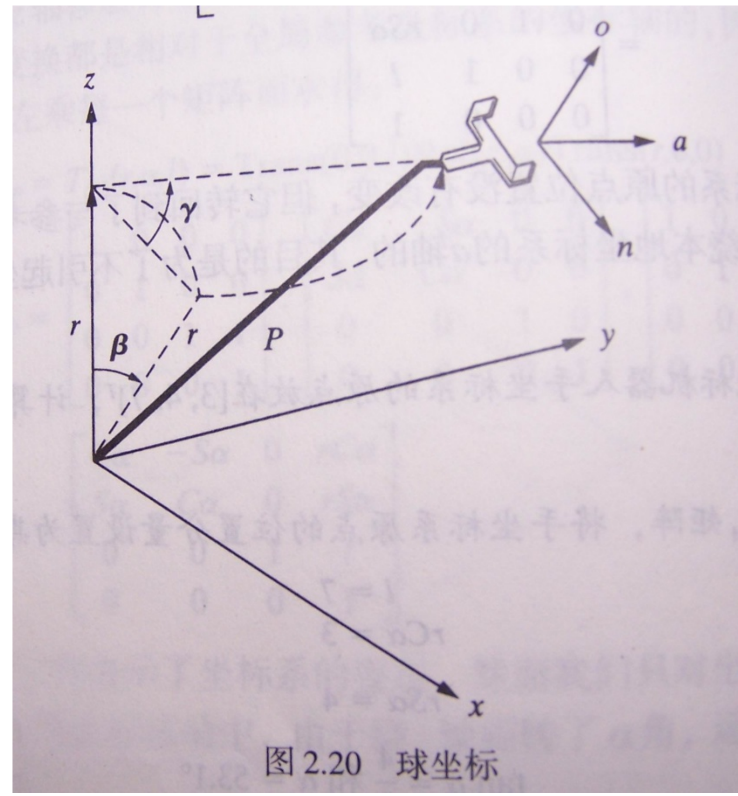
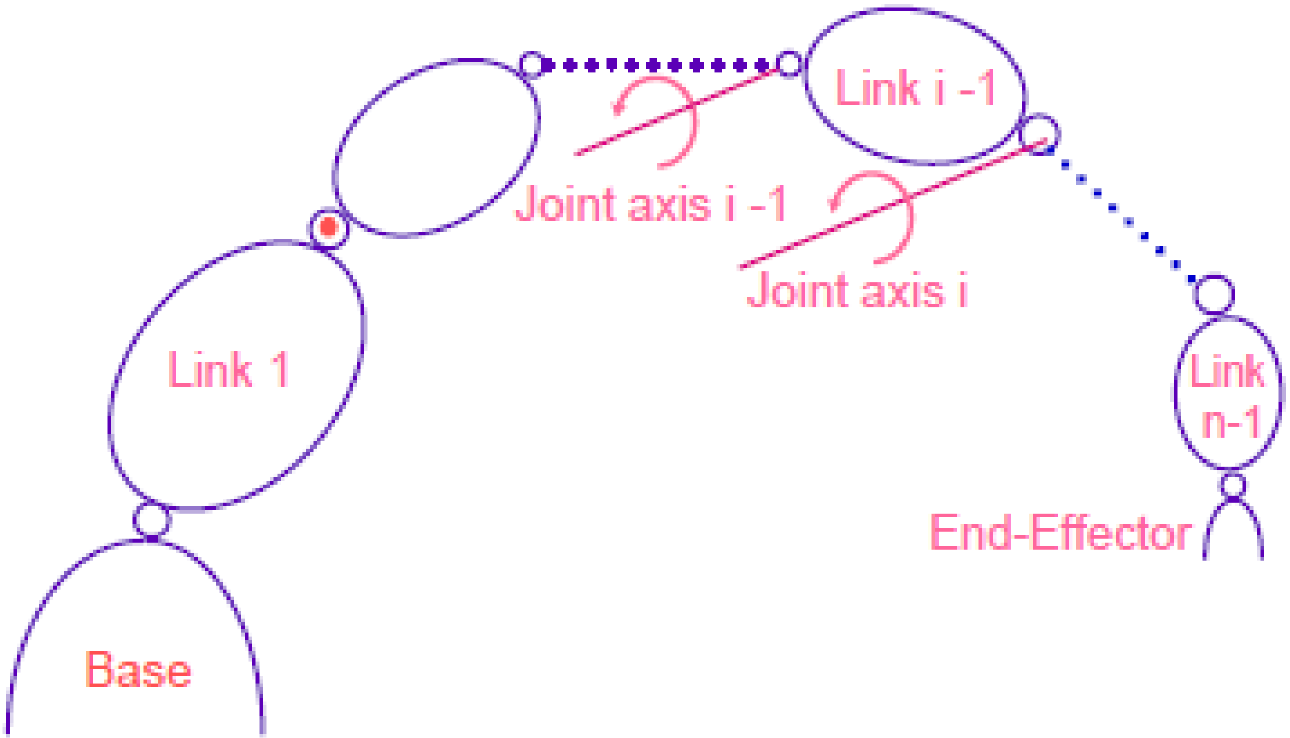


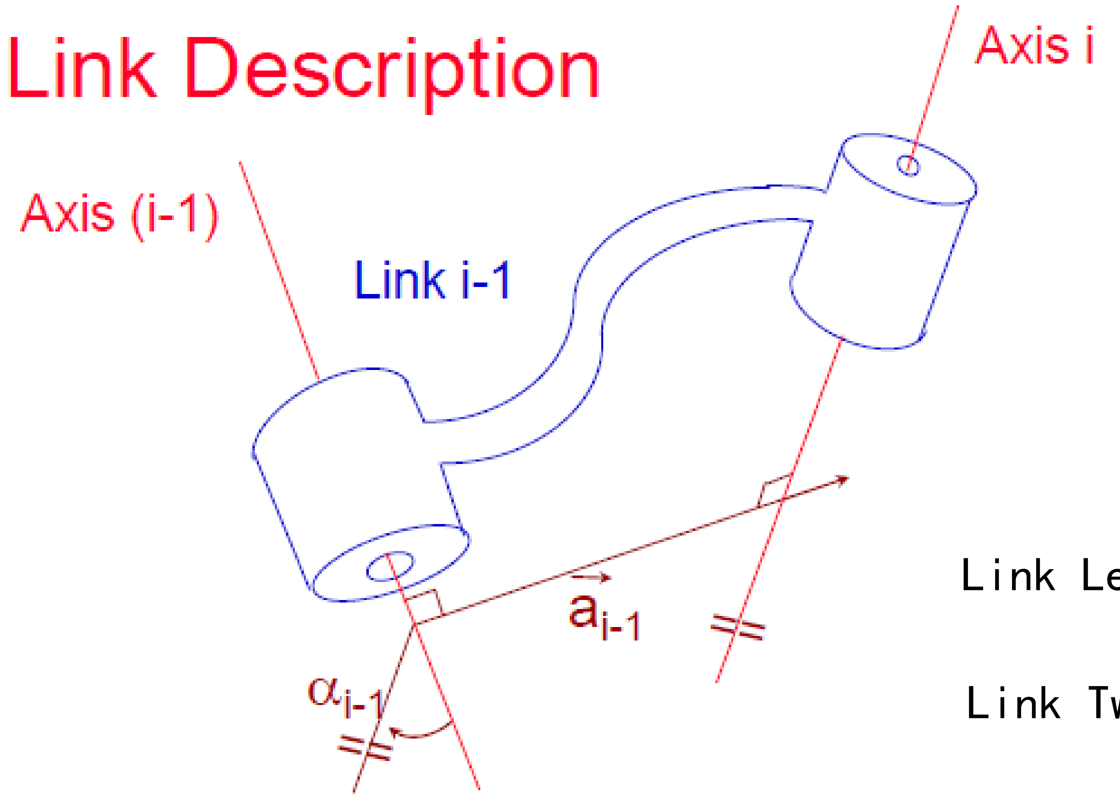
图 2.20 球坐标

- Link Description
- Denavit-Hartenberg Notation

Manipulator



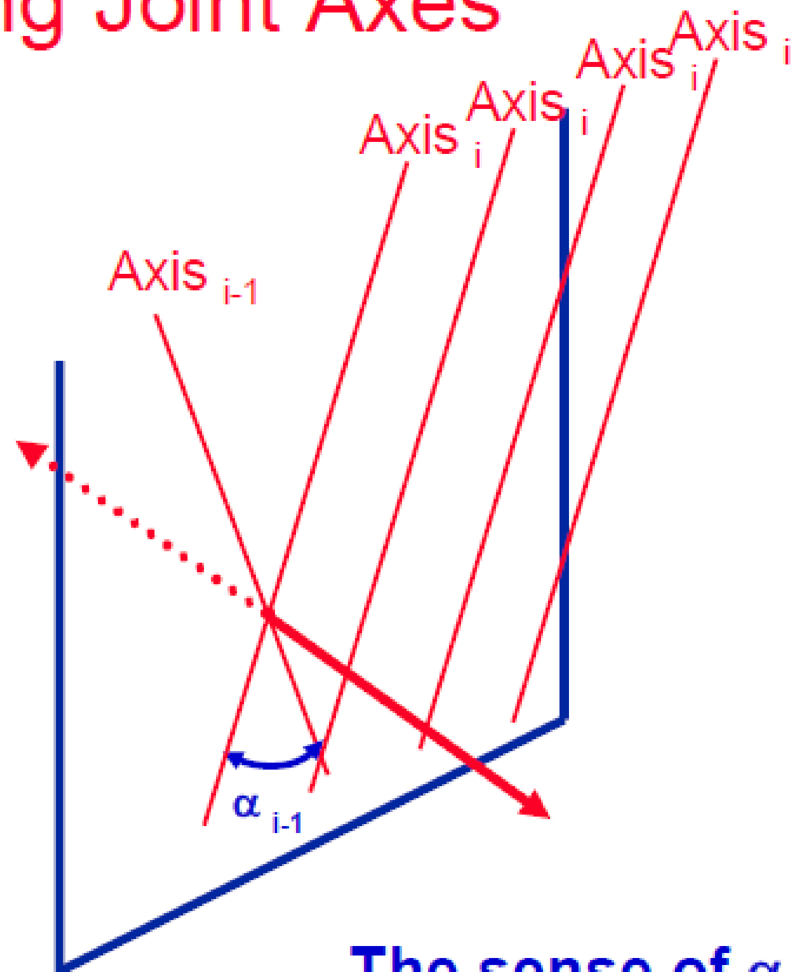
Link



Link Length: a_{i-1}

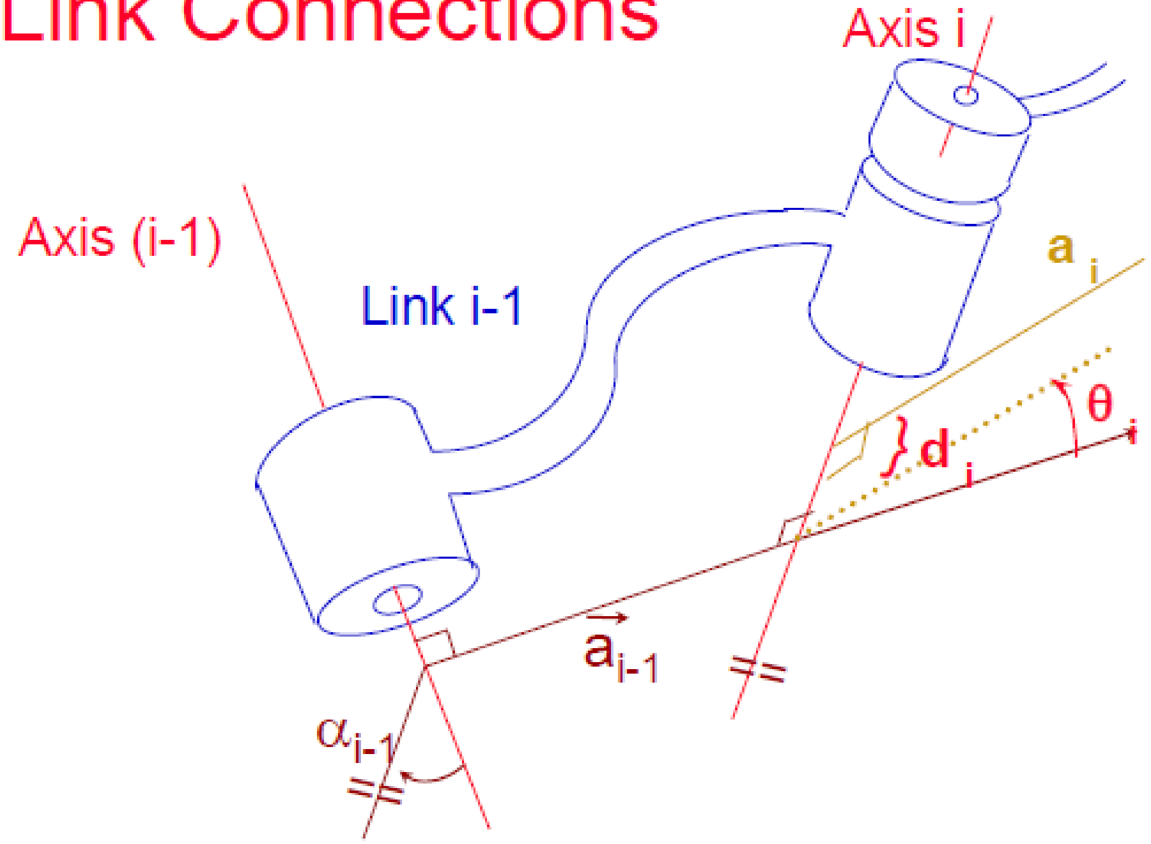
Link Twist: α_{i-1}

Intersecting Joint Axes



The sense of α_{i-1} is free

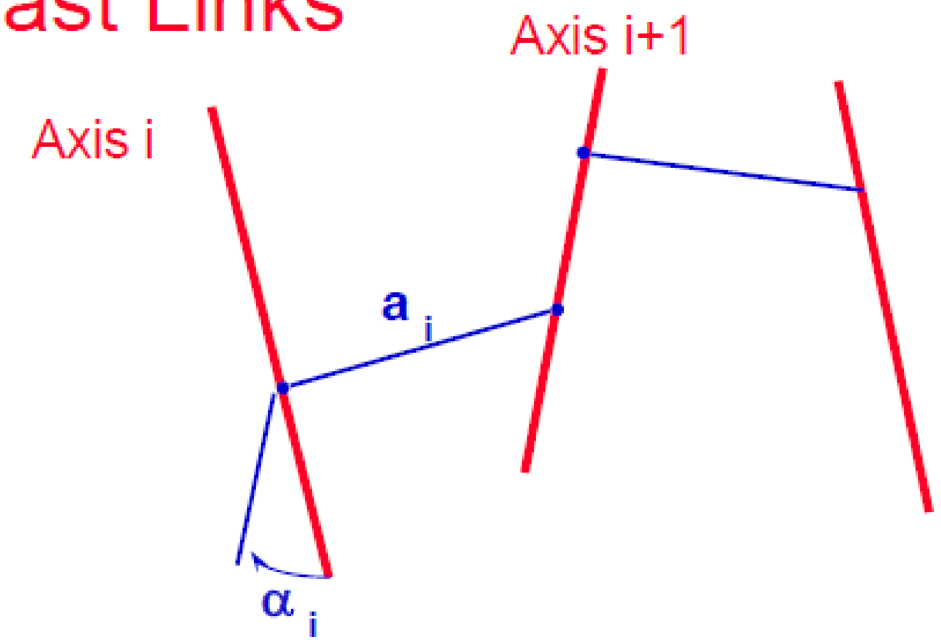
Link Connections



d $_i$: Link Offset -- variable if joint i is *prismatic*

θ $_i$: Joint Angle -- variable if joint i is *revolute*

First & Last Links



a_i and α_i depend on joint axes i and i+1

Axes 1 to n: determined

$\Rightarrow$ $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ and $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$

Convention: $\boxed{a_0 = a_n = 0 \text{ and } \alpha_0 = \alpha_n = 0}$

机器人运动学方程的**D-H**表示法

- 1955年，Denavit, Hartenberg在“ASME Journal of Applied Mechanics”上发表文章提出D-H模型
- 已成为机器人表示和运动建模的标准方法

关节n　　　　　关节n＋1　　关节n＋2

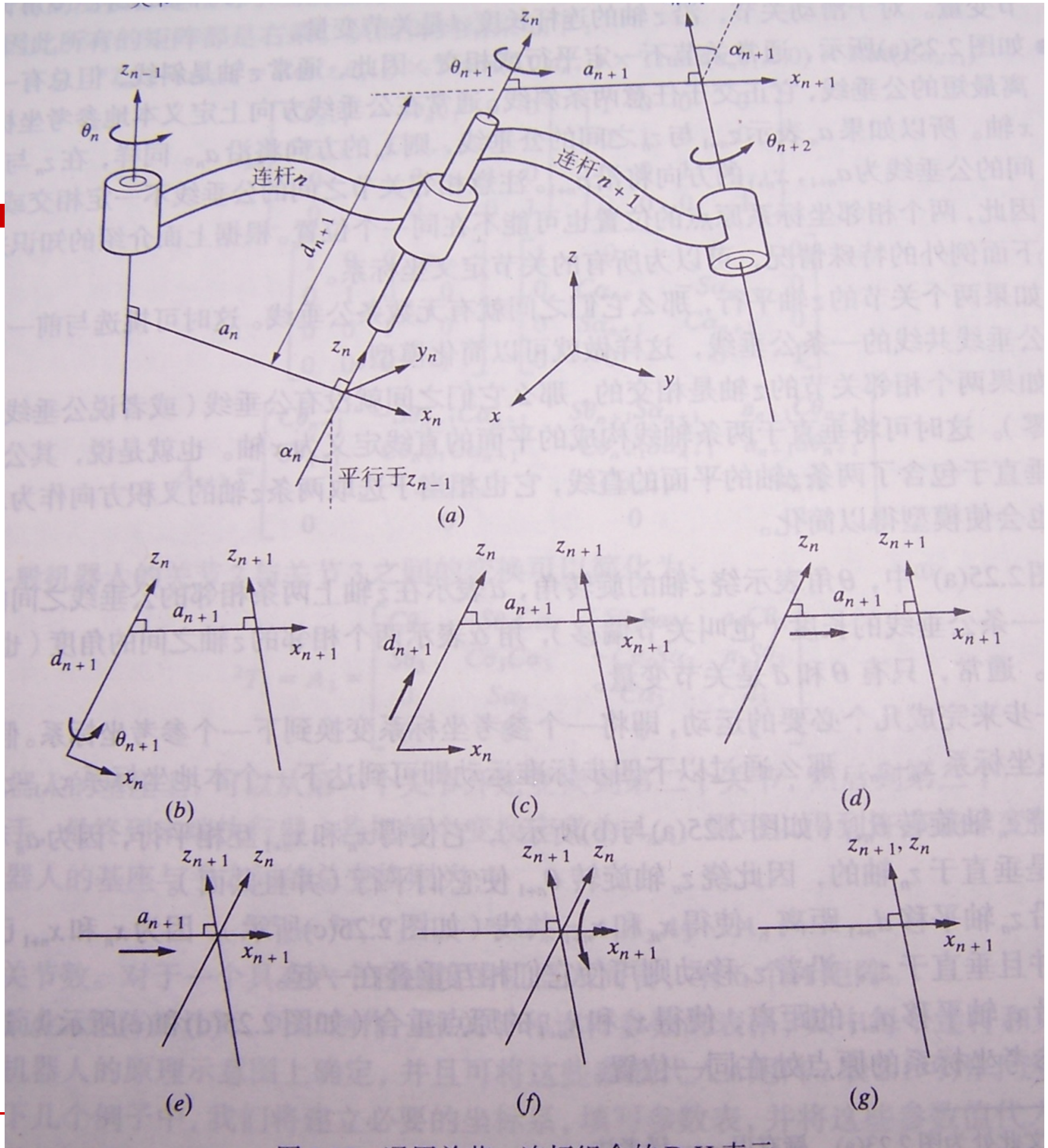


图 2.25　通用关节－连杆组合的 D-H 表示

- ◆ 为每个关节指定本地的参考坐标系；
- ◆ 各个参考坐标系之间的变换运动

为每个关节指定本地参考坐标系

- 所有关节均用Z轴表示；关节n处的下标为n-1，

  对旋转关节，关节变量是绕z轴的旋转角（θ）；对滑动关节，关节变量是沿z轴的连杆长度。
- 通常z轴是斜线，在公垂线方向上定义本地参考坐标系的x轴：
- 如果两个关节的z轴平行，有无数条公垂线，取前一个关节的公垂线共线的公垂线，以简化模型；
- 如果两个相邻关节的z轴是相交的，则没有公垂线。选取两条z轴的叉积方向作为x轴。

四个关键的参数：

θ角表示绕z轴的旋转角；d表示在z轴上两条相邻的公垂线之间的距离；a表示每一条公垂线的长度（即关节偏移）；α 表示相邻z轴之间的角度（关节扭转）

两个参考坐标系之间的变换

- 建立D-H坐标系后，可通过两个旋转、两个平移建立相邻坐标系Xn-Zn和 X_{n+1} — Y_{n+1} 之间的关系。

  1、绕Z_n轴转θ_{n+1}角，使X_n转到与X_{n+1}同一平面内；

  2、沿Z_n轴平移d_{n+1}，把X_n移到与X_{n+1}同一直线上；

  3、沿Xn轴平移a_{n+1}，把连杆n的坐标系移到使其原点与连杆n+1的坐标系原点重合的位置；

  4、绕X_n轴转α_{n+1}角，使Z_n转到与Z_{n+1}同一直线上；

- 右乘四个运动的四个矩阵，即得变换矩阵A
（所有的变换都是相对于当前的本地坐标系来测量和执行的，所以所有矩阵都是右乘）

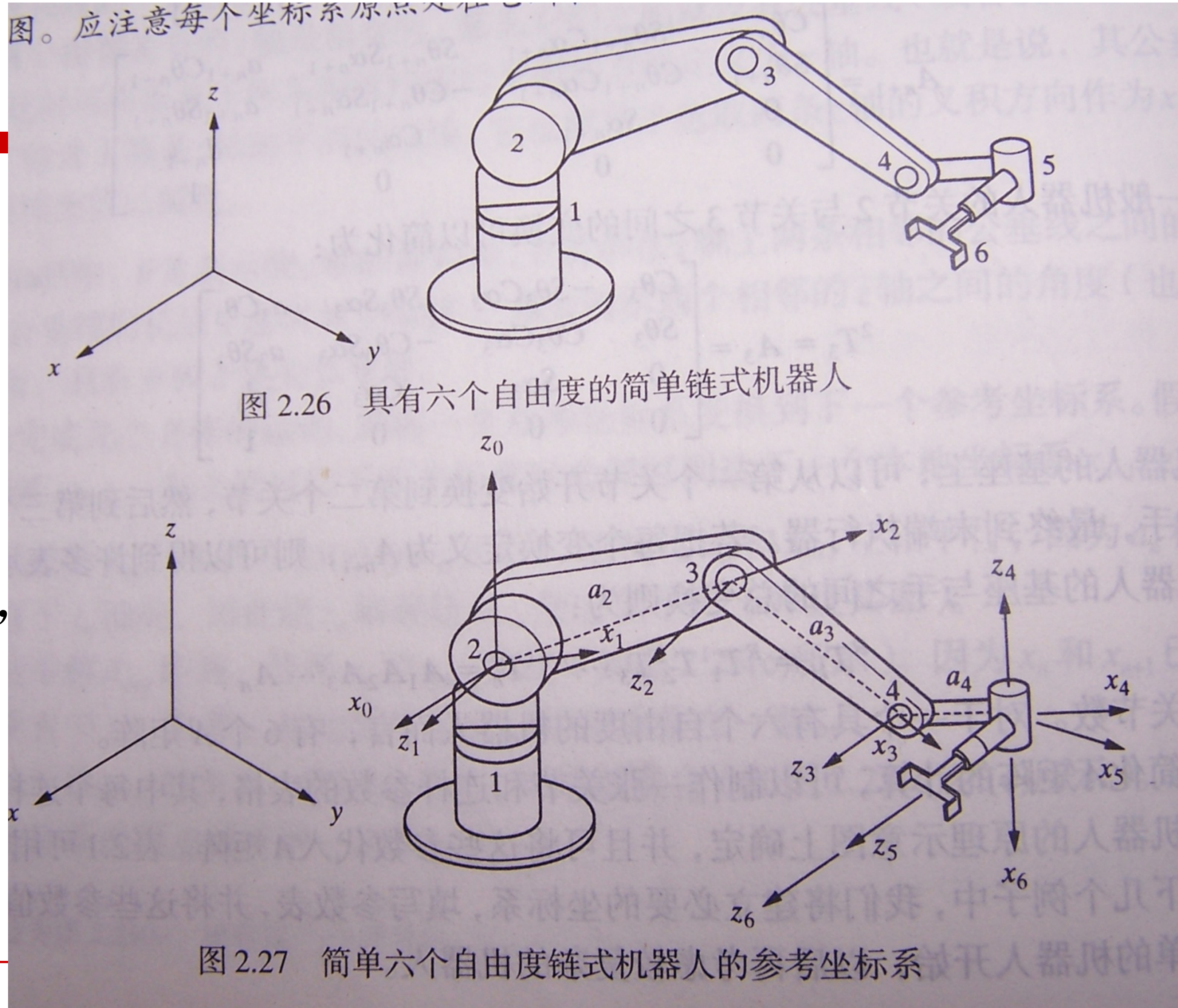
$$^{n}T_{n+1} = A_{n+1} = Rot(z,\theta_{n+1})Trans(0,0,d_{n+1})Trans(a_{n+1},0,0)Rot(x,\alpha_{n+1})$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_{n+1} & -s\theta_{n+1}c\alpha_{n+1} & s\theta_{n+1}s\alpha_{n+1} & a_{n+1}c\theta_{n+1} \\ s\theta_{n+1} & c\theta_{n+1}c\alpha_{n+1} & -c\theta_{n+1}s\alpha_{n+1} & a_{n+1}s\theta_{n+1} \\ 0 & s\alpha_{n+1} & c\alpha_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 对于具有n个关节、n个自由度的机器人手，基座与手之间的总变换为：

$$^{R}T_{H} = {}^{R}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3}\ldots{}^{n\text{-}1}T_{n} = A_{1}A_{2}A_{3}\ldots A_{n}$$

- 例2.19，图示简单机器人，根据D-H表示法，建立必要的坐标系，并填写相应的参数表。



确定坐标系

- x_0为固定坐标轴，表示机器人的基座，方便起见，选择与参考坐标系的x_0轴平行；
- 关节2处设定z_1，x_1垂直于z_0和z_1；
- X_2在z_1和z_2之间的公垂线方向上， X_3在z_2和z_3之间的公垂线方向上， X_4在z_3和z_4之间的公垂线方向上；
- z_5和z_6平行且共线；
- 可以在第一个和最后一个坐标系之间建立其他的中间坐标系，而保持机器人的总变换不变。

机器人参数表

- 每个关节和连杆的参数值可从机器人的原理示意图中获得；
- 各参数以备代入A矩阵。

#	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	90
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0
4	θ_4	0	a_4	-90
5	θ_5	0	0	90
6	θ_6	0	0	0

□ 坐标系的变换运动

- 0－1：旋转运动将x_0转到了x_1；沿z和x的平移矢量均为0；绕x_1旋转90度运动将z_0转到了z_1；　**2个旋转**
- 1－2：绕z_1旋转 θ_2，将x_1转到x_2；沿x_2轴移动距离a_2，使12坐标系原点重合。由于两个z轴是平行的，没有必要绕x_2轴旋转。**1个旋转，1个平移**
- 2－3：绕z_2旋转 θ_3，将x_2转到x_3；沿x_3轴移动距离a_3，使23坐标系原点重合。由于两个z轴是平行的，没有必要绕x_3轴旋转。**1个旋转，1个平移**
- 3－4：绕z_3旋转θ_4 ，将x_3转到x_4；沿x_3轴移动距离a_4，使34坐标系原点重合。绕x_4轴旋转-90度，将z_3转到了z_4 。**2个旋转，1个平移**
- 4－5：绕z_4旋转 θ_5，将x_4转到x_5；45坐标系原点重合，不需平移运动。绕x_5轴旋转90度，将z_4转到了z_5 。**2个旋转**
- 5－6：绕z_5旋转　，将x_5转到x_6；56坐标系原点重合，不需平移运动。两坐标系z轴重合，不需绕x轴的旋转运动 。**1个旋转**

$$A_1 = R(z,\theta_1)T(0,0,0)T(0,0,0)R(x,90)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C90 & -S90 & 0 \\ 0 & S90 & C90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = R(z,\theta_2)T(0,0,0)T(a_2,0,0)R(x,0)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 a_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & S\theta_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = R(z,\theta_3)T(0,0,0)T(a_3,0,0)R(x,0)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & C\theta_3 a_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & S\theta_3 a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = R(z,\theta_4)T(0,0,0)(a_4,0,0)R(x,-90)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_4 & 0 & -S\theta_4 & C\theta_4 a_4 \\ S\theta_4 & 0 & C\theta_4 & S\theta_4 a_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = R(z,\theta_5)T(0,0,0)T(0,0,0)R(x,90)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_5 & 0 & S\theta_5 & 0 \\ S\theta_5 & 0 & -C\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = R(z,\theta_6)T(0,0,0)T(0,0,0)R(x,0)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 & 0 & 0 \\ S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令：

$$S\theta_1 C\theta_2 + C\theta_1 S\theta_2 = S(\theta_1 + \theta_2) = S_{12}$$

$$C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 = C(\theta_1 + \theta_2) = C_{12}$$

则机器人基座和手之间的总变换为：

$$^{R}T_H = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

$$= \begin{bmatrix} C_1(C_{234}C_5C_6 - S_{234}S_6) - S_1S_5S_6 & C_1(-C_{234}C_5C_6 - S_{234}C_6) + S_1S_5S_6 & C_1(C_{234}S_5) + S_1C_5 & C_1(C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2) \\ S_1(C_{234}C_5C_6 - S_{234}S_6) + C_1S_5S_6 & S_1(-C_{234}C_5C_6 - S_{234}C_6) - C_1S_5S_6 & S_1(C_{234}S_5) - C_1C_5 & S_1(C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2) \\ S_{234}C_5C_6 + C_{234}S_6 & -S_{234}C_5C_6 + C_{234}C_6 & S_{234}S_5 & S_{234}a_4 + S_{23}a_3 + S_2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

机器人的逆运动学解

- 为了求解某个运动角度，可以对变换矩阵左乘相应的坐标系变换矩阵，使得方程右边不再包含该角度，求取正余弦值。
- 若机器人的期望位姿如下，求各关节运动参数

$$
{}^{R}T_{H} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$\theta_1 = arctg(\frac{p_y}{p_x})$$

$$or \quad \theta_1 = 180 + arctg(\frac{p_y}{p_x})$$

$$C_3 = \frac{(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4)^2 + (p_z - S_{234} a_4)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2 a_2 a_3}$$

$$\theta_{234} = arctg(\frac{a_z}{C_1 a_x + S_1 a_y}) \text{ or } \theta_{234} = arctg(\frac{a_z}{C_1 a_x + S_1 a_y}) + 180$$

$$\theta_2 = arctg \frac{(C_3 a_3 + a_2)(p_z - S_{234} a_4) - S_3 a_3 (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4)}{(C_3 a_3 + a_2)(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) + S_3 a_3 (p_z - S_{234} a_4)}$$