第二章：矩阵

A. 概念与理论：

(1) 矩阵/可逆矩阵/分块矩阵/伴随矩阵

(2) 特殊矩阵：单位/零/对角/准对角/对称/反对称/正交/三角阵

(3) 可逆矩阵的性质

(4) 矩阵的初等变换，初等变换的性质

(5) 矩阵的标准形

(6) 矩阵的秩

B. 计算方法与运算规律：

(1) 矩阵/分块矩阵的基本运算：加/减/数乘/乘/乘幂/转置

(2) 求矩阵的逆常用两种方法：a. 利用伴随矩阵阵；
b.利用矩阵的初等变换.

(3) 求矩阵的秩常用两种方法：行列式法：a. 求最高阶非零子式；b. 将矩阵化为阶梯形(求秩的主要方法).

- 矩阵A的逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{A}}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$$

- 矩阵A的迹tr(A)

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- 矩阵A的转置$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$和伴随矩阵$\mathbf{A}^*$

- $$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

- 矩阵是一个数表(有顺序有组织的数据块)
- 行列式仅仅是对方阵的运算之一

矩阵求逆、求转置、伴随矩阵（A是n阶方阵）

$$(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}, \qquad (\mathbf{A}^{*})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{*}, \qquad (\mathbf{A}^{*})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{*}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \qquad (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{A}^{*})^{*} = |\mathbf{A}|^{n-2}\,\mathbf{A}$$

$$|k\mathbf{A}| = k^{n}\,|\mathbf{A}|, \qquad (k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}, \qquad (k\mathbf{A})^{*} = k^{n-1}\mathbf{A}^{*}$$

$$|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}| = |\mathbf{A}|, \qquad |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}, \qquad |\mathbf{A}^{*}| = |\mathbf{A}|^{n-1}$$

设A是n阶矩阵，如$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$，则称A是正交矩阵（A是正交矩阵等价于$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$）

例：设A是3阶正交矩阵，按定义

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用矩阵乘法，易见

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0$$

这说明矩阵A的每个列向量都是单位向量且相互正交。

关于分块矩阵的运算法则

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} A^{T} & B^{T} \\ C^{T} & D^{T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} B^{n} & 0 \\ 0 & C^{n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

初等矩阵

（1）初等矩阵

单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵为初等矩阵。例如

$$\mathbf{F}_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_3(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{12}(-5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-5&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_{21}(3)=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

（2）初等矩阵的性质

➢ 用初等矩阵F左（右）乘A，所得FA(AF)就是对矩阵A作了一次与F同样的行（列）初等变换 ；

➢初等矩阵均可逆，且其逆是同类型的初等矩阵，即

$$\mathbf{F}_{ij}^{-1}=\mathbf{F}_{ij},\quad \mathbf{F}_i^{-1}(k)=\mathbf{F}_i(\frac{1}{k}),\quad \mathbf{F}_{ij}^{-1}(k)=\mathbf{F}_i(-k)$$

题型一：矩阵的乘法运算

例1：设 $\alpha=(1,2,3,4)$，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$，$A=\alpha^T\beta, B=\beta\alpha^T$，计算 A,B,A^n。

解：

$$A=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4}\\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\beta\alpha^T=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=1\times1+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{3}\times3+\frac{1}{4}\times4=4$$

题型一：矩阵的乘法运算

例1：设 $\alpha=(1,2,3,4)$ ，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$ ，$A=\alpha^T\beta, B=\beta\alpha^T$ ，计算 A, B, A^n 。

$$A^n=(\alpha^T\beta)^n=\underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)}_{n}$$

利用矩阵乘法的结合律：

$$=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{n-1}\beta$$

$$=\alpha^T 4^{n-1}\beta \quad =4^{n-1}(\alpha^T\beta)$$

$$=4^{n-1}\bullet A \quad =4^{n-1}\bullet\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4}\\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1\end{bmatrix}$$

复旦大学

题型二：矩阵求幂

常用方法：先算出 A^2, A^3 ，再用数学归纳法证明。

例2：设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ ，证明 $A^n=\begin{bmatrix}1&n&C_n^2\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$

解： $A^2=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&C_2^2\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&C_3^2\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$ n=2,n=3时，命题成立。

题型二：矩阵求幂

设n=k时，命题成立，即：$A^k=\begin{bmatrix}1 & k & C_k^2\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

也可将矩阵A写成单位阵和上三角阵的和，利用二项式展开求解。

当n=k+1时，

$$A^{k+1}=A\bullet A^k=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & k & C_k^2\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & k+C_k^2\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & k+1 & k+\dfrac{k(k-1)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & \dfrac{(k+1)k}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & C_{k+1}^2\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

即n=k+1时，命题也成立。综上，命题得证。

题型三：求逆矩阵

例3：已知n阶矩阵A,满足 $A^2+A-4E=O$，求：（1）A^{-1}

（2）$(A-E)^{-1}$

分析：利用伴随矩阵或初等变换法可求逆矩阵，但此题矩阵A元素的具体形式未给出，应根据定义求解。

解（1）：　由 $A^2+A=4E$ ，则

$$A(A+E)=4E$$

即：
$$A\bullet\frac{A+E}{4}=E$$

所以：
$$A^{-1}=\frac{1}{4}(A+E)$$

题型三：求逆矩阵

例3：已知n阶矩阵A,满足 $A^2+A-4E=O$， 求：（1）A^{-1}

（2）$(A-E)^{-1}$

分析：利用伴随矩阵或初等变换法可求逆矩阵，但此题矩阵A元素的具体形式未给出，应根据定义求解。

解（2）： 由 $A^2+A-4E=O$ ，即

$$(A-E)(A+2E)-2E=O$$

$$(A-E)(A+2E)=2E$$

所以： $$(A-E)\bullet\frac{A+2E}{2}=E$$ 类似于因式分解

故： $$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$$

题型三：求逆矩阵

练习：　A,B均为n阶矩阵，且 $AB = A + B$，求 $(A-E)^{-1}$。

解：　因 $AB = A + B$，即

$$AB - A - B = O$$

$$AB - A - B + E = E$$

$$A(B-E) - (B-E) = E$$

即：　$$(A-E)(B-E) = E$$

故 $A-E$ 可逆，且

$$(A-E)^{-1} = B - E$$

题型三：求逆矩阵

例4：用初等行变换求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 4\end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

$$[A \mid E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-4)r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 6 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 9 & 6 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 6 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right]$$

因为A的变换矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 不是满秩矩阵，故A为不可逆矩阵。

题型三：求逆矩阵

例5：已知四阶方阵 $A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，求A的逆矩阵。

解：利用分块矩阵求逆：

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}\qquad A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\qquad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

题型四：有关伴随矩阵的计算

例6：设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\end{bmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$

解：由于 $|A|A^{-1}=A^*$，故：

$$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{24}&\frac{1}{12}&\frac{1}{8}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{12}&\frac{1}{8}&\frac{1}{6}\\0&0&\frac{1}{8}&\frac{1}{6}\\0&0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

题型四：有关伴随矩阵的计算

例7：已知n阶方阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$ ，求A中所有元素的代数余子式之和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$ 。

用初等变换求逆

解：

$$A^*=|A|A^{-1}=1\bullet\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=1$$

题型四：有关伴随矩阵的计算

例8： 已知A是n阶正交矩阵，证明A的伴随矩阵 A^* 也是正交矩阵 。

解：已知 $AA^T = E$ $\quad A^* = |A| A^{-1}$

所以， $A^* = |A| A^T$

$$A^*(A^*)^T = |A| A^T (|A| A^T)^T$$

$$= |A|^2 A^T A$$

$$= E$$

题型五：矩阵求秩

例9：讨论 λ 取值的范围，确定矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{bmatrix}$ 的秩。

解：用初等变换将A化为阶梯形矩阵，有：

$$A\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1\\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_4}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda+2 & -1-2\lambda\\ 0 & -1 & -5 & 10-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda+2 & -1-2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda-3 & 9-3\lambda\end{bmatrix}$$

则当 $\lambda=3$ 时，$R(A)=2$，$\lambda\neq 3$ 时，$R(A)=3$

题型五：矩阵求秩

例10：求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ (a_1+1)^3 & (a_2+1)^3 & (a_3+1)^3 & (a_4+1)^3 & (a_5+1)^3 \end{bmatrix}$ 的秩。

分析：观察矩阵的特点，此题可根据矩阵秩的定义，由高阶到低阶计算子式。

解：矩阵A是一个5阶矩阵，且：

$$A \ \underline{\underline{r_5-r_4-3r_3-3r_2-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即5阶子式等于0，再看A中是否有4阶子式不为0。

题型五：矩阵求秩

例10：求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ (a_1+1)^3 & (a_2+1)^3 & (a_3+1)^3 & (a_4+1)^3 & (a_5+1)^3 \end{bmatrix}$ 的秩。

可发现4阶范德蒙行列式：

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le 4}\left(a_i-a_j\right)\neq 0$$

因而A中不等于0的子式的最高阶数为4，故R(A)=4。

题型六：有关初等变换的问题

例11 求

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{2011} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2012}$$

解：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{12}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{13}$$

左乘初等矩阵就是对矩阵进行行变换；
右乘初等矩阵就是对矩阵进行列变换

所以

$$原式 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$