线 性 代 数
Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

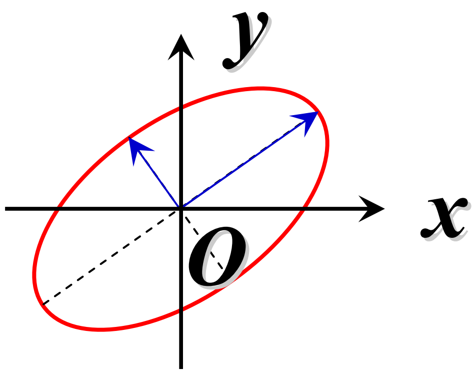
pliu@fudan.edu.cn

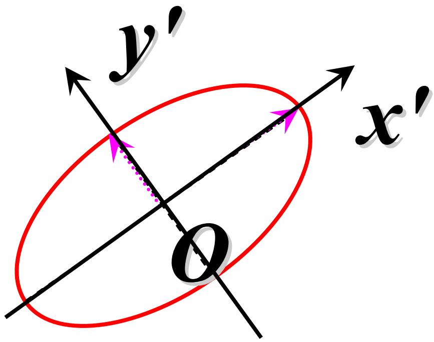
第六章　二 次 型

➤ 在平面几何中，对于以坐标原点为中心的二次有心曲线方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$

➤ 当**坐标系统**绕原点旋转适当角度θ后

$$\frac{x'^2}{a^2}\pm\frac{y'^2}{b^2}=1$$





$$[x,y]^T=Q[x',y']^T$$

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=y'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases}$$

➤ 化为标准方程(只含有平方项，交叉项消失)

—容易识别曲线类型、研究曲线性质

- 二次型源于十八世纪对二次曲线/曲面分类的讨论
- 高斯：二次型的正\负定等术语
- 柯西：方程是标准形时用二次项的符号进行分类
- 西尔维斯特、雅可比：二次型的惯性定律.
- 二次型在多元函数极值判定、概率论、运动稳定性理论以及现代控制理论中都有重要的应用.

§ 6.1 二次型的基本概念

定义 6.1：二次齐次多项式(齐次函数)

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{22}x_2^2 + \cdots\cdots\cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&+ a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

- 齐次—“次数相等”

称为 n 元二次型，简称二次型(quadratic form)；其中 x_n 是 n 个变量，系数 a_{ij} 是数域P中的数.

- 例如，实数域上的三元二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_1x_2+3x_1x_3+x_2^{\ 2}+4x_2x_3+3x_3^{\ 2}$$

- 具有实系数的二次型称为实二次型，具有复系数的二次型称为复二次型.

- 若令 $a_{ij}=a_{ji}$， $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$
- 则（1.1）式可以写成

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\ &+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (1.2)$$

➢ 把（1.2）式的系数排成矩阵，变量 x_i 排成向量，得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=X^TAX \qquad (1.3)$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

➢ (1.2)称为二次型的矩阵形式(matrix form)

- A 称为二次型的矩阵；且由于$a_{ij}=a_{ji}$，A 是对称阵.
- 矩阵A的秩也称二次型的秩，即：f 的秩 $=R(A)$

全权代表?

例： 把二次型用矩阵形式表示出来

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+x_2x_3$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0.5\\ -2 & 0.5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

➢ 对于二次型, 我们主要讨论它化简问题：通过变换将其简化为二次型的标准形

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2$$

$$= [y_1, y_2, \cdots, y_n] \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

这种只含平方项的二次型, 称为二次型的标准形 **(standard form)**.

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2$$

- 化二次型为标准形，需要寻找可逆(满秩)的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \cdots + c_{nn} y_n \end{cases}$$

- 也即，$\mathbf{X} = \mathbf{CY}$ **(1.4)**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- 令 $X=CY$ ($|C|\neq 0$，称非退化线性变换), 则有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(CY)^T A(CY)$$
$$=Y^T(C^T AC)Y=Y^T BY$$

- 由于 A 是对称阵

$$B^T=(C^T AC)^T=C^T A^T (C^T)^T=C^T AC=B$$

- 所以 B 也是对称阵

- 即一个二次型，变量为： $x_1,x_2,\cdots,x_n$

- 经过可逆变换仍为二次型，变量为：

$$y_1,y_2,\cdots,y_n$$

- 如果 Y^TBY 是标准形，则B就是对角阵
- 所以化二次型为标准形(平方和)的问题,实质上就是实对称阵对角化问题。
- 任何一个二次型，经满秩线性变换后，仍是二次型;
- 当 $|C| \neq 0$ 时，称 $X = CY$ 为满秩线性变换，或非退化线性变换.

§ 6.2 化二次型为标准形

一、配方法（拉格朗日配方法, square method）

(1) 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的平方项和乘积项集中，配方，再对剩余变量依次进行配方，直至得到标准形；

(2) 若二次型中不含有平方项，但是则先作可逆线性变换, 化二次型为含有平方项的二次型，然后再按 (1) 中方法配方，得到标准形.

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i, j)$$

例：化二次型为标准形，并求所用的满秩变换矩阵：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

解：先对 x_1 配平方，消去 x_1 x_2 项：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)-x_2^{\ 2}-4x_2x_3$$

$$=2(x_1-x_2)^2-x_2^{\ 2}-4x_2x_3$$

再对 x_2 配平方，消去 x_2 x_3 项：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1-x_2)^2-(x_2^{\ 2}+4x_2x_3+4x_3^{\ 2})+4x_3^{\ 2}$$

$$=2(x_1-x_2)^2-(x_2+2x_3)^2+4x_3{}^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$， 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

- 二次型化为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$$

- 也就是所用的满秩矩阵为 $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 所作的线性变换为 $\mathbf{X}=\mathbf{CY}$

例：化二次型为标准形，并求所用的满秩变换矩阵：

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+4x_2x_3$$

解：因二次型中仅含交叉项，所以令：
$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

代入原二次型可得：

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2y_1^2+2y_2^2+4y_1y_3-4y_2y_3$$

再利用配方法：

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2(y_1{}^2-2y_1y_3+y_3{}^2)+2(y_2{}^2-2y_2y_3+y_3{}^2)$$

$$=-2(y_1-y_3)^2+2(y_2-y_3)^2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2(y_1-y_3)^2+2(y_2-y_3)^2$$

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$， 即 $\begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases}$

- 二次型化为标准形： $f(x_1,x_2,x_3)=-2z_1^2+2z_2^2$
- 所作的线性变换为 $\begin{cases} x_1=z_1+z_2+2z_3 \\ x_2=z_1-z_2 \\ x_3=z_3 \end{cases}$
- 即：$X=CZ$，所用满秩矩阵为 $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

二、用正交变换化实二次型为标准形

- 用正交变换化二次型为标准形，有
  保持几何形状不变的优点（配方法无)？
- 由矩阵对角化理论可得如下定理：

定理 6.1:对于实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

一定能找到一个正交阵P，使得经过正交变换

X=PY

把二次型化为标准形 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是实二次型 f 的矩阵A的全部特征值.

证明：设 二次型 f 的矩阵为 A，则 A 是一个实对称阵，

由定理 5.13，一定能找到一个正交阵P，使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的全部特征值.

作正交变换 X=PY，则二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= X^T AX \\ &= (PY)^T A(PY) = Y^T (P^T AP)Y \\ &= Y^T [diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)] Y \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 . \end{aligned}$$

证毕.

例：化二次型为标准形，并求所用的满秩变换矩阵：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

解：二次型的矩阵表示式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=X^TAX$$

先求 A 的特征值与特征向量：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

∴ A 的特征值为 $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=4,\quad \lambda_3=-2$

- A为实对称矩阵，可求得3个两两正交的特征向量，再将它们单位化，可得

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 所求正交阵为 $P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- 作正交变换 $X = PY$，在此变换下二次型化为标准形：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX = Y^T (P^T AP)Y$$

$$= [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$$

- 对照 P.235-236 例1:
- 配方法得到标准形: $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$
- 正交变换法得到标准形: $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$
- 二次型的标准形不唯一.
- 所用的满秩线性变换不同，标准形一般也不同.
- 但是它们似乎有某些共性，例如平方项的个数;

  取正号的平方项个数;

  取负号的平方项个数...

- 布置习题 P 251:

1. (1) 、(3)
2. (2) 、(4)
3. (2) 、(4)
5. (1) 、(3)
6. (1) 、(3)
7. 8.
10. 11.

§ 6.3 惯 性 定 理

定义 6.2：二次型的标准形中，系数不为零的平方项的个数，等于该二次型矩阵的秩，与所作的满秩线性变换无关.

证明：设 二次型 f 的矩阵为 A ，经满秩线性变换

$\mathbf{X}=\mathbf{CY}$　后化为标准形，即

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T A X = Y^T (C^T A C) Y$$

$$= b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_r y_r^2 \quad (r \le n, b_i \ne 0)$$

显然，**r** 即对角阵 $\mathbf{C^TAC}$ 的秩，即 $r = r_{C^T AC}$

又因为 **C** 是满秩阵，**A** 左乘或右乘 **C** 后，秩不变

$$\therefore r_A = r = r_{C^T AC}$$　　证毕.

- 二次型的矩阵A的秩也称为二次型的秩，

即：f 的秩$=R(A)$.

在标准形中系数为正的平方项的个数 p，与系数为负的平方项的个数 r−p 也是唯一确定的(正、负惯性指数)

- 为证明这一点，我们先指出，

任何实二次型都可经满秩线性变换化为系数都是″+1″或“−1”的最简形式：

- 设二次型经满秩线性变换 $\mathbf{X}=\mathbf{CY}$ 化为标准形

$$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\cdots+b_py_p^2-b_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-b_ry_r^2$$

其中$b_i>0\ (i=1,2,\cdots,r)$.

➢ 再作满秩线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{b_1}} z_1 \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{b_2}} z_2 \\ \quad\vdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{b_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \quad\vdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

➢ 可得到 $f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$

☑ 称为二次型的**规范形**(normalized form).

➢ 二次型的标准形不唯一，但**规范形唯一**

— 即规范型中**正项**和**负项个数**由原二次型唯一确定.

定理 6.3(惯性定理，**Inertia Law**)：任何一个实二次型都可经适当的满秩线性变换化成唯一的规范形.

证明：设 二次型 f 经满秩线性变换 $X=CY$ 化为规范形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

- 又设 f 经另一满秩线性变换 $X=DZ$ 化为规范形

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

- 只要证明 p = s，就证明了规范形的唯一性.

- 用反证法，设 p > s , 则有

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$= z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2 \qquad (3.6)$$

- 由两个满秩线性变换的形式 $X = DZ, X = CY$

$$Z = D^{-1}X = D^{-1}CY = GY \qquad (3.7)$$

$$\text{记 } G = D^{-1}C = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Z = GY \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n \\ z_2 = g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \cdots + g_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = g_{n1}y_1 + g_{n2}y_2 + \cdots + g_{nn}y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n \\ z_2 = g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \cdots + g_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = g_{n1}y_1 + g_{n2}y_2 + \cdots + g_{nn}y_n \end{cases}$$

- **设 p > s**

- 作齐次方程组

  (3.9)

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n &= 0 \\ \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots &\quad \cdots \\ g_{s1}y_1 + g_{s2}y_2 + \cdots + g_{sn}y_n &= 0 \end{aligned}\right\} s \\ \left.\begin{aligned} y_{p+1} &= 0 \\ &\vdots \\ y_n &= 0 \end{aligned}\right\} n\text{-}p \end{cases}$$

- 方程组有非零解，设其中一个非零解为

$$\overline{Y} = [k_1, k_2, \cdots, k_p, k_{p+1}, \cdots, k_n]^T$$

显然，其中 $k_{p+1} = \cdots = k_n = 0$

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2 \qquad (3.6)$$

$\bar{Y} = [k_1, k_2, \cdots, k_p, k_{p+1}, \cdots, k_n]^T$，其中：$k_{p+1} = \cdots = k_n = 0$

而 $k_1, k_2, \cdots, k_p$ 不全为零 ，将 $\bar{Y}$ 代入 (3.6)左边：

$$\therefore\ y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 > 0 \qquad (3.10)$$

将 $\bar{Y}$ 代入 (3.8)： ➢ **由D、C 满秩 ⇨ G 满秩**

$$\begin{cases} z_1 = g_{11} y_1 + g_{12} y_2 + \cdots + g_{1n} y_n \\ z_2 = g_{21} y_1 + g_{22} y_2 + \cdots + g_{2n} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = g_{n1} y_1 + g_{n2} y_2 + \cdots + g_{nn} y_n \end{cases} \qquad (3.8)$$

可知 $\bar{Z} = [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_n]^T \neq 0$

$\overline{Y}=[k_1,k_2,\cdots,k_p,k_{p+1},\cdots,k_n]^T$，其中：$k_{p+1}=\cdots=k_n=0$

$$\therefore\ y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2>0 \qquad (3.10)$$

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$
$$=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_s^2-z_{s+1}^2-\cdots-z_r^2 \qquad (3.6)$$

将 $\overline{Z}$ 代入 (3.6)右端，由于 $k_1,\cdots,k_n$ 是(3.9)的解：

$$\begin{cases} \bar{z}_1=g_{11}k_1+g_{12}k_2+\cdots+g_{1n}k_n=0 \\ \bar{z}_2=g_{21}k_1+g_{22}k_2+\cdots+g_{2n}k_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{z}_s=g_{s1}k_1+g_{s2}k_2+\cdots+g_{sn}k_n=0 \end{cases}$$

$$\therefore -\bar{z}_{s+1}^2-\bar{z}_{s+2}^2-\cdots-\bar{z}_r^2\le 0 \qquad (3.11)$$

- **将 (3.10)与(3.11) 代入(3.6)可见，两边不相等，说明原假设 p>s 是不对的，因此 p≤s；**

- 同理可证 $p \geq s$，从而推得只有 $p=s$;

- 只要证明 $p = s$, 就证明了二次型规范形的唯一性.

定义 6.3：实二次型的标准形中，系数为正的平方项的个数 p，称为该二次型的正惯性指数(positive index of inertia)；系数为负的平方项的个数 r-p，称为该二次型的负惯性指数；它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为二次型的符号差.

- 由惯性定理可知，两个实二次型可经满秩线性变换互相转化的充要条件是：

它们有相同的秩和正惯性指数.

➢ 即两个实二次型的规范形均为：

$$C^{\mathrm{T}}AC=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\\hline&&&-1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&-1&&&\\\hline&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{array}\right)&\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\\end{array}\right\}p\\\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\\end{array}\right\}r-p=q\\\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\\end{array}\right\}n-r\end{array}\end{array}$$

$$=\begin{pmatrix}E_p&&\\&-E_q&\\&&O\end{pmatrix}$$

§ 6.4 正 定 二 次 型

一、实二次型的分类

定义 6.2：设实二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X^TAX$，对任意一组不全为零的实数$X=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T$，若总有

（1） $f=X^TAX>0$，则称 f 为正定的(positive definite)；

（2） $f=X^TAX<0$，则称 f 为负定的(negative definite)；

（3） $f=X^TAX\geqslant 0$，则称 f 为半正定的(~ semidefinite)；

（4） $f=X^TAX\leqslant 0$，则称 f 为半负定的；

（5） 除了以上情况的其他情况，称 f 为不定的(indefinite)；

- 正定二次型在实际问题中很有用，例如：二元函数求极值判别问题.

- 例如：方程组的最小二乘解

$$A^T A X = A^T B$$

A^TA 是一个正定矩阵，方程组总是有解的.

- 数理方程的数值求解：有限元方程

二、判断正定二次型

定理 6.4：n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的充要条件是它的正惯性指数等于 n .

或者，它的标准形的n 个系数全为正.

证明：设 f 经满秩线性变换 $X = CY$ 后化为标准形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = X^T A X = Y^T (C^T A C) Y$$

$$= b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2$$

先证充分性：如果 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 的正惯性指数等于 n, 那么 $b_i > 0$, $(i=1,2,\ldots,n)$

任意给定 $X \neq 0, Y = C^{-1}X \neq 0$，故

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2 > 0 \Rightarrow \text{二次型是正定的}$$

必要性：反证法 — 设 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 是正定的, 但是正惯性指数小于 n ， 那么 b_i (i=1,...,n) 不能全大于零，不妨设 $b_n \leqslant 0$，取

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = 0,\ y_n = 1$$

代入线性变换 X = CY，可得一组 $x_i = k_i$ (i=1, ... , n)

- 因为 C 满秩(CY = 0 无非零解), 所以

$$X = [k_1, k_2, \cdots, k_n]^T \neq 0, \text{而} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^{\mathrm{T}} \mathrm{A}\ X$$

$$= b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2 = b_n \leq 0$$

- 这与 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 正定矛盾，因此二次型正惯性指数为 n .　　　　证毕.

推论1：n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定的充要条件是它的矩阵A的特征值全大于零.

证明：对于实二次型 f，总存在一个正交变换 $X = CY$ 将它化为标准形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A的全部特征值.

- 由定理6.4，二次型正定.

定义6.4：如果实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为正定（半正定，负定，半负定），则其矩阵A称为正定(半正定，负定，半负定)矩阵.

推论2：正定矩阵的行列式大于零.

- 事实上，若A是一个n 阶正定矩阵，则其特征值全大于零；
- 又因为A 的特征值的乘积等于 A 的行列式，即有

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>0$$