به نام خدا

تمرین شماره ۱ درس ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

چمران معینی

۹۹۳۱۰۵۳

۱- الگوریتم غربال اراتستن را نوشته و آن را تحلیل زمانی کنید

الگوریتم غربال اراتستن، برای پیدا کردنِ اعداد اول ۱ تا n استفاده می‌شود.

در این روش، ابتدا یک را حذف می‌کنیم. سپس دو رو علامت می‌زنیم و بعد تمام اعداد تا n را که مضرب ۲ هستند را خط می‌زنیم. سپس عدد بعدی سه را علامت می‌زنیم و سپس تمام اعداد تا n که مضرب ۳ هستند را خط می‌زنیم. عدد بعدی چهار است که خط زده شده، پس سراغ پنج می‌رویم، مثل قبل آن‌را علامت می‌زنیم و مضرب‌هایش را خط می‌زنیم.

برای تحلیل زمانی این الگوریتم، ابتدا کد آن را می‌نویسیم:

```java
int n = sc.nextInt();

boolean[] isPrime = new boolean[n + 1];

isPrime[0] = false;
isPrime[1] = false;

for (int i = 2; i < n + 1; i++) {
    isPrime[i] = true;
}

// 1
for (int i = 2; i < n + 1; i++) {
    if (isPrime[i]){
        //2
        for (int j = 2; j * i < n + 1; j++) {
            isPrime[j * i] = false;
        }
    }
}

for (int i = 0; i < n + 1; i++) {
    if (isPrime[i])
        System.out.print(i + " ");
}
```

هنگامی که حلقه‌ی اول اجرا می‌شود، از اعداد غیراول می‌گذرد، اما اگر عدد اول باشد، حلقه‌ی دوم اجرا می‌شود که دفعات تکرار آن، بستگی به n دارد و به این صورت است:

$$\frac{n}{j_1}+\frac{n}{j_2}+\cdots+\frac{n}{j_{max}}$$

مشخص است که j اعداد اول خواهد بود، پس:

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}+\cdots+\frac{n}{p_{max}}=n(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots)$$

قابل اثبات است که:

$$\sum_{\substack{p=2\\ p\in P}}^{n}\frac{1}{p}=\log(\log n)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}+\cdots+\frac{n}{p_{max}}=n(\log(\log(n)))$$

$$O(n(\log(\log(n)))$$

۲- اعداد فیبوناچی به این صورت تعریف می‌شوند:

$$F_1 = F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$$

با استقرا ثابت کنید که میتوان عدد iام فیبوناچی را می‌توان بر اساس نسبت طلایی و مزدوج آن به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad F_i = \frac{\varphi^i - \hat{\varphi}^i}{\sqrt{5}} \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

کافی‌ست ثابت کنیم این رابطه به ازای عضو اول و دوم صحیح است، سپس اثبات کنیم که اگر به ازای F_{i-1} و F_{i-2} صحیح باشد، به ازای F_i نیز صحیح است. آن‌گاه می‌توان ادعا کرد که چون به ازای عضو اول و دوم صحیح است، به ازای عضو سوم نیز صحیح است. چون به ازای عضو دوم و سوم صحیح است به ازای عضو چهارم نیز صحیح است و نهایتا به ازای تمام اعضای دنباله صحیح است.

$$F_i = \frac{\varphi^i - \hat{\varphi}^i}{\sqrt{5}}$$

$$F_1 = \frac{\frac{(1+\sqrt{5})}{2} - \frac{(1-\sqrt{5})}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$F_2 = \frac{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+5+2\sqrt{5}}{2} - \frac{1+5-2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\begin{aligned}
F_i = F_{i-1} + F_{i-2} &= \frac{\varphi^{i-1} - \hat{\varphi}^{i-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{i-2} - \hat{\varphi}^{i-2}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i-1}\right)}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i-2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left((1+\sqrt{5})^{i-1} - (1-\sqrt{5})^{i-1}\right)}{(2^{i-1})(\sqrt{5})} + \frac{\left((1+\sqrt{5})^{i-2} - (1-\sqrt{5})^{i-2}\right)}{(2^{i-2})(\sqrt{5})} \\
&= \frac{2\left((1+\sqrt{5})^{i-1} - (1-\sqrt{5})^{i-1}\right)}{(2^{i})(\sqrt{5})} + \frac{4\left((1+\sqrt{5})^{i-2} - (1-\sqrt{5})^{i-2}\right)}{(2^{i})(\sqrt{5})} \\
&= \frac{2(1+\sqrt{5})^{i-1} - 2(1-\sqrt{5})^{i-1} + 4(1+\sqrt{5})^{i-2} - 4(1-\sqrt{5})^{i-2}}{(2^{i})(\sqrt{5})} \\
&= \frac{\left(2(1+\sqrt{5})+4\right)(1+\sqrt{5})^{i-2} - \left(2(1+\sqrt{5})+4\right)(1-\sqrt{5})^{i-1}}{(2^{i})(\sqrt{5})} \\
&= \frac{\left(\sqrt{5}^2 + 1^2 + \sqrt{5}\right)(1+\sqrt{5})^{i-2} - \left(1^2 + \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{5}\right)(1-\sqrt{5})^{i-1}}{(2^{i})(\sqrt{5})} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})^{i-2} - (1-\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})^{i-2}}{(2^{i})(\sqrt{5})} = \frac{(1+\sqrt{5})^{i} - (1-\sqrt{5})^{i}}{(2^{i})(\sqrt{5})} \\
&= \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^i - \hat{\varphi}^i}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

۳- با جایگذاری نشان دهید که $T(n) = T\left(\frac{2}{3}n\right) + (\log n)^2$ برابر $\Omega((\log n)^2)$ است.

$$T(n) = T\left(\frac{2}{3}n\right) + (\log n)^2 = T\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 n\right) + \left(\log\frac{2n}{3}\right)^2 + (\log n)^2$$

$$= T\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 n\right) + \left(\log n + 2\log\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\log n + \log\frac{2}{3}\right)^2 + (\log n)^2$$

$$\rightarrow T(n) = T\left(\left(\frac{2}{3}\right)^i n\right) + (\log n)^2(a) \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^i = n \rightarrow i = \log_{\frac{3}{2}} n \rightarrow a = 1 \rightarrow T(n) = T(1) + (\log n)^2$$

$$= \Omega((\log n)^2)$$

۴- برای موارد زیر کران‌های حدی نزدیک را بدست آورد:

a) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathrm{n}\sqrt{n}$

b) $T(n) = 243T\left(\frac{n}{81}\right) + 3^{\log_3 n}$

c) $T(n) = 9T\left(\frac{n}{81}\right) + \sqrt{n}$

d) $T(n) = 8T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n^5}$

$$\boldsymbol{a})\ T(n) = \boldsymbol{4T\left(\frac{n}{2}\right) + n\sqrt{n}} = 4\left(4T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}\right) + n\sqrt{n} = \boldsymbol{16T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\sqrt{2}+1\right)n\sqrt{n}}$$

$$= 16\left(4T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\sqrt{\frac{n}{4}}\right) + \left(\sqrt{2}+1\right)n\sqrt{n} = \boldsymbol{64T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(2+\sqrt{2}+1\right)n\sqrt{n}} \rightarrow T(n)$$

$$= 4^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}^i - 1}{\sqrt{2}-1}\right)\left(n\sqrt{n}\right) = 4^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \left(\sqrt{2}^i - 1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\left(n\sqrt{n}\right) \rightarrow 2^i = n$$

$$\rightarrow i = \log_2 n \rightarrow T(n) = 4^{\log_2 n}T(1) + \left(\sqrt{2}^{\log_2 n} - 1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\left(n\sqrt{n}\right)$$

$$= n^2T(1) + \left(\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\left(n\sqrt{n}\right) = n^2T(1) + \left(\sqrt{2}+1\right)\left(n^2\right)$$

$$\boldsymbol{b})\ T(n) = 243T\left(\frac{n}{81}\right) + 3^{\log_3 n} = \boldsymbol{3^5T\left(\frac{n}{3^4}\right) + 3^{\log_3 n}}$$

$$= 3^5\left(3^5T\left(\frac{n}{3^8}\right) + 3^{(\log_3 n)-(4)}\right) + 3^{\log_3 n} = 3^{10}T\left(\frac{n}{3^8}\right) + (3)\left(3^{\log_3 n}\right) + 3^{\log_3 n}$$

$$= \boldsymbol{3^{10}T\left(\frac{n}{3^8}\right) + (4)\left(3^{\log_3 n}\right)}$$

$$= 3^{10}\left(3^5T\left(\frac{n}{3^{12}}\right) + 3^{(\log_3 n)-8}\right) + (4)\left(3^{\log_3 n+1}\right) = 3^{15}T\left(\frac{n}{3^{12}}\right) + \left(3^2\right)\left(3^{(\log_3 n)}\right) + (4)\left(3^{\log_3 n+1}\right)$$

$$= \boldsymbol{3^{15}T\left(\frac{n}{3^{12}}\right) + (13)\left(3^{(\log_3 n)}\right)}$$

$$T(n) = 3^{5i}T\left(\frac{n}{3^{4i}}\right) + \left(\frac{3^i - 1}{2}\right)\left(3^{\log_3 n}\right) \rightarrow 3^{4i} = n \rightarrow 4i = \log_3 n \rightarrow i = \frac{\log_3 n}{4} \rightarrow T(n)$$

$$= 3^{\left(\frac{5}{4}\log_3 n\right)}T(1) + \left(\frac{3^{\frac{\log_3 n}{4}} - 1}{2}\right)\left(3^{\log_3 n}\right) = n^{\left(\frac{5}{4}\log_3 3\right)}T(1) + \left(\frac{n^{\frac{\log_3 3}{4}} - 1}{2}\right)\left(n^{\log_3 3}\right)$$

$$= \boldsymbol{n^{\left(\frac{5}{4}\right)}T(1) + \left(\frac{n^{\frac{1}{4}} - 1}{2}\right)(n)}$$

$$\boldsymbol{c})\ T(n)=9T\left(\frac{n}{81}\right)+\sqrt{n}=\boldsymbol{3^2T\left(\frac{n}{3^4}\right)+\sqrt{n}}=3^2\left(3^2T\left(\frac{n}{3^8}\right)+\frac{\sqrt{n}}{3^2}\right)+\sqrt{n}=\boldsymbol{3^4T\left(\frac{n}{3^8}\right)+2\sqrt{n}}$$

$$=3^4\left(3^2T\left(\frac{n}{3^{12}}\right)+\frac{\sqrt{n}}{3^4}\right)+2\sqrt{n}=\boldsymbol{3^6T\left(\frac{n}{3^{12}}\right)+3\sqrt{n}}$$

$$T(n)=3^{2i}T\left(\frac{n}{3^{4i}}\right)+i\sqrt{n}\rightarrow n=3^{4i}\rightarrow i=\frac{\log_3 n}{4}\rightarrow T(n)=3^{2\frac{\log_3 n}{4}}T\left(\frac{n}{3^{4\frac{\log_3 n}{4}}}\right)+\frac{\log_3 n}{4}\sqrt{n}=T(n)$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{n}\,T(1)+\frac{1}{4}\sqrt{n}(\log_3 n)}$$

$$\boldsymbol{d})\ T(n)=8T\left(\frac{n}{4}\right)+\sqrt{n^5}=\boldsymbol{2^3T\left(\frac{n}{2^2}\right)+\sqrt{n^5}}=2^3\left(2^3T\left(\frac{n}{2^4}\right)+\sqrt{\frac{n^5}{2^{10}}}\right)+\sqrt{n^5}$$

$$=\boldsymbol{2^6T\left(\frac{n}{2^4}\right)+\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{n^5}}=2^6\left(2^3T\left(\frac{n}{2^6}\right)+\sqrt{\frac{n^5}{2^{20}}}\right)+\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{n^5}$$

$$=\boldsymbol{2^9T\left(\frac{n}{2^6}\right)+\left(\frac{21}{16}\right)\sqrt{n^5}}$$

$$T(n)=2^{3i}T\left(\frac{n}{2^{2i}}\right)+\left(\frac{1-\frac{1}{4^i}}{1-\frac{1}{4}}\right)\left(\sqrt{n^5}\right)=2^{3i}T\left(\frac{n}{2^{2i}}\right)+\left(\frac{\frac{4^i-1}{4^i}}{\frac{3}{4}}\right)\left(\sqrt{n^5}\right)\rightarrow 2^{2i}=n\rightarrow i=\frac{\log_2 n}{2}$$

$$\rightarrow T(n)=2^{3\frac{\log_2 n}{2}}T\left(\frac{n}{2^{2\frac{\log_2 n}{2}}}\right)+\left(\frac{\frac{4^{\frac{\log_2 n}{2}}-1}{4^{\frac{\log_2 n}{2}}}}{\frac{3}{4}}\right)\left(\sqrt{n^5}\right)=n^{\frac{3}{2}}T(1)+\left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{3}{4}}\right)\left(\sqrt{n^5}\right)$$

$$=\boldsymbol{n^{\frac{3}{2}}T(1)+\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\sqrt{n^5}\right)}$$

۵- فرض کنید f(n) و g(n) دو تابع همیشه مثبت هستند. با توجه به تعریف Θ ثابت کنید که:

$$max\big(f(n), g(n)\big) = \theta\big(f(n) + g(n)\big)$$

$$(1): \max\big(f(n), g(n)\big) \le f(n) + g(n) \rightarrow \max\big(f(n), g(n)\big) = O\big(f(n) + g(n)\big)$$

$$(2): f(n) + g(n) \le 2\max\big(f(n), g(n)\big) \rightarrow \max\big(f(n), g(n)\big) = \Omega\big(f(n) + g(n)\big)$$

$$(1), (2): \max\big(f(n), g(n)\big) = \Theta\big(f(n) + g(n)\big)$$

۶- فرض کنید که n یک توان ۲ است. اگر تابع T(n) به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$T(n) = \begin{cases} 2 & n = 2 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n = 2^k > 2 \end{cases}$$

با کمک استقرا ثابت کنید که T(n)=nlgn

$$T(n) = \boldsymbol{2T\left(\frac{n}{2}\right) + n} = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = \boldsymbol{4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n} = 4\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right) + 2n = \boldsymbol{8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n}$$

$$\rightarrow T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + (i)(n) \rightarrow 2^i = \frac{n}{2} \rightarrow i = \log_2 \frac{n}{2} \rightarrow 2^{\log_2 \frac{n}{2}} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 \frac{n}{2}}}\right) + \left(\log_2 \frac{n}{2}\right)(n)$$

$$= \frac{n}{2}\, T(2) + \left(\log_2 \frac{n}{2}\right)(n) = n + \left(\log_2 \frac{n}{2}\right)(n) = (n)\left(\log_2 \frac{n}{2} + 1\right)$$

$$= (n)\left(\log_2 \frac{n}{2} + \log_2 2\right) = (n)\left(\log_2 \left(\frac{n}{2}\right)(2)\right) \rightarrow \boldsymbol{T(n) = n \log_2 n}$$

۷- با توجه به دنباله زیر به سوالات زیر پاسخ دهید.

9, 4, 11, 3, 2,1,7,17,4,91

الف) الگوریتم مرتب سازی درجی (Insertion Sort) را بر روی این دنباله اجرا کنید.

ب) چینش اعداد بالا را به گونه ای انتخاب کنید تا الگوریتم مرتب سازی درجی در بیشترین زمان ممکن اجرا شود.

ج) چینش اعداد بالا را به گونه ای انتخاب کنید تا الگوریتم مرتب سازی درجی در کمترین زمان ممکن اجرا شود.

الف) از اولین عدد یعنی ۹ شروع می‌کنیم، پس از آن به ۴ می‌رسیم که چون کوچک‌تر از ۹ است، آن را به قبل از ۹ منتقل می‌کنیم.

4, 9,11,3,2,1,7,17,4,91

از ۱۱ هم می‌گذریم و سپس ۳ را به قبل از ۴ منتقل می‌کنیم.

3,4, 9,11,2,1,7,17,4,91

سپس ۲ را به قبل از ۳ منتقل می‌کنیم.

2,3,4, 9,11,1,7,17,4,91

سپس ۱ را به قبل از ۲ منتقل می‌کنیم.

1,2,3,4, 9,11,7,17,4,91

سپس ۷ را به قبل از ۹ منتقل می‌کنیم،

1,2,3,4, 7,9,11,17,4,91

از ۱۷ می‌گذریم، ۴ را قبل از ۷ می‌گذاریم و از ۹۱ هم می‌گذریم.

1,2,3,4, 4,7,9,11,17,91

ب) در تمام چینش‌هایی که هر عدد «کوچک‌ترین عدد بینِ اعدادِ سمتِ راستِ خود» یا « یکی مانده به کوچک‌ترین عدد بینِ اعدادِ سمتِ راستِ خود» باشد، این الگوریتم بیشترین زمان ممکن را می‌گیرد، برای مثال اگر اعداد را کاملا برعکس بچینیم:

91,17,11,9,7,4,4,3,2,1

ج) اگر اعداد مرتب باشند، الگوریتم تنها یک‌بار تمام اعداد را می‌پیماید و هر عدد را تنها با عدد قبلی‌اش مقایسه می‌کند، سپس تمام می‌شود که کم‌ترین زمان ممکن است.

۹- فرض کنید که یک عدد صحیح x و مجموعه S شامل n عدد صحیح به شما داده شده است. الگوریتمی با زمان اجرای O(nlgn) ارائه کنید که بررسی کند آیا دو عدد در مجموعه S وجود دارند که مجموعه آنها مساوی x باشد یا نه.

```
for i from 1 to n:
    for j from i to n:
        if i + j == x:
            "It's possible."
            end

"It's not possible."
```