

## تمرین شماره ۴ درس ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

۱- **صرافی صادق:** صادق که تازه از دانشکده فارغ التحصیل شده است، در حال راه اندازی یک صرافی آنلاین است. در این صرافی آنلاین، کاربران می‌توانند ارزهای مختلف را به هم تبدیل کنند. مثلاً، آنها در ازای هر یک یورو، ۱.۱۳ دلار آمریکا دریافت کنند و یا در ازای هر دلار آمریکا، ۳.۶۷ درهم امارات دریافت کنند. نرخ تبدیل ارزها در سامانه قرار است هر ساعت در طول ساعات اداری به روز شود. با توجه به اینکه نرخ ها به صورت دستی وارد می‌شوند، امکان خطا در وارد کردن آنها وجود دارد. یکی از اتفاقاتی که در صورت خطا در وارد کردن نرخ تبدیل ارزها ممکن است رخ دهد، این است که افراد بتوانند صرفاً با خرید و فروش ارزها، به سود دست پیدا کنند. مثلاً اگر نرخ تبدیل یک یورو به دلار ۱.۱۳ و در عین حال نرخ تبدیل دلار به یورو نیز به جای ۰.۸۸ اشتباهاً ۰.۹۸ وارد شود، آنگاه فرد می‌تواند ۱ یورو را ابتدا به دلار تبدیل کرده و ۱.۱۳ دلار بگیرد و سپس ۱.۱۳ دلار را به یورو تبدیل کرده ۱.۱ یورو بگیرد و به این ترتیب ۱۰ درصد سود کند. صادق از شما خواسته است که در طراحی یک برنامه برای چک کردن چنین حالتی به او کمک کنید. برنامه شما باید نرخ تبدیل ارزهای مختلف به یکدیگر را به عنوان ورودی گرفته و بررسی کند که آیا مجموعه‌ای از تبدیل ارزها به یکدیگر (مثلاً از A به B به C به D به A) وجود دارد که در با انجام آن، کاربر به سود دست یابد (مثلاً با ۱ واحد A شروع کرده و در نهایت بیش از ۱ واحد از A به دست آورد؟) دقت کنید که صرافی لزوماً امکان تبدیل تمامی ارزها به یکدیگر را فراهم نمی‌کند (مثلاً ممکن است هیچ نرخی برای تبدیل مستقیم یورو به درهم امارات نباشد و یا اینکه حتی ممکن است که امکان تبدیل غیر مستقیم یورو به درهم هم فراهم نباشد (مثلاً در یک روز، فقط بتوان درهم را به ارزهای دیگر تبدیل کرد و نه برعکس)). اگر تعداد ارزیابی که در صرافی موجود است را با  $n$  و تعداد نرخ های تبدیل ارز به یکدیگر را با  $m$  نمایش دهیم، الگوریتم شما باید از زمان اجرای  $O(mn)$  برخوردار باشد. الگوریتم خود را شرح داده و بگویید چرا درست است.

۲- **اردوی قم:** قرار است دانشگاه اردوی یک روزه زیارت حرم حضرت معصومه (س) را به مناسبت شهادت حضرت زهرا (س) در هفته آینده برگزار کند. طاهره مسئول هماهنگی امور اردو است. یکی از اهداف ضمنی این اردوها، آشنایی بیشتر دانشجویان با یکدیگر است. برای همین، طاهره تصمیم دارد که افراد را به دو گروه تقسیم کند به گونه ای که در هر گروه، هیچ دو فردی قبلاً با هم به اردو نرفته باشند. طاهره برای حل این مسئله (که آیا چنین کاری اصلاً ممکن است و اگر بله، چطور می‌توان این کار را انجام داد) ایده زیر به ذهنش رسیده است. آیا این ایده درست است؟ اگر نه، چرا. و اگر بله، چطور می‌توان آن را ثابت کرد.

**ایده:** یکی از افراد را کنار بگذارد و ببیند که آیا می‌توان افراد باقی‌مانده را به دو گروه با شرط مورد نظر تقسیم کرد یا نه. اگر جواب برای افراد باقی مانده نه است، نتیجه بگیرد که برای کل افراد نیز جواب نه است. در غیر این صورت، جواب تقسیم افراد باقی‌مانده به دو گروه را در نظر گرفته و سعی کند فردی را که کنار گذاشته بود به یکی از دو گروه اضافه کند. اگر توانست، که یک جواب پیدا کرده است. اگر هم نمی‌توان این فرد را به هیچ یک از این دو گروه اضافه کرد، نتیجه بگیرد که جواب برای کل افراد نه است.

۳- **تیم هماهنگ:** نرگس به تازگی به عنوان مدیر پروژه برای پیاده سازی نرم افزار تلفن همراه کاربران شرکت انتخاب شده است و او باید اعضای تیم خود برای این کار را انتخاب کند. نرگس این اعتقاد را دارد که تیمی هماهنگ است که هر فرد آن، حداقل با  $k$  فرد دیگر تیم (به غیر از نرگس) قبلا در یک تیم کار کرده باشد. نرگس باید تیم خود را از بین  $n$  کارمند شرکت (به غیر از خودش) انتخاب کند. شرکت یک پایگاه داده دارد که اطلاعات همکاری افراد با یکدیگر در پروژه های مختلف را در خود دارد. برای استفاده از این سامانه، می توان از ۴ دستور زیر استفاده کرد:

الف) **مقدار دهی/ولیه:** تمامی افراد قابل انتخاب در شرکت را به عنوان اعضای تیم اضافه می کند. پس از آن، می توان سه تابع دیگر را صدا زد. زمان اجرای این تابع  $O(n^2)$  است.

ب) **تعداد/افراد همکاری کرده با فرد  $x$ :** برای فرد  $x$  داده شده که هنوز در تیم است، تعداد افراد دیگر موجود در تیم را که  $x$  قبلا با آنها همکاری کرده است را باز می گرداند. زمان اجرای این تابع  $O(1)$  است.

ج) **حذف فرد  $x$  از گروه:** فرد  $x$  را از تیم حذف می کند. پس از این کار، در محاسبه همکاری افراد (تابع ب)، این فرد دیگر در نظر گرفته نمی شود. اگر فرد  $x$  در هنگام حذف، با  $m$  نفر دیگر از افراد تیم موجود همکاری داشته است، زمان اجرای این تابع  $O(m)$  خواهد بود.

د) **گرفتن لیست/افراد موجود در تیم:** لیستی از افرادی که در حال حاضر در تیم هستند را بر می گرداند. اگر در حال حاضر  $p$  فرد در تیم هستند، زمان اجرای این تابع  $O(p)$  خواهد بود.

به نرگس کمک کنید تا یک الگوریتم با زمان کلی  $O(n^2)$  طراحی کند که تشخیص بدهد آیا نرگس می تواند تیمی با مشخصات مورد نظرش تشکیل بدهد یا نه. و اگر بله، بزرگترین تیم ممکن (از نظر تعداد افراد) را تشکیل دهد. دقت کنید که ممکن است بیش از یک تیم قابل تشکیل باشند و تشکیل یکی از آنها کافی است.

۴- **گزارش عملکرد:** کاظم چند سالی است که مدیر عامل شرکت است. در طول این مدت، آنها  $n$  قرارداد با مشتری ها امضا کرده اند و ارزش قرارداد  $A_m$  برابر با  $V_i$  است. فرض کنید که قراردادها به ترتیب زمان امضا هستند، یعنی اگر  $i < j$ ، آنگاه قرارداد  $A_m$  قبل از قرارداد  $A_j$  امضا شده است (هرچند ارزش قرارداد  $A_m$  می تواند کمتر، مساوی، و یا بیشتر از قرارداد  $A_j$  باشد). قرار است هفته آینده او ارائه ای برای گروهی از سرمایه گذاران داشته باشد. کاظم می خواهد که به جای نمایش و ذکر تمامی قراردادها، زیر مجموعه ای از آنها را بیان کند که ارزش آنها اکیدا صعودی باشد. به عبارت دیگر، او می خواهد مجموعه ای از قراردادها مانند  $i_1, i_2, \dots, i_k$  را انتخاب کند که  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  همچنین  $V_{i_1} < V_{i_2} < \dots < V_{i_k}$ . هدف کاظم از این کار ارائه یک نمای رو به رشد از شرکت (با توجه به افزایش ارزش قراردادها در طول زمان) است. یک الگوریتم برای کمک به کاظم طراحی کنید که بزرگترین زیرمجموعه قراردادها را که شرط مورد نظر را دارند، پیدا کند. زمان الگوریتم شما باید  $O(n^2)$  باشد.

نکته: دقت کنید که این مسئله را می توان در زمان  $O(n \lg n)$  حل کرد. برای این تمرین لازم نیست این کار را بکنید، اما می توانید روی آن هم فکر کنید!