به نام خدا

تمرین شماره ۳ درس ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

چمران معینی : ۹۹۳۱۰۵۳

۱- چگونه می‌توان با استفاده از یک صف اولویت (priority-queue)، یک صف معمولی (که عناصر به همان ترتیبی که درج شده‌اند، از صف بیرون خواهند آمد که به FIFO معروف است) را پیاده‌سازی کرد. (۱ نمره)

می‌دانیم که صف اولویت‌دار، چیزی که افزون بر صف معمولی دارد این است که می‌توانیم اولویتی را برای هر عنصرِ جدید هنگام insert تعیین بکنیم. با این حساب، کافی‌ست هربار که عنصری را اضافه می‌کنیم، آن را در آخرین اولویت بگذاریم، به این ترتیب مشابه یک صف معمولی عمل می‌شود و عناصر هرچه زودتر گذاشته شده باشند، زودتر خارج می‌شوند.

۲- فرض کنید تعداد درخت‌های دودویی جستجوی مختلفی را که برای n عدد متفاوت می‌توان ساخت را با t_n نمایش بدهیم. یک رابطه بازگشتی برای محاسبه t_n بر اساس t_1 تا t_{n-1} ارائه دهید (توضیح دهید که چرا می‌توان t_n را اینگونه حساب کرد). (۱ نمره)

اگر فقط یک عنصر داشته باشیم، مشخص است که فقط یک راه برای تبدیل آن به درخت دودویی جست و جو داریم، یعنی:

$$t_1 = 1$$

اگر دو عنصر داشته باشیم، دو انتخاب برای ریشه داریم. بعد از انتخابِ ریشه هم t1 حالت برای چینش بقیه‌ی عناصر، یعنی:

$$t_2 = t_1 + t_1 = 2$$

در حالتی هم که سه عنصر داشته باشیم، سه انتخاب برای ریشه داریم. اگر بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عنصر ریشه‌مان باشد هر دو عنصرِ دیگر در یک طرف قرار می‌گیرند، یعنی t2 حالت برای چینشِ بقیه‌ی اعضا داریم. اگر هم عوض میانی را انتخاب کرده باشیم t1 * t1 حالت برای چینشِ بقیه‌ی اعضا داریم، پس:

$$t_3 = t_2 + t_1 t_1 + t_2 = 5$$

در حالتی که چهار عنصر داریم، چهار انتخاب برای ریشه داریم. در حالتی که بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو را انتخاب کرده باشیم، هر سه عضو در یک طرف قرار می‌گیرند و t3 حالت برای چینش‌شان خواهیم داشت. در حالتی که عضو دوم یا سوم را انتخاب کرده باشیم هم t1 * t2 حالت برای چینشِ بقیه‌ی اعضا داریم، پس:

$$t_4 = t_3 + t_2 t_1 + t_1 t_2 + t_3 = 14$$

وقتی پنج عنصر داشته باشیم هم، پنج انتخاب برای ریشه داریم. اگر بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو باشد t4 حالت برای چینشِ بقیه‌ی عناصر داریم. اگر عضو دوم یا چهارم باشد t1 * t3 حالت برای چینشِ بقیه‌ی اعضا داریم. اگر عضو سوم ریشه بشود هم t2 * t2 حالت برای چینشِ بقیه‌ی اعضا داریم، پس:

$$t_5 = t_4 + t_3 t_1 + t_2 t_2 + t_1 t_3 + t_4$$

به همین ترتیب و با همین منطق خواهیم داشت:

$$t_6 = t_5 + t_4 t_1 + t_3 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_4 + t_5$$

پس tn را به این شکل می‌نویسیم:

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} t_1 + t_{n-3} t_2 + \cdots + t_{n-(n-1)} t_{n-2} + t_{n-1}$$

می‌توان این رابطه را به این شکل توضیح داد که از اولین جمله، مربوط به حالتی‌ست که بزرگ‌ترین عنصر را به عنوان ریشه انتخاب کرده باشیم، در این حالت تمام n-1 در یک سمت قرار می‌گیرند و می‌توان آن‌ها را به t(n-1) حالت چید. دومین جمله، مربوط به زمانی‌ست که دومین عنصر بزرگ را به عنوان ریشه انتخاب کنیم، در این حالت یک عنصر در یک سمت قرار می‌گیرد که t1 چینش دارد، بقیه‌ی اعضا هم در سمت دیگر قرار می‌گیرند که t(n-2) چینش خواهند داشت، الی آخر.

۳- به توجه به ساختار درخت جستجوی دودوئی، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ارائه دلیل بررسی کنید.

الف) اگر عنصر x که قبلا در درخت وجود نداشته است را اضافه کنیم و سپس بلافاصله آن را از درخت حذف کنیم، ساختار درخت نهایی با درخت ابتدایی(قبل از این عملیات) یکسان خواهد بود. (۱ نمره)

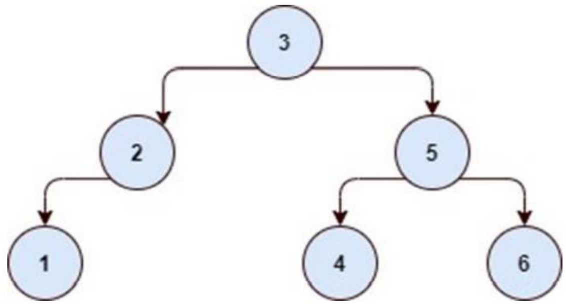
ب) اگر ابتدا عنصر x و سپس عنصر y را به درخت اضافه کنیم، ساختار نهایی درخت با حالتی که اول y و سپس x را اضافه کنیم یکسان خواهد بود. (۱ نمره)

الف) می‌دانیم که عملیاتِ insert در یک ددج، تغییری در جایگاهِ قبلیِ عناصر ایجاد نمی‌کند. تنها کاری که می‌کنیم این است که می‌گردیم و خانه‌ی نال مناسب را پیدا می‌کنیم و عنصرِ جدید را به جای آن می‌گذریم.

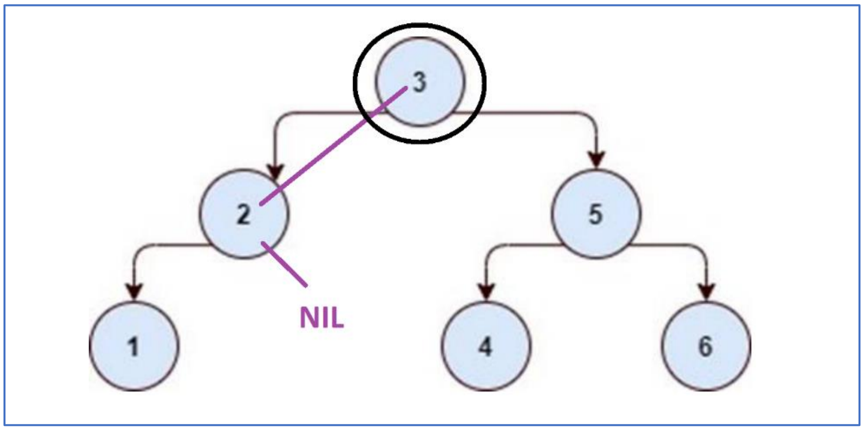
اما می‌دانیم که عملیاتِ حذف می‌تواند با تغییراتی در عناصرِ دیگر هم همراه باشد، اما در چه صورت؟ در صورتی که عنصرمان فرزندانی داشته باشد، اما می‌دانیم که عنصری که تازه اضافه شده، به عنوان یک برگ اضافه می‌شود و فرزندی ندارد و با توجه به این که بلافاصله بعد از اضافه کردن اقدام به حذف شده، در نتیجه فقط یک لحظه عنصری به عنوان فرزندِ یکی از بزرگ‌ها اضافه می‌شود و سپس دوباره حذف می‌شود و درخت دقیقا مانند قبل خواهد بود، پس این گزاره صحیح است.

ب) اشتباه است. برای نقض آن، یک مثال نقض کافی‌ست. فرض کنید ددجای داشته باشیم با ریشه‌ی ۱۰، اگر اول ۹ را اضافه کنیم و بعد ۸ را، ۹ فرزندِ ریشه می‌شود و ۸ هم فرزندِ ۹ می‌شود، اما در صورتی که اول ۸ را اضافه کرده باشیم، ۸ فرزندِ ریشه می‌شود و ۹ در سمت راستِ ۸ قرار می‌گیرد.

۴- درخت قرمز-سیاه زیر چند حالت معتبر برای رنگ آمیزی دارد؟ آن ها را رنگ آمیزی کنید و بیان کنید که چرا حالت های دیگری به جز جوابتان وجود ندارد. (۱ نمره)



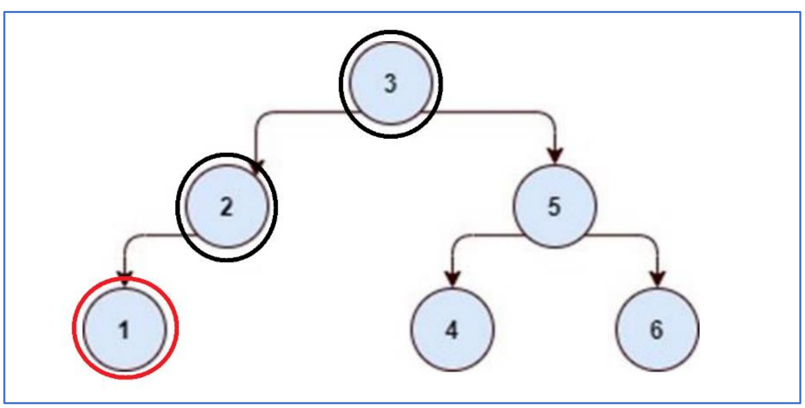
می‌دانیم که ریشه باید سیاه باشد، پس ابتدا آن را رنگ می‌کنیم و بعد سراغ بقیه می‌رویم.



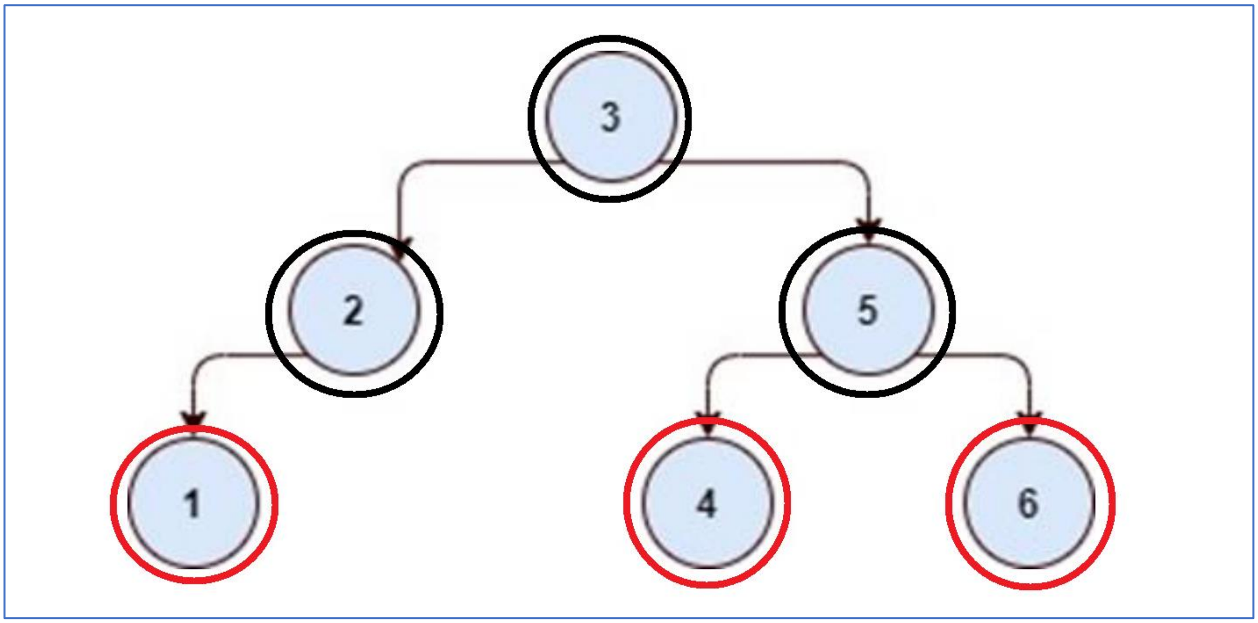
گره ۲ را در دو حالتی که قرمز و سیاه باشد بررسی می‌کنیم.

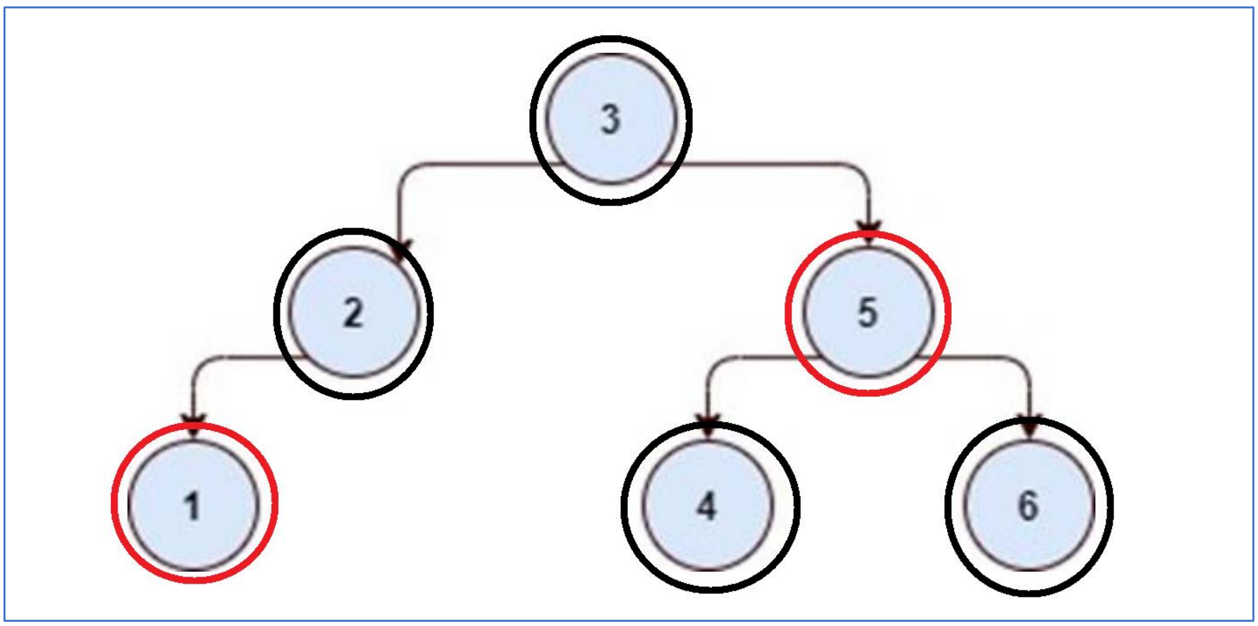
اگر قرمز باشد، مسیر مشخص شده (که یک مسیر root-NIL است)، دارای یک گره قرمز خواهد شد، پس بقیه‌ی مسیرهای ریشه تا نال هم باید تنها یک گره مشکی داشته باشند که ممکن نیست، برای مثال در همین مسیر ۳-۲-۱ ، مجبور می‌شویم گره ۱ را هم قرمز کنیم که آن‌گاه گره ۲ و فرزندش ۱ هر دو قرمز می‌شوند که غیرمجاز است، پس این حالت رد می‌شود.

اگر ۲ سیاه باشد، مسیرِ مشخص شده دارای دو گره سیاه خواهد بود و همه‌ی گرههای ریشه تا نال باید دو گره سیاه داشته باشند. پس گره ۱ را هم قرمز می‌کنیم که مسیر ۳-۲-۱ دارای دو گره سیاه باشد. تا این‌جا درختمان به این شکل در آمد که تنها حالتِ مجاز برای خانه‌های رنگ شده است:



دو مسیر ریشه تا نالِ دیگر داریم ۳-۵-۶ و ۳-۵-۴ که هرکدام یک خانه‌ی مشکی‌اش تثبیت شده، و نیاز به یک خانه‌ی مشکیِ دیگر دارد. می‌توانیم ۵ را قرمز کنیم و بقیه را مشکی، و همچنین می‌توانیم پنج را مشکی کنیم و بقیه را قرمز.





با توجه به این که از ابتدا حالت‌های غیرمجاز را حذف کردیم و حالت‌های مختلف برای انتخاب‌های مجاز را بررسی کردیم، حالتِ مجاز دیگری غیر از این دو وجود ندارد.

۵- الگوریتمی ارائه دهید که در زمان خطی O(n) بررسی کند که آیا یک درخت دودویی، درخت جستجو دودویی نیز هست یا خیر. (۱ نمره)

```python
from typing import Optional
from binarytree import build, Node


def is_bst(tree: Optional[Node], min_val, max_val):

    if tree is None:
        return True

    if tree.val < min_val or max_val < tree.val:
        return False

    return is_bst(tree.left, min_val, tree.val-1) and is_bst(tree.right, tree.val+1, max_val)


if __name__ == '__main__':

    list_of_nodes = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
    my_tree = build(list_of_nodes)

    my_tree.pprint()
    print('is bst == ' + str(is_bst(my_tree, -10000, +10000)))
```

برای توضیح الگوریتم‌مان، آن را با مثالی مانندِ درختِ زیر توضیح می‌دهیم:

```
      _____1__
     /        \
  __2___       3
 /      \     / \
4       _5   6   7
/ \     /
8   9   10

is bst == False
```

در این الگوریتم، هر گره یک بار با ماکسیمم و مینیمم مقدارِ مجازی که می‌تواند داشته باشد مقایسه می‌شود. در صورتی که در این میان یکی از اعضا بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از حد مجاز باشد، الگوریتم به پایان می‌رسد، و اگر آخرین عضو غیرمجاز باشد یا درختمان ددج باشد، تمام اعضا چک می‌شوند که همان O(n) زمان می‌گیرد.

ابتدا از ریشه شروع می‌کنیم، می‌دانیم که عملا محدودیتی برای مقدارِ این گره وجود ندارد، پس حداکثر و حداقل مقدار مجاز برای تایپِ مقادیرِ dataی هر گره را (در این‌جا برای وضوح منفی و مثبت ده‌هزار در نظر گرفته شده است) را به همراه ریشه، به تابع‌مان می‌فرستیم.

تابع اول از همه بررسی می‌کند که گرهِ فرستاده شده، نیل هست یا خیر، تا اگر در یک مسیر به ریشه رسید، دیگر ادامه ندهد. سپس مقدار گره‌مان را با مقادیر مجاز مقایسه می‌کند، که برای ریشه در این مرحله مشکلی نخواهیم داشت.

حال تابع‌مان را دو بارِ دیگر صدا می‌کنیم تا نوادگان سمت راست و چپِ گرهِ فعالی را بررسی کند. مقدار مجاز برای گره سمت راست، اعداد بزرگ‌تر از مقدار فعلی‌ست تا بزرگ‌ترین مقدار ممکن یعنی ۲ تا ۱۰۰۰۰، و مقدار مجاز برای گره سمت چپ، اعدادِ کوچک‌تر از گره فعلی‌ست تا کوچک‌ترین مقدار ممکن یعنی ۱۰۰۰۰- تا ۰ ، که ۲ خارج از این محدوده است پس تابع‌مان False را برمی‌گرداند.

برای مثال زیر هم:

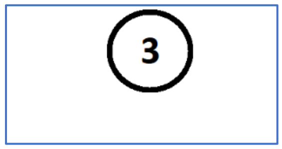
```
         ____10___
        /         \
    __5__          _12
   /     \        /   \
  3       7     11     13
 / \     /
2   4   6

is bst == True
```

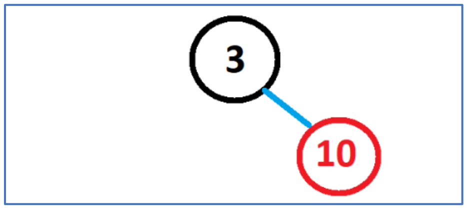
مقدار ۱۰ باید بین ۱۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰- باشد که هست. مقدار ۵ باید بین ۱۰۰۰۰- تا ۱۰ باشد که هست، ۳ بین ۱۰۰۰۰- تا ۵ ، ۲ بین ۱۰۰۰۰- تا ۳، ۴ بین ۳ و ۵ باشد، ۷ بین ۵ و ۱۰ باشد، ۶ بین ۵ و ۷ باشد، ۱۲ بین ۱۰ و ۱۰۰۰۰ باشد، ۱۳ بین ۱۲ و ۱۰۰۰۰ باشد و ۱۱ هم بین ۱۰ و ۱۲ باشد که همگی هستند پس درخت‌مان ددج است.

۶- کلید های ۳، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۷، ۳۳ را به همین ترتیب از راست به چپ در یک درخت قرمز-سیاه خالی درج کنید. درخت حاصل را پس از درج در هر مرحله رسم کرده و شرح دهید که کدام حالت درج رخ می دهد. (۱ نمره)

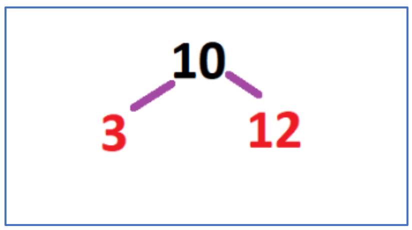
ابتدا ۳ را به عنوان ریشه‌ی سیاه اضافه می‌کنیم:



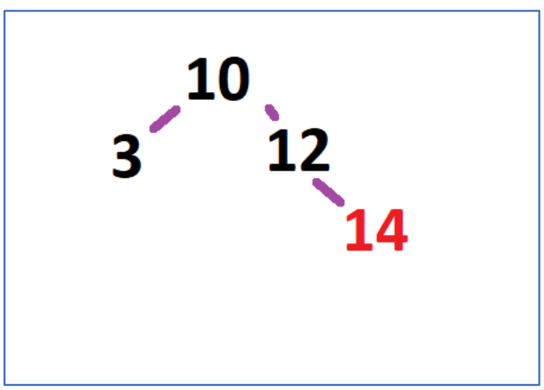
حال ۱۰ را اضافه می‌کنیم که به فرزندیِ راست ۳ می‌رود و چون پدرش سیاه است، به راحتی آن را قرمز می‌کنیم و تمام.



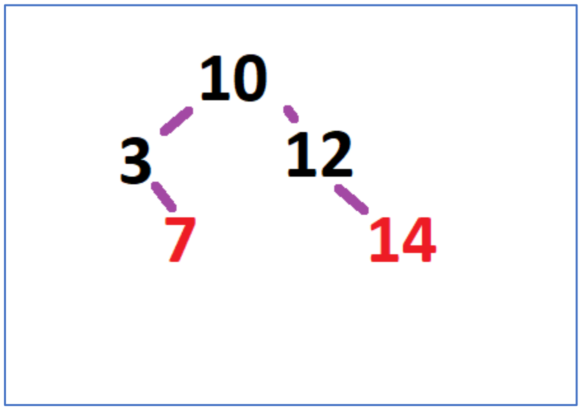
نوبت به ۱۲ می‌رسد که به فرزندیِ راست ۱۰ می‌رود. چون پدرش قرمز است اوضاع کمی پیچیده می‌شود. به سراغ عموی ۱۰ می‌رویم، یعنی فرزندِ دیگرِ ۳ که برابر با نال است، پس مشابه کیس۲ عمل می‌کنیم و پدر یعنی ۱۰ را rotate می‌کنیم تا به جای پدربزرگ برود و درخت‌مان به این شکل می‌شود:



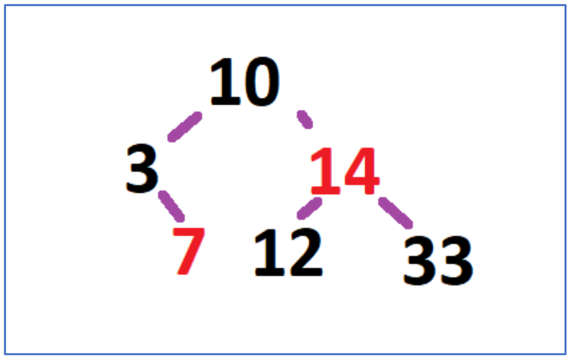
حالا چهارده را اضافه می‌کنیم که به فرزندیِ راستِ ۱۲ می‌رود. پدرش یعنی ۱۲ قرمز است، پس عمو را بررسی می‌کنیم که آن هم قرمز است، پس مطابق کیس۱ عمل می‌کنیم و پدر و عمو را مشکی می‌کنیم. از آن‌جا که پدربزرگ که ۱۰ باشد ریشه است، آن را همان مشکی رها می‌کنیم و از آن‌جایی که ریشه روی همه‌ی مسیرها تاثیر یک‌سان دارد، مشکلی نخواهیم داشت.



نوبت به هفت می‌رود که به فرزندیِ راست ۳ می‌رود. چون پدرش سیاه است، آن را قرمز اضافه می‌کنیم.



نوبت به آخرین عنصر یعنی ۳۳ می‌رد که باید به فرزندیِ راست ۱۴ برود. چهارده پدر قرمز است، پس عمو را بررسی می‌کنیم که نیل است، پس مطابق کیس دو عمل می‌کنیم و چهارده و دوازده را دوران می‌دهیم و فرزند جدید را مشکی اضافه می‌کنیم. با توجه به بقیه‌ی اعضا، می‌بینیم که نیازی به رنگ کردنِ دوباره هم نیست و همه‌ی مسیرهای ریشه–نیل هم دقیقا دو گره سیاه دارند.



۷- فرض کنید دو لیست پیوندی داریم که طول اولی *m* و دومی *n* است (نمی‌دانیم که *n<m* است یا برعکس). همچنین می‌دانیم که این دو لیست پیوندی از یک گره خاص به بعد یکسان هستند (مقادیر یکسان دارند). الگوریتمی ارائه دهید که در زمان *O(m+n)* اولین گره مشترک این دو لیست پیوندی را که از آنجا یکسان هستند، پیدا کند. (۱ نمره)

در این الگوریتم از دو اشاره‌گر استفاده می‌کنیم که هرکدام به اولین عضوِ یکی از لیست‌ها اشاره می‌کند، هرگاه این دو اشاره‌گر به یک گره یک‌سان اشاره بکنند، یعنی دو لیست پیوندی‌مان به یکدیگر رسیده‌اند.

ابتدا تفاضل طولِ دو لیست را محاسبه می‌کنیم، سپس در لیستِ طولانی‌تر با اشاره‌گرمان به اندازه‌ی تفاضل طولِ دو لیست پیش می‌رویم، حال از هر دو لیست، به یک اندازه گره باقی مانده‌ست. همزمان روی هردو لیست یکی یکی پیش می‌رویم و در هر مرحله پوینتری که روی روی این دو لیست داریم را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم، اگر برابر نبودند هر کدام را یک گره پیش می‌بریم، و اولین باری که برابر شدند، هردو به اولین گره مشترک اشاره می‌کنند.

بدترین حالت برای این الگوریتم، زمانی‌ست که آخرین اعضای این دو لیست با یکدیگر برابرند که در این حالت الگوریتم‌مان O(m+n) زمان خواهد گرفت.

اگر منظور از این که نمی‌دانیم m<n یا برعکس، این است که توانایی یا اجازه‌ی مقایسه کردن و محاسبه‌ی آن را نداریم، می‌توانیم از الگوریتم زیر استفاده کنیم:

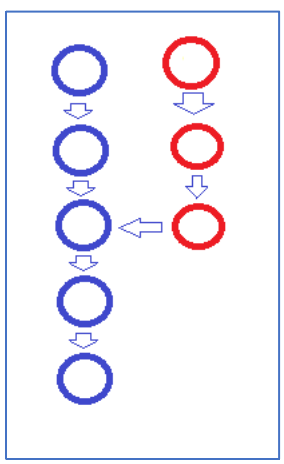
یک دور روی تمام عناصر یکی از لیست‌ها پیمایش می‌کنیم (طول این لیست را m در نظر می‌گیریم) و تمام این اعضا را در یک هش ذخیره می‌کنیم.

می‌دانیم که ذخیره کردن هر عضو در هش O(1) زمان می‌گیرد، پس کل این مرحله O(m) زمان می‌گیرد.

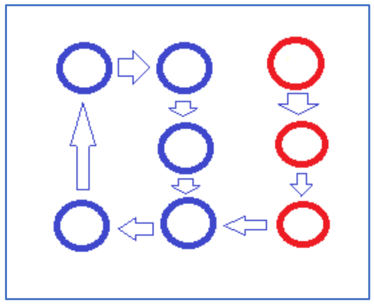
سپس سراغ لیست دوم می‌رویم و یکی یکی عناصر را می‌پیماییم و چک می‌کنیم که در هش هست یا نه، اولین عنصر از لیست دوم که در هش هم بود، جوابِ ماست. می‌دانیم که چک کردنِ این که هر عضو در هش هست یا نیست O(1) زمان می‌گیرد، در نتیجه بدترین حالت زمانی خواهد بود که عضو مشترک، آخرین عضو از دو لیست باشد، در این صورت باید تمام عناصر لیست دوم را هم تست کنیم که آن‌گاه O(n) زمان خواهد گرفت.

یک راه حل جالب دیگر:

دو لیستِ ما چنین شکلی دارند:



سراغ لیست اول می‌رویم (لیست آبی‌رنگ به طول m). آدرس عضو اول از این لیست را ذخیره می‌کنیم و سپس تا آخرین عضو پیش می‌رویم، سپس next آخرین عضو را برابر با اولین عضو قرار می‌دهیم، یعنی اولین لینکدلیستمان را تبدیل به یک حلقه کردیم، به این شکل:

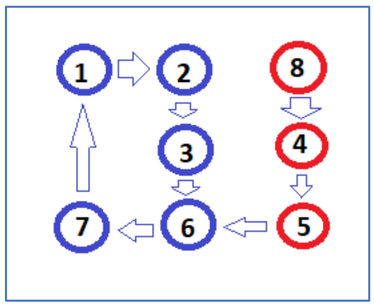


می‌دانیم که تعداد گره‌های این حلقه، برابر است با همان m یعنی طول لیست اول.

مرحله‌ای که توضیح داده شد، مشخصا به اندازه‌ی طول لیستمان یعنی O(m) زمان می‌گیرد.

حال سراغ لیست دوم (که اعضای متمایزِ آن با رنگ قرمز مشخص شده‌اند) می‌رویم.

برای واضح بودن توضیحات، اعدادی بی‌معنا را به گره‌ها نسبت می‌دهیم.



سراغ پوینتری می‌رویم که به اولین گره از دومین لیست داریم، یعنی به گره ۸ ، آدرسِ این گره را ذخیره می‌کنیم، سپس به اندازه‌ی طول لیست اول، یعنی m ، جلو می‌رویم، پس به گره ۱ می‌رسیم.

در این جا دو پوینتر داریم، یکی به عضو اول از لیست دوم اشاره می‌کند و دیگری به m عضو بعد از عضوِ اول از لیست دوم.

حال همزمان یکی یکی این دو اشاره‌گر را پیش می‌بریم و بعد از هر پیش‌روی با یکدیگر مقایسه‌شان می‌کنیم و اگر به یک گره اشاره نمی‌کردند، یک گرهِ دیگر پیش می‌بریم هردو را. اولین باری که به یک گره مشترک اشاره می‌کردند، آن گره، شروع اشتراکِ این دو لیست است. این مرحله هم در بدترین حالت تا آخرین عنصر لیست دوم (که طول آن برابر n بود) طول می‌کشد، یعنی O(n) زمان می‌گیرد.

۸- یک درخت قرمز سیاه که با درج n گره توسط الگوریتم درج بیان شده در کلاس به وجود آمده را در نظر بگیرید. ثابت کنید که اگر $n>1$ باشد، درخت حداقل یک گره قرمز دارد. (۱ نمره)

اولین عضو به عنوان ریشه‌ی سیاه درج خواهد شد. دومین عضو قطعا یکی از فرزندانِ این ریشه‌ی سیاه خواهد بود و طبق الگوریتمی که در کلاس بیان شد، هرگاه پدر سیاه بود، فرزند را قرمز می‌کنیم.

حال برای این که مطلوب را ثابت کنیم، کافی‌ست نشان دهیم که هیچ درجی نمی‌تواند این فرزندِ قرمز را سیاه کند، بدونِ این که یک گره قرمز دیگر اضافه کند.

تغییر رنگ این فرزندِ قرمز، هنگامی رخ می‌دهد که یک فرزند به آن اضافه کنیم. اگر تا آن موقع یک برادرِ قرمز به این فرزند قرمز اضافه شده باشد، این دو برابر را مشکی می‌کنیم و فرزندِ جدید را قرمز می‌کنیم، پس در این کیس همچنان حداقل یک گره قرمز، که همان فرزندِ جدید باشد، داریم همچنان.

حالتِ دیگر این است که هنگامی که فرزندی به این فرزندِ قرمز اضافه می‌کنیم، عموی‌ش مشکی یا نیل باشد. در این حالت هم می‌دانیم که بعد از روتیت و درج، گره‌ای که اضافه می‌شود، قرمز اضافه می‌شود.

به این ترتیب تمام حالاتی که برای تغییر رنگ گره قرمزمان داشتیم را بررسی کردیم و دیدیم که در تمام این حالات، حداقل یک گره قرمز دیگر اضافه می‌شود، پس همواره گره قرمز خواهیم داشت.

۹- الگوریتمی ارائه دهید که بدون استفاده از هیچ حافظه اضافه ای، یک پشته پیاده‌سازی شده با آرایه را در زمان $O(n)$ برعکس کند. (۱ نمره)

با توجه به این که داده‌های ما در یک آرایه ریخته شده‌اند، پس به تمام اعضا دسترسی داریم، در نتیجه، دو شمارنده در نظر می‌گیریم، یکی را **i** می‌نامیم و آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم و دیگری را **j** می‌نامیم و برابر با ایندکسِ آخرین عضو یا $n - 1$ (با این فرض که طول آرایه‌مان همان n است)، سپس مقادیر عضو **i** ام و عضو **j** ام را با یکدیگر جابه‌جا می‌کنیم، و یک واحد به **i** اضافه می‌کنیم و یک واحد از **j** کم می‌کنیم و سپس باز هم به همین منوال ادامه می‌دهیم، عضو **i** ام را با **j** ام جابه‌جا می‌کنیم و دوباره یکی از **i** کم می‌کنیم و یکی به **j** اضافه می‌کنیم. همین حلقه را ادامه می‌دهیم تا هنگامی که **i** کوچک از **j** باشد.

اگر هم فرض کنیم هدفمان برعکس کردنِ پشته‌ای باشد که با لینکدلیست پیاده‌سازی شده است، یک اشاره‌گر به عضو اول می‌سازیم، یک اشاره‌گرِ موقت هم می‌سازیم، اشاره‌گر اصلی را به گرهِ بعدی می‌فرستیم و اشاره‌گر موقتِ دیگری را به این گره می‌سازیم. دوباره اشاره‌گر اصلی را یک گره جلوتر می‌رویم، سپس next اشاره‌گر دوم‌مان را به اشاره‌گر اول وصل می‌کنیم. این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که اشاره‌گر اصلی‌مان به نیل برسد، در این حالت اشاره‌گر موقت دوم به عضو آخر اشاره می‌کند، و اشاره‌گر موقت اولمان به عضو یکی مانده به آخر اشاره می‌کند و next عضو آخر را برابر با عضو یکی مانده به آخر قرار می‌دهیم، با این کار تمام اشاره‌گرهایمان به عضوهای قبلی خود اشاره می‌کنند، یعنی لیست‌مان برعکس شده.

به بیانی، نیاز به سه اشاره‌گر داریم که به سه گرهِ پیاپی اشاره می‌کنند. گرهی که جلوتر است، یکی یکی جلو می‌رود و به کمکِ آن گره‌های قبلی را مقداردهی می‌کنیم و دو گرهِ قبلی هم، که اشاره‌گری از عنصر عقب‌تر به عنصر جلوتر اشاره می‌کند، در هر مرحله اشاره‌گرشان را برعکس می‌کنیم.

```python
class Node:
    def __init__(self, val):
        self.val = val
        self.next = None


def reverse(linked_list: Node) -> Node:
    main_pointer = linked_list
    prev_prev_main = main_pointer

    main_pointer = main_pointer.next
    prev_main = main_pointer

    main_pointer = main_pointer.next

    prev_prev_main.next = None

    while main_pointer is not None:
        prev_main.next = prev_prev_main

        prev_prev_main = prev_main
        prev_main = main_pointer

        main_pointer = main_pointer.next

    prev_main.next = prev_prev_main
    return prev_main


def print_linked_list(linked_list: Node):
    pointer = linked_list

    print('\nLinked List: ', end='')
    while pointer is not None:
        print(pointer.val, end=' ')
        pointer = pointer.next
```

```python
    print()


if __name__ == '__main__':
    linked_list = Node(1)
    linked_list.next = Node(2)
    linked_list.next.next = Node(3)
    linked_list.next.next.next = Node(4)
    linked_list.next.next.next.next = Node(5)

    print_linked_list(linked_list)
    linked_list = reverse(linked_list)
    print_linked_list(linked_list)
```

خروجی این کد به این شکل است:

```
"C:\Users\HAMI 37737396\.virtualenvs

Linked List: 1 2 3 4 5

Linked List: 5 4 3 2 1

Process finished with exit code 0
```