

به نام خداوند بخشنده مهربان

تمرین شماره ۱ درس ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

۱- الگوریتم غربال اراتستن را نوشته و آن را تحلیل زمانی کنید

۲- اعداد فیبوناچی به این صورت تعریف می‌شوند:

$$F_1 = F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$$

با استقرا ثابت کنید که میتوان عدد n ام فیبوناچی را می‌توان بر اساس نسبت طلایی و مزدوج آن به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad F_i = \frac{\varphi^i - \hat{\varphi}^i}{\sqrt{5}} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

۳- با جایگذاری نشان دهید که $T(n) = T\left(\frac{2}{3}n\right) + (\log n)^2$ برابر $\Omega((\log n)^2)$ است.

۴- برای موارد زیر کران‌های حدی نزدیک را بدست آورد:

a) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n\sqrt{n}$

b) $T(n) = 243T\left(\frac{n}{81}\right) + 3^{\log_3 n}$

c) $T(n) = 9T\left(\frac{n}{81}\right) + \sqrt{n}$

d) $T(n) = 8T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n^5}$

۵- فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع همیشه مثبت هستند. با توجه به تعریف Θ ثابت کنید که:

$$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

۶- فرض کنید که n یک توان ۲ است. اگر تابع $T(n)$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$T(n) = \begin{cases} 2 & n = 2 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n = 2^k > 2 \end{cases}$$

با کمک استقرا ثابت کنید که $T(n) = n \lg n$

۷- با توجه به دنباله زیر به سوالات زیر پاسخ دهید.

9, 4, 11, 3, 2, 1, 7, 17, 4, 91

الف) الگوریتم مرتب سازی درجی (Insertion Sort) را بر روی این دنباله اجرا کنید.

ب) چینش اعداد بالا را به گونه ای انتخاب کنید تا الگوریتم مرتب سازی درجی در بیشترین زمان ممکن اجرا شود.

ج) چینش اعداد بالا را به گونه ای انتخاب کنید تا الگوریتم مرتب سازی درجی در کمترین زمان ممکن اجرا شود.

۸- یک کران حدی مناسب (Θ) برای تابع زیر به کمک قضیه اصلی (Master Theorem) بدست آورید:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

راهنمایی: از تغییر متغیر استفاده کنید.

۹- فرض کنید که یک عدد صحیح x و مجموعه S شامل n عدد صحیح به شما داده شده است. الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \lg n)$ ارائه کنید

که بررسی کند آیا دو عدد در مجموعه S وجود دارند که مجموعه آنها مساوی x باشد یا نه.

۱۰- مسئله برنامه نویسی مشخص شده را حل کرده و در سایت کوئرا ارسال کنید.