

به نام خداوند بخشنده مهربان

تمرین شماره ۲ درس ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

۱- الگوریتمی ارائه دهید که n عدد از بازه ۱ تا k بگیرد و با اعمال زمان $O(n+k)$ ، پردازشی را انجام میدهد. سپس هرگاه از این الگوریتم پرسیده شود که چقدر از n عدد در بازه $[a,b]$ قرار می‌گیرند، در زمان خطی پاسخ می‌دهد. (۱ نمره)

۲- الگوریتمی طراحی کنید که آرایه n عضوی شامل اعدادی از بازه ۱ تا n^2 را در زمان $O(n)$ مرتب کند. (۱ نمره)

۳- روابط بازگشتی زیر را با روش جایگزینی حل کنید: (هر کدام ۱ نمره، در کل ۶ نمره)

a) $T(n) = T(n-1) + 2^n, T(1) = 1$

b) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2, T(n) = 1 \text{ for } n < 10$

c) $T(n) = T\left(\frac{3n}{7}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + n, T(n) = 1 \text{ for } n < 10$

d) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg^2 n, T(n) = 1 \text{ for } n < 10$

e) $T(n) = T(n-1) + n^2, T(n) = 1 \text{ for } n < 10$

f) $T(n) = 2T(n-1) + c, T(1) = 1$

۴- آرایه A شامل a عضو و آرایه B شامل b عضو که مرتب شده‌اند را در اختیار داریم. الگوریتمی برای پیدا کردن عنصر k ام در ترکیب مرتب شده این دو آرایه در زمان $O(a+b)$ ارائه دهید. (۱ نمره)

۵- یک آرایه از اعداد منفی و مثبت داده شده است. در زمان خطی و بدون هیچ حافظه اضافه‌ای، این دو آرایه را از هم تفکیک کنید به صورتی که اعداد منفی در ابتدا آرایه و اعداد مثبت در انتهای آرایه قرار بگیرند. الگوریتمی بدین منظور ارائه دهید. (۱ نمره)

۶- در الگوریتم مرتب‌سازی سریع اگر n عنصر مقادیر متفاوت داشته باشند، بزرگ‌ترین عنصر حداکثر چند بار جا به جا می‌شود؟ (۱ نمره)

۷- فرض کنید آرایه‌ای به طول N داریم. فرض کنید در مرتب‌سازی سریع، میانه عناصر زیر را به عنوان محور در نظر می‌گیریم:

عنصر ابتدای آرایه ($k=0$)

عنصر انتهای آرایه ($k=N-1$)

عنصر وسط آرایه ($k=N/2$)

عنصر وسط قسمت راست آرایه ($k=N/4$)

عنصر وسط قسمت چپ آرایه ($k=3N/4$)

در این صورت، زمان اجرای مرتب‌سازی در بدترین حالت چه خواهد بود؟ (۱ نمره)

۸- الگوریتم مرتب‌سازی زیر را برای مرتب کردن مجموعه A که شامل n عدد صحیح مثبت کوچکتر از k است را در نظر بگیرید:

```
1 Assignment-Sort(A, B, k)
2   for i <- 0 to k
3       do C[i] <- 0
4   for j <- 1 to length[A]
5       do C[A[j]] <- c[A[j]] + 1
6   for i <- 1 to k
7       do C[i] <- C[i] + C[i-1]
8   for j <- 1 to length[A]
9       do B[C[A[j]]] <- A[j]
10      do C[A[j]] <- C[A[j]] - 1
```

الف) ثابت کنید که این الگوریتم اعداد را به درستی مرتب می‌کند. (۱ نمره)

ب) آیا این الگوریتم پایدار است؟ چرا؟ (۱ نمره)

۹- مسئله برنامه‌نویسی مشخص شده را حل کرده و در سایت کوئرا ارسال کنید. (۴ نمره)