

به نام خدا

تمرین ۲ مدارهای منطقی

چمران معینی

۹۹۳۱۰۵۳

1. اگر $f = x \oplus y$ باشد، تابع f را با استفاده از \bar{x} , \bar{y} و x و y گیت‌های AND و OR بازنویسی کنید، سپس درستی عبارات زیر را ثابت کنید. (20 نمره)

a. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

b. $x + y = x \oplus y \oplus xy$

$$f = x \oplus y = x'y + xy'$$

$$\begin{aligned} a) A &= (x \oplus y) \oplus z = (x'y + xy') \oplus z = (x'y + xy')'z + (x'y + xy')z' \rightarrow DeMorgan \rightarrow A \\ &= (x'y)'(xy')'z + x'yz' + xy'z' \rightarrow DeMorgan \rightarrow A \\ &= (x' + y)(x + y')z + x'yz' + xy'z' \rightarrow A = x'y'z + xyz + x'yz' + xy'z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y'z + yz') = x'(y'z + yz') + x(y'z + yz')' \rightarrow DeMorgan \rightarrow B \\ &= x'y'z + x'yz' + x((y'z)'(yz')') \rightarrow DeMorgan \rightarrow B \\ &= x'y'z + x'yz' + x((y + z')(y' + z)) \rightarrow B = x'y'z + x'yz' + xyz + xy'z' \end{aligned}$$

$$\rightarrow A = B \rightarrow (x \oplus y) \oplus z = (x \oplus y) \oplus z$$

$$\begin{aligned} b) A &= x \oplus y \oplus xy = xy(xy) + xy'(xy)' + x'y(xy)' + x'y'(xy) \rightarrow DeMorgan \rightarrow A \\ &= xy + xy'(x' + y') + x'y(x' + y') = xy + xy' + x'y = x(y + y') + x'y = x + x'y \\ &\rightarrow Absorption Property \rightarrow A = x + y \rightarrow x + y = x \oplus y \oplus xy \end{aligned}$$

2. طبق قضیه‌ی شانون، هر تابع دلخواه F را می‌توان برحسب یک یا چند متغیر به فرم‌های زیر بسط داد.

$$a. \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot F(1, x_2, \dots, x_n) + \overline{x_1} \cdot F(0, x_2, \dots, x_n)$$

$$b. \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1 + F(0, x_2, \dots, x_n)] \cdot [\overline{x_1} + F(1, x_2, \dots, x_n)]$$

تابع $f(x, y, z) = x\overline{y} + \overline{x}z + y\overline{z}$ را برحسب متغیر z به هر دو فرم شانون بسط دهید. (20 نمره)

$$f(x, y, z) = xy' + x'z + yz'$$

$$a) \quad f(x, y, z) = z \cdot f(x, y, 1) + z' \cdot f(x, y, 0) = (z)(xy' + x') + (z')(xy' + y)$$

$$b) \quad f(x, y, z) = [z + f(x, y, 0)] \cdot [z' + f(x, y, 1)] = [z + xy' + y] \cdot [z' + xy' + y]$$

3. فرض کنید که در یک مسابقه هفت نفر داور وجود دارند که هر کدام از آن‌ها روی یک صندلی (به ترتیب نام‌گذاری شده در زیر) می‌نشینند و برای امتیازدهی از دکمه مربوط به خود استفاده می‌کند. در صورت نظر مثبت داور، یک 1 منطقی و در صورت نظر منفی داور، یک 0 منطقی توسط دکمه مربوطه تولید می‌شود. فرض کنید هر شرکت‌کننده برای برنده شدن به پنج رای مثبت از داورهایی که مجاور یکدیگر نشسته‌اند یا شش رای مثبت از داورهایی که لزوماً کنار هم نیستند نیاز دارد. رابطه جبری تابعی را بنویسید که رای داوران را به عنوان ورودی دریافت کرده، و با تولید خروجی 0 برنده نشدن و با تولید خروجی 1 برنده شدن یک شرکت‌کننده را نمایش می‌دهد. در این سوال هیچ نوع ساده‌سازی انجام ندهید. (25 نمره)



$$f(A, B, C, D, E, F, G) = (ABCDE + BCDEF + CDEFG) + (ABCDFG + ABCEFG + ABDEFG)$$

البته اگر بخواهیم حالت کلی‌تر را بنویسیم، باید معادله را به شکل پایین بنویسیم، اما از آن جایی که چهار حالت از هفت حالتی که ۶ نفر نظر مثبت داشته باشند، زیرمجموعه‌ی حالت‌هایی است که ۵ نفر مجاور نظر مثبت داشته باشند، الزامی به شمارش آن حالات نیست.

$$\begin{aligned} f(A, B, C, D, E, F, G) &= (ABCDE + BCDEF + CDEFG) \\ &+ (ABCDEF + ABCDEG + ABCDFG + ABCEFG + ABDEFG + ACDEFG + BCDEFG) \end{aligned}$$

4. تابع جبری زیر را در نظر بگیرید. (20 نمره)

$$f(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,7,8,9,10,15)$$

الف) این تابع را بصورت جمع مینترم‌ها بنویسید.

ب) با توجه به اندیس مینترم‌های موجود، این تابع را بصورت ضرب ماکسترم‌ها بنویسید.

الف)

$$f(A, B, C, D) = A'B'C'D' + A'B'C'D + A'B'CD' + A'BCD + AB'C'D' + AB'C'D + AB'CD' + ABCD$$

ب)

$$f(A, B, C, D) = (A + B + C' + D')(A + B' + C + D)(A + B' + C + D')(A + B' + C' + D)(A' + B + C' + D')(A' + B' + C + D)(A' + B' + C + D')(A' + B' + C' + D)$$

5. فرم کانونی POS عبارت جبری زیر را بدست آورید. (10 نمره)

$$f(A, B, C) = (C + A)(B + C')(A + B + C)(A' + B')$$

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= (A' + C)(B + C')(A' + B')(A + B + C) \\ &= (A' + BB' + C)(AA' + B + C')(A' + B' + CC')(A + B + C) \\ &= (A' + B + C)(A' + B' + C)(A + B + C')(A' + B + C')(A' + B' + C')(A + B + C) \\ &= (A' + B + C)(A' + B' + C)(A + B + C')(A' + B + C')(A' + B' + C')(A + B + C) \\ &\rightarrow (\text{canonical POS}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= (A' + C)(B + C')(AB' + A'B + A'C + B'C) \\ &= (A'B + BC + A'C)(AB' + A'B + A'C + B'C) \\ &= (A'B + A'BC) + (A'BC + A'BC) + (A'BC + A'C + A'B'C) \\ &= A'B + A'BC + A'C + A'B'C = A'B + A'C + A'B'C \\ &= A'B(C + C') + A'(B + B')C + A'B'C = A'BC + A'BC' + A'BC + A'B'C + A'B'C \\ &= A'BC + A'BC' + A'B'C \rightarrow (\text{canonical SOP}) \end{aligned}$$

(اول اشتباهی فکر کردم این خواسته شده)

6. فرم کانونی SOP عبارت جبری زیر را بدست آورید. (10 نمره)

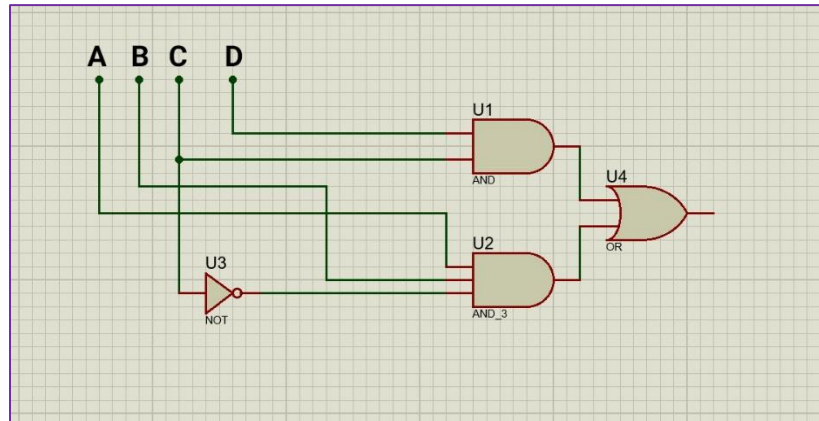
$$f(A, B, C) = AC' + BC' + ABC$$

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= AC' + BC' + ABC = A(B + B')C' + (A + A)BC' + ABC \\ &= \textcolor{red}{ABC'} + AB'C' + \textcolor{red}{ABC'} + A'BC' + ABC = ABC' + AB'C' + A'BC' + ABC \end{aligned}$$

7. تابع زیر را بصورت دوسطحی پیاده‌سازی کنید. (10 نمره)

$$f(a,b,c,d) = \sum m(3,7,11,12,13,15)$$

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= a'b'cd + a'bcd + ab'cd + abc'd' + abc'd + abcd \rightarrow (xy + x'y = y) \\ &\rightarrow a'cd + acd + abc' \rightarrow (xy + x'y = y) \rightarrow cd + abc' \end{aligned}$$

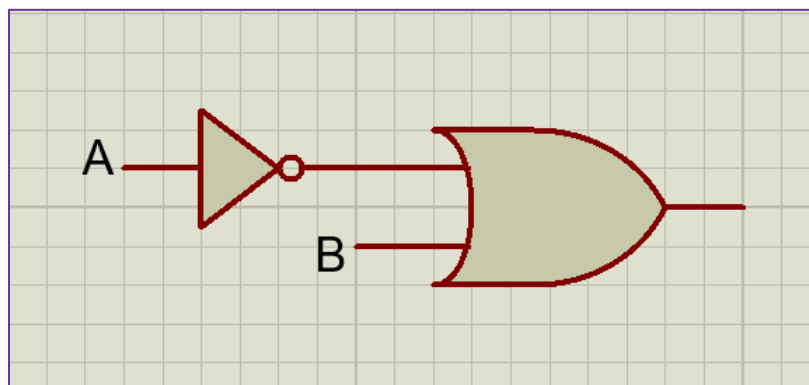


8. مداری را در نظر بگیرید که دارای چهار ورودی و یک خروجی باشد. سه متغیر ورودی یک عدد باینری را نشان می‌دهند و متغیر چهارم آن سیگنال کنترل است، اگر کنترل صفر باشد، خروجی باید یک باشد. اگر کنترل یک باشد در صورتی که عدد باینری بزرگتر یا برابر با 4 باشد خروجی یک می‌شود. (20 نمره)

الف) جدول ارزش‌های این مدار را بکشید و تابع خروجی را بدست آورید.
ب) با استفاده از گیت‌های دلخواه مدار را رسم کنید.

a	b	c	d	$F(a, b, c, d)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$f(a, b, c, d) = a' + b$$

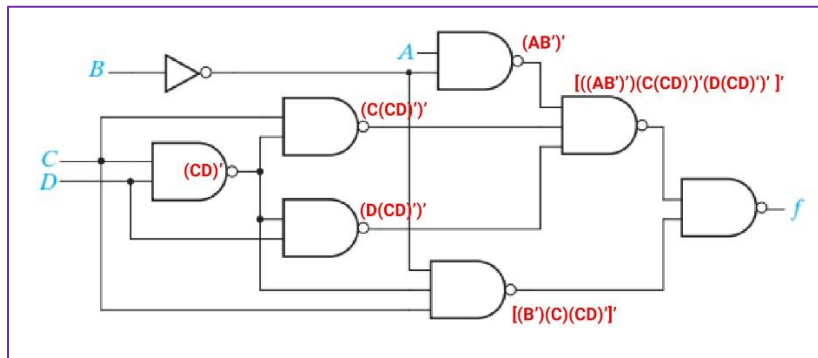
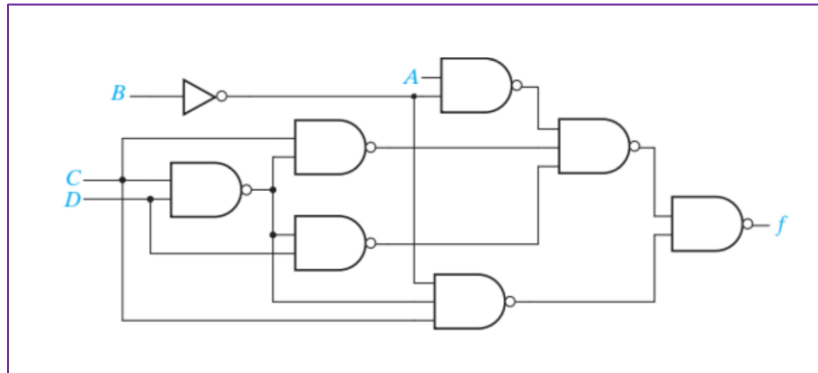


■ بخش سوم: سوالات امتیازی

9. مدار زیر را که با NAND ساخته شده در نظر بگیرید. (30 نمره)

الف) این مدار را به مداری چهارسطحی تبدیل کنید که فقط گیت‌های AND، OR و NOT در آن باشد و حداقل تعداد NOT در آن به کار رفته باشد.

ب) تابع f را به فرم SOP بنویسید



$$\begin{aligned}
 f(A, B, C, D) &= [((AB')')(C(CD)')'(D(CD)')')]. [(B')(C)(CD)']' \rightarrow \text{DeMorgan} \rightarrow \\
 &= [(A' + B)(C(C' + D'))'(D(C' + D'))'] . [(B')(C)(C' + D')] ' \\
 &= [(A' + B)(CD')'(C'D)'] . [(B')(CD)'] ' = [(A' + B)(C' + D)(C + D')]. [B'CD'] ' \\
 &= [(A' + B)(CD + C'D')]. (B + C' + D) \\
 &= [(A'CD + A'C'D' + BCD + BC'D')]. (B + C' + D) \\
 &= A'BCD + A'BC'D' + BCD + BC'D' + A'C'D' + BC'D' + A'CD + BCD \\
 &= A'BCD + A'BC'D' + BCD + BC'D' + A'C'D' + A'CD
 \end{aligned}$$

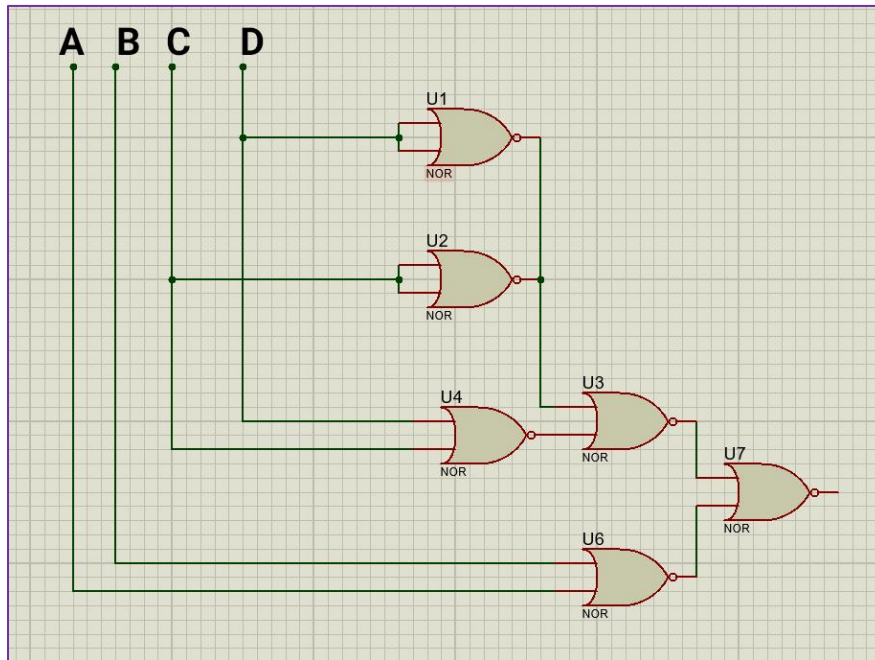
$$\rightarrow \text{Absorption Property} \rightarrow f(A, B, C, D) = BCD + BC'D' + A'C'D' + A'CD \text{ (SOP) (ب)}$$

$$\begin{aligned}
 f(A, B, C, D) &= BCD + BC'D' + A'C'D' + A'CD = B(CD + C'D') + A(CD + C'D') \\
 &= (A + B)(CD + C'D') = (A + B)(CD + (C + D)') \text{ (الف)}
 \end{aligned}$$

10. تابع \bar{f} در سوال 9 را تنها با استفاده از گیت NOR پیاده‌سازی کنید. (راهنمایی: از تبدیل گیت NAND به NOR استفاده کنید). (20 نمره)

۹. (الف)

$$\begin{aligned}
 f(A, B, C, D) &= (A + B)(CD + (C + D)') = (A + B)((C' + D')' + (C + D)') \\
 &= ((A + B)' + ((C' + D')' + (C + D)'))' = ((A \downarrow B) + ((C' \downarrow D') + (C \downarrow D)))' \\
 &= ((A \downarrow B) + ((C' \downarrow D') \downarrow (C \downarrow D)))' \rightarrow f' = ((A \downarrow B) + ((C' \downarrow D') \downarrow (C \downarrow D)))' \\
 &= (A \downarrow B) \downarrow ((C' \downarrow D') \downarrow (C \downarrow D)) \\
 &= (A \downarrow B) \downarrow (((C \downarrow C) \downarrow (D \downarrow D)) \downarrow (C \downarrow D))
 \end{aligned}$$



11. توابع F_1 و F_2 را در نظر بگیرید. (20 نمره)

$$F_1 = \Pi M(0,4,5,6) \quad , \quad F_2 = \Pi M(0,4,7)$$

الف) تابع F_1+F_2 را بصورت ضرب ماکسترم‌ها بدست آورید.

ب) یک قانون کلی برای بدست آوردن F_1+F_2 به ازای هر دو تابع دلخواه که بصورت ماکسترمی نشان داده شده‌اند بدست آورید.

(الف)

$$F_1 = ((A + B + C + D)(A + B' + C + D)(A + B' + C + D')(A + B' + C' + D))$$

$$F_2 = (A + B + C + D)(A + B' + C + D)(A + B' + C' + D')$$

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= ((A + B + C + D)(A + B' + C + D)(A + B' + C + D')(A + B' + C' + D)) \\ &\quad + (A + B + C + D)(A + B' + C + D)(A + B' + C' + D') \\ &= [(A + B + C + D)(A + B' + C + D)][((A + B' + C + D')(A + B' + C' + D))(A \\ &\quad + B' + C' + D')] \rightarrow [C + C' = 1] \& [D + D' = 1] \\ &\rightarrow ((A + B' + C + D')(A + B' + C' + D)) + (A + B' + C' + D') = 1 \rightarrow F_1 + F_2 \\ &= (A + B + C + D)(A + B' + C + D) = \Pi M(0,4) \end{aligned}$$

(ب)

با کمی تفکر هم، متوجه می‌شویم که F_1+F_2 فقط هنگامی \cdot است که هر دو تابع \cdot باشند، پس ماکسترم آن، اشتراک ماکسترم‌های F_1 و F_2 خواهد بود.