

به نام خدا

چمران معینی

۹۹۳۱۰۵۳

تمرین سوم مدارهای منطقی

۱. ابتدا عبارت زیر را با استفاده از جدول کارنو و سپس با استفاده از جبر بولی ساده کنید. (۲۰ نمره)

$$F = A'B'C' + A'C'D + BCD + ABC + AB'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	0	1
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	0	1
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

$$F = B'C' + AC + A'BD$$

$$\begin{aligned} F &= A'B'C' + A'C'D + BCD + \textcolor{red}{ABC} + \textcolor{red}{AB'} = A'B'C' + A'C'D + BCD + \textcolor{red}{A}(BC + B') \\ &\rightarrow \textbf{Absorption Property} \rightarrow A'B'C' + A'C'D + BCD + \textcolor{red}{A}(C + B') \\ &= A'B'C' + AB' + A'C'D + BCD + AC = B'(\textcolor{red}{A'C'} + A) + A'C'D + BCD + AC \\ &\rightarrow \textbf{Absorption Property} \rightarrow B'(\textcolor{red}{C'} + A) + A'C'D + BCD + AC \\ &= \textcolor{red}{AC} + \textcolor{red}{B'C'} + \textcolor{red}{AB'} + A'C'D + BCD \rightarrow \textbf{Consensus Theorem} \rightarrow \\ &= \textcolor{red}{AC} + \textcolor{red}{B'C'} + \textcolor{green}{A'C'D} + \textcolor{green}{BCD} \rightarrow \textbf{Consensus Theorem} \\ &\rightarrow AC + B'C' + \textcolor{green}{A'C'D} + \textcolor{green}{BCD} + \textcolor{green}{A'BD} \rightarrow \textbf{Consensus Theorem} \\ &\rightarrow (\textcolor{red}{AC} + \textcolor{red}{A'BD} + \textcolor{red}{BCD}) + B'C' + A'C'D \rightarrow \textbf{Consensus Theorem} \\ &\rightarrow (\textcolor{red}{AC} + \textcolor{red}{A'BD}) + B'C' + A'C'D = AC + (\textcolor{red}{A'BD} + \textcolor{red}{B'C'} + \textcolor{red}{A'C'D}) \\ &\rightarrow \textbf{Consensus Theorem} \rightarrow AC + B'C' + A'BD \end{aligned}$$

۲. با استفاده از جدول کارنو عبارات زیر را به فرم SOP یا POS ساده کنید. برای پیاده‌سازی POS از روش مستقیم که در کلاس توضیح داده شده است استفاده کنید. (۵۰ نمره)

a. (SOP)  $F(A, B, C) = \sum m(1, 6) + \sum d(0, 3, 5)$

b. (SOP)  $F(A, B, C, D) = \sum m(1, 3, 4, 7, 11) + \sum d(5, 12, 13, 14, 15)$

c. (SOP)  $F(A, B, C, D) = AB' + A'BC + AB'C' + A'BD' + A'B'D' + BCD$

d. (POS)  $F(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 13, 15)$

e. (POS)  $F(A, B, C, D) = \prod M(4, 7, 9, 11, 12).D(0, 1, 2, 3)$

a.  $F(A, B, C) = A'C + ABC'$

AB \ C	00	01	11	10
0	x	0	1	0
1	1	x	0	x

b.  $F(A, B, C, D) = BC' + A'D + CD$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	x	0
01	1	x	x	0
11	1	1	x	1
10	0	0	x	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	x	0
01	1	x	x	0
11	1	1	x	1
10	0	0	x	0

$$c. F(A, B, C, D) = AB' + A'BC + AB'C' + A'BD' + A'B'D' + BCD = AB' + A'BC + A'D' + BCD \\ = AB' + A'BC + A'D' + BCD \rightarrow \text{Consensus Theorem} \rightarrow AB' + A'D' + BCD$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	0	0	1
11	0	1	1	1
10	1	1	0	1

$$d. F(A, B, C, D) = \prod M(3, 5, 10, 11, 12, 14) = (A + B' + C + D)(A' + C + D')(A' + B + C')(B + C' + D)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	0	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	0	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

$$e. F(A, B, C, D) = (B' + C + D)(A + C' + D')(B + D')$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	0	0	1
01	X	1	1	0
11	X	0	1	0
10	X	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	0	0	1
01	X	1	1	0
11	X	0	1	0
10	X	1	1	1

۳. مکمل تابع ردیف b در سوال قبل را با استفاده از جدول کارنو به همان فرم بالا (مینترم‌ها و حالات بی‌اهمیت) بدست آورید و سپس آن را با استفاده از جدول کارنو به فرم SOP ساده کنید. (۱۰ نمره)

$$G(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 6, 8, 9, 10) + \sum d(5, 12, 13, 14, 15)$$

$$\rightarrow G(A, B, C, D) = AC' + CD' + A'B'D'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	X	1
01	0	X	X	1
11	0	0	X	0
10	1	1	X	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	X	1
01	0	X	X	1
11	0	0	X	0
10	1	1	X	1

۴. با استفاده از جدول کارنو، درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (در صورت لزوم برای بدست آوردن مکمل یک عبارت می‌توانید از جدول کارنو و یا قانون دمورگان استفاده کنید.) (۱۰ نمره)

$$\overline{A}.C + A.B + \overline{B}.C = \overline{A}.\overline{B} + B.C + A.\overline{C}$$

$$A'C + AB + (BC)' \rightarrow DeMorgan \rightarrow A'C + AB + B' + C'$$

سمت چپ معادله:

AB \ C	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

سمت راست معادله:

AB \ C	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1	1	1	

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که عبارت مذکور صحیح نیست.

۵. با استفاده از جدول کارنو تابع زیر را به فرم‌های خواسته شده بنویسید. (۲۰ نمره)

$$f(A,B,C,D,E) = B \cdot \bar{D} \cdot E + A \cdot \bar{B} \cdot D + \bar{A} \cdot C \cdot \bar{D} \cdot E + A \cdot \bar{C} \cdot E$$

الف) فرم SOP کانونی

ب) فرم POS کانونی

ج) فرم SOP استاندارد ساده شده

د) فرم POS استاندارد ساده شده

AB \ CD	00	01	11	10	AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1	00	0	0	0	0
01	0	0	1	1	01	0	0	0	1
11	0	0	0	1	11	0	0	0	1
10	1	1	1	0	10	0	0	0	0

AB \ CD	00	01	11	10	AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	1	00				
01			1	1	01				1
11				1	11				1
10	1	1	1		10				

$$\begin{aligned}
f(A, B, C, D, E) &= \mathbf{BD'E} + \mathbf{AB'D} + \mathbf{A'CD'E} + \mathbf{AC'E} \text{ (SOP)} \\
&= (A + A')B(C + C')D'E + AB'(C + C')D(E + E') + A'(B + B')CD'E \\
&\quad + A(B + B')C'(D + D')E \\
&= ABCD'E + ABC'D'E + A'BCD'E + A'BC'D'E + AB'CDE + AB'CDE' + AB'C'DE \\
&\quad + AB'C'DE' + A'BCD'E + A'B'CD'E + ABC'DE + ABC'D'E + AB'C'DE \\
&\quad + AB'C'ED' \\
&= ABCD'E + \mathbf{ABC'D'E} + \mathbf{A'BCD'E} + A'BC'D'E + AB'CDE + AB'CDE' + \mathbf{AB'C'DE} \\
&\quad + AB'C'DE' + \mathbf{A'BCD'E} + A'B'CD'E + ABC'DE + \mathbf{ABC'D'E} + \mathbf{AB'C'DE} \\
&\quad + AB'C'ED' \\
&= \mathbf{ABCD'E} + \mathbf{ABC'D'E} + \mathbf{A'BCD'E} + \mathbf{A'BC'D'E} + \mathbf{AB'CDE} + \mathbf{AB'CDE'} \\
&\quad + \mathbf{AB'C'DE} + \mathbf{AB'C'DE'} + \mathbf{A'B'CD'E} + \mathbf{ABC'DE} + \mathbf{AB'C'ED'} \rightarrow \text{canonical SOP}
\end{aligned}$$



AB \ CD	00	01	11	10	AB \ CD	00	01	11	10
00	0				00	0	0	0	0
01	0	0			01	0	0	0	
11	0	0	0		11	0	0	0	
10				0	10	0	0	0	0

$$f(A, B, C, D, E) = (A + B + C)(A + D')(B' + C' + D')(A' + B + C' + D)(C + D + E)(A + E)(B' + E)$$

(POS)

$$\begin{aligned}
 f(A, B, C, D, E) &= (A + B + C + DD' + EE')(A + BB' + CC' + D' + EE')(AA' + B' + C' + D' + EE')(A' + B + C' + D + EE')(AA' + BB' + C + D + E)(A + BB' + CC' + DD' + E)(AA' + B' + CC' + DD' + E) \\
 &= (A + B + C + D + E)(A + B + C + D + E')(A + B + C + D' + E)(A + B + C + D' + E')
 \end{aligned}$$

$$f(A, B, C, D) =$$

$$\begin{aligned}
 &(A + B + C + D + E)(A + B + C + D + E')(A + B + C + D' + E)(A + B + C + D' + E') \\
 &(A + B + C + D' + E)(A + B + C + D' + E')(A + B + C' + D' + E)(A + B + C' + D' + E')(A + B' + C + D' + E)(A + B' + C + D' + E')(A + B' + C' + D' + E)(A + B' + C' + D' + E') \\
 &(A + B' + C' + D' + E)(A + B' + C' + D' + E')(A' + B' + C' + D' + E)(A' + B' + C' + D' + E') \\
 &(A' + B + C' + D + E)(A' + B + C' + D + E') \\
 &(A + B + C + D + E)(A + B' + C + D + E)(A' + B + C + D + E)(A' + B' + C + D + E) \\
 &(A + B + C + D + E)(A + B + C + D' + E)(A + B + C' + D + E)(A + B + C' + D' + E)(A + B' + C + D + E)(A + B' + C + D' + E)(A + B' + C' + D + E)(A + B' + C' + D' + E) \\
 &(A + B' + C + D + E)(A + B' + C + D' + E)(A + B' + C' + D + E)(A + B' + C' + D' + E)(A' + B' + C + D + E)(A' + B' + C + D' + E)(A' + B' + C' + D + E)(A' + B' + C' + D' + E)
 \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}
 f(A, B, C, D) = & (A + B + C + D + E)(A + B + C + D + E')(A + B + C + D' + E)(A + B + C + D' \\
 & + E')(A + B + C' + D' + E)(A + B + C' + D' + E')(A + B' + C + D' + E)(A + B' \\
 & + C + D' + E')(A + B' + C' + D' + E)(A + B' + C' + D' + E')(A' + B' + C' + D' \\
 & + E)(A' + B' + C' + D' + E')(A' + B + C' + D + E)(A' + B + C' + D + E')(A + B' \\
 & + C + D + E)(A' + B + C + D + E)(A' + B' + C + D + E)(A + B + C' + D + E)(A' \\
 & + B' + C + D' + E)(A' + B' + C' + D + E) \rightarrow \text{canonical SOP}
 \end{aligned}$$

۶. برای تابع  $f$  که در زیر مشخص شده است: (۲۰ نمره)

$$f(A, B, C, D) = \Sigma m(0, 7, 8, 9, 12, 14, 15) + \Sigma d(4, 6, 10)$$

الف) با استفاده از جدول کارنو تمام PI ها را بیابید.

ب) با استفاده از جدول کارنو تمام EPI ها را بیابید و دلیل ضروری (essential) بودن هر یک از آن‌ها را مشخص کنید.

ج) به کمک نتایج بدست آمده در مراحل قبل تابع را به فرم SOP ساده کنید.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	X	1	1
01	0	0	0	1
11	0	1	1	0
10	0	X	1	X

الف) در جدول زیر تمام PI ها مشخص شده‌اند.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	X	1	1
01	0	0	0	1
11	0	1	1	0
10	0	X	1	X

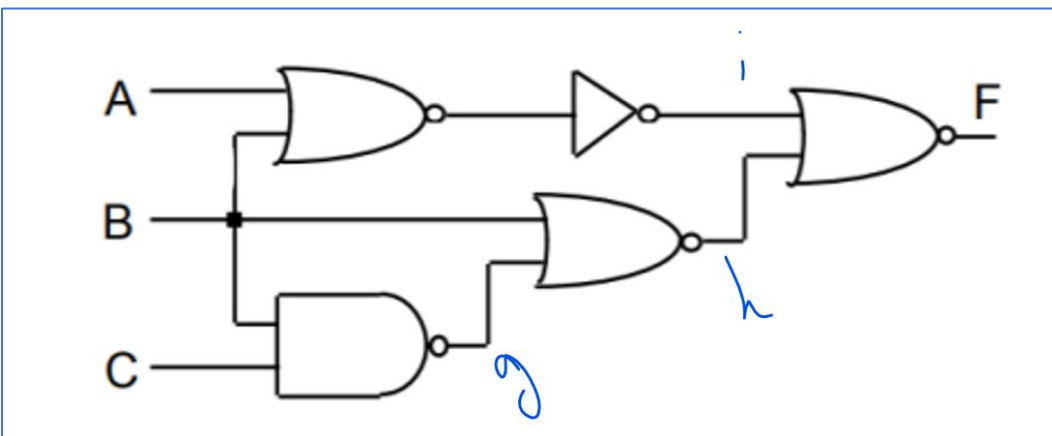
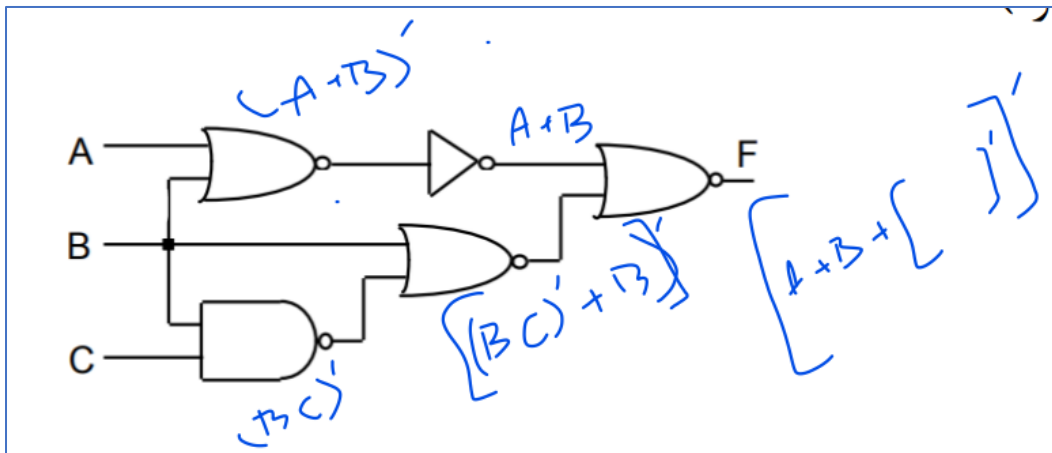
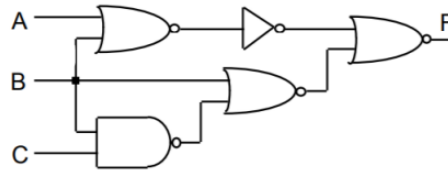
ب) در جدول زیر تمام EPI ها، به همراه Distinguished 1-cell هایشان که باعث می‌شود ضروری شود، مشخص شده‌اند. از آنجایی که هر یک از آن‌ها شامل حداقل یک Distinguished 1-cell است، مجبوریم آن‌ها را انتخاب کنیم چون در غیر این صورت برخی خانه‌های ۱ انتخاب نشده باقی خواهند ماند. پس ابتدا این خانه‌های ضروری را انتخاب می‌کنیم و سپس به سراغ بقیه‌ی خانه‌ها و گروه‌ها، در صورت لزوم، می‌رویم.

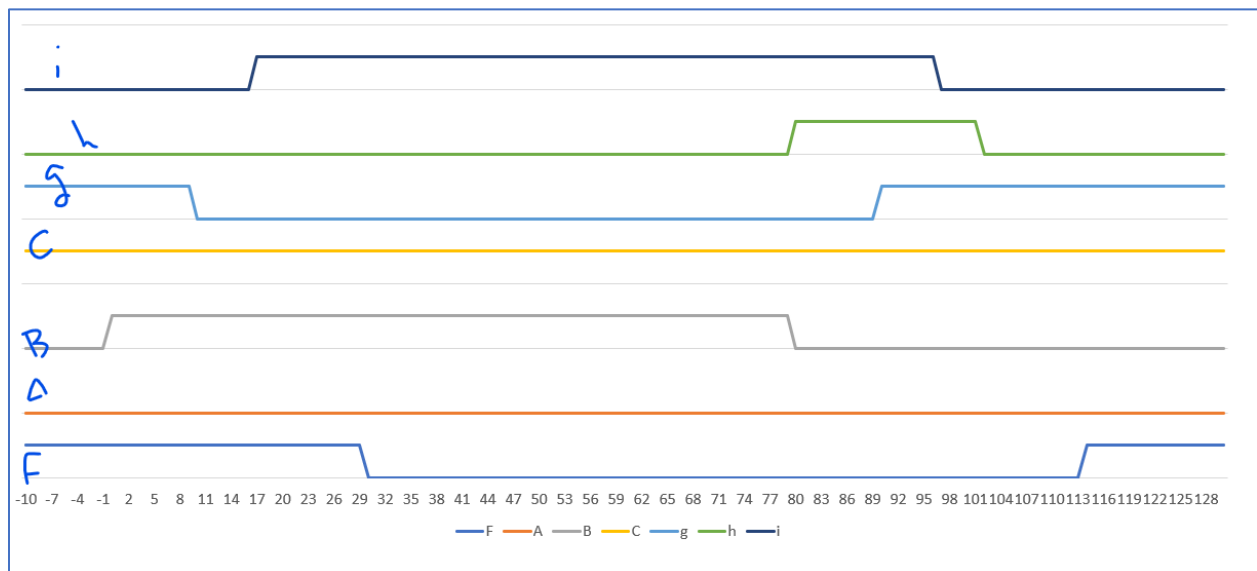
AB \ CD	00	01	11	10
00	1	X	1	1
01	0	0	0	1
11	0	1	1	0
10	0	X	1	X

(c)

$$F = C'D' + BC + AB'C'$$

۷. در مدار زیر گیت NOT دارای تاخیر ۵ نانوثانیه، گیت NAND دارای تاخیر ۱۰ نانوثانیه و گیت NOR دارای تاخیر ۱۲ نانوثانیه است. دیاگرام زمانی کامل سیگنال‌های A، B، C و F را رسم کنید. فرض کنید در ابتدا از مدت‌ها پیش، مقدار A برابر با ۰، مقدار B برابر با ۰ و مقدار C برابر با ۱ بوده است. سپس در زمان صفر، B برابر ۱ می‌شود و پس از ۸۰ نانوثانیه مجدداً ۰ می‌شود. آیا پالس ناخواسته (glitch) در خروجی مشاهده می‌شود؟ اگر بله، آیا این پالس در هر دو تغییر سیگنال B اتفاق می‌افتد یا فقط در یک تغییر؟ (۲۰ نمره)





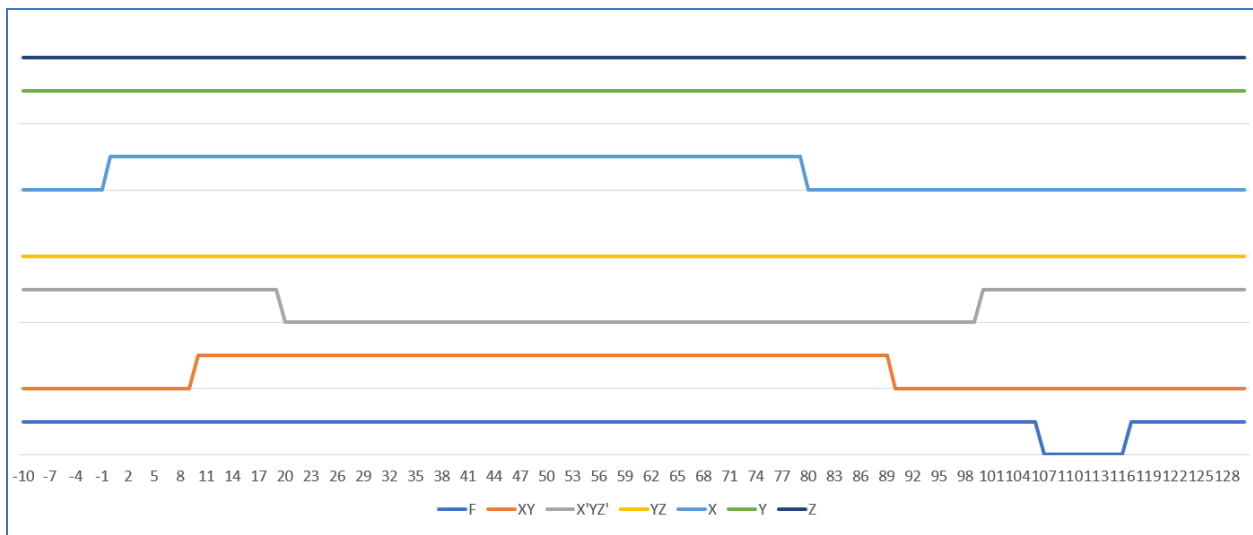
در خروجی نهایی یک پالس مشاهده می‌شود، که البته یک پالس خواسته است نه ناخواسته.

البته در سیم h یک پالس ناخواسته داریم که نتوانسته تغییری در خروجی ایجاد بکند.

گیت نهایی ما، در ابتدا ۱ را خروجی می‌دهد، چون هر دو ورودی آن ۰ است، کافیست یکی از ورودی‌های آن ۱ شود تا خروجی ش ۰ بشود. در ابتدا با تغییر سیگنال B، تغییری در سیگنال

۸. مدار معادل تابع  $F = XY + X'YZ' + YZ$  را رسم کنید. با در نظر گرفتن تاخیر گیت‌ها بصورت زیر، دیاگرام زمانی خروجی این مدار را رسم کنید. فرض کنید در ابتدا و از مدت‌ها پیش، مقدار  $X$  و  $Z$  برابر با ۰ و مقدار  $Y$  برابر با ۱ بوده است. از زمان صفر،  $X$  به مدت ۸۰ نانوثانیه برابر ۱ می‌شود و سپس ۰ می‌شود. آیا در خروجی یک پالس ناخواسته مشاهده می‌کنید؟ آیا این پالس در هر دو تغییر  $X$  اتفاق می‌افتد یا فقط روی یک تغییر؟ در مورد مشاهدات خودتان بحث کنید. (۲۰ نمره)

- a. Inverter: 5 ns
- b. 2-input AND: 10 ns
- c. 3-input AND: 15 ns
- d. 3-input OR: 17 ns



می‌بینیم که در اولین تغییر  $X$ ، مقدار خروجی ثابت است و بعد از ایجاد تغییرات توسط گیت‌های مختلف، مقدار خروجی همچنان مقدار قبلی خود را دارد.

با کمی توجه، می‌بینیم که سه سیم به به گیت OR پایانی می‌رسند، یعنی کافی‌ست یکی از این سه سیم ۱ باشد، تا خروجی ما ۱ باشد. می‌بینیم که تغییری که روی  $X$  ایجاد کردیم، باعث شد مقدار یکی از این سه از ۱ به ۰، و مقدار یک سیم دیگر از ۰ به ۱ تغییر پیدا کند. از آنجایی که تغییر ۰ به ۱ توسط گیت دو ورودی AND اتفاق می‌افتاد، تاخیر کمتری داشت و این اتفاق زودتر افتاد، در نتیجه در طول این تغییر، همواره حداقل یکی از ورودی‌های گیت نهایی ما، مقدار ۱ را دارد.

اما می‌بینیم که در تغییر دوم یک پالس ناخواسته داریم. می‌بینیم که برعکس اتفاقات قبلی افتاده، دوباره یکی از ورودی‌های OR، از ۰ به ۱ و یکی دیگر از ۱ به صفر تغییر پیدا کرده است. مشابه قبل، تغییر گیت دو ورودی AND سریع‌تر اتفاق می‌افتد و از ۱ به ۰ تغییر پیدا می‌کند، و پیش از این که سیم خروجی گیت سه ورودی AND از ۰ به ۱ تغییر پیدا کند، برای یک فاصله‌ی کوتاه هر سه ورودی گیت نهایی برابر ۰ می‌شوند که باعث ایجاد پالس ناخواسته می‌شوند.

■ بخش سوم: سوالات امتیازی

۹. چهار عدد از مینترم‌های تابع  $f(a, b, c, d)$  برابر با  $m_0, m_1, m_4$  و  $m_5$  هستند. (تابع  $f$  بصورت کامل

توصیف نشده است و دارای don't care نمی‌باشد). (۳۰ نمره)

الف) سایر مینترم‌های تابع  $f$  را طوری مشخص کنید که تابع  $f$  دارای دو PI با دو لیترال و دو PI با یک لیترال باشد و PI دیگری نداشته باشد.

ب) PIها و EPIهای تابع  $f$  را مشخص کنید.

ج) تابع  $f$  را به فرم SOP بنویسید.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	0

(ب)

در این شکل EPIهای با دو لیترال با رنگ آبی، و EPIهای با یک لیترال با رنگ قرمز مشخص شده‌اند.

همچنین می‌بینیم که همه‌ی PIهای این جدول، EPI هستند و Distinguished 1-cell هایشان با دایره بنفش مشخص شده است.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	0



$$\langle \varepsilon$$

$$f(a,b,c,d)=a+b+c'd'+cd$$