

به نام خدا

پروژه اول

جبر خطی کاربردی - پاییز ۱۴۰۱

۱. انجام دادن پروژه‌ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل پروژه منظور خواهد شد.
 ۲. پاسخ‌ها مرتب و خوانا باشند.
 ۳. در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل تدریسیاری سوال خود را بپرسید:
`linearalgebra.fall1401@gmail.com`
 ۴. پاسخ خود را در یک فایل `.py` با فرمت `P?_Name_StudentNumber` آپلود کنید.
- موفق باشید. 😊

در این پروژه به سراغ یکی از کاربردهای مهم دستگاه معادلات می‌رویم و با استفاده از زبان پایتون و دانش جبری برای حل دستگاه معادلات، مسئله‌ی مهمی در دنیای اقتصاد را حل خواهیم کرد:

محاسبه‌ی قیمت تعادل

در دنیای اقتصاد، قیمت به تعامل بین عرضه و تقاضای عناصر وابسته است. عرضه و تقاضا نمایانگر تمایل تولیدکننده و مصرف‌کنندگان به خرید و فروش است. مبادله‌ی یک محصول وقتی اتفاق می‌افتد که تولیدکننده و مصرف‌کننده با هم بر سر یک قیمت مشخص توافق کنند.

در مدل مبادله‌ای (مبادله‌ی کالا با کالا ☺) یک اقتصاد به بخش‌های مختلفی تقسیم می‌شود که برای تولید خروجی، به محصولات یکدیگر نیاز دارند. فرض کنید ما ارتباط میان این بخش‌ها را برای یک اقتصاد به طور کامل می‌دانیم. ارزش کلی خروجی یک بخش، قیمت آن بخش را مشخص می‌کند. در این مدل برای هر بخش یک قیمت تعادل وجود دارد که در آن، درآمد و مخارج تولید خروجی توسط یک بخش با هم مطابق هستند.

برای اطلاعات بیشتر درمورد مسئله‌ی قیمت تعادل و اهمیت آن می‌توانید از این لینک استفاده کنید. هم‌چنین ما در تیم تدریسیاری برای شما ویدیویی در این مورد به عنوان کاربرد فصل ۱ آماده کرده‌ایم که در اختیارتان قرار خواهیم داد.

بیاید به یک مثال توجه کنیم. فرض کنید رابطه‌ی قیمت بخش‌های یک اقتصاد با جدول زیر توصیف شده است:

بخش	فولاد	کهربا	ذغال سنگ
ذغال سنگ	۰,۶	۰,۴	۰,۰
کهربا	۰,۲	۰,۱	۰,۶
فولاد	۰,۲	۰,۵	۰,۴

برای محاسبه‌ی قیمت تعادل هر بخش، فرض می‌کنیم این قیمت‌ها، مجهولات یک دستگاه معادلات باشند. فرض کنیم قیمت ذغال سنگ را با pc ، قیمت کهربا را با pa و قیمت فولاد را با ps نشان می‌دهیم. در این صورت با توجه به جدول بالا، دستگاه معادلات زیر تشکیل خواهد شد:

$$\begin{cases} pc = 0.4pa + 0.6ps \\ pa = 0.6pc + 0.1pa + 0.2ps \\ ps = 0.4pc + 0.5pa + 0.2ps \end{cases}$$

و اگر دستگاه معادلات را به فرم استاندارد بنویسیم:

$$\begin{cases} 10pc - 4pa - 6ps = 0 \\ -6pc + 9pa - 2ps = 0 \\ -4pc - 5pa + 8ps = 0 \end{cases}$$

فرم نردبانی کاهش یافته ماتریس افزوده‌ی این دستگاه معادلات به شکل زیر خواهد بود:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{31}{33} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{28}{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و می‌توان گفت که:

$$x = t \begin{bmatrix} \frac{31}{33} \\ \frac{28}{33} \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 31 \\ 28 \\ 33 \end{bmatrix}$$

یعنی اگر نسبت بین قیمت‌ها ۳۱:۲۸:۳۳ باشد، تعادل اتفاق افتاده است.

حال می‌خواهیم روند حل دستگاه معادلات را با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون پیاده‌سازی کنیم.

روش پیاده‌سازی

انتظار می‌رود شما کدی را به زبان پایتون و به کمک کتابخانه‌ی `numpy` پیاده‌سازی کنید که با دریافت یک ماتریس افزوده، دستگاه معادلات را حل کند. با داشتن ماتریس افزوده می‌توانیم با استفاده از عملیات سطری، آن را به فرم نردبانی کاهش یافته در آوریم و قیمت تعادل بخش‌های یک اقتصاد را از این طریق محاسبه کنیم.

فرایند تبدیل یک ماتریس به فرم نردبانی کاهش یافته را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد:

۱. تبدیل ماتریس به فرم نردبانی

۲. تبدیل ماتریس به فرم نردبانی کاهش یافته

برای انجام مرحله اول، لازم است که در ابتدا، اولین عضو از سطر اول را چک کنید تا در صورتی که مقدارش برابر صفر باشد، این سطر را با یکی از سطرهایی که در ستون اول خود، دارای مقداری غیرصفر است، جابه‌جا کنید.

در ادامه باید تمامی عناصر ردیف اول را بر مقدار عنصر محوری در این ردیف تقسیم کنید (در این جا همان عنصر موجود در ستون اول) که در اصل از عملیات ردیفی تغییر مقیاس استفاده می‌کنیم. سپس باید با اعمال عمل جایگزینی ردیفی و جمع کردن ضربی از ردیف اول در دیگر ردیف‌های

ماتریس، مقدار تمامی عناصر زیر عنصر محوری در ستون اول را صفر کنید. با اعمال پی در پی این عمل بر روی ردیف و ستون دوم (دومین موقعیت محوری)، ردیف و ستون سوم (سومین موقعیت محوری) و ... در نهایت فرم نردبانی ماتریس اولیه تشکیل می شود.

حال که مرحله اول انجام شد، به سراغ مرحله دوم می رویم. برای تبدیل این ماتریس به فرم نردبانی کاهش یافته تنها نیاز است که از آخرین ردیف دارای موقعیت محوری شروع کنید. از آنجایی که در مرحله Substitution Forward پس از رسیدن به هر ردیف، مقادیر آن ردیف را بر عنصر محوری آن ردیف تقسیم کرده ایم، بنابراین پس از پایان این مرحله، تمامی موقعیت های محوری برابر ۱ خواهند بود. پس با اعمال عملیات ردیفی جایگزینی بر روی ردیف های بالایی، تمامی عناصر بالای عنصر محوری در ردیف آخر را می توانید صفر کنید. سپس این عمل را برای باقی عناصر محوری نیز انجام می دهیم. در نهایت ماتریس حاصل، ماتریس به فرم نردبانی کاهش یافته خواهد بود.

نکات

- هدف این پروژه فقط حل دستگاه معادلات است.
- پیاده سازی شما باید برای حالت کلی حل دستگاه معادلات باشد و به ازای هر ابعادی از ماتریس افزوده باید جواب دستگاه معادلات را حساب کرده و جواب نهایی را برگرداند.
- در صورتی که پس از حل دستگاه به متغیرهای آزاد برخورد کردید، آنها را با مقدار ثابت ۱۰ جایگزین کنید.
- در ابتدای برنامه یک نمونه از فرمت ورودی کد چاپ کنید.
- برای پیاده سازی این پروژه تنها مجاز به استفاده از زبان پایتون و کتابخانه Numpy در کنار توابع و کتابخانه های پیش فرض پایتون هستید. استفاده از هر زبان برنامه نویسی یا کتابخانه ای دیگر قابل قبول نبوده و در صورت استفاده، نمره ای به شما تعلق نخواهد گرفت.
- از رعایت تمیزی کد، استفاده از توابع مختلف برای پیاده سازی پروژه به شدت استقبال می شود.

موفق باشید