数学分析上

笔记整理

姓名：刘斯宇
学号：17341110

目录

☑ **第一章--绪论**

☑ **第二章--函数**

☑ **第三章--极限与函数的连续性**

☑ **第四章--微商与微分**

☑ **第五章--微分中值定理及其应用**

1 绪论

1.1 实数连续统

几个重要的数系的例子

- **正整数系**

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

满足加法和乘法的封闭性

- **整数系**

$$\mathbf{z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

满足加法、减法和乘法的封闭性

- **有理数系**

$$\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \ \ are \ \ Integer, q \neq 0\}$$

满足加法、减法、乘法和除法的封闭性

定理 1.1 *不存在有理数 $\frac{p}{q}$, 使得 $(\frac{p}{q})^2 = 2$*

定义 1.1 *若把一个有大小顺序的数系 S 分成 A、B 两类，满足下面的性质：*

- *1. 不空，A、B 都至少包括 S 中的一个数*
- *2. 不漏，数系 S 中的每一个数都要属于 A 或者 B*
- *3. 不乱，数系 A 中的任何一个数都小于 B 中的任何数*

则称 A、B 为 S 的一个分划，记作 $A|B$，A 称为分划的下类，B 称为上类。

定理 1.2 (戴德金连续性准则) 如果一个有大小顺序的稠密的数系 S，对它的任一个分化，都有 S 中唯一的数存在，它不小于下类中的每个数，也不大于上类中的每一个数，那么就称 S 是连续的。

> **Tip** 运用戴德金连续性准则可以证明有理数不是连续的，思路：给一个分化，只需要两个集合其中一个在有理数中没有最大值，另一个集合在有理数中没有最小值。

定理 1.3 (戴德金连续性定理) 实数系 R 按照戴德金连续性准则是连续的。

2 函数

2.1 函数概念

定义 2.1 (函数) 设给定实数集合 X，若存在一对应法则 f，使得对于 X 中的任一实数 x 存在唯一实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 X 上的函数，记作

$$f : X \to R \ \ or \ \ f : x \to y$$

定义 2.2 (函数的有界性) 设 $f(x)$ 在 X 上有定义，若存在 $M > 0$，对任意的 $x \in X$，有 $|f(x)| \le M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上无界

Tip 证明一个函数无界就用逆否命题

命题 2.1 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是存在 A, B 使得

$$A \le f(x) \le B$$

2.2 复合函数和反函数

定义 2.3 (复合函数) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 U，$u = g(x)$ 的定义域为 X，且 $g(X) \subset U$，则 $y = f(g(x))$ 是定义在 X 上的函数，称为 f 与 g 的复合函数，有时候也记作 $f \circ g$

定义 2.4 (反函数) 设 $y = f(x)$ 是定义在 X 上的函数，如果对值域 $F(X)$ 的每一个 y, 都有唯一的 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$，则这样定义的 x 作为 y 的函数，称为 f 的反函数，记作 f^{-1}

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x, \forall x \in X \\ f\left(f^{-1}(y)\right) &= y, \forall y \in f(X) \end{aligned}$$

命题 2.2 严格递增 (减) 的函数必有反函数，且其反函数也是严格递增 (减) 的。

2.3 初等函数

定义 2.5 (基本初等函数) 基本初等函数包括

- **常值函数**
- **指数函数**
- **对数函数**
- **幂函数**
- **三角函数**
- **反三角函数**

定义 2.6 初等函数是由基本初等函数经有限次的四则运算和复合所得。

3 极限与函数的连续性

3.1 数列的极限

定义 3.1 (数列) 定义域为正整数的函数称为数列，记作 $\{x_n\}$. 即有 $x_n = f(n), x \in N^+$

定义 3.2 (数列的极限) 设 x_n 是一数列，a 是一实数，若对于任意给定的正数 ϵ，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $|x_n - a| < \epsilon$，则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛，且收敛于 a，记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

定义 3.3 (无穷小量) 极限为 0 的数列称为无穷小量

命题 3.1 $\{x_n\}$ 的极限为 a 的充要条件是 $\{x_n - a\}$ 是无穷小量

一些重要数列的极限

- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

- $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

定理 3.1 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$，则

i) $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$

ii) $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

定理 3.2 (有界性) 有极限存在的数列必有界

证明：设数列 $\{x_n\}$ 有极限 a。由极限的定义：对于 $\epsilon_0 = 1$，存在 N，当 n>N 时，有

$$|x_n - a| < 1$$

所以, $|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + a$ 令 $M = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1 + |a|)$, 则 $|x_n| \leq M$

推论 3.1 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{x_n\}$ 发散

定理 3.3 (保号性) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$，则存在 N, 当 $n > N$ 时，有 $x_n > \frac{a}{2} > 0$

推论 3.2 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则

- *i)* 若 $a < 0$，则存在 N，当 $n > N$ 时，有 $x_n < \frac{a}{2} < 0$
- *ii)* 若 $a \neq 0$，则存在 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n| > \frac{|a|}{2} > 0$

定理 3.4 若 $\{x_n\}$ 是无穷小量，$\{y_n\}$ 是有界数列，则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量

定理 3.5 (保序性) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,$\lim_{n\to\infty} y_n = b$，且 $a > b$，则存在 N, 当 $n > N$ 时，有 $x_n > y_n$

定理 3.6 单调上升 (下降) 有上 (下) 界的数列必有极限存在。

定义 3.4 (无穷大量) 设 $\{x_n\}$ 是一数列，若对于任意给定的 $G > 0$, 存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n| > G$(注意绝对值!！)，则称 $\{x_n\}$ 是无穷大量，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

3.1.1 习题

证明下面的极限为 0:

- (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!}$

- (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}$

(1) 取 $M = \frac{10^{10}}{10!}, \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} M \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{10}{13} \cdot \cdots \cdot \frac{10}{n}$

$$\left|\frac{10^n}{n!}\right| = \left|M \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{10}{13} \cdots \frac{10}{n}\right| < \left|M\frac{10}{n}\right|$$

(2)

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2 + \cdots + \lambda^n > \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2$$

3.2 函数的极限

定义 3.5 (函数极限) 设 $f(x)$ 在 x_0 点附近 (除去 x_0 点外) 有定义，A 是一定数，若对任意给定的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限，记作 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

定理 3.7 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\dot{g}(x)) = AB$$

$$\lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$$

定理 3.8 (局部有界性) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$，使得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0 + \delta, x_0)$ 上有界

定理 3.9 (局部保号性) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, 则存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$

推论 3.3 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

- 若 $A < 0$，则存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$
- 若 $A \neq 0$，则存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2} > 0$

定理 3.10 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, 且存在 $\delta>0$，使得 $g(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0+\delta,x_0)$ 有界，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$

定理 3.11 (局部保序性) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 且 $A>B$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$

定理 3.12 (极限不等式) 若存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)\le g(x)$, 且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim_{x\to x_0} g(x)=B$，则 $A\le B$

定理 3.13 (极限唯一性) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限是唯一的。

定理 3.14 (夹迫性) 若存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\le g(x)\le h(x)$, 且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$, 则 $\lim_{x\to x_0} g(x)=A$

定理 3.15 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是对任意以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 且 $x_n\ne x_0 (n=1,2\ldots)$, 都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$

> **Tip** 证明一个函数的极限不存在的方法就是找到两个极限相等的数列数列带进去不相等就可以了。

定理 3.16 设 $f(x)$ 在 u_0 点附近 $(u\ne u_0)$ 有定义，且 $\lim_{u\to u_0} h(u)=A$, 而 $u=g(x)$ 在 x_0 点附近 $(x\ne x_0)$ 有定义，$g(x)\ne u_0$, 且 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$，则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=A$

定义 3.6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左边 (右边) 附近有定义,$x\ne x_0$，又设 A 是一定数，若对于任意给定的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$, 当 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 时，有 $|f(x)-A|<\epsilon$, 则称 A 是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左 (右) 极限，记作 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A)$

定理 3.17 若 $f(x)$ 在 (a,b) 单调上升有上界，则 $\lim_{x\to b^-} f(x)$ 存在

推论 3.4 若 $f(x)$ 在 (a,b) 单调上升有下界，则 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 存在

推论 3.5 若 $f(x)$ 在 (a,b) 单调上升, 则对任意的 $x_0\in(a,b)$, 有 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在，但是不一定相等

3.3 函数的连续性

定义 3.7 设 $f(x)$ 在包含 x_0 的一个开区间有定义，如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 是连续的。

> **Tip** 也就是说连续需要满足极限值等于函数值

定义 3.8 设 $f(x)$ 是定义在开区间 (c,d) 内的函数，我们称 $f(x)$ 在区间 (c,d) 是连续的，如果它在这个区间内的每一点都是连续的。

定义 3.9 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[c,d]$ 内的函数，我们称 $f(x)$ 在区间 $[c,d$ 是连续的，如果它在开区间 (c,d) 内的每一点都是连续的，且在 a 右连续，b 左连续

间断点的分类

种类	定义	举伯
可去间断点	极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，不论 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$
第一类间断点（跳跃间断点）	$f(x)$ 在 x_0 的左右极限都存在但是不相等	$f(x) = [x]$
第二类间断点（跳跃间断点）	$f(x)$ 在 x_0 的左右极限至少有一个不存在	$f(x) = \frac{1}{x}$ 狄利克雷函

狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & \textbf{if } x \textbf{ is Rational number} \\ 0, & \textbf{if } x \textbf{ is Irrational number} \end{cases}$

定理 3.18 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 x_0 点连续，则 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)})(g(x_0) \neq 0)$ 也在 x_0 点连续

定理 3.19 若 $f(u)$ 在 u_0 点连续，$u = g(x)$ 在 x_0 点连续，且 $u_0 = g(x_0)$，则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 点连续

定理 3.20 初等函数在其定义域内是连续的。

定理 3.21 (连续函数的介值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，不妨设 $f(a) < f(b)$, 则对于任意 $c \in [f(a), f(b)]$, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = c$

定理 3.22 (反函数连续性) 若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且严格单调上升，记 $\alpha = f(a), \beta = f(b)$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 严格单调上升且连续

3.4 无穷小量与无穷大量的比较

定义 3.10 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

- 若存在 $A > 0, B > 0,$ 以及正整数 N，使得 $n > N$ 时，有 $0 < A \leq \frac{|x_n|}{|y_n|} \leq B,$ 则称 x_n 是 y_n 的同阶无穷小量
- 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1,$ 则称 x_n 是 y_n 的等价无穷小量，记作 $x_n \sim y_n$
- 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0,$ 则称 x_n 是 y_n 的高阶无穷小量，或者称 y_n 是 x_n 的低阶无穷小量，记作 $x_n = o(y_n)$

Tip $x_n = o(1)$ 表示 x_n 是无穷小量

在下面的数列中，后者是比前者更高阶的无穷小量

$$\{\frac{1}{\ln\ln n}\}, \{\frac{1}{\ln n}\}, \{\frac{1}{n}\}, \{\frac{1}{e^n}\}, \{\frac{1}{n!}\}, \{\frac{1}{n^n}\}$$

4 微商与微分

4.1 微商概念及其计算

定义 4.1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点附近有定义，对于自变量 x_0 点的任意该变量 $\Delta x=x-x_0$，函数在该点的相应该变量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。若极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，并称极限值为 $f(x)$ 在 x_0 点的微商或导数。记作 $f'(x_0), y'|_{x=x_0}, \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$

定理 4.1 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续

Tip 连续不一定可导，比如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$

定理 4.2 若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 x_0 点可导，则

$$\begin{aligned}
&\textit{(i)}\ \ (u(x)\pm v(x))'|_{x=x_0}=u'(x_0)\pm v'(x_0)\\
&\textit{(ii)}\ \ (u(x)v(x))'|_{x=x_0}=u'(x_0)\,v(x_0)+u(x_0)\,v'(x_0)\\
&\textit{(iii)}\ \ \left.\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\right|_{x=x_0}=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)},(v(x_0)\neq 0)
\end{aligned}$$

定理 4.3 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点附近连续且严格单调, 又 $f'(x_0)\neq 0$, 则其反函数 $x=\phi(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 可导，且 $\phi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

基本初等函数的微商公式

(1) $(c)' = 0$;

(2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(x^{n})' = nx^{n-1}$,

$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$;

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

(5) $(\sin x)' = \cos x$;

(6) $(\cos x)' = -\sin x$;

(7) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$;

(8) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc x$;

(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(11) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

(12) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

4.2 微分概念及其计算

设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 有定义，如果对给定的 $x \in (a, b)$，有 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x), (\Delta x \to 0)$，其中 A 与 Δx 无关，则称 $f(x)$ 在 x 点可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x 点的微分，记作 $dy = A\Delta x$

定理 4.4 函数 $y = f(x)$ 在 x 点可微的充要条件是: 函数 $f(x)$ 在 x 点可导，这时微分中 Δx 的系数 $A = f'(x)$

微分运算法则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(f(x) \pm g(x)) = \mathrm{d}f(x) \pm \mathrm{d}g(x) \\
&\mathrm{d}(f(x)g(x)) = g(x)\mathrm{d}f(x) + f(x)\mathrm{d}g(x) \\
&\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\mathrm{d}f(x) - f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)
\end{aligned}$$

复合函数的微分公式

$$\mathrm{d}y = (f \circ g)'(x)\mathrm{d}x = f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$$

Tip 一阶微分不变性是指微分是可以直接带入的，比如说我们要求 $f(x) = e^{x^2}$ 的微分，我们可以在微分等式中带入变量, 例如 $y = e^u, u = x^2$，则 $dy = e^u du$, 带入变量 $u = x^2$ 得，$dy = e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} 2xdx$

4.3 隐函数与参数方程微分法

隐函数微分法

- 两边同时对某个变量求导
- 利用微分，两边同时微分

Tip 由方程 $x^2 + y^2 = 1$ 确定隐函数 $y = f(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, 用两边同时微分可得 $2xdx + 2ydy = 0$, 用求导的方法 $2x + 2yy' = 0$

参数方程微分法

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

4.4 高阶微商和高阶微分

一般的，$y = f(x)$ 的 n 阶微分为 $d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$

Tip 高阶微分不具有形式不变性.

5 微分中值定理及其应用

5.1 微分中值定理

定义 5.1 称 $f(x)$ 在 x_0 达到极大 (小) 值，如果存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0 + \delta, x_0)$ 的最大（小）值，即 $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0 + \delta, x_0)$

定理 5.1 (费马定理) 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，若 $f(x)$ 在 x_0 达到极值，且 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$

定理 5.2 (闭区间连续函数最值定理) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有最大值和最小值。

定理 5.3 (罗尔定理) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，在开区间 (a, b) 可导，且 $f(a) = f(b)$，则在 (a, b) 中存在 ξ，使得 $f'(\xi) = 0$

定理 5.4 (微分中值定理 (拉格朗日中值定理)) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，在开区间 (a, b) 可导，且 $f(a) = f(b)$，则在 (a, b) 中存在 ξ，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

推论 5.1 若 $f(x)$ 在 (a, b) 有 $f'(x) \geq 0 (f'(x) > 0)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 单调上升。若 $f(x)$ 在 (a, b) 有 $f'(x) \leq 0 (f'(x) < 0)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 单调下降。

推论 5.2 若 $f(x)$ 在 (a, b) 有 $f'(x) = 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 为常数。

定理 5.5 (柯西中值定理) 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，在开区间 (a, b) 可导，且 $g'(x) \neq 0$, 则在 (a, b) 存在 ξ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

5.2 洛必达法则

定理 5.6 若

- $f(x), g(x)$ 在 $(a, a+\delta)$ 可导，且 $g'(x) \neq 0, \delta > 0$
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

定理 5.7 若

- $f(x),g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$
- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

定理 5.8 若

- $f(x),g(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0,\delta>0$
- $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

欲求的极限	条件	转换为分数形式的方法
(1) $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)$	$\lim\limits_{x\to c}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{1/g(x)}$
(2) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))$	$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to c}\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/(f(x)g(x))}$
(3) $\lim\limits_{x\to c}f(x)^{g(x)}$	$\lim\limits_{x\to c}f(x)=0^+,\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to c}g(x)=0$	$\lim\limits_{x\to c}f(x)^{g(x)}=\exp\lim\limits_{x\to c}\frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$
(4) $\lim\limits_{x\to c}f(x)^{g(x)}$	$\lim\limits_{x\to c}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to c}f(x)^{g(x)}=\exp\lim\limits_{x\to c}\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$

5.3 函数的升降、凸性和函数作图

定理 5.9 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调上升（下降）的充要条件是在 (a,b) 有 $f'(x)$

定理 5.10 (极值的第一充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 可导 $(\delta>0)$，则

1. 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f(x)\le 0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f(x)\ge 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极小值
2. 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f(x)\ge 0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f(x)\le 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值
3. 若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 同时为正或同时为负，则 x_0 点不是极值点

定理 5.11 (极值的第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 可导且有 $f'(x)=0$，又 $f''(x_0)$ 存在

1. 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是严格极大值
2. 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是严格极小值

定义 5.2 设 $f(x)$ 在 (a,b) 有定义。若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$ 和任意 $\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x-2), \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 为下凸函数；若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$ 和任意 $\lambda\in(0,1)$ 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x-2), \tag{2}$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 为上凸函数；

定理 5.12 $f(x)$ 在 (a,b) 为下凸函数的充要条件是对 (a,b) 中任意三点 x_1,x_2,x_3，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \tag{3}$$

定理 5.13 设 $f(x)$ 在 (a,b) 可导，若 $f'(x)$ 在 (a,b) 单调上升，则 $f(x)$ 在为下凸函数

推论 5.3 设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导，若 $f''(x)\ge 0$ 对任意 $x\in(a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 为下凸函数；若 $f''(x)\le 0$ 对任意 $x\in(a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 为上凸函数；

定义 5.3 设 $f(x)$ 在 x_0 连续。若曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 的近旁两侧分别是上凸的和下凸的，则称 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

定理 5.14 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 二阶可导，且 $f'(x)$ 在 x_0 连续。若 $f''(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 的符号相反，则 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线的拐点

定义 5.4 若曲线 C 上的动点 M 沿曲线无限地远离原点时，点 M 与某固定直线 L 的距离趋于零，则称 L 是曲线 C 的渐近线

6 不定积分

7 定积分

定义 7.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

将区间任意分成 n 个小区间，小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,3,....,n.$$

记 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, 在每个小区间上任取一点 $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 作和式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

若当 $\lambda \to 0$ 时，和式 ζ 的极限存在设为 I，则称 $f(x)$ 在 *[a,b]* 内是可积的，极限值 I 称为 $f(x)$ 在 *[a,b]* 的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 这里的 *a,b* 分别称为定积分的下限和上限,*[a,b]* 称为积分区间,*f(x)* 称为被积函数。

定理 7.1 (可积函数必有界) *若 f(x) 在 [a,b] 可积, 则 f(x) 在 [a,b] 有界*

定理 7.2 (定积分的线性性质) *若函数 f(x),g(x) 在区间 [a,b] 可积, 则* $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ *在 [a,b] 也可积, 且*

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\,\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

其中 k_1, k_2 *是两个常数.*

定理 7.3 (定积分的可加性) *若 f(x) 在 [a,c],[c,b] 可积, 其中 a<c<b, 则 f(x) 在 [a,b] 可积, 且* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

定理 7.4 (积分单调性) *若 f(x),g(x) 在 [a,b] 可积, 且*

$$f(x) \le g(x), \quad x \in [a,b]$$

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

定理 7.5 若 *f(x)* 在 *[a,b]* 可积, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

定理 7.6 (康托 (Cantor,1845 - 1918) 定理) 闭区间 *[a,b]* 上的连续函数 *f(x)* 一定在 *[a,b]* 上一致连续.

定理 7.7 若 *f(x)* 在 *[a,b]* 连续, 则 *f(x)* 在 *[a,b]* 可积.

定理 7.8 (积分第一中值定理) 若 *f(x)*,*g(x)* 在 *[a,b]* 上连续, 且 *g(x)* 在 *[a,b]* 不变号, 则在 *[a,b]* 中存在一点 , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

定理 7.9 设 *f(x)* 在 *[a,b]* 可积, 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 *F(x)* 是 *[a,b]*. 上的连续函数.

定理 7.10 若 *f(x)* 在 *[a,b]* 连续, 则函数 $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 *[a,b]* 可导, 且 $G'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$

定理 7.11 (微积分基本定理) 设 *f(x)* 在 *[a,b]* 上连续,*F(x)* 是 *f(x)* 在 *[a,b]* 的任意一个原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

定理 7.12 (微积分基本定理) 若 *f(x)* 在 *[a,b]* 可积,*F(x)* 是 *f(x)* 在 *[a,b]* 的任意一个原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

定理 7.13 (定积分换元法则) 若 *f(x)* 在 *[a,b]* 连续. 作变换 $x = \varphi(t)$, 其中 $\varphi(t)$ 满足: *(i)* $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, 且当 $t \in [\alpha,\beta], \varphi(t) \in [a,b]$ *(ii)* $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续微商 $\varphi'(t)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi(t)\mathrm{d}t$$

定理 7.14 (定积分分部积分法) 若函数 *u(x)*、*0(x)* 在 *[a,b]* 有连续的微商 *u′(x)*、*v′ (x)*, 则有分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

定理 7.15 若 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$\left|f''(x)\right| \leq M, \quad x \in [a,b]$$

, 则梯形公式的误差可以如下估计:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$$

, 其中

$$R_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)$$

定理 7.16 若 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M, x \in [a,b]$$

则

$$|R_{2n}| \leq \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4}M$$