线性代数

笔记整理

姓名：刘斯宇
学号：17341110

目录

☑ **第一章--线性代数中的线性方程组**

☑ **第二章--矩阵代数**

☑ **第三章--行列式**

☑ **第四章--向量空间**

1 线性代数中的线性方程组

1.1 线性方程组

定义 1.1 (线性方程) 包含未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的一个线性方程是形如 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 的方程

定义 1.2 (线性方程组) 线性方程组是由一个或几个包含相同变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的线性方程组成。

定义 1.3 (解集) 方程组所有可能的解的集合称为方程组的解集。

定义 1.4 (系数矩阵) 系数矩阵：每个变量的系数写在对齐的一列中。

定义 1.5 (增广矩阵) 增广矩阵: 系数矩阵 + 方程组右边的常数。

定义 1.6 (行初等变换) 行初等变换:

- (倍加变换) 把某一行换成它本身与另一行的倍数的和
- (对换变换) 把两行对换
- (倍乘变换) 把某一行的所有元素乘以同一个非零数

定义 1.7 (行等价) 行等价: 我们称两个矩阵为行等价的，若其中一个矩阵可以经过一系列的行初等变换称另一矩阵。

定理 1.1 若两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，则它们具有相同的解集。

1.2 行化简与阶梯形矩阵

定义 1.8 (简化阶梯形) 简化阶梯形:

- *1.* 每一非零行在每一零行之上
- *2.* 某一行的先导元素所在的列位于前一行先导元素的右面

- *3. 某一先导元素所在列下方元素全是零*

例子:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

定义 1.9 (简化行阶梯形) 简化行阶梯形:

- *1. 每一非零行在每一零行之上*
- *2. 某一行的先导元素所在的列位于前一行先导元素的右面*
- *3. 某一先导元素所在列下方元素全是零,*
- *4. 每一非零行的先导元素是 1*
- *5. 每一先导元素 1 是该元素所在列的唯一非零元素*

简化行阶梯形例子:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

定理 1.2 (简化阶梯形矩阵的唯一性) 每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯形矩阵。

定义 1.10 (主元位置) 矩阵中的主元位置是 A 中对应于它的阶梯形中先导元素的位置，主元列是 A 的含有主元位置的列。

例题 1

确定矩阵 A 的主元列。$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$

解答

我们将矩阵 A 化成阶梯形

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以我们得到 1、2、4 是主元列。

定义 1.11 (基本变量和自由变量) 主元列对应的变量称为基本变量，其他的变量称为自由变量。

定理 1.3 (存在与唯一性定理) 线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列。

1.3 向量方程

定义 1.12 (向量) 仅含有一列的矩阵称为列向量，或者简称行向量。

定义 1.13 (零向量) 所有元素都是零的向量称为零向量，用 $\boldsymbol{0}$ 表示。

定义 1.14 (线性组合) 给定 $\mathbf{R}^n$ 中向量 $v_1, v_2, \ldots, v_p$ 和标量 $c_1, c_2, \ldots, c_p$, 向量

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p$$

称为向量 $v_1, v_2, \ldots, v_p$ 以 $c_1, c_2, \ldots, c_p$ 为权的线性组合。

定义 1.15 若 $v_1, v_2, \ldots, v_p$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中向量，则 $v_1, v_2, \ldots, v_p$ 的所有线性组合所成的集合用记号 $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ 表示，称为由 $v_1, v_2, \ldots, v_p$ 所生成 (张成) 的 $\mathbf{R}^n$ 的子集，也就是说 $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ 是所有形如

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p$$

的向量的集合，其中 $c_1, c_2, \ldots, c_p$ 是标量。

Tip 设 v 是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量，那么 $Span\{v\}$ 就是 v 的所有倍数的集合，也就是通过 v 和 0 的直线。若 u 和 v 是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量, 且 u 和 v 之间不是倍数的关系，那么 $Span\{v, u\}$ 是通过 $u, v, 0$ 的平面。

1.4 矩阵方程 $Ax = B$

定义 1.16 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，它的各列为 $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$，若 x 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，则 A 与 x 的积记作 Ax，就是 A 的各列以 x 中对应元素元素为权重的线性组合，即

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

定理 1.4 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，它的各列为 $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$，而 $\mathbf{b}$ 属于 $\mathbf{R}^n$，则矩阵方程 $Ax = b$ 与向量方程 $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b$ 有相同的解，它又与增广矩阵为 $[a_1 \quad a_2 \ldots a_n \quad b]$ 的线性方程组有相同的解集。

> **Tip** 方程 $Ax = b$ 有解当且仅当 b 是 A 的各列的线性组合。

定理 1.5 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，u, v 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，c 是标量，则

$$A(u + v) = Au + Av$$

$$A(cu) = c(Au)$$

1.5 线性方程组的解

定义 1.17 (齐次线性方程组) 线性方程组是齐次的，若他能写成 $Ax = 0$ 的形式。那么，常数项不全为零的线性方程组称为非齐次线性方程组。

定理 1.6 设方程 $Ax = b$ 对某个 b 是相容的，p 是一个特解，则 $Ax = b$ 的解集是所有形如 $w = p + v_h$ 的向量的集，其中 v_h 是齐次方程 $Ax = 0$ 的任意一个解。

1.6 线性无关

定义 1.18 (线性无关) $\mathbf{R}^n$ 中一组向量 $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ 是线性无关的，如果向量方程 $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = b$ 只有平凡解。向量组 $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ 是线性相关的，若存在不全为 0 的标量 $c_1, c_2, \ldots, c_p$, 使得 $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p = 0$

定理 1.7 (线性相关集的特征) 两个或多个向量的集合 $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ 线性相关，当且仅当 S 中至少有一个向量是其他向量的线性组合。

> **Tip** 关于线性相关集，我们不能说每一个向量都能表示成其他向量的向量组合，考虑某个向量的权重为 0 的情况。

定理 1.8 若一个向量组的向量个数超过每个向量元素个数，那么这个向量组线性相关。(未知数比方程个数多，那么必有平凡解)

定义 1.19 若向量组 $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ 包含零向量，那么它线性相关。

1.7 线性变换介绍

定义 1.20 (线性变换) 变换 T 是线性相关的，若

- 对 T 的定义域中的一切 u, v，有 $T(u+v) = T(u) + T(v)$
- 对于一切的 u 和标量 c 有 $T(cu) = cT(u)$

1.8 线性变换的矩阵

定理 1.9 设 $T : R^n \to R^m$ 是线性变换，则存在唯一的矩阵 A，使得 $T(x) = Ax$，事实上，A 是 $m \times n$ 的矩阵，它的第 j 列是向量 $T(e_j)$，其中 e_j 是单位矩阵 I_n 的第 j 列：$A = [T(e_1) \ldots T(e_n)]$

定义 1.21 (满射) 映射 $T : R^n \to R^m$ 称为到 R^m 上的映射，若 R^m 中任一 b 都至少有一个 R^n 中的 x 与之对应。

定义 1.22 (单射) 映射 $T : R^n \to R^m$ 称为单射，如果 R^m 中每个 b 至多有一个 R^n 中的 x 与之对应

定理 1.10 设 $T : R^n \to R^m$ 是线性变换，设 A 是 T 的标准矩阵，则

- $a.T$ 把 R^n 映上到 R^m，当且仅当 A 的列生成 R^m
- $b.T$ 是一对一的，当且仅当 A 的列线性无关。

2 矩阵代数

2.1 矩阵运算

定义 2.1 若 A 是 $m \times n$ 的矩阵，B 是 $n \times p$ 的矩阵，则乘积 AB 是 $m \times p$ 的矩阵, 它的各列是 $Ab_1, \ldots, Ab_p$.

Tip AB 的每一列都是 A 的各列的线性组合，以 B 的对应列的元素为权

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

定义 2.2 (矩阵的乘幂) 若 A 是 $n \times n$ 矩阵，k 是正整数，则 A^k 表示 k 个 A 的乘积。

定义 2.3 (矩阵的转置) 给定 $m \times n$ 矩阵 A，则 A 的转置是一个 $n \times m$ 矩阵，用 A^T 表示。

Warnning 若乘积 AB 是零矩阵，不能断定 $A = 0$ 或 $B = 0$

Warnning 消去率对矩阵乘法并不成立，也就是说如果 $AB = AC$, 一般情况下，$B = C$ 并不成立

定理 2.1 设 A 与 B 表示矩阵，其维数使得下面和与积有定义，则

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 对于任意数 r，$(rA)^T = rA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

2.2 矩阵的逆

定义 2.4 (奇异矩阵) 不可逆矩阵称为奇异矩阵，可逆矩阵称为非奇异矩阵。

定理 2.2 下面结论成立：

- 若 A 是可逆矩阵，则 A^{-1} 也是可逆的，并且 $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

定义 2.5 (初等矩阵) 将单位矩阵进行一次行变换就得到初等矩阵。

Tip 每个初等矩阵 E 都是可逆的，E 的逆是一个同类型的初等矩阵，他把 E 变回 I

定理 2.3 $n \times n$ 矩阵 A 是可逆的，当且仅当 A 行等价于 I_n，这是把 A 变为 I_n 的一系列初等变换同时把 I_n 变成 A^{-1}

定理 2.4 (可逆矩阵定理) 设 A 是 $n \times n$ 矩阵，则下面命题等价

- 若 A 是可逆矩阵
- A 等价于 $n \times n$ 的单位矩阵
- A 有 n 个主元位置
- 方程 $Ax = 0$ 仅有平凡解
- A 的各列线性无关
- 线性变换 $x \to Ax$ 是一对一的
- 对 R^n 中任意 b，方程 $Ax = b$ 至少有一个解。
- A 的各列生成 R^n
- 线性表变换 $x \to Ax$ 把 R^n 映上到 R^n
- 存在矩阵 C 使得 $CA = I$
- 存在矩阵 D 使得 $AD = I$
- A^T 是可逆矩阵

定理 2.5 设 $T : R^n \to R^n$ 是线性变换，A 为 T 的标准矩阵，则 T 可逆当且仅当 A 是可逆矩阵。

2.3 分块矩阵

定理 2.6 (AB 的列行展开) 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times p$ 矩阵，则

$$
\begin{aligned}
AB &= [\mathrm{col}_1(A)\,\mathrm{col}_2(A)\cdots\mathrm{col}_n(A)]\begin{bmatrix}\mathrm{row}_1(B)\\ \mathrm{row}_2(B)\\ \vdots\\ \mathrm{row}_n(B)\end{bmatrix}\\
&= \mathrm{col}_1(A)\,\mathrm{row}_1(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A)\,\mathrm{row}_n(B)
\end{aligned}
$$

定理 2.7 (分块矩阵的逆)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

2.4 矩阵因式分解

2.5 R^n 的子空间

定义 2.6 R^n 中的一个子空间是 R^n 中的集合 H，具有一下三个性质：

- 零向量属于 H
- 对 H 中任意向量 u 和 v，$u+v$ 属于 H
- 对 H 中任意向量 u 和 c，cu 属于 H

定义 2.7 (列空间) 矩阵 A 的列空间是 A 的各列的线性组合的集合。记作 $Col\ A$

定义 2.8 (零空间) 矩阵 A 的零空间是齐次方程 $Ax = 0$ 的所有解的集合，记作 $Nul\ A$

定理 2.8 $m \times n$ 矩阵 A 的零空间是 R^n 的子空间，等价的，n 个未知数的 m 个齐次线性方程的解的全体是 R^n 的子空间。

定理 2.9 R^n 中子空间 H 的一组基是 H 中一个线性无关集，它生成 H。

定理 2.10 矩阵 A 的主元列构成列空间的基。

3 行列式

3.1 行列式

定义 3.1 (行列式) 当 $n \geq 2$，$n \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}]$ 的行列式是：

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{\ln} \cdot \det A_{\ln} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}\end{aligned}$$

定理 3.1 若 A 为三角阵，则 *det A* 等于 A 的主对角线上元素的乘积。

3.2 行列式的性质

定理 3.2 (行变换) 令 A 是一个方阵

- 若 A 的某一行的倍数驾到另一行得矩阵 B，则 *det B=det A*
- 若 A 的两行互换得矩阵 B，则 *det B =-det A*
- 若 A 的某行乘以 k 倍得到矩阵 B，则 *det B=k det A*

定理 3.3 方阵 A 是可逆的当且仅当 *det A≠0*

定理 3.4 若 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则 *det A^T=det A*

定理 3.5 (乘法性质) *det AB=(det A)(det B)*

3.3 克拉默法则、体积和线性变换

定理 3.6 (克拉默法则) 设 A 是一个可逆的方阵，对 R^n 中的任意向量 b，方程 $Ax = b$ 的唯一解可由下式给出：

$$x_i = \frac{det A_i(b)}{det A}, i = 1, 2, \ldots, n$$

定理 3.7 (逆矩阵公式)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

定理 3.8 设 $T : R^2 \rightarrow R^2$ 是由一个 2×2 矩阵 A 决定的线性变换，若 A 是 R^2 中一个平行四边形，则 *{T(S) 的面积}=|det A|{S 的面积}*. 同理其他高维的情况类似。

4 向量空间

4.1 向量空间与子空间

定义 4.1 (向量空间) 一个向量空间是由一些被称为向量的对象构成的非空集合，在这个集合上定义两个运算，称为加法和减法服从下面公理，这些公理必须对 V 中所有向量 u，v，w 以及所有标量 c，d 成立

- $u+v$ 仍在 V 中
- $u+v=v+u$
- （$u+v$）$+w=u+$（$v+w$）
- V 中存在一个零向量，使得 $u+0=u$
- 对 V 中每个向量 u，存在 V 中向量-u 使得 $u+(-u)=0$
- u 与标量 c 的标量乘法记作 cu，仍在 V 中
- c（$u+v$）$=cu+cv$
- （$c+d$）$u=cu+du$
- $c(du)=(cd)u$
- $1u=u$

定义 4.2 (子空间) 向量空间 V 的一个子空间是 V 的一个满足以下性质的子集 H:

- V 中的零向量在 H 中
- H 对向量加法封闭
- H 对标量乘法封闭

4.2 零空间、列空间和线性变换

定义 4.3 (零空间) 矩阵 A 的零空间是齐次方程 $Ax=0$ 的所有解的集合，记作 $Nul\,A$

定理 4.1 $m\times n$ 矩阵 A 的零空间是 R^n 的子空间，等价的，n 个未知数的 m 个齐次线性方程的解的全体是 R^n 的子空间。

定义 4.4 (核) 线性变换 T 的核 (零空间) 是 V 中所有满足 $T(u)=0$ 的向量 u 的集合，T 的值域是 W 中所有具有形式 $T(x)$ 的向量的集合。

4.3 线性无关集和基

定义 4.5 (基) 令 H 是向量空间 V 的一个子空间，V 中向量的指标集 $B=[b_1,\dots,b_p]$ 称为 H 的一个基，如果

- B 是一线性无关集
- 由 B 生成的子空间与 H 相同，即 $H=span\left\{b_1,\dots,b_p\right\}$

定理 4.2 (生成集定理) 令 $S=\left\{v_1,\dots,v_p\right\}$ 是 V 中的向量集，$H=Span\left\{v_1,\dots,v_p\right\}$.

- 若 S 中某一个向量，比如说 v_k，是 S 中其余向量的线性组合，则 S 中去掉 v_k 后形成的集合仍然可以生成 H
- 若 $H\neq\{0\}$, 则 S 的某一个子集是 H 的一个基。

4.4 坐标系

定理 4.3 (唯一表示定理) 令 $B=[b_1,\dots,b_n]$ 是向量空间 V 的一个基，则对 V 中每个向量 x，存在唯一的一组数 $c_1,\dots,c_n$ 使得 $x=c_1b_1+\cdots+c_nb_n$

定义 4.6 假设集合 $B=[b_1,\dots,b_n]$ 是 V 的一个基，x 在 V 中，x 相对于基 B 的坐标是使得 $x=c_1b_1+\cdots+c_nb_n$ 的权 $c_1,\dots,c_n$。称 R^n 中的向量 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix}$ 是 x 相对于 $\mathcal{B}$ 的坐标向量。

定理 4.4 令 $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ 是向量空间 V 的一个基，则坐标映射 $x\to[x]_{\mathcal{B}}$ 是一个由 V 映上到 R^n 的一对一的线性变换。

4.5 向量空间的维数

定理 4.5 若向量空间 V 具有一组基 $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$，则 V 中任意包含多于 n 个向量的集合一定线性相关。

定理 4.6 若向量空间 V 由一组基含有 n 个向量，则 V 的每一组基一定恰好有 n 个向量。

定义 4.7 若 V 由一个有限集生成，则 V 称为有限维的，V 的维数写成 $dim\,V$，是 V 的基中含有向量的个数，零向量空间 $\{0\}$ 的维数定义为零。

定理 4.7 令 H 是有限维向量空间 V 的子空间，若有需要的话，H 中任一个线性无关集均可以扩充成为 H 的一个基，H 也是有限维的并且 $dim\,H\leq dim\,V$

定理 4.8 (基定理) 令 V 是一个 p 维向量空间，$p \geq 1$，V 中任意含有 p 个元素的线性无关集必然是 V 的一个基，任意含有 p 个元素且生成 V 的集合必然是 V 的一个基。

Tip NulA 的维数是方程 $Ax = 0$ 中自由变量的个数，ColA 的维数是 A 中主元列的个数。

4.6 秩

定理 4.9 若两个矩阵 A 和 B 行等家，则它们的行空间相等，若 B 是阶梯形矩阵，则 B 的非零行构成 A 的行空间的一个基同时也是 B 的行空间的一个基。

定义 4.8 (秩) A 的秩即 A 的列空间的维数。

定理 4.10 (秩定理) $m \times n$ 矩阵 A 的列空间和行空间的维数相等，这个公共的维数 (即 A 的秩) 还等于 A 的主元位置的个数且满足方程 *rank A+dim Nul A=n*

定理 4.11 (可逆矩阵定理) 令 A 是一个 $n \times n$ 矩阵，则下列命题中的每个均等价于 A 是可逆矩阵：

- A 的列构成 R^n 的一个基
- *Col A*=R^n
- *dim col A=n*
- *rank A=n*
- *Nul A*=$\{0\}$
- *dim Nul A=0*

4.7 基的变换

定理 4.12 设 $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$，$\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ 是向量空间 V 的基，则存在一个 $n \times n$ 矩阵 $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ 使得

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ 的列是基 $\mathcal{B}$ 中向量的 $\mathcal{C}-$ 坐标，即

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [[b_1]_{\mathcal{C}} \quad [b_2]_{\mathcal{C}} \ldots [b_n]_{\mathcal{C}}]$$

5 特征值与特征向量

5.1 特征向量与特征值

定义 5.1 A 为 $n \times n$ 的矩阵，x 为非零向量，若存在数 λ 使得 $Ax = \lambda x$ 成立，则称 λ 为 A 的特征值，x 称为对应于 λ 的特征向量。

定理 5.1 三角矩阵的主对角线的元素是其特征值。

定理 5.2 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 是 $n \times n$ 矩阵 A 相异的特征值，$v_1, \ldots, v_r$ 是与 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 对应的特征向量，那么 $\{v_1, \ldots, v_r\}$ 线性无关

5.2 特征方程

定理 5.3 (可逆矩阵定理) 设 A 是 $n \times n$ 矩阵，则 A 是可逆的当且仅当

- *0* 不是 A 的特征值
- A 的行列式不等于 *0*

定理 5.4 若 $n \times n$ 矩阵 A 和 B 是相似的，那么它们具有相同的特征多项式，从而具有相同的特征值。

5.3 对角化

定理 5.5 $n \times n$ 矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

定理 5.6 $n \times n$ 矩阵 A 的相异的特征值是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$，

- 对于 $1 \leq k \leq p$，λ_k 的特征空间的维数小雨或等于 λ_k 的代数重数
- 矩阵 A 可对角化的充要条件是所有不同特征空间的维数之和为 n
- 若 A 可对角化，$\mathcal{B}_k$ 是对应于 λ_k 的特征空间的基，那么集合 $\mathcal{B}_1 \ldots, \mathcal{B}_p$ 中所有向量的集合是 R^n 的特征向量基。

5.4 特征向量与线性变换

定理 5.7 (对角矩阵表示) 设 $A = PDP^{-1}$，其中 D 为 $n \times n$ 对角矩阵，若 R^n 的基 $\mathcal{B}$ 由 P 的列向量组成，那么 D 是变换 $x \to Ax$ 的 $\mathcal{B}-$ 矩阵。

6 正交性和最小二乘法

6.1 内积、长度和正交性

定义 6.1 (内积/点积) 如果

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

那么 u 和 v 的内积定义为 $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

定理 6.1 设 u 和 v 是 R^n 空间中的向量，c 是一个数，那么

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- $(cu) \cdot v = c(u \cdot v)$
- $u \cdot u \geq 0$

定义 6.2 (向量的长度) 向量 v 的长度（范数）是非负数 $\|v\|$

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

定义 6.3 R^n 中向量 u 和 v 的距离，记作 $dis(u,v)$，表示向量 u-v 的长度，即

$$dis(u, v) = \|u - v\|$$

定义 6.4 (正交) 如果 $u \cdot v = 0$，则两个向量 u 和 v 称为正交的。

定理 6.2 假设 A 是 $m \times n$ 矩阵，那么 A 的行向量空间的正交不空间是 A 的零空间，且 A 的列向量空间的正交补是 A^T 的零空间，即 $(RowA)^{\perp} = NulA$ 且 $(ColA)^{\perp} = NulA^T$

证明

如果 x 是 NulA 中的向量，那么向量 x 与 A 的每一行正交。

6.2 正交集

定理 6.3 如果 $S=\{u_1,\dots,u_p\}$ 是由 R^n 空间中非零向量构成的额正交集，那么 S 是线性无关集，因此构成所生成的子空间 S 的一组基。

定理 6.4 假设 $\{u_1,\dots,u_p\}$ 是 R^n 中子空间 W 的正交集，对 W 中的每个向量 y，线性组合 $y=c_1u_1+\cdots+c_pu_p$ 中的权值可以有 $c_j=\frac{u\cdot u_j}{u_j\cdot u_j}$ 计算。

定理 6.5 一个 $m\times n$ 矩阵 U 具有单位正交列向量的充要条件是 $U^TU=I$

定理 6.6 假设 U 是一个具有单位正交列的 $m\times n$ 矩阵，且 x 和 y 是 R^n 的向量，那么

- $\|Ux\|=\|x\|$
- $(Ux)\cdot(Uy)=x\cdot y$
- $(Ux)\cdot(Uy)=0$ 的充要条件是 $x\cdot y=0$

6.3 正交投影

定理 6.7 (正交分解定理) 若 W 是 R^n 的一个子空间，那么 R^n 中每一个向量 y 可以唯一表示 $y=\hat{y}+z$，此处 $\hat{y}$ 属于 W 且 z 属于 W^T，实际上，如果 $\{u_1,\dots,u_p\}$ 是 W 的任意正交基，那么 $\hat{y}=\frac{y\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1+\cdots+\frac{y\cdot u_p}{u_p\cdot u_p}u_p$

定理 6.8 (最佳逼近原理) 假设 W 是 R^n 空间的一个子空间，y 是 R^n 的任意向量，$\hat{y}$ 是 y 在 W 上的正交投影，那么 $\hat{y}$ 是 W 中最接近 y 的点，也就是指 $\|y-\hat{y}\|<\|y-v\|$

定理 6.9 如果 $\{u_1,\dots,u_p\}$ 是 R^n 中子空间 W 的正交集, 那么 $proj_w y=(y\cdot u_1)u_1+\cdots+(u\cdot u_p)u_p$, 如果 $U=[u_1\quad u_2\dots u_p]$，则 $proj_w y=UU^Ty$