数学分析上

笔记整理

姓名：刘斯宇
学号：17341110

目录

- ☑ **第八章--微积分的进一步应用**
- ☑ **第九章--再论实数系**
- ☑ **第十章--数项级数**
- ☑ **第十一章--广义积分**
- ☑ **第十二章--函数项级数**
- ☑ **第十三章--函数的幂级数展开**
- ☑ **第十四章--傅里叶级数**

1 微积分的进一步应用

定理 1.1 (带佩亚诺余项的泰勒公式) *若 f(x) 在 x=a 有 n 阶微商, 即* $f^{(n)}(a)$ *存在, 则当 xa 时有*

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$$

定理 1.2 *设 f(x) 在 a 点 n(n≥2) 次可微, 且*

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\neq 0$$

则当 n 为奇数时,f(x) 在 a 点不取极值. 当 n 为偶数时, 若 $f^{(n)}(a)>0$*, 则 f(x) 在 a 取极小值; 若* $f^{(n)}(a)<0$*, 则 f(x) 在 a 取极大值.*

定理 1.3 (唯一性) *若*

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$$

$$=B_0+B_1(x-a)+B_2(x-a)^2+\cdots+B_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$$

则

$$A_i=B_i, i=0,1,\cdots,n$$

定理 1.4 若 *f(x)* 在包含 a 的一个区间有 $n+1$ 阶连续微商, 则对此区间内的任意 x, 有下面的泰勒公式成立:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

其中 ξ 在 α 和 β 之间, 或 $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$ 其中 $0 < \theta < 1$

2　再论实数系

定义 2.1 如果实数集合 A 有上界, 且上界中有最小数 , 则称 为数集 A 的上确界, 记 =*supA;* 如果实数集合 A 有下界, 且下界中有最大的数 a, 则称 a 为数集 A 的下确界，记为 a= *infB.* 这里 *sup* 是 *supremum;* 的缩写, 而 *inf* 是 *infimum* 的缩写.

定理 2.1 (确界定理) 在实数系 R 内, 非空的有上 (下) 界的数集必有上 (下) 确界存在.

定义 2.2 设 E 是一个由实数开区间构成的集合,S 是一一个实数子集, 如果对任意 *xS*, 有区间 *(a,b)E*, 使得 *x(a,b)*, 则称 E 是 S 的一个覆盖.E 是 S 的覆盖, 用集合的符号可写成

$$S \subset \bigcup_{E_a \in E} E_a$$

如果 E 由有限个区间组成, 则称这是有限覆盖.

定理 2.2 (博雷尔 (Borel,1871 一 1956) 有限覆盖定理) 实数闭区间 *[a,b]* 的任一个覆盖 E, 必存在有限的子覆盖. 这定理是说, 若 *[a,b]* 有一个覆盖 E, 则存在 E 的有限子集 (有限个开区间), 它本身已构成了 *[a,b]* 的一个覆盖.

定义 2.3 设一组实数的闭区间序列 $[a_n, b_n]$,$n = 1, 2, \cdots$ 满足: *(i)*$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $n = 1, 2, 3....$ *(ii)* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 则称 $[a_n, b_n]$ 构成一个区间套

定理 2.3 (区间套定理) 设 $[a_n, b_n]$ 是一个区间套, 则必存在唯一的实数 r, 使得 r 包含在所有的区间里，即

$$r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

定理 2.4 (波尔察诺一魏尔斯特拉斯紧致性定理) 有界数列必有收敛子数列. 定理说, 如果数列x_n 在闭区间 *[a,b]* 内, 即满足 *ax,b*(对任意 *n*)(有上界 b 与下界 a), 则 x, 必有收敛子数列.

定义 2.4 在数系 S 中, 如果数列x_n 满足下列性质: 任给 >0, 存在 N, 使得只要 *n> N,m> N*, 有 $|x_n - x_m|$<*E*, 则称x_n 为 S 的基本列, 或称为柯西列.

定义 2.5 称数系 S 是完备的, 如果 S 中的每个基本列都在 S 中有极限存在.

定理 2.5 (柯西) 实数系 R 是完备的.

定理 2.6 (柯西收敛原理) 在实数系中, 数列 x_n 有极限存在的充分必要条件是: 任给 *e*> *0*, 存在 *N*, 当 *n*> *N*,*m*> *N* 时, 有 $|x_n - x_m| < \epsilon$.

定理 2.7 对于 *[a,b]* 上的有界函数 *f(x)* 与 *[a,b]* 的任一个分法, 达布上和 *S* 是 (随中间点 *;* 的选取而变的一切) 黎曼和的上确界, 而达布下和是黎曼和的下确界, 即

$$S = \sup_{\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

$$s = \inf_{\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

定理 2.8 若在一个分法 (Δ) 的分点之外添加新的分点以构成新的分法 (Δ'), 则达布上和不增大而达布下和不减小: $s \le s' \le S' \le S$, 其中 S 与 s 为相应于 (Δ) 的达布和, 而 S' 与 s' 为相应于 (Δ') 的达布和.

定理 2.9 任一个下和总不超过任一个上和, 即使它们对应于不同的分法.

定理 2.10 (达布定理) 当 *(Δ)0* 时, 达布上和 S 的极限是上积分, 达布下和 s 的极限是下积分:

$$\lim_{\lambda \to 0} S = \overline{I}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \underline{I}$$

并且 $s \le \underline{I} \le \overline{I} \le S$

定理 2.11 (达布定理) *f(x)* 在 *[a,b]* 上 (按黎曼意义) 可积的充要条件是上积分等于下积分:

$$\overline{I} = \underline{I}$$

定理 2.12 *f(x)* 在 *[a,b]* 可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

定理 2.13 在 *[a,b]* 上有界且仅有有限个间断点的函数 *f(x)*, 必在 *[a,b]* 可积.

定理 2.14 若 *f(x)* 在 *[a,b]* 单调, 则 *f(x)* 在 *[a,b]* 可积.

3 数项级数

定义 3.1 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限存在（设为 S），则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛，S 称为级数的和，记作 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S,$ 此时也称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛到 S，若部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限存在，则称该级数发散，此时它没有和。

定理 3.1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，c 为任一常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

定理 3.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

定理 3.3 任意改变级数有限项的数值，不改变收敛性。

定理 3.4 (收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则一般项 u_n 趋向于 0，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

定义 3.2 若级数的每一项都是非负的，则称此级数为正项级数。

定理 3.5 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

定理 3.6 (比较判别法) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \cdots,$

若对充分大的 n（即存在 N，当 $n > N$ 时）有 $u_n \leqslant v_n$ 其中 $c > 0$ 与 n 无关，则

（1）当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

定理 3.7 (比较判别法的极限形式) 设给定两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 若 $\lim_{n\to\infty} = l,$ 则

（1）当 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $l = 0$ 时，由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（3）当 $l = +\infty$ 时，由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛推出 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。

定理 3.8 (比较判别法的另一形式) 设给定两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若当 n 充分大后，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；由 $\sum_{u=1}^{\infty} u_n$ 发散可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

定理 3.9 (达朗贝尔判别法) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项都不为 0，且满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ 则

（1）当 $l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $l > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

定理 3.10 (柯西判别法) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ 则

（1）当 $l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $l > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

定理 3.11 对任意 $r > p > 1$，存在 N，使当 $n > N$ 时，有 $1 + \frac{r}{n} > (1 + \frac{1}{n})^p$.

定理 3.12 (拉阿比（Raabe）判别法) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项满足 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = S$ 则

（1）当 $S > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $S < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

定理 3.13 (柯西积分判别法) 若 $f(x) \geqslant 0$ 在 $[1, +\infty)$ 连续，单调下降，$u_n = f(n)$，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件时极限 $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)dt$ 存在。

定理 3.14 (莱布尼茨判别法) 设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0, n = 1, 2, \cdots)$ 中的数列 $\{u_n\}$ 单调下降趋向于 0，则交错级数收敛。

定理 3.15 (柯西收敛原理) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N，只要 $n > N$，对任意正整数 p，有 $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

定理 3.16 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

定义 3.3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是绝对收敛的；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛的。

定理 3.17 (达朗贝尔判别法) 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l$ 则

（1）当 $l < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

（2）当 $l > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

定理 3.18 (阿贝尔引理) 设

(i) $\{a_k\}(k=1,2,\cdots,m)$ 单调（单调上升或单调下降）；

$(ii) B_k=\sum_{j=1}^{k} b_j(k=1,2,\cdots,m)$ 有界，即存在 $M>0$，使得 $|B_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots,m)$

则 $|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k| \leqslant M(|a_n|+2|a_m|)$.

定理 3.19 (狄利克雷判别法) 设

(i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和 $B_n=\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 有界，即存在 $M>0$，使得 $|B_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$；

(ii) 数列 $\{a_n\}$ 单调趋向于 0，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

定理 3.20 (阿贝尔判别法) 设

(i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛；

(ii) 数列 $\{a_n\}$ 单调有界，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

定理 3.21 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 级数收敛，其和为 $S, 0=p_0<p_1<p_2<\cdots<p_k<p_{k+1}<\cdots$ 是任一严格上升的正整数数列，$\lim_{k\to\infty} p_k=+\infty$，则级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=p_k+1}^{p_{k+1}} u_j)=(u_1+\cdots+u_{p_1})+(u_{p_1+1}+\cdots+u_{p_2})+(u_{p_k+1}+\cdots+u_{p_{k+1}})+\cdots$ 也收敛，且其和仍为 S.

定理 3.22 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 级数绝对收敛，其和为 S，而 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{j_k}$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任意一个重排，则 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{j_k}$ 也绝对收敛，且其和仍为 S.

定理 3.23 (黎曼) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则

(1) 适当重排，可使新级数发散；

(2) 对任意实数 σ，可找到 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的适当重排，是其和为 σ.

定理 3.24 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 发散，并且发散到 $+\infty$ 与 $-\infty$.

定理 3.25 (柯西) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均绝对收敛，其和分别为 s 与 t，则他们各项之积 $u_i v_k(i,k=1,2,\cdots)$ 按任何方式排列所构成的级数也绝对收敛，且其和为 st.

4 广义积分

定义 4.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 由定义，并且在任意有限区间上可积，若极限 $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在，则称此极限值为 $f(x)$ 在无穷区间上 $[a,+\infty)$ 的广义积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$

这时也称积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是收敛的。若极限 $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 不存在，则称积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是发散的，这时还使用记号 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$，但它并不表示一个数。

类似地又可以定义积分 $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx.$ 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 都收敛时，我们就说 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，并且定义 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$。

显然，右边这两个数的和时与的选择无关的。事实上，$\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 中由一个发散，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 是发散的。

显然 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A'\to-\infty A\to+\infty}\int_A^{A'} f(x)dx$ 必须注意的是，这里 $A'\to-\infty$ 与 $A\to+\infty$ 两者之间是独立变化的。

定理 4.1 (无穷项积分的柯西收敛原理) 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是对任给 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，当 $A',A''>A$ 时，有 $|\int_{A''}^{A'} f(x)dx|<\varepsilon$ 和无穷级数相仿，有下面的定理。

定理 4.2 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，且在任意有限区间 $[a,A]$ 可积，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

定理 4.3 (比较判别法) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义且在任何有限区间 $[a,A]$ 可积，

(i) 若存在数 B，当 $x\geqslant B$ 时，$|f(x)|\leqslant\varphi(x)$ 而 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛。

若 $|f(x)|\geqslant\varphi(x)>0$（当 $x>B$），$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散。

(ii) 若 $\varphi(x)>0$，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\varphi(x)}=l$，则当 $0\leqslant l<+\infty$ 时，由 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛可推出 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，时，由 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 发散可以推出 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散。

定理 4.4 设函数 $f(x)$ 定义 $[a,+\infty)$ 并在任意有限区间 $[a,A]$ 可积。

(i) 若存在 $p>1$, $B>a$, 使得 $|f(x)|\leqslant\frac{C}{x^p}$, 当 $x>B$, 其中 C 是常数, 则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛；

若存在 $p\leqslant 1$，及 $B>a$，使得 $|f(x)|\geqslant\frac{C}{x^p}$，当 $x>B$，其中 $C>0$ 是常数，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散。

(ii)若 $\lim_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^p}} = l$ 则当 $0 \leqslant l < +\infty, p > 1$ 时，$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛；当 $0 \leqslant l < +\infty, p \leqslant 1$ 时。$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散。

定理 4.5 (积分第二中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则在 $[a,b]$ 存在 ε，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\varepsilon} f(x)dx + g(b)\int_{\varepsilon}^b f(x)dx.$

特别地，如果 $g(x)$ 单调上升且 $g(a) \geqslant 0$，那么存在 $\varepsilon \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_{\varepsilon}^b f(x)dx$

如果 $g(x)$ 单调下降且 $g(b) \geqslant 0$,那么存在 $\varepsilon \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\varepsilon} f(x)dx.$

定理 4.6 (狄利克雷判别法) 若 $\int_a^A |f(x)|dx$ 有界，即存在 $M > 0$，使 $|\int_a^A |f(x)|dx| \leqslant M, \forall A > a$，$g(x)$ 单调且当 $x \to +\infty$ 时 $g(x)$ 趋向于 0，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

定理 4.7 (阿贝尔判别法) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界,则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

定义 4.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 有定义且在任意区间 $[a+\eta,b]$ 可积（其中 $\eta > 0$），在 $(a,a+\eta)$ 无界，若极限 $\lim_{\eta\to0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 存在，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是收敛的，且积分值等于极限值，并用符号 $\int_a^b f(x)dx$ 表示这个积分值：$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)dx$

若上述极限不存在，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。

定理 4.8 (柯西收敛原理) 设瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 只有唯一的瑕点 a，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，当时 $0 < \eta', \eta'' < \eta'$，有 $|\int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x)dx| < \varepsilon.$

有柯西原理后，便知对瑕积分可以引进绝对收敛与条件收敛的概念，并推知，绝对收敛的瑕积分必收敛，但反之不然。

定理 4.9 (比较判别法) 设瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 只有唯一的瑕点 a。

(i) 若存在 $\delta > 0$，使得 $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$，当 $a < x < a+\delta$，而 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛。若 $|f(x)| \geqslant \varphi(x) > 0$，当 $a < x < a+\delta$，而 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散。

(ii) 若 $\varphi(x) > 0$ 且 $\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{\varphi(x)} = l$，则当 $0 \leqslant l < +\infty$ 时，由 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 收敛，可推出 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛；当时，由 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 发散，可推出 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散。

定理 4.10 设瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 只有唯一的瑕点 a.

(i) 若存在 $p<1$ 与 $\delta>0$，使得 $|f(x)|\leqslant\frac{c}{(x-a)^p}$，当 $a<x<a+\delta$，其中 c 是常数，则 $\int_a^b|f(x)|dx$ 收敛。

若存在 $p\geqslant 1$ 及 $\delta>0$，使得 $|f(x)|\geqslant\frac{c}{(x-a)^p}$，当 $a<x<a+\delta$，其中 c 是正常数，则 $\int_a^b|f(x)|dx$ 发散。

(ii) 若 $\lim_{x\to a^+}(x-a)^p|f(x)| = lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{(x-a)^p}$，则当 $0\leqslant l<+\infty$，$p<1$ 时，$\int_a^b|f(x)|dx$ 收敛；当 $0\leqslant l<+\infty$，$p\geqslant 1$ 时，$\int_a^b|f(x)|dx$ 发散。

定理 4.11 (狄利克雷判别法) 设积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 有唯一的瑕点 a,$\int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 是 η 有界函数，$g(x)$ 单调且当 $x\to a$ 时趋向于零，那么积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛。

定理 4.12 (阿贝尔判别法) 设积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 有唯一的瑕点 a,$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 单调有界，则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛。

5 函数项级数

定义 5.1 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 中的每个 $f_n(x)$ 都在 X 上有定义。另外有 $f(x)$ 在 X 上有定义。若对任给 $\varepsilon > 0$，存在时依赖于 ε 的正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 时，有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

对 $x \in X$ 一致也成立，则称函数序列 $f_n(x)$ 在 X 一致收敛到 $f(x)$。

定理 5.1 若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续。

定理 5.2 若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 连续，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $f(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

定理 5.3 若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 逐点收敛到 $f(x)$，而每一项 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 都有连续的微商 $f_n'(x)$，且 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛到 $\sigma(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有微商，且 $f'(x) = \sigma(x)$.

定义 5.2 设给定函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$，如果它的部分和序列 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 X 一致连续到函数 $S(x)$，那么称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 X 一致收敛到和函数 $S(x)$。

定理 5.4 (柯西原理) 函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 X 一致收敛的充分必要条件是，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在与 x 无关的 N，只要 $n > N$，对任意正整数 p 及任意 $x \in X$，都有

$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$。

定理 5.5 函数项级数在 X 一致收敛的必要条件是一般项构成的函数序列 $\{u_n x\}$ 在 X 一致收敛于 *0.*

定理 5.6 (魏尔斯特拉斯判别法，或称 M 判别法，或称控制收敛判别法) 若对函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$，存在 $M_k (k = 1, 2, \cdots)$，使得 $|u_k(x)| \leqslant M_k$

而正项数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 X 一致收敛。

定义 5.3 称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 X 一致有界，如果存在数 $M > 0$，使得 $|f_n(x)| \leqslant M$ 对一切 $x \in X$ 和 $n = 1, 2, \cdots$ 一同时成立。

定理 5.7 (狄利克雷判别法) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列 $\{\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)\}$ 在 X 上一致有界，对每个固定的 $x \in X$，数列 $\{a_n(x)\}$ 是单调的，且当 $n \to \infty$ 时函数序列 $a_n(x)$ 在 X 一直趋向于 0，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 X 一致收敛。

定理 5.8 (阿贝尔判别法) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 X 一致收敛，函数序列 $\{a_n(x)\}$ 在 X 一致有界，且对每一个 $x \in X$ 是单调数列，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 X 一致收敛。

定理 5.9 (和函数的连续性) 若 $u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[a, b]$ 连续，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛到 $S(x)$，则和函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 连续。

定理 5.10 (迪尼 Dsini) 若在闭区间 $[a, b]$ 上，$u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 且在 $[a, b]$ 连续，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 逐点收敛到 $S(x)$，$S(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛。

定理 5.11 (逐项积分) 若 $u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[a, b]$ 连续，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续到 $S(x)$，则 $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$.

定理 5.12 (逐项求导) 若 $u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[a, b]$ 有连续的微商 $u_n'(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 逐点收敛到 $S(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a, b]$ 一致连续到 $\sigma(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 可导，且 $S'(x) = \sigma(x)$。

6 函数的幂级数展开

定理 6.1 (阿贝尔第一定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_1(\neq 0)$ 收敛，则对满足不等式 $|x| < |x_1|$ 的一切点 x，幂级数都绝对收敛；若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_2(\neq 0)$ 处发散，则对满足不等式 $|x| > |x_1|$ 的一切点 x，幂级数都发散。

定理 6.2 对任意给定的幂级数，必存在唯一的 r（r 满足 $0 \leqslant r \leqslant +\infty$），使得幂级数在 $|x| < r$ 绝对收敛，在 $|x| > r$ 发散。

定理中 r 的称为幂级数的收敛半径。

定理 6.3 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项系数之比满足条件 $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$，则幂级数的收敛半径 $r = \frac{1}{\rho}$（$\rho = 0$ 时理解为 $r = +\infty$，$\rho = +\infty$ 时理解为 $r = 0$）。

定理 6.4 (阿贝尔第二定理)（1）若幂级数的收敛半径为 $r > 0$，则对任意 $b : 0 < b < r$ 幂级数在 $[-b, b]$ 一致收敛；

（2）若幂级数的收敛半径为 $r > 0$，且幂级数在 r 收敛，则幂级数在 $[0, r]$ 一致收敛；

（3）若幂级数的收敛半径为 $r > 0$，且幂级数在 $-r$ 收敛，则幂级数在 $[-r, 0]$ 一致收敛。

定理 6.5 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r > 0$，则它的和函数在 $(-r, r)$ 连续。

定理 6.6 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r，且幂级数在 r 收敛，则它的和函数在 $[0, r]$ 连续，特别地 $\lim_{x\to r^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$。

定理 6.7 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r，和函数为 $S(x)$，即 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(1) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, -r < x < r,$，则幂级数在收敛区间内部可以逐项微商与逐项积分，即 $\int_n^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} 2 = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \cdots, -r < x < r S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}(3) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots, -r < x < r,$ 且（2）、（3）中的幂级数收敛半径仍然是 r。

定理 6.8 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r > 0$，则其和函数 $S(x)$ 在 $(-r, r)$ 内任意次可微，且 $S^{(k)}(x)$ 等于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 逐项微商 k 次所得的幂级数 $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}, -r < x < r$。

定理 6.9 (唯一性) (i)如果函数 $f(x)$ 在 $(-r,r)(r>0)$ 可以展开成幂级数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots,-r<x<r$，那么必有 $a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0),k=0,1,2,\cdots$。

(ii) 如果函数 $f(x)$ 在 $(x_0-r,x_0+r)(r>0)$ 可以展开成幂级数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_k(x-x_0)^k+\cdots,x_0-r<x<x_0+r$，那么系数 a_k 满足 $a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0),k=0,1,2,\cdots$，通常称 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots$ 为 $f(x)$ 的麦克劳林级数，称 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k=f(0)+f'(0)(x-x_0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒级数。

定理 6.10 若 $f(x)$ 的各阶微商在 $(-r,r)$ 一致有界，即存在 $M>0$，使 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M,\forall x\in(-r,r),n=0,1,2,\cdots$，则 $f(x)$ 在 $(-r,r)$ 可以展开成幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,-r<x<r$。

7 傅里叶级数

定理 7.1 三角函数中任意两个不同函数的乘积，在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为 0，即 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx (n = 1, 2, \cdots)$;

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx (m, n = 1, 2, \cdots)$;

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx (m \neq n, m, n = 1, 2, \cdots)$.

定义 7.1 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 绝对可积, 则由公式 $\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx, n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx, n = 1, 2, \cdots \end{cases}$ 决定的 a_n, b_n，称为 $f(x)$ 的傅里叶系数（或简称为傅氏系数)，称由这些 a_n, b_n 决定的三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数（或傅氏级数）

记为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

定理 7.2 (黎曼—勒贝格) 若 $g(t)$ 在 $[a, b]$ 绝对可积，则 $\lim_{p \to +\infty} \int_a^b g(t) \sin ptdt = 0$,

$\lim_{p \to +\infty} \int_a^b g(t) \cos ptdt = 0$.

定理 7.3 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，且在 $[-\pi, \pi]$ 绝对可积，则 $f(x)$ 的傅里叶系数当 $n \to +\infty$ 时趋向于 0，即 $lim_{n \to +\infty} a_n = lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

定理 7.4 (黎曼局部化定理) 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi, \pi]$ 绝对可积，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在某点 x_0 的收敛或发散，只与函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的性质有关。

定理 7.5 (迪尼判别式) 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi, \pi]$ 绝对可积，且存在 $\delta > 0$，使得 $\int_o^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$ 存在，其中 $\varphi_{x_0} = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 收敛到 S，即 $S_n(f; x_0) \to S\ (n \to +\infty)$.

定理 7.6 (利普希茨判别法) 若 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 绝对可积, 且 x_0 在 $a(a > 0)$ 满足阶的利普希茨条件, 即存在 $\delta > 0$ 与常数 M, 使得 $|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leqslant Mt^a (0 < t \leqslant \delta)$ 成立，则函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 收敛到 $f(x_0)$。

定理 7.7 若 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 绝对可积, 且 $f(x)$ 在 x_0 有左右微商 $f'_+(x_0) f'_-(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 收敛到 $f(x_0)$。

定理 7.8 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi, \pi]$ 逐段可微，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $f(x)$ 的连续点收敛到，在 $f(x)$ 的不连续点收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。

定理 7.9 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 内除有限个可去间断点或第一类间断点外是连续的，且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则

(i)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛；

(ii) $\int_0^x f(t)dt-\frac{a_0}{2}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}$

对一切 x 成立。

定理 7.10 (费耶) 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中傅里叶级数的部分和记作 $S_0(x)=\frac{a_0}{2}$,$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)(n\geqslant 1)$。则 $\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}S_k(x)$ 当 $n\to\infty$ 时在 $[-\pi,\pi]$ 一致收敛到 $f(x)$。

定理 7.11 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积的函数，则在所有 n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 中，当 $T_n(x)$ 取 $f(x)$ 的傅里叶级数的 n 阶部分和 $S_n(x)$ 时，$f(x)$ 与 $T_n(x)$ 的均方误差最小，即 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx=min_{\{T_n\}}\Delta_n^2=min_{\{T_n\}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx$, 其中最小值是对所有 n 阶三角多项式取的，而 $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的 n 阶部分和，而且 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx=min_{\{T_n\}}\Delta_n^2=min_{\{T_n\}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx$

定理 7.12 (贝塞尔不等式) 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 a_k,b_k 满足 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$。

定理 7.13 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$，使得

$\int_a^b|f(x)-g(x)|^2dx<\varepsilon$ 且 $g(a)=f(a),g(b)=f(b)$.

定理 7.14 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积，则对任给 $\varepsilon>0$，存在三角多项式 $T(x)$，使得 $(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$

定理 7.15 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积的函数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和 $S_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 平均收敛到 $f(x)$，即 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}=0$

定理 7.16 (帕塞瓦尔等式) 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积，则

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$.