随机过程

马啸

2024 年 10 月 12 日

目录

第 0 章

概率论回顾

§0.1 概率论的基本概念

0.1.1 随机模型三要素

概率论是研究随机现象并揭示其规律的学科。为此，我们需要建立一个称之为随机试验的概率模型。一个随机试验（或称随机模型）由下面三个要素组成：

1. 样本空间（sample space）是一个集合，由所有可能的试验结果构成，通常记作 Ω。样本空间可以是有限的，也可以是无限的。样本点可以是非数值类的，也可以是数值类的，此时样本点可以是标量，也可以是向量，甚至无穷序列。

2. 事件（event）是 Ω 的子集，而所有事件构成的类 $\mathcal{F}$ 须满足

2.1 $\Omega \in \mathcal{F}$（必然事件）；

2.2 $A \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bar{A} \in \mathcal{F}$（补运算封闭），这里“$\bar{A}$”表示 A 的补集；

2.3 $A_i \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$（可列并运算封闭）。

由此可推出不可能事件 $\varnothing \in \mathcal{F}$，可列交运算封闭，即事件的“加（并）、减（补）、乘（交）”运算封闭。换句话讲，事件类是根据研究问题而定义的子集类。与集合论里的术语稍有不同的是，我们用和事件与积事件分别表示集合的并与交。当两个事件对应的子集不相交时候，我们说两个事件是不相容的。

3. 概率是一个映射 $P : \mathcal{F} \to (-\infty，+\infty)$，满足

3.1 $P(\Omega) = 1$（规范性）；

3.2 $P(A) \geqslant 0$（非负性）；

3.3 $P(\biguplus_i A_i) = \sum_i P(A_i)$（可列可加性，$\biguplus_i$ 表示两两不相容的 A_i 的并）。

由 3.2、3.3 可以推出 $P(\varnothing) = 0$。此处，P 类似归一化的“计数、长度、面积、体积”等测度。

【例题 0.1】 抛一枚硬币，根据实际情况，可能选择如下模型。

模型 1

（1）样本空间：$\Omega = \{正，反\}$。

（2）事件类：$\mathcal{F} = \{\varnothing，\{正\}，\{反\}，\{正，反\}\}$。

（3）概率：$P(\{正\}) = \frac{1}{2}$，$P(\{反\}) = \frac{1}{2}$。

模型 2

（1）样本空间、事件类同模型 1。

（2）概率：$P(\{正\}) = \frac{1}{4}$，$P(\{反\}) = \frac{3}{4}$。

模型 3

（1）样本空间：$\Omega=${正，反，立}。

（2）事件类、概率从略。

【例题 0.2】 掷一均匀骰子

（1）样本空间 $\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$。

（2）取 $A=\{1，3，5\}$。$\{\Omega，A，\varnothing\}$ 是事件类吗？

（3）$\{\Omega，A，\bar{A}，\varnothing\}$ 是事件类吗？

（4）$\mathcal{F}=2^{\Omega}$ 是事件类吗？

（5）对于有限样本空间，我们通常取所有子集构成的类为事件类，即任意一个子集都视作事件。若有限样本空间大小为 $|\Omega|$，问共有多少子集？

（6）若样本空间为有限样本空间，则概率的定义通常以定义单点集的概率为基本方式。若骰子是均匀的，则定义

$$P(\{1\})=P(\{2\})=\cdots=P(\{6\})=\frac{1}{6}。$$

注：我们可以用 $P(1)$ 简单记概率 $P(\{1\})$，不过要注意概率 P 是一个广义的函数，其定义域是事件类，而自变量是事件。我们也可以用 $P(A)$ 来表示事件 A 的概率。同一样本空间及事件类上可以定义不同的概率函数。此时可以用 $Q(A)$ 等表示事件 A 的概率。

【例题 0.3】 一个箱子里有 M 个可区分的球，从中取出 n 个，分析如下试验的样本空间的大小。

（1）有放回：有序，无序；

（2）不放回：有序，无序。

【例题 0.4】 把 n 个球扔进 M 个箱子，分析如下试验的样本空间的大小。

（1）球可区分，箱子可区分，不限箱内球数；

（2）球不可区分，箱子可区分，不限箱内球数；

（3）球可区分，箱子可区分，箱内球数不超过 1；

（4）球不可区分，箱子可区分，箱内球数不超过 1；

（5）球不可区分，箱子不可区分，箱内球数不限。

0.1.2 概率的基本运算律

在概率中，我们有以下运算法则：

1. **加法**：对于事件 A，B，

- $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；$P(A\bigcup B)\leq P(A)+P(B)$。
- 若 A 与 B 不相容，则 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$（分类）。
- **容斥定理**：若事件集 A_1，$\cdots$，A_n 为有限集，则有

$$\begin{aligned}P\{\cup_{i=1}^{n}A_i\}=&\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}-\sum_{1\leq i<j\leq n}P\{A_i\cap A_j\}\\&+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}P\{A_i\cap A_j\cap A_k\}-\cdots+(-1)^{n-1}P\{A_1\cap\cdots\cap A_n\}。\end{aligned}$$

2. **乘法**：

- 条件概率定义：设 A 与 B 为样本空间 Ω 中的两个事件，其中 $P\{A\}>0$。那么在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的**条件概率**为：
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}；$$
- $P(AB)=P(B|A)P(A)$；若 A 与 B **相互独立**，则 $P(AB)=P(A)P(B)$；
- 链式法则：$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$；

- **多事件独立的定义**：设有 A_1，A_2，...，$A_n(n \geq 2)$ 个事件，如果其中任意 k $(2 \leq k \leq n)$ 个事件的积事件的概率都等于各事件概率之积，即

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}),$$

对于所有 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ 均成立，则称它们相互独立。

3. 减法：

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$；
- $P(A-B) = P(A) - P(AB)$。

4. 全概率公式：若 B_i 是样本空间 Ω 的划分，则有 $P(A) = \sum\limits_i P(B_i)P(A|B_i)$（分类、分步）。

5. 贝叶斯公式：$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_j P(B_j)P(A|B_j)}$。

贝叶斯分析在工程中有广泛的应用背景。我们可以把 B_i 视作引起 A 发生的原因，$P(B_i)$ 称之为先验概率，而 $P(B_i|A)$ 是后验概率，反映事件 A 对于 B_i 概率的影响。条件概率 $P(A|B_i)$ 通常称为似然概率，是"由因及果"，而贝叶斯公式计算的后验概率是"由果及因"，是概率推断的重要工具。在实际应用中，我们通常可以借助图模型来分析复杂的概率问题，概率树可以用来描述"分类"与"分步"："分类"用"分支"，"分步"用"分节"。从根节点（全集，或者说"必然事件"）开始做划分，随着树的生长，划分得越来越细。每个子节点是父节点的子事件，所有子节点划分（不重不漏）它们的父节点。根节点的概率是 1。每条分支有个权重，对应给定父节点条件下相应子节点发生的概率。因此，从一个节点出发的各个分支的权重之和为 1。某个节点的概率是从根节点到达该节点的路径的概率，而该概率是边概率的连乘积。一个子树的概率是该子树所有叶子对应的概率的和，这个子树的概率是等于该子树的根节点的概率的。在概率树中，一个节点的概率既可以由其父亲节点通过一次乘法算得（由上至下），也可以由其儿子节点通过加法算得（由下至上）。有些问题在题目中描述比较直接，有些需要自己提炼，整理出"概率树"，不同的"概率树"对应不同的概率模型。

【例题 0.5】 在 0 到 200 的整数中，求 $A=\{$能被 3 整除的数$\}$，$B=\{$能被 5 整除的数$\}$，和 $C=\{$能被 7 整除的数$\}$ 并集的大小。

【例题 0.6】 设 $P(A(B \cup C)) = 0.3$，$P(\bar{A}) = 0.6$，$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 0.1$，求 $P(B \cup C)$。

【例题 0.7】 令 A_1，A_2，...和 B_1，B_2，...分别为两个事件序列。若 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$ 且 $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$，证明：$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = 1$。

【例题 0.8】 给定 B，$P(B) > 0$，则 $P(*|B)$ 也是概率。

（1）特别地，$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$。

（2）$P(A|B) + P(A|\bar{B})$ 等于 1 吗？讨论 $P(A|B)$ 与 $P(A)$ 的大小关系。

【例题 0.9】 掷两个骰子，记：事件 $A=\{$第一个骰子点数为奇数$\}$；事件 $B=\{$第二个骰子点数为奇数$\}$；事件 $C=\{$两个骰子点数和为奇数$\}$；则 A，B，C 两两独立，但不互相独立。

【例题 0.10】 考虑一个概率空间。记 A，B，C 是三个事件。

（1）举例说明事件 A 与（B 与 C 的和事件）独立，但 A 与 B 不独立，与 C 也不独立。

（2）设 A，B 两个事件的概率均大于 3/4。证明 A 与 B 的积事件的概率大于 1/2。

【例题 0.11】 现有三个袋子，编号为 $i = 1,2,3$，已知第 i 个袋子有 b_i 个黑球和 w_i 个白球，现在随机的选择一个袋子，然后在这个袋子中随机的选择一个球，选中黑球的概率是多少？若已知选取的是黑球，如何推断黑球的袋来源？

【例题 0.12】 Alice 向 Bob 发送字符 0 或 1，发送 0 的概率为 p_0，传输过程中字符有概率 p_e 被翻转，求当 Bob 收到的字符为 1 时，Alice 发送字符为 0 的概率。

【例题 0.13】 老师在三个信封中分别装入三道数学测试题，一道是线性代数的，而另两道是随机过程的。为方便起见，学生甲随机选定一个信封，不妨记作 A。然后，助教打开剩下两个信封中的一个，记作 B。拆开后发现其中是随机过程的试题。此时助教问同学甲：要不要选做另一个信封（不妨记作 C）的题目？

【例题 0.14】 老师准备从五个学生 A、B、C、D、E 中选三个代表班级参加随机过程课程竞赛。

（1）A 被选中的概率是多少？

（2）老师公布了其中一个参赛同学：E。此时 A 被选中的概率是多少？

（3）在老师未公布之前，A 向助教打听自己有无入选。助教按照纪律要求不能告知 A 是否入选，但告知 E 入选了。此时，A 入选的概率是多少？

§0.2 随机变量及其分布函数

0.2.1 基本概念

【定义 0.15】 随机变量 X 不是（自）变量，而是样本空间 Ω 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射，即 $X:\Omega\to\mathbb{R}$，满足：对于任意实数，$\{\omega\in\Omega|X(\omega)\leq x\}$ 是一个事件。为简便起见，我们把该事件记为 $\{X\leq x\}$。

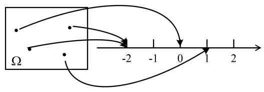


图 1: 随机变量

例如，抛一枚硬币，概率模型如例 0.1.1 模型 1。我们可以定义随机变量 $X(\text{正})=1$，$X(\text{反})=0$。引入随机变量后，样本点就有了数值映像。这有助于我们利用数学分析的工具揭示一些随机现象的统计规律。但需要注意的是，不同的样本点可以映射到相同的数值。

【例题 0.16】 掷一枚均匀的骰子，定义 X 为骰子面上的点数。此时，样本空间 $\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$。回答如下问题。

（1）取 $A=\{1，3，5\}$。$\mathcal{F}_0=\{\Omega，A，\varnothing\}$ 是事件类吗？$\mathcal{F}_1=\{\Omega，A，\bar{A}，\varnothing\}$ 是事件类吗？$\mathcal{F}=2^{\Omega}$ 是事件类吗？

（2）若我们考察的概率模型以 $\mathcal{F}_1$ 为事件类，X 是随机变量吗？若我们考察的概率模型以 $\mathcal{F}$ 为事件类，X 是随机变量吗？

（3）定义 $Y=X \bmod 2$，讨论上一个问题。

注：以 $\mathcal{F}_1$ 为事件类，X 不是随机变量。因为存在 x_0 使得 $\{\omega\in\Omega|X(\omega)\leq x_0\}\notin\mathcal{F}_1$。如 $x_0=2$，$\{X\leq 2\}=\{1，2\}\notin\mathcal{F}_1$。以 $\mathcal{F}$ 为事件类，X 是随机变量。而不论以 $\mathcal{F}_1$ 还是 $\mathcal{F}$ 为事件类，Y 都是随机变量。另外也要注意，上面的讨论与骰子是否均匀关系不大。换句话讲，一个从样本空间 Ω 到实数轴 R 的映射 X 是否是随机变量，仅与事件类 $\mathcal{F}$ 的定义有关。

设 X 是一个随机变量。由于 $\{X\leq x\}$ 是事件，我们可以定义 $F_X(x)=P(X\leq x),x\in\mathbb{R}$, 称之为随机变量 X 的累积分布函数（cumulative distribution function，CDF）。当 x 在 $(-\infty，\infty)$ 变化时，累积分布函数反映了随机变量取值在实数轴上的分布情况。如果 X 取值有限或者可列，则称为离散型随机变量，我们可以定义概率质量函数 $P_X(x)=P(X=x)$，$x\in\mathcal{X}$（$\mathbb{R}$ 的有限子集或可列子集）满足 $P_X(x_i)\geqslant 0$ 且 $\sum_i P_X(x_i)=1$。如果 $F_X(x)$ 连续且几乎处处可微，我们称 X 为连续型随机变量，并定义概率密度函数 $f_X(x)$，$x\in\mathcal{X}$（$\mathbb{R}$ 上的区间 $\mathcal{X}$）满足 $f_X(x)\geqslant 0$ 和 $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x=1$。图2、图3与图4分别给出了离散型随机变量的 PMF、连续型随机变量的 PDF 与一般随机变量的 CDF 的示意图。

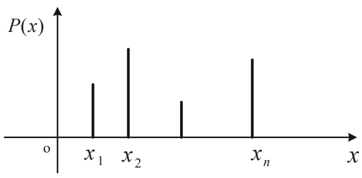


图 2: 离散型随机变量的 PMF (又称分布律)，“谱线”

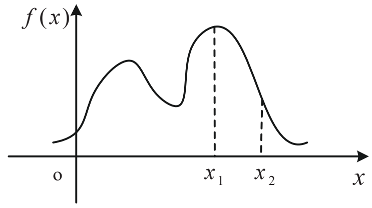


图 3: 连续型随机变量的 PDF，“谱密度”

一个随机变量 X 的累积分布函数 $F_X(x) \triangleq P(X \leqslant x)$，$x \in \mathbb{R}$ 满足如下性质：

1. 对离散型随机变量 X，$F_X(x) = \sum_{x_i \leqslant x} P_X(x_i)$ 是阶梯函数，其中 $P_X(x)$，$x \in \mathcal{X}$ 是 X 的概率质量函数。

2. 对连续型随机变量 X，$F_X(x) = \int_{y \leqslant x} f_X(y)\mathrm{d}y$ 是连续函数，其中 $f_X(x)$，$x \in \mathcal{X}$ 是 X 的是概率密度函数。

3. $F_X(x)$ 是单调递增（未必严格单调）函数，且

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1。$$

4. $F_X(x)$ 的间断点至多可列个；若在 x_1 处有跳跃，则跳跃的高度恰好是概率 $P_X(x_1)$。

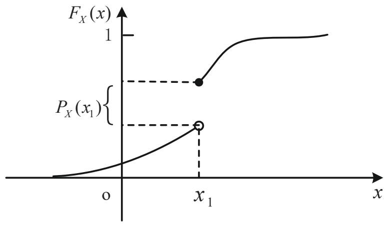


图 4: 随机变量的 CDF

以上讨论的只限于一个随机变量的情况，如果随机试验的结果需要同时考虑两个或两个以上的随机变量的情况，则可以定义复随机变量，随机向量，随机序列，随机过程等。

0.2.2 常见的随机变量

常见的离散随机变量的概率质量函数分述如下，其中 $0 < p < 1$，$\lambda > 0$ 是参数。

1. 两点分布：随机变量 X 取 0 与 1 两个值，其分布律是 $P_X(1) = p$，$P_X(0) = 1 - p$。
2. 二项分布：设 n 是正整数，记 $B(n;p)$ 为二项分布，其分布律是 $P_X(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$，$0 \leq m \leq n$。
3. 几何分布：随机变量 X 取正整数，其分布律是 $P_X(m) = p(1-p)^{m-1}$，$m \geq 1$。
4. 泊松分布：随机变量 X 取非负整数，其分布律是 $P_X(n) = \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!}$，$n \geq 0$。

常见的连续随机变量的概率密度函数分述如下，其中 $\lambda > 0$、$\sigma > 0$、μ 是参数。

1. 指数分布：随机变量 X 的密度函数 $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$，$x \geq 0$。
2. 高斯分布：随机变量 X 的密度函数是 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$，$x \in \mathbb{R}$。
3. 均匀分布：给定 $a > 0$。随机变量 X 的密度函数是 $f_X(x) = \frac{1}{a}$，$0 \leq x \leq a$。

注：密度函数的定义域与累积分布函数的定义域一致，均是整个实数轴。在给出密度函数的时候，通常只给出函数的支撑集（support set), 即函数值不为 0 的自变量所构成的子集合。在支撑集之外，函数值默认为 0。

我们称 $F_{X^n}(x^n) = P(X_1 \leq x_1，X_2 \leq x_2，\cdots，X_n \leq x_n)$ 为 n 维随机向量的联合分布函数（joint distribution function）。它表示事件 $X_1 \leq x_1$，$X_2 \leq x_2$，$\cdots$，$X_n \leq x_n$ 同时出现的概率。联合分布函数亦称多维分布函数。一般地，多维随机变量（包括随机序列、随机过程）可借助联合分布 $F_{X^n}(\underline{x}^n) = P(X_1 \leqslant x_1，X_2 \leqslant$

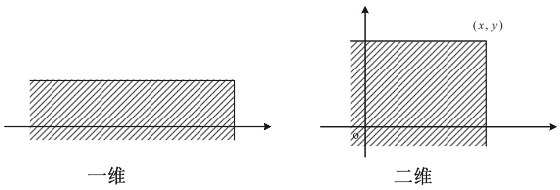


图 5: 分布函数

x_2，$\cdots$，$X_n \leqslant x_n)$ 来刻画，其中 x^n 表示（x_1，x_2，$\cdots$，x_n)。图5给出了分布函数的示意图，即试验结果对应的随机变量取值落在阴影部分的概率，而这个阴影部分随着 $(x，y)$ 的变化可以“扫描”整个平面。

对于二维离散随机变量 $(X，Y)$，我们有以下分布律：

- 联合分布律：$P_{X,\ Y}(x，y)$，$x \in \mathcal{X}$，$y \in \mathcal{Y}$。
- 条件分布律：$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,\ Y}(x，y)}{P_Y(y)}$，$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{X,\ Y}(x，y)}{P_X(x)}$。
- 边缘分布律：$P_X(x) = \sum\limits_y P_{X,\ Y}(x，y)$，$P_Y(y) = \sum\limits_x P_{X,\ Y}(x，y)$。

【定义 0.17】 设 X 是随机变量，而 $\mathrm{g}(x)$ 是一个普通函数，则 $Y = \mathrm{g}(X)$ 也是一个随机变量，即

$$Y : \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

【例题 0.18】 投掷两个均匀的骰子。随机变量 X_i，$i \in \{1，2\}$ 表示第 i 个骰子的点数，$X_i \in \{1，2，3，4，5，6\}$。令 $X = X_1 + X_2$，求：

（1）$P(X = 2|X_1 = 6)$；

（2）$P(X_1 = 2|X_2 = 2)$；

（3）$P(X_1 = 1|X = 2)$。

【例题 0.19】 甲乙两人网聊。甲向乙随机发送一个数字 $X \in \{0，1，2\}$，概率依次为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$。乙收到数字 $Y \in \{0，1，2\}$。但传输过程中有可能出错。设错误模型是 $Y = X + Z \bmod 3$，其中 $Z \in \{0，1，2\}$ 的分布律是 $\frac{7}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{16}$。讨论乙如何根据接收的 Y 推断发送的 X，并给出具体的准则。

【例题 0.20】 设 X 是随机变量，则 $Y = X^2$，$Z = P_X(X)$，$L = -\log P_X(X)$ 均是随机变量。他们的分布律如下所示。注：随机变量“被函数”之后，“谱线”的数目可能减少，高度可能增加。

X	-1	0	1	2
$P_X(x)$	0.2	0.3	0.2	0.3

$Y = X^2$	0	1	4
$P_Y(y)$	0.3	0.4	0.3

$Z = P_X(X)$	0.2	0.3
$P_Z(z)$	0.4	0.6

$L = -\log P_X(X)$	2.32	1.74
$P_L(l)$	0.4	0.6

【例题 0.21】 已知 X 的密度函数，Y 的密度函数。若 X，Y 独立，求 $Z = X + Y$ 的密度函数。

【例题 0.22】 随机变量 X，分布函数为 $F_X(x)$。求以下随机变量的分布函数。

（1）分布函数为 $F_X(x)$ 的 n 个独立同分布随机变量中的最大值。

（2）分布函数为 $F_X(x)$ 的 n 个独立同分布随机变量中的最小值。

（3）以上 (1) 和 (2) 中定义的随机变量之差。假设 X 的密度函数为 $f_X(x)$。

§0.3 数字特征

【定义 0.23】 设离散型随机变量 X 的概率质量函数为 $P_X(x_k) \triangleq p_k$，$k = 1，2，\cdots$。若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则 X 的数学期望定义为：

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k。$$

设连续型随机变量的概率密度函数为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 X 的数学期望定义为：

$$\mathbf{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x。$$

而一般随机变量 X 的数学期望若存在的话，可以表示为以下的 Stieltjes（斯蒂尔杰斯）积分：

$$\mathbf{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F_X(x)。$$

其中，$F_X(x)$ 为 X 的累积分布函数。

随机变量的期望 $\overline{X}=\mathbf{E}(X)$，有时也记作 $\mathbf{E}[X]$，通常被认为是一个随机变量的一个"典型值"。我们有如下命题。

【命题 0.24】 对于任意非负的随机变量 X，$\mathbf{E}[X]=\int F_X^c(y)dy$，其中，$F_X^c(x)=1-F_X(x)=P(X>x)$。

证明. 证明从略。（见拓展阅读材料） □

【定义 0.25】 设 X 是一个随机变量，如果 $D(X)\triangleq\mathbf{E}\left([X-\mathbf{E}(X)]^2\right)$ 存在，则称其为 X 的**方差**。

【命题 0.26】 设 X，Y 是随机变量，$z=g(x)$ 是一个普通函数。则当所涉及的数学期望存在时，我们有

1. $\mathbf{E}(X+Y)=\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)$（不管 X 与 Y 是否独立）;
2. 若 X 与 Y 独立，则 $\mathbf{E}(XY)=\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$；
3. 若 X 与 Y 独立，则 $D(X+Y)=D(X)+\ D(Y)$；
4. $\mathbf{E}(Y)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y|X))$；
5. $\mathbf{E}(Z)=\mathbf{E}(g(X))$。

证明. 证明从略。 □

注：给定 $X=x$，$\mathbf{E}(Y|X=x)$ 是一个数，而 $\mathbf{E}(Y|X)$ 可以看作是随机变量 X 的函数。随机变量的函数的期望公式不只是简单地等量替换，要注意区分期望所对应的变量。

【定义 0.27】 一个随机变量的矩生成函数（MGF，moment generating function）定义为

$$g_X(r)=\mathbf{E}(e^{rX})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\mathrm{d}F_X(x),$$

其中 r 是实变量。

注：矩生成函数 MGF 的定义形式上是以无穷积分给出的，其在 $r=0$ 时收敛的，且 $g_X(0)=1$。一般情况下，$g_X(0)$ 的收敛区域是实数轴的一个区间。

【定理 0.28】 设 $g_X(r)$，$r\in I\subseteq\mathbb{R}$ 是随机变量的矩生成函数，则

（1）$\mathbf{E}(X^k)=\frac{\mathrm{d}^k g_X(r)}{\mathrm{d}r^k}|_{r=0}$，对于 $k\geq 0$。

（2）设 X_1，X_2，...，X_n 是 n 个独立随机变量，$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，则

$$g_{S_n}(r)=\prod_{i=1}^n g_{X_i}(r)$$

证明. 证明从略。 □

【例题 0.29】 概率模型中的事件 A 可以定义一个二元随机变量 $\mathbb{I}_A$，称之为 A 的示性变量，满足 $\mathbb{I}_A(\omega)=1$，$\omega\in A$，而 $\mathbb{I}_A(\omega)=0$，$\omega\notin A$。反之，一个二元随机变量必定是某个事件 A 的示性变量。我们有

$$P_{\mathbb{I}_A}(0)=1-P(A);\quad P_{\mathbb{I}_A}(1)=P(A)。$$

$$\mathbf{E}[\mathbb{I}_A]=P(A);\quad \sigma_{\mathbb{I}_A}=\sqrt{P(A)(1-P(A))}。$$

注：概率是期望，期望是积分；积分是期望，期望是概率。

【例题 0.30】 期末某校评优，甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学分别获得"德、智、体、美、劳"单项奖状。不巧的是，辅导员发放奖状时完全随机放乱了。请问，5 名同学中平均意义上有几人拿到了与自己匹配的奖状？

§0.4 尾部概率

在实际应用中，一方面，事件的概率未必有简易的计算方法；另一方面，很多情况下非平凡的概率界也可以用来指导系统的设计。下面介绍一些重要的不等式。

1. Markov（马尔科夫）不等式（若均值有限，则尾部概率线性递减趋于 0）

设非负随机变量 X 的期望 $\mathbf{E}(X)$ 的值有限，则对于 $y > 0$， $P(X \geq y) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{y}$。

证明：

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} x \mathrm{d}F_X \geqslant \int_y^{+\infty} x \mathrm{d}F_X \geqslant y \int_y^{+\infty} \mathrm{d}F_X = yP(X \geqslant y)。$$

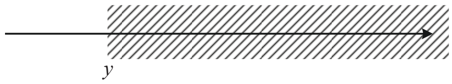


图 6: Markov（马尔科夫）不等式

2. Chebyshev（切比雪夫）不等式（若方差有限，则尾部概率平方递减趋于 0）

对于任意 $\delta > 0$，$P(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\sigma_X^2}{\delta^2}$，其中 σ_X^2 表示 X 的方差。

证明：对 $(X - \mathbf{E}(X))^2$ 应用 Markov 不等式，

$$\begin{aligned} & P(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \delta) \\ = \ & P(|X - \mathbf{E}(X)|^2 \geqslant \delta^2) \\ \leqslant \ & \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))^2}{\delta^2} = \frac{\sigma_X^2}{\delta^2}。 \end{aligned}$$

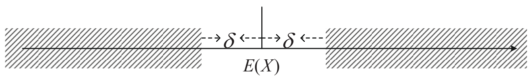


图 7: Chebyshev（切比雪夫）不等式

3. Chernoff（切诺夫）界（若矩生成函数有限，则尾部概率指数递减趋于 0）

$$P(X \geqslant y) \leqslant \mathbf{E}(e^{sX})e^{-sy}, \quad 对所有s \geqslant 0。$$

证明：对 e^{sX} 应用 Markov 不等式，

$$P(X \geqslant y) = P\left(e^{sX} \geqslant e^{sy}\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}(e^{sX})}{e^{sy}}, \quad s \geqslant 0。$$

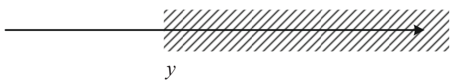


图 8: Chernoff（切诺夫）界

类似地，$P(X \leqslant y) \leqslant \mathbf{E}(e^{sX})e^{-sy}$， 对所有 $s \leqslant 0$。

上述几个不等式也可以借助积分的性质（非负函数的积分非负）来证明，如图9所示。为此，对于 $y > 0$，定义示性函数（indicator function）

$$Z(\omega) = \begin{cases} 1, & X(\omega) \geqslant y \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

又 $\Pr\{X \geqslant y\} = \Pr\{Z = 1\} = \mathbf{E}(Z)$，可得

$$Z \leqslant \frac{X}{y} \Rightarrow \Pr\{X \geqslant y\} = \mathbf{E}(Z) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{y}$$
$$Z \leqslant \frac{X^2}{y^2} \Rightarrow \Pr\{|X| \geqslant y\} = \mathbf{E}(Z) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X^2)}{y^2}$$
$$Z \leqslant \frac{e^{sX}}{e^{sy}} \Rightarrow \Pr\{X \geqslant y\} = \mathbf{E}(Z) \leqslant \frac{\mathbf{E}(e^{sX})}{e^{sy}}.$$

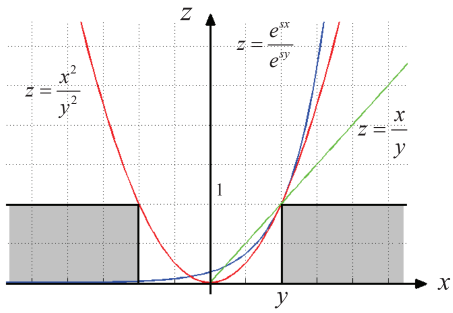


图 9: 基于积分性质的尾部概率不等式的证明示意图

§0.5 几种典型概率问题分析

0.5.1 球箱问题

【例题 0.31】 **生日悖论：** 把 n 个球放进 M 个箱子，有一个箱子内球数超过 1 的概率。

【例题 0.32】 **中奖概率：** M 个球，其中 n 个球有奖，从中取 n 个球，求中奖概率。

【例题 0.33】 *Polya* **的传染病罐子模型：** 罐子里有 b 个黑球，w 个白球 $(n = b + w)$。均匀随机取一个球，然后放回 a 个同色球。记 B_k 是第 k 次取到黑球的事件，W_k 是第 k 次取到白球的事件。求：

（1）$P(B_2|W_1)$；

（2）$P(B_1B_2)$。

0.5.2 独立掷硬币多次，正面朝上的概率为 p

【例题 0.34】 用语言描述两点分布、二项分布、几何分布。给出它们的概率质量函数、数学期望与矩生成函数。

【例题 0.35】 观察到 n 次正面朝上时，共掷了多少次？

【例题 0.36】 **集优惠券问题：** 有 n 类不同的优惠券，买 1 件商品可以随机获得其中某类 1 张，问：平均需要购买多少商品才能集齐？

0.5.3 概率树，概率转移图，贝叶斯推断

【例题 0.37】 一个家庭有两个孩子，设男孩、女孩的机会均等。问：

（1）已知老大是女孩，老二也是女孩的概率；

（2）已知有一个是女孩，有两个女孩的概率。

【例题 0.38】 有三个文件柜，一个文件有可能放在某个文件柜里。设快速翻阅一个会有该文件的文件柜，发现该文件的概率为 α。现翻阅文件柜 A 后，未发现。问文件在 A 中的概率。

【例题 0.39】 单项选择题设几个选项合适？

【例题 0.40】 试着解释临床检查中的“假阳性与假阴性”。一个阳性者真有病的概率受哪些因素影响?

0.5.4 数学期望

【例题 0.41】 **非负随机变量的数学期望的几何意义：**

（1）$X \geq 0$，$\mathbf{E}X$；

（2）$Y = X^2$，$\mathbf{E}Y$；

（3）$X \geq 0$，$Y = \min(1，X)$，说明 $\mathbf{E}Y = P(X \geq U)$，其中 U 是独立于 X,取值于 $[0，1]$ 区间的均匀随机变量；

（4）非负整数变量 X，$\mathbf{E}X = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P\left(X \geq i\right)$。

【例题 0.42】 **条件期望：**

（1）$\mathbf{E}(X|Y)$ 的意义；

（2）$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|Y))$；

（3）掷一个均匀骰子，点数记为 N，再掷 N 次，点数记为 X_1，X_2，....，X_N，求 $\mathbf{E}(\sum X_i)$。

【例题 0.43】 考虑一个正整数随机变量 Y，其累积分布函数 $F_Y\left(y\right) = 1 - \frac{2}{(y+1)(y+2)}$，求：

（1）Y 的质量分布函数；

（2）$\mathbf{E}Y$；

（3）设 X 是正整数随机变量，且 $P_{X|Y}\left(x|y\right) = \frac{1}{y}$，$1 \leq x \leq y$，求 (a) $\mathrm{E}(X|Y = y)$；(b) X 的概率质量函数 $P_X(x)$，$\mathbf{E}X$。

0.5.5 对称性的应用

【例题 0.44】 箱子里最初有 1 个白球，1 个黑球。每次取出一个，然后放回，同时添 1 个同色球。n 次试验后，猜测箱内白球数目的分布并证明。

【例题 0.45】 掷均匀硬币 10 次，求下面事件的概率：

（1）正面朝上的次数 = 反面朝上的次数；

（2）正面朝上的次数多于反面朝上的次数；

（3）至少有连续 4 次正面朝上。

【例题 0.46】 有 r 个参赛人，其中参赛人 $i(i = 1，...，r)$ 在开始时有 $n_i(n_i > 0)$ 个单位（财富）。在每一阶段参赛人中的两个被选中比赛，赢者从输者那里得到一个单位。任何参赛人，当他的财富减少到 0 时就退出，如此继续，直至某个参赛人占有所有单位的 $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ 个单位为止，此参赛人就是胜利者。假定相继比赛的结果是独立的，而且在每次比赛中两个参赛人等可能地获胜，求参赛人 i 是胜利者的概率。

0.5.6 $Monte\ Carlo$ 仿真

【例题 0.47】 讨论积分、事件概率与数学期望的关系，并给出仿真计算方法。

【例题 0.48】 由均匀随机变量 $(0，1)$ 产生随机变量 $X \sim F_X\left(x\right)$ 的一般方法。

【例题 0.49】 用均匀硬币序列产生一个二元变量 X，使得 $P_X(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$，$P_X(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$。

【例题 0.50】 产生 n 维球内均匀分布的点。

0.5.7 概率应用

【例题 0.51】 设两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，编写一段程序计算乘积 $h(x) = f(x)g(x)$。给出一种测试所写程序正确与否的方法。

【例题 0.52】 设 m，n 是两个大整数。一个函数 $F : \{0，1，...，n-1\} \to \{0，1，...，m-1\}$ 满足 $F((x+y)\mathrm{mod}\ n) = (F(x) + F(y)) \bmod m$。该函数可以查表计算，即 $F(x)$，$0 \leq x \leq n-1$ 是已知的，但被随机修改了，设错的位置占比 1/5。设计一种算法，可靠计算 $F(x)$，$0 \leq x \leq n-1$。

§0.6 课后作业

1. 从 [1，1 000 000] 范围中随机抽取一个数。请运用容斥定理计算这个数能被 4，6 和 9 中一个或多个整除的概率。

2. 有一枚均匀的硬币和一枚两面都是头像（正面）的硬币，以相同概率从这两枚硬币中随机选择一枚并投掷。已知投掷结果是出现正面，那么投掷的是两面均是头像的硬币的概率是多少。

3. 连续地抛掷一枚均匀的硬币。

（1）求抛掷的前四次是下列情况的概率：

$$\text{H，H，H，H。}$$

$$\text{T，H，H，H。}$$

（2）求模式 T，H，H，H 出现在模式 H，H，H，H 之前的概率。

4. 甲乙两人比赛，规定只要中间有一人赢得了 n 局，比赛立即结束。假定比赛在两人间公平进行，即每人赢得一局比赛的概率都是 $1/2$，与其他不同局的结果无关。那么比赛结束时，失败一方已经赢得 k 局的概率是多少？

5. 投掷 10 枚标准的六面体骰子，假定投掷每枚骰子是独立的。它们的点数之和能被 6 整除的概率是多少？

6. 对 n 个人进行核酸检测。每个人可以单独检测，但费用过高。合并检测可以减少费用。把 k 个人的样本合起来同时分析，如果检测结果呈阴性，对这 k 个人的组，这一次检测就好了。如果检测结果呈阳性，则这 k 个人需要再进行单独检测，因此这 k 个人需要进行 $k+1$ 次检测。假定我们产生了 n/k 个不同的组，每组 k 个人（k 能整除 n），并用合并法进行检测。假设对于独立检测，每个人呈阳性的概率为 p。

（1）对 k 个人的合并样本，检测呈阳性的概率是多少？

（2）需要检测的期望次数是多少？

（3）描述如何求最优的 k 值。

（4）给出一个不等式，说明对什么样的 p 值，合并检测比每个人单独检测更好。

7. 设 A、B 是两个事件。证明如下示性变量之间的关系并回答有关问题。

（1）$\mathbb{I}_\Omega = 1$，$\mathbb{I}_\phi = 0$；

（2）$\mathbb{I}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{I}_A$；

（3）$\mathbb{I}_{A\cup B} = \max(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$，$\mathbb{I}_{AB} = \min(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$；

（4）$\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B \bmod 2$ 对应的事件是什么？$\mathbb{I}_A\mathbb{I}_B$ 呢？

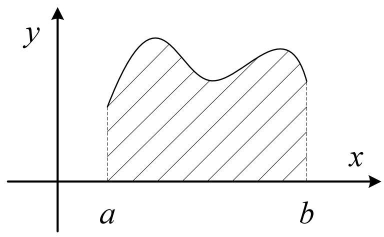
8. 在《万里归途》电影里有一个情景，穆夫塔刁难宗大伟，发起“轮盘赌”。现设枪中子弹数服从概率为 $\frac{1}{2}$ 的 0-1 两点分布。请细化概率模型，分析随着“轮盘赌”进行，枪中无子弹的概率是如何变化的？具体地，无子弹的初始概率为 $\frac{1}{2}$。选择至少两个概率模型（必要时可以改变两轮之间的规则），分析第 $i \geq 1$ 枪后无子弹的概率。

§0.7 拓展阅读

积分、期望、蒙特卡洛仿真

我们讨论非负函数或者非负随机变量。在此前提下，分析一些概念的几何意义，有助于直观理解。

一个函数 $y=f(x)$ 在一个给定区间 $[a,b]$ 上的定积分，即是这个曲线下方的面积。



从定义上讲，可以分成四步来描述这个积分过程。

第一步，把区间 $[a,b]$ 分成很多小区间，每个区间的长度记为 Δx；

第二步，在每个区间内取一个点，计算每一个区间对应“梯形”的近似面积 $f(x)\Delta x$；

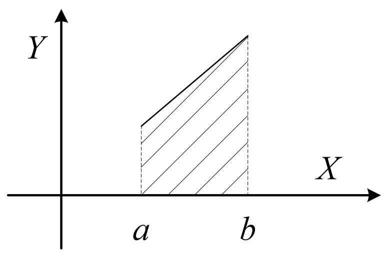
第三步，对这些面积求和；

第四步，当区间越分越细时，上述和的极限是积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

一个非负随机变量 X 的数学期望 $\mathbf{E}(X)$ 是概率加权和。对于离散型随机变量而言，$\mathbf{E}(X)=\sum xP(x)$；对于连续型随机变量而言，$\mathbf{E}(X)=\int xf(x)\mathrm{d}x$。这里的 $P(x)$ 是概率质量函数，$f(x)$ 是概率密度函数。对于一般的随机变量 X，其累积分布函数记作 $F_X(x)$，则数学期望定义为

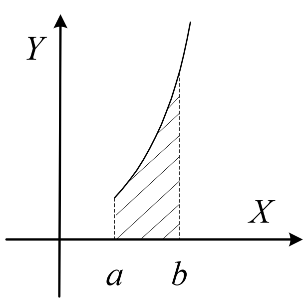
$$\mathbf{E}(X)=\int x\mathrm{d}F_X(x).$$

这个形式是黎曼-斯蒂尔杰斯（Riemann–Stieltjes）积分，与常见的黎曼积分相比，其定义也可以描述为四个步骤，但梯形的面积近似用 $f(x)\cdot\Delta F_X(x)$ 来取代，也就是说，横坐标的“长度”不是线性的，而是由 $F_X(x)$ 来定义。这样，我们可以认为 $\mathbf{E}(X)$ 是如下阴影部分的“面积”，其中 a,b 分别是 X 的最小值与最大值。



再次强调，这部分面积的计算是按照 $F_X(x)$ 的尺度计算的。

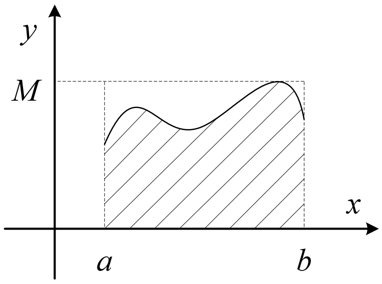
设 $Y=X^2$，则 $\mathbf{E}(Y)$ 对应如下阴影部分的面积。



一个事件 A 的概率记作 $P(A)$，其可以表示成一个数学期望 $\mathbf{E}(I_A)$，其中 I_A 表示 A 的示性函数。当一个样本点 $\omega \in A$ 时，$I_A(\omega) = 1$；否则 $I_A(\omega) = 0$。由于 $I_A(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的函数，所以，当样本空间是多维时，$I_A(\omega)$ 的图示就不方便了，这也表明 $I_A(\omega)$ 更具一般性。

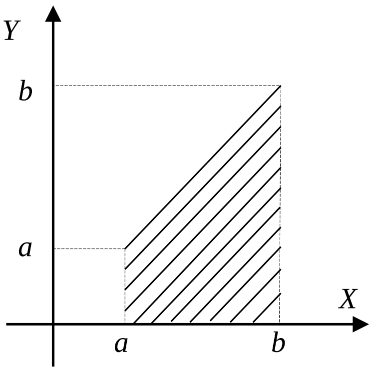
蒙特卡洛仿真可以很方便地估算 $P(A)$ 的值。基本方法是，产生大量的样本点 ω，统计 $\omega \in A$ 发生的频率即可。蒙特卡洛仿真可以估算 $P(A)$，而 $P(A)$ 是示性函数的积分，因而，蒙特卡洛仿真也可以用来计算积分。

第一种情况，常规积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的仿真方法。



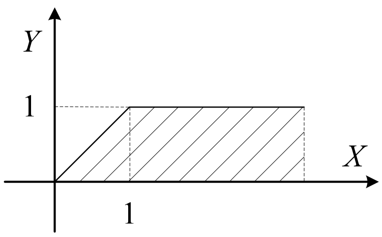
产生 $[a,b] \times [0,M]$ 区域中的均匀分布，统计落在阴影部分的频率，用该频率乘以矩形部分面积 $M(a-b)$ 来估计积分值。

第二种情况，$\mathbf{E}(X) = \int_a^b x\mathrm{d}F_X$。



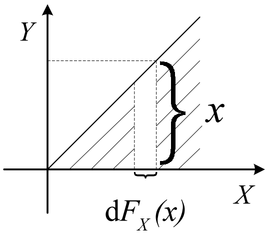
产生 X 的样本，同时产生 $[a,b]$ 之间的均匀分布 Y，统计 (X,Y) 落在阴影部分的频率。此时，矩形“面积”为 b，因为矩形在 X 方向上的“长度”是用 F_X 来计算的，长度为 1。再用统计出的频率乘以矩形部分面积 b 来估计积分值。

再看一个例子。设 X 是非负随机变量，说明 $\mathbf{E}(\min(1,X)) = \Pr\{X \geq U\}$，其中 U 与 X 相互独立，且服从 $[0,1]$ 区间上的均匀分布。我们可以看出，$Y = \min(1,X)$ 的图形如下，

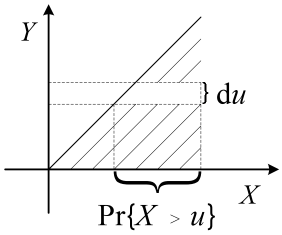


因此，$\mathbf{E}(Y)$ 即是上图阴影部分的面积，这个面积的计算可以归为产生 (X,U)，统计频率即可，其意义就是 $\Pr\{X \geq U\}$。

最后，我们再来解释一下非负随机变量的一个重要公式 $\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} F_X^{\mathrm{c}}(x)\mathrm{d}x$，即 X 的均值等于其累积分布补函数的积分。我们已经知道，$\mathbf{E}(X)$ 是如下阴影部分的概率。



方法一



方法二

阴影部分的概率有两种计算方法。

一是“先纵后横”，给定 x，其对应横坐标“长度”是 $\mathrm{d}F_X(x)$，高度是 x。因而纵向小矩形面积是 $x\mathrm{d}F_X(x)$，横向累积即期望 $\mathbf{E}(X) = \int x\mathrm{d}F_X$。

二是“先横后纵”，给定 u ，这个 u 对应的高度是 $\mathrm{d}u$，宽度是 $\Pr\{X > u\}$，所以 $\mathbf{E}(X) = \int \Pr\{X > u\}\mathrm{d}u$。

第 1 章

独立同分布随机变量序列

§1.1 基本概念

简言之，一个随机过程可以看作是样本空间到实变量函数空间的一个映射，即对于一个试验结果 ω，有一个函数 $X(t, \omega)$ 为样本函数或者样本路径；而给定 t，$X(t, \omega)$ 是随机变量，如图1.1示例。

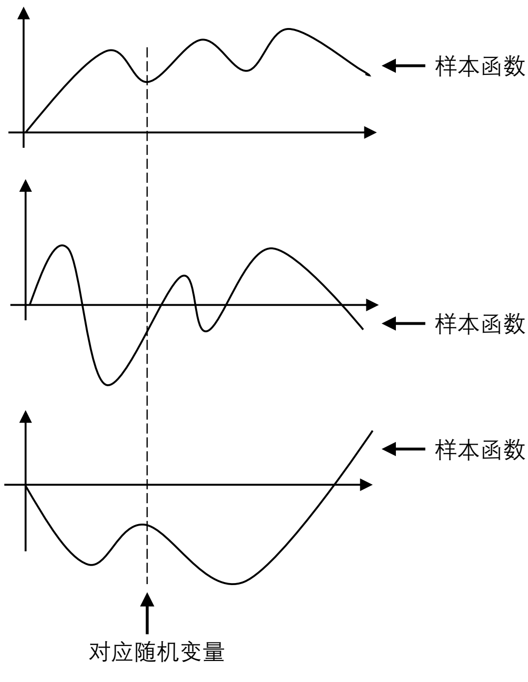


图 1.1: 一个随机过程

横向看是样本函数，随时间变化过程。纵向看是随机变量，是总体表现。

随机过程大致可分为时间离散、时间连续两类，而每一类又可以根据性质进一步细分。刻画一个随机过程，原则上要给出任意时刻对应的联合分布，即，对于任意给定的 n 个时刻，$-\infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < +\infty$，我们能描述随机向量 $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ 的联合分布律。这对于一般随机过程是不可行的。

我们这章考虑如下随机过程，称之为独立同分布（i.i.d.，independently identically distributed）随机变量序列。

（1）时间是离散的，即 $X(t)$ 中的 t 仅取正整数值 (有时取非负整数值)，可以记为 X_1，X_2，$\ldots$，X_n，$\ldots$

（2）任意 n 个时刻，$t_1 < t_2 < \ldots < t_n$，

$$F_{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n}(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x_j),$$

即满足独立性。

（3）任意 n，有 $F_{X_n}(x) = F_{X_1}(x)$，$x \in \mathbb{R}$，即同分布。

【例题 1.1】 设 X_1，X_2，...，X_n，... 是独立同分布 (i.i.d.) 连续随机变量，密度函数是 $f_X(x)$。对于 $n \geq 2$，若 $X_n > X_i$ 对于所有 $i < n$ 成立，称 X_n 是记录。求：

（1）X_2 是记录的概率；

（2）X_n 是记录的概率；

（3）前 m 次试验中平均多少次记录；

（4）N_1 是第一次记录产生的时刻，问 $P\{N_1 > n\}$，$n \geq 2$。

（5）证明 $\mathbf{E}N_1 = \infty$。

§1.2 随机变量的极限

设 A_1，A_2，$\ldots$，A_n，$\ldots$ 是事件序列，我们可以考虑如下概率极限。

1. 当 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$，即 A_n，$n \geq 1$ 是不减事件列时，则

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \lim_{n\to\infty} P\{A_n\}。$$

上述右端的极限是存在的，因为 $P(A_n)$，$n \geq 1$ 是单调数序且有界。该性质的证明用到可列可加性与减法律，因 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + A_2\backslash A_1 + A_3\backslash A_2 + \ldots$。

2. 由性质 1，我们可以证明当 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$，即 A_n 是不增事件列时，则

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \lim_{n\to\infty} P\{A_n\}。$$

上述两种情形，我们可以定义事件的极限事件。若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$，我们令 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，称之为 A_n，$n \geq 1$ 的极限事件，记为 $A_n \uparrow A$。若 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$，我们令 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，称之为 A_n，$n \geq 1$ 的极限事件，记为 $A_n \downarrow A$。上述两种特殊情况下的极限事件相应于数列极限中的单调数列的极限。类比于数列，我们可以定义事件序列的上极限事件与下极限事件。

- 上极限事件 $\limsup A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$。
- 下极限事件 $\liminf A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$。

上极限事件 $\limsup A_n$ 表示的是有无穷多 A_n 发生的事件，而下极限事件 $\liminf A_n$ 表示的是只有有限个 A_n 不发生的事件。上极限事件 $\limsup A_n$ 又记作 A_n，i.o.，我们有以下引理。

【引理 1.2】 Borel-Cantelli 引理: 设 A_1，A_2，$\ldots$，A_n，$\ldots$ 是事件序列，若 $\sum_i P(A_i) < \infty$，则 $P(A_i,\ \text{i.o.}) = 0$。若 $\sum_i P(A_i) = \infty$ 且 A_1，A_2，$\ldots$，A_n，$\ldots$ 独立，则 $P(A_i,\ \text{i.o.}) = 1$。

下面回顾随机变量的四种收敛类型。

【定义 1.3】 如果对 F 的任意连续点 $x \in \mathbb{R}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

称随机变量序列 X_1，X_2，... 依分布收敛 (convergence in distribution) 于随机变量 X，其中 F_n 和 F 分别是随机变量 X_n 和 X 的累积分布函数。

【定义 1.4】 如果对任意 $\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0.$$

称随机变量序列 X_n 依概率收敛 (convergence in probability) 于随机变量 X。

【定义 1.5】 称数列随机变量序列 X_n 几乎处处收敛或具有概率 1 强收敛于 X，意味着

$$\Pr\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1。$$

【定义 1.6】 如果

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[(X_n - X)^2] = 0,$$

其中 **E** 表示期望运算符，称数列随机变量序列 X_n 均方收敛收敛于 X。

举例说明**依概率收敛但不以概率 1 收敛**：

【例题 1.7】 考虑一个随机试验，其输出结果 ω 均匀分布于 $[0, 1)$ 区间。定义如下无穷二叉树：

（1）根节点是 $[0, 1)$；

（2）若区间 $[a, b)$ 是一个节点，则其左儿子是 $[a, \frac{a+b}{2})$，右儿子是 $[\frac{a+b}{2}, b)$。

把树中的所有节点对应的区间依顺序排列，离根近的层排在前面，同一层的从左到右排。这些区间依次编号为 $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$，定义 X_n 是所对应区间的示性函数。如：

$$X_0(\omega) = 1,\ \omega \in [0, 1);$$

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}); \\ 0 & , \quad \omega \in [\frac{1}{2}, 1); \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}); \\ 1 & , \quad \omega \in [\frac{1}{2}, 1)。 \end{cases}$$

这些收敛性的关系如图1.2所示。

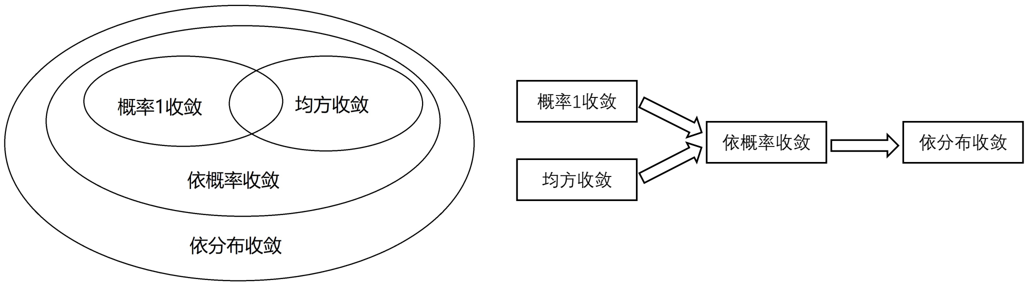


图 1.2: 收敛性关系图

§1.3 大数定律及中心极限定理

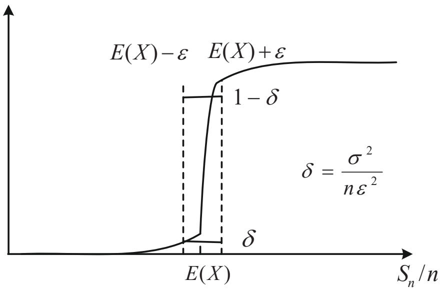
在试验不变的条件下，重复试验多次，随机事件的频率接近于它的概率，这就是大数定律。定理叙述如下。

【定理 1.8】 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 是独立同分布的，且具有数学期望 $\mathbf{E}(X) = \mu$ 和方差 σ^2，则对于任意 $\varepsilon > 0$，序列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 满足（Chebyshev 不等式）：

$$P(|S_n/n - \mu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \sigma^2/n\varepsilon^2。$$

这个定理表明：

1. 统计平均在概率意义上趋于集合平均，即 $S_n/n \xrightarrow{P} \mathbf{E}(X)$；
2. 随着 n 的增大，S_n/n 的分布函数趋于一个阶跃函数，阶跃点在 $\mathbf{E}(X)$。



【定理 1.9】 设 X_1，X_2，...，X_n，... 是独立同分布的，且具有数学期望 $\mathbf{E}(X) = \mu$，对于任意 $\varepsilon > 0$，$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 则满足

$$P\{\lim_{n\to\infty} |S_n/n - \mu| \geqslant \varepsilon\} = 0。$$

【例题 1.10】 设 X 是指数分布，$P\{X > x\} = \exp(-x)$。取一样本 x，放入信封 A；再以 $1/2$ 的概率计算 $y = 2x$ 或 $y = x/2$，把 y 放入信封 B。请问，选 A 还是选 B 能得到更大的数。
A 与 B 信封若混淆了。请问，选定一个之后，要不要换？

在客观实际中，一些现象受到许多相互独立的随机因素的综合影响，如果每个因素所产生的作用都很微小时，总的影响可以看作是服从正态分布的。这时，我们可以应用中心极限定理。

【定理 1.11】 设 X_1，X_2，...，X_n 是独立同分布的随机变量，具有数学期望 $\mathbf{E}(X)$ 和方差 σ^2，则序列 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 满足：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mathbf{E}(X)}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant y\right) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx。$$

用语言描述即，$\frac{S_n - n\mathbf{E}(X)}{\sqrt{n}\sigma}$ 的分布函数趋于正态分布函数（注意，前者可能没有密度函数）。

§1.4 课后作业

1. 记 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 是二元域，$\mathbb{F}_2^n$ 是其上的线性空间。一个二元向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_2^n$ 的汉明重量 $W_H(\boldsymbol{v})$ 定义为 $\boldsymbol{v}$ 中 1 的个数，设 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\cdots \boldsymbol{v}_n$，$\cdots$ 是独立同分布的二元随机列向量，汉明重量是 1，给定 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{F}_2^n$ 是一个行向量。讨论 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_2$，$\cdots \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_n$，$\cdots$ 的分布律，其中 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ 是行向量与列向量的积，其运算在 $\mathbb{F}_2$ 中进行。

2. 设 X_1，X_2，$\ldots$，X_n，$\ldots$ 是 Bernoulli 过程，$P_X(1) = \frac{1}{4}$，$P_X(0) = \frac{3}{4}$。

（1）求 $\mathbf{E}X$ 和 $\mathbf{D}X$。

（2）令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$，$Y_n = \frac{S_n - n\mathbf{E}X}{n}$，$Z_n = \frac{S_n - n\mathbf{E}X}{\sqrt{n\mathbf{D}X}}$。取 $n = 1$，2，4，8，16，32，分别画出 S_n，Y_n，Z_n 的累积分布函数随 n 变化的趋势，体会大数定律与中心极限定理的内涵。

3. 假设 $\{X; i \geq 1\}$ 是独立同分布的二元随机变量。设 $PX_i = 1 = \delta$，$PX_i = 0 = 1 - \delta$。令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$。让 m 是一个任意但固定的正整数。计算以下内容并解释

(1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i:n\delta - m \leq i \leq n\delta + m} \Pr\{S_n = i\}$；

(2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i:0 \leq i \leq n\delta + m} \Pr\{S_n = i\}$；

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i:n(\delta - 1/m) \leq i \leq n(\delta + 1/m)} \Pr\{S_n = i\}$。

§1.5 拓展阅读

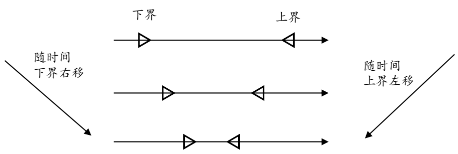
数列的上下极限与集合列的上下极限

设 a_1，a_2，$\ldots$，a_n，$\ldots$ 是一个数列，A_1，A_2，$\ldots$，A_n，$\ldots$ 是一个集合列，我们对比一下上下极限的定义。

给定 n，我们称 a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，$\ldots$ 为序列 $\{a_i\}$，$i \geq 1$ 的尾部序列。类似地，A_n，A_{n+1}，A_{n+2}，$\ldots$ 为序列 $\{A_i\}$，$i \geq 1$ 的尾部序列。对于数列，我们可以定义其尾部列的上、下确界，即 $m_n = \inf\{a_i，i \geq n\}$，$M_n = \sup\{a_i，i \geq n\}$。显然，$m_n \leq a_i \leq M_n$，$i \geq n$。这是说尾部序列落在了 $[m_n，M_n]$ 之间。有趣的是，m_n 随着 n 增大而递增，M_n 随着 n 增大而递减，这其实是由尾部序列逐渐“变短”而得到的结论。因此，m_n，$n \geq 1$ 与 M_n，$n \geq 1$ 均是有极限的，分别记作上极限 $\overline{\lim} x_n$ 和下极限 $\underline{\lim} x_n$。

类比的，对于尾部集合序列，其“下确界”$L_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$，“上确界”$U_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$。这里“上”与“下”是对集合包含所定义的序而言的。下确界是指“最大”的下界，即 $L_n \subseteq A_k$，$k \geq n$，且若有 $B \subseteq A_k$，$k \geq n$，则 $B \subseteq L_n$。而上确界是指“最小”的上界，即 $U_n \supseteq A_k$，$k \geq n$，且若有 $B \supseteq A_k$，$k \geq n$，则 $B \supseteq U_n$。可以看到 L_n 是递增的，U_n 是递减的。所有 A_k，$k \geq n$ 都满足 $L_n \subseteq A_k \subseteq U_n$。$L_n$ 的极限即 A_n，$n \geq 1$ 的下极限，记作 $\underline{\lim} A_n$，U_n 的极限即 A_n，$n \geq 1$ 的上极限，记作 $\overline{\lim} A_n$。

不论是数列还是集合（事件）列，我们可以用下图示意尾部列的范围。



极限存在当且仅当上下极限相等。

第 2 章

泊松过程

§2.1 伯努利过程

伯努利（Bernoulli）试验是独立重复地做一个试验，观察某特定事件 A 是否发生。A 发生（成功）时，记 1，否则记 0。这个试验结果序列称之为 Bernoulli 过程，其描述涉及以下几个概念：

1. 两点分布（计数过程）：$P\{Z=1\}=p$（成功概率），$P\{Z=0\}=1-p$。独立同分布（IID）的 0，1 序列构成 Bernoulli 过程；

2. 二项分布：$(0,\ n]$ 时间区间内，成功的次数服从二项分布，其分布律是 $P\{N(n)=m\}=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$，$0\le m\le n$；

3. 几何分布（间隔过程）：任给一个时刻，从该时刻起到下次成功发生需要等待的时间服从几何分布，其分布律是 $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$，$k\ge 1$；

4. 帕斯卡分布: 任给一个时刻，从该时刻起到第 r 次成功发生需要等待的时间服从帕斯卡分布，这个是 r 个几何分布的和。

考虑以下问题：

1. 讨论以上各个随机变量的分布律、均值、方差、矩生成函数等；

2. 说明 Bernoulli 分布的无记忆性；

3. 给定计数条件下，成功发生的位置的分布律；

4. Bernoulli 过程的极限过程，即两次试验间隔不断缩小，单位时间内成功次数不变的情况下，Bernoulli 过程的趋势。

思考题：

1. Bernoulli 过程的样本空间是什么？

2. Bernoulli 过程的二叉树表示。

§2.2
泊松过程

2.2.1 泊松过程的定义

【定义 2.1】 设 A 是某概率试验模型的一个事件，我们称 A 发生一次为一次到达。一个到达过程可以从以下三个角度进行描述。

- 到达时刻随机变量序列 S_n，$n \geq 1$，满足 $0 < S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \ldots$，其中 S_n 表示事件发生的时刻。
- 到达间隔时间序列 X_n，$n \geq 1$，满足 $X_1 = S_1$ 和 $X_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$，其中 X_n 表示第 n 次事件与第 $n-1$ 次事件之间的间隔。不难看出，S_n 是 n 个间隔时间变量的和，即 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$。
- 时间段 $(0，t]$ 内发生事件的次数 $N(t)$，$t \geq 0$，我们称 $N(t)$ 是计数过程。

从以上定义我们看到，S_n 是严格递增的序列，意味着同一时刻事件至多发生一次，间隔时间变量 X_n 是严格大于 0 的随机变量。一个简单而重要的事实是事件 $\{N(t) < n\}$ 等价于 $\{S_n > t\}$，或者说，事件 $\{N(t) \geq n\}$ 等价于 $\{S_n \leq t\}$。我们通常用计数过程的图示意到达过程。不难看出，一个到达过程的样本函数 $N(t)$，$t \geq 0$ 是一个不减的阶梯宽随机，阶梯高为 1 的函数。下图给出一个示例。

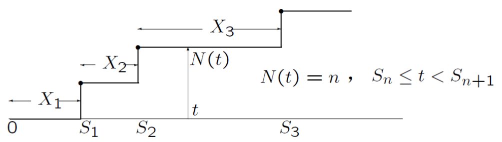


图 2.1: 到达过程示意图

【定义 2.2】 一个更新过程是一个到达过程，满足到达间隔变量序列 X_n，$n \geq 1$ 是独立同分布的（i.i.d.）。

【例题 2.3】 考虑一个独立同分布的随机变量 $X_1, X_2, \ldots$，其中第 i 个到达间隔 X_i 是由抛硬币的结果决定的。对于 $x \in \{1，2\}$，有 $\Pr\{X_i = x\} = \frac{1}{2}$。由 X_n，$n \geq 1$ 定义的到达过程是更新过程。

【例题 2.4】 考虑箱子里最初有 1 个白球，1 个黑球。每次取出一个，然后放回，同时添 1 个同色球。设单位时间做一次试验，记摸出白球为一到达事件。讨论该过程是否是更新过程。

【定义 2.5】 一个泊松过程是一个更新过程，其中到达间隔 X_i 具有指数分布

$$\Pr\{X > x\} = e^{-\lambda x}，\ x \geqslant 0,$$

其中 λ 是一个固定的参数称为速率。

可以看出，到达间隔变量的 CDF 是 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, 而 PDF 是

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}，\ x \geqslant 0。$$

进而知 $\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda}$。由此我们称 λ 是到达速率。泊松过程、更新过程与到达过程的关系如图4.1.1所示

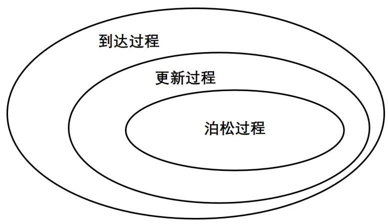


图 2.2: 更新过程，到达过程以及泊松过程三者的关系

2.2.2 泊松过程的性质

泊松过程具有无记忆性，平稳增量性与独立增量性，详述如下。

• 无记忆性

【定义 2.6】 一个正的随机变量 X 是无记忆的，是指对于所有 $s>0$ 和 $t>0$ 满足

$$\Pr\{X>s+t\}=\Pr\{X>s\}\Pr\{X>t\}。$$

从上述定义，我们得到

$$\Pr\{X>s+t|X>s\}=\frac{\Pr\{X>s+t\}}{X>s}=\Pr\{X>t\}。$$

若 X 是到达过程的间隔时间，上式说明在已经等待 s 单位时间，再等待 t 单位时间的概率与先前等的时长 s 独立的。换句话讲，系统把已经等待的时长忘记了。

【定理 2.7】 泊松过程是无记忆的，即其间隔时间 X 满足 $\Pr\{X>s+t\}=\Pr\{X>s\}\Pr\{X>t\}$。

证明. 泊松过程的到达间隔是指数分布，即

$$\begin{aligned}\Pr\{X>s+t\}&=e^{-\lambda(s+t)}\\&=e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}\\&=\Pr\{X>s\}\Pr\{X>t\}\end{aligned}$$

□

【例题 2.8】 设一公交车早上 6 : 00 ∼ 7 : 00 间随机发出第一班，之后每隔 X 分钟发一列车。已知 $\mathrm{E}X=10$。现有小明已等待 5 分钟，讨论下述情况下，小明还要等待多长时间才能上车？

（1）$X\sim U(8，12)$，即 X 是区间 $(8，12)$ 的均与分布；（每 10 分钟一班，前后不差 2 分钟）

（2）X 服从指数分布；（参数 λ 是多少）

（3）若小明已等了 12 分钟，再次讨论上述两个问题。

泊松过程的无记忆性更一般的表达为：

【定理 2.9】 给定一个泊松过程。从任一时刻往后看，仍是一个泊松过程，且与原泊松过程参数一样。

• 平稳增量性

【定义 2.10】 计数过程 $\{N(t):t>0\}$ 满足平稳增量性，若对于任意的 $t'>t>0$，有 $N(t')-N(t)$ 的累积分布函数与 $N(t'-t)$ 相同。

记

$$\tilde{N}(t，t')=N(t')-N(t)。$$

平稳增量性意味着 $\tilde{N}(t，t')$ 和 $\tilde{N}(t-t')$ 有相同的分布。因此，一个时间间隔内到达的数量的分布取决于时间间隔的大小，而不取决于起始点。

• 独立增量性

【定义 2.11】 计数过程 $\{N(t):t>0\}$ 满足独立增量性，若对于任意 k 个时刻 $0<t_1<\cdots<t_k$，k 个随机变量 $N(t_1),\widetilde{N}(t_1,t_2),\ldots,\widetilde{N}(t_{k-1},t_k)$ 是统计独立的。

这意味着在一组不重叠的时间间隔内到达的数量是独立的随机变量。

【定理 2.12】 泊松过程具有平稳增量性和独立增量性。

2.2.3 泊松过程的分布律

我们知道，要描述一个随机过程，需要给出任意 n 个时刻所对应的随机变量的联合分布律。这对于一般随机过程而言，并不是一件简单的事情。我们知道，一个到达过程有三种等价描述，因而我们分别确定泊松过程的三个描述所对应的联合分布律。

• 间隔时间随机变量

这是最简单的情形，因为从定义，泊松过程的到达间隔分布是独立同分布的指数分布，只需要知道其一维分布

$$\Pr\{X > x\} = e^{-\lambda x}，\ x \geq 0,$$

这里 λ 是泊松过程的唯一参数。我们已知其密度函数是 $\lambda e^{\lambda x}$，$x \geq 0$。

• 到达时刻随机变量

给定 $n \geq 1$，S_1，S_2，...，S_n 的联合密度函数

$$\begin{aligned} f_{S_1,\ \dots,\ S_n}(s_1,\ \dots,\ s_n) &= \lambda e^{-\lambda s_1} \cdot \lambda e^{-\lambda(s_2-s_1)} \cdot \dots \cdot \lambda e^{-\lambda(s_n-s_{n-1})} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda s_n},\ 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n。\end{aligned}$$

由 S_1，S_2，...，S_n 的联合密度函数，可以得到 S_n 的边缘密度函数，

$$f_{S_n}(s_n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda s_n} s_n^{n-1}}{(n-1)!},\ s_n \geq 0。$$

这里，随机变量 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 是 n 个指数分布的和，称之为 Erlang 分布，其均值 $\mathbf{E}[S_n] = \frac{n}{\lambda}$。

• 计数过程

由于泊松过程的计数过程其独立增量性与平稳增量性，因而求任意 $t > 0$ 的 $N(t)$ 的分布律即可。可以证明

$$P_{N(t)}(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},\ n \geq 0。$$

事实上，事件 $\{N(t) = n\}$ 等价于 $\{S_n < \tau < t，X_{n+1} > t - \tau\}$ 对 $0 \leq \tau \leq t$ 求和。由全概率公式

$$P_{N(t)}(n) = \int_0^t \frac{\lambda^n e^{-\lambda\tau} \tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(t-\tau)} \mathrm{d}\tau$$

可得。

2.2.4 泊松过程的等价定义

【定义 2.13】 如果一个到达过程具有平稳独立增量性，且对于给定的 λ 和所有的 $t > 0$，$N(t)$ 的概率质量函数为泊松分布

$$P_{N(t)}(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

那么该过程就是泊松过程。

【定义 2.14】 如果一个到达过程具有平稳独立增量性，且满足，对于充分小的 $\delta > 0$,

$$P\{N(\delta) = n\} = \begin{cases} 1 - \lambda\delta + o(\delta) & ,\ n = 0, \\ \lambda\delta + o(\delta) & ,\ n = 1, \\ o(\delta) & ,\ n \geqslant 2, \end{cases}$$

那么该过程就是泊松过程。

2.2.5 泊松分布的合并与分裂

【定义 2.15】 两个计数过程 $\{N_1(t):t>0\}$ 和 $\{N_2(t):t>0\}$ 是独立的是指，对于所有的 t_1，...，t_n，随机变量 $N_1(t_1)$，...，$N_1(t_n)$ 和 $N_2(t_1)$，...，$N_2(t_n)$ 是相互独立的。

【定理 2.16】 设 $\{N_1(t):t>0\}$ 和 $\{N_2(t):t>0\}$ 是独立的速率分别为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程，令 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$，$t>0$。则 $\{N(t):t>0\}$ 是一个速率为 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程。

证明. 方法一：利用定义2.5。

对于和过程的第一个到达间隔，它是两个独立过程的第一个到达间隔 X_{11} 和 X_{21} 中的最小值。

$$\begin{aligned}P\{X_1>t\}&=P\{X_{11}>t\}P\{X_{21}>t\}\\&=e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}\\&=e^{-\lambda t}。\end{aligned}$$

思考题：由此，我们可以进一步证明到达间隔变量是独立同分布的的指数分布吗？提示：从任一时刻往后看，泊松过程仍是同参数的泊松过程。

注: 当许多独立计数过程（即使不是泊松过程）相加时，如果各个过程的速率相对于总和较小，则总和过程往往趋于近似泊松分布。

方法二：利用定义2.13。

显然，$N(t)$ 满足平稳独立增量性。事实上，由离散卷积（全概率公式）得，我们可以通过离散卷积推导出它：

$$\begin{aligned}P_{N(t)}(n)&=\sum_{i=0}^{n}P_{N_1(t)}(i)P_{N_2(t)}(n-i)\\&=\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}}{i!(n-i)!}t^n e^{-\lambda_1 t-\lambda_2 t}\\&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}}{n!}t^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\\&=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}。\end{aligned}$$

方法三：利用定义2.14。

显然，$N(t)$ 具有平稳和独立增量的特性。

对于充分小的 $\delta>0$,

$$\begin{aligned}P_{N(\delta)}(0)&=P_{N_1(\delta)}(0)P_{N_2(\delta)}(0)\\&=[1-\delta\lambda_1+o(\delta)][1-\delta\lambda_2-o(\delta)]\\&=1-\delta(\lambda_1+\lambda_2)+o(\delta)。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{N(\delta)}(1)&=P_{N_1(\delta)}(1)P_{N_2(\delta)}(0)+P_{N_1(\delta)}(0)P_{N_2(\delta)}(1)\\&=[\delta\lambda_1+o(\delta)][1-\delta\lambda_2+o(\delta)]+[1-\delta\lambda_1+o(\delta)][\delta\lambda_2+o(\delta)]\\&=\delta(\lambda_1+\lambda_2)+o(\delta)。\end{aligned}$$

$P_{N(\delta)}(2)=o(\delta)$ 显然成立。这表明 $N(\delta)$ 的概率满足泊松分布的性质，其速率为 $\lambda_1+\lambda_2$。因此，$\{N(t):t>0\}$ 是一个速率为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程。 □

两个独立的泊松过程可以合并为一个泊松分布，到达速率相应增大。反过来，一个泊松过程可以分裂为两个独立的泊松过程，到达速率相应降低。具体地，考虑一个速率为 λ 的泊松过程，对于每次到达，我们独立于该过程掷一枚硬币，若正面朝上，则将该次到达计入 $\{N_1(t):t>0\}$，否则计入 $\{N_2(t):t>0\}$。我们有如下定理。

【定理 2.17】 在上述设置下，计数过程 $\{N_1(t):t>0\}$，$\{N_2(t):t>0\}$ 是两个独立的泊松过程。如果硬币正面朝上的概率是 p, 则到达速率分别是 $\lambda_1=\lambda p$ 和 $\lambda_2=\lambda(1-p)$。

证明. 计算在给定原始过程到达数量 $N(t)=m+k$ 的条件下，$N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的联合概率质量函数（PMF），得到

$$P\{N_1(t)=m,N_2(t)=k|N(t)=m+k\}=\frac{(m+k)!}{m!k!}p^m(1-p)^k。$$

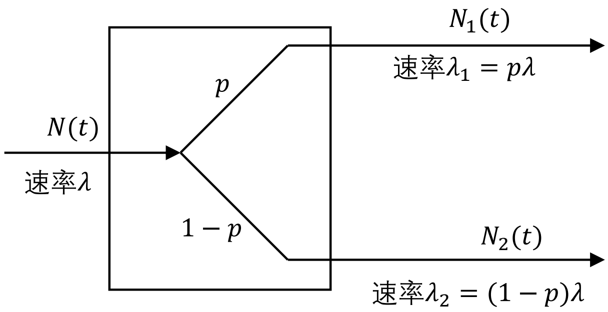


图 2.3: 泊松过程的分裂

计算任意时间 t 的 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的联合概率质量函数（PMF），得到

$$\begin{aligned}&P\{N_1(t)=m,N_2(t)=k\}=P\{N_1(t)=m,N_2(t)=k,N(t)=m+k\}\\=&P\{N_1(t)=m,N_2(t)=k|N(t)=m+k\}P\{N(t)=m+k\}\\=&\frac{(m+k)!}{m!k!}p^m(1-p)^k\frac{(\lambda t)^{m+k}\mathrm{e}^{-\lambda t}}{(m+k)!}=P\{N_1(t)=m\}P\{N_2(t)=k\}。\end{aligned}$$

这表明 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是相互独立的。

要证明这些过程是独立的，我们需要证明对于任意 $k>1$ 和任意一组时间 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k$，集合 $\{N_1(t_i):1\leqslant i\leqslant k\}$ 和 $\{N_2(t_j):1\leqslant j\leqslant k\}$ 是相互独立的。

等价地，我们要证明集合 $\{\widetilde{N}_1(t_{i-1},t_i):1\leqslant i\leqslant k\}$ 和 $\{\widetilde{N}_2(t_{j-1},t_j):1\leqslant j\leqslant k\}$ 是独立的。

- 对于 $i=j$，$N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 相互独立的论证表明了它们的独立性。
- 对于 $i\neq j$，这种独立性来自于 $\{N(t):t>0\}$ 的独立增量特性。

□

注：任意两个独立的泊松过程可以视为由一个单独的泊松过程分裂而成。

【例题 2.18】 已知速率为 λ 和 μ 的独立泊松过程 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$，求 $\Pr\{S_{1k}<S_{2j}\}$ 的概率，其中 S_{1k} 是第一个过程的第 k 个到达的时刻，S_{2j} 是第二个过程的第 j 个到达的时刻。

这个问题可以通过引入一个组合过程来重新表述：在组合过程的前 $k+j-1$ 次到达中，求至少有 k 次到达被分配给第一个过程的概率。

$$P\{S_{1k}<S_{2j}\}=\sum_{i=k}^{k+j-1}\binom{k+j-1}{i}p^i(1-p)^{k+j-1-i},$$

其中 $p=\lambda/(\lambda+\mu)$ 表示将到达分配给第一个过程的概率。

§2.3 条件到达密度函数和顺序统计量

设 $N(t)$ 是一个泊松过程。我们考虑给定 $N(t)$ 条件下，到达时刻在 $(0，t]$ 内的分布情况。首先，考虑 $N(t)=1$ 的情况。

图 2.4: $N(t)=1$

$$
\begin{aligned}
f_{S_1|N(t)}(s_1|1) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{P_{N(s_1)}(0)P_{\widetilde{N}(s_1,s_1+\delta)}(1)P_{\widetilde{N}(s_1+\delta,t)}(0)}{\delta P_{N(t)}(1)}\\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{[\mathrm{e}^{-\lambda s_1}][\lambda\delta \mathrm{e}^{-\lambda\delta}][\mathrm{e}^{-\lambda(t-s_1-\delta)}]}{\delta\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \frac{1}{t}。
\end{aligned}
$$

在上述推导中，分子是三项的乘积，分别对应在 $(0，s_1)$ 内没有到达，在 $[s_1，s_1+\delta)$ 内有一个到达，在 $[s_1+\delta，t]$ 没有到达三个事件；而分母中的 δ 是按照密度函数的定义而趋于 0 的。注意到，上述条件密度函数不依赖于 s_1, 也不依赖于泊松过程的到达速率，对应 $(0，t]$ 上的均匀分布。

考虑 $N(t)=2$ 的情况.

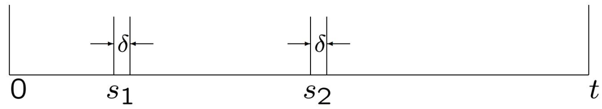


图 2.5: $N(t)=2$

$$
\begin{aligned}
f_{S_1,S_2|N(t)}(s_1,s_2|2) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{[\mathrm{e}^{-\lambda s_1}][\lambda\delta\mathrm{e}^{-\lambda\delta}][\mathrm{e}^{-\lambda(s_2-s_1-\delta)}][\lambda\delta\mathrm{e}^{-\lambda\delta}][\mathrm{e}^{-\lambda(t-s_2-\delta)}]}{\delta^2 P_{N(t)}(2)}\\
&= \frac{2}{t^2}。
\end{aligned}
$$

对于 $0<s_1<s_2<t$。同样地，这个条件分布在限定区域（面积是 $t^2/2$）是均匀的。这并不依赖于 s_1、s_2 或 λ，也就是说，在给定的 s_1 和 s_2 区域内服从均匀分布。更一般地，我们有如下定理。

【定理 2.19】 对于给定的 $N(t)=n, S^{(n)}$ 的条件概率密度函数 $f_{S^{(n)}|N(t)}(s^{(n)}|n)$ 在区域 $0<s_1<\cdots<s_n<t$ 上是恒定的，并且其取值为

$$
f_{S^{(n)}|N(t)}(s^{(n)}|n) = \frac{n!}{t^n}。
$$

这是在 $0<s_1<\cdots<s_n<t$ 区间上“均匀”的。具体而言，它是一个 n 维均匀概率密度，它的概率密度值在约束区域 $0<s_1<\cdots<s_n<t$（体积 $t^n/n!$）中恒定。

上述条件分布与均匀随机变量的顺序统计量是同分布的。具体地，设 $U_1，\ldots，U_n$ 是 n 个独立同分布的随机变量，每个随机变量均匀分布在 $(0，t]$ 区间内，记 $U^n=(U_1，U2，\ldots，U_n)$。令 $S_1，\ldots，S_n$ 为 U^n 的顺序统计量，即

$$
S_1=\min\{U_1,\ldots,U_n\},\ldots,S_k=\text{第}k\text{个最小的},\ldots
$$

在体积为 t^n 的区域中，U^n 的密度不为零的区域可以划分为 $n!$ 个区域，其中一个是 $u_1<u_2<\cdots<u_n$，其余的区域表示 $u_1，\ldots，u_n$ 的其他排列方式。根据对称性，每个区域的体积相同，因此每个区域的体积都是 $\frac{t^n}{n!}$。所以，我们可以得到 U^n 的密度函数在其支撑集上是 $\frac{1}{t^n}$，而 S^n 的密度函数在其支撑集上是 $\frac{n!}{t^n}$。换句话讲，U^n 与 S^n 均是均匀分布，只是支撑集不同而已。由 S^n 的均匀分布及对称性，很容易可以得到 $\mathbf{E}(S_i|N(t)=n)=\frac{it}{(n+1)}，1\le i\le n$。这是因为，$S^n$ 把区间 $(0，t]$ 分成了 $n+1$ 个子区间，没有哪个区间会有更长的期望值。进一步，这 $n+1$ 个子区间不管是从左向右向前看，还是从右向左向后看，统计规律是对称的。

【例题 2.20】 假设某零件受到外来撞击的次数服从参数为 λ 的泊松过程。已知该零件受到撞击次数超过 k 时就不能正常工作，求该零件的使用寿命 T 的分布密度函数。

【例题 2.21】 甲乙丙丁玩游戏。掷一对均匀的骰子，其点数和记为 X，设所掷次数服从平均每小时 6 次的泊松分布。一次游戏中 $X \mod 4 = 1,2,3,0$ 时，分别对应甲、乙、丙、丁胜。

(1) 计算两小时内，甲胜的次数；

(2) 计算甲、丙在两个小时内共胜的次数；

(3) 若两小时内做了 12 次的游戏，甲胜次数；

(4) 若第一小时内甲胜了三次，问两小时内共玩了多少次的游戏。

【例题 2.22】 设某网店经营 A，B 两种商品。A 商品下单到达是单位时间 4 单，B 商品下单到达是单位时间 2 单，均是泊松过程。求：

(1) 前三个单位时间内收到 3 单的概率；

(2) 已知前三个单位时间内收到 3 单，求至少有一个是 B 订单的概率；

(3) 第 2 个订单是 B 订单的概率；

(4) 第 2 个订单到达时间在第二个单位时间内的概率。

【例题 2.23】 甲乙两人在做投硬币游戏。甲以速率为 $\lambda_1 = 2$ 的泊松过程投一枚不均匀硬币，其正面向上概率为 3/4。乙以速率为 $\lambda_2 = 3$ 的泊松过程投一枚不均匀硬币，其正面向上概率为 2/3。两人投硬币的过程相互独立。求

(1) 甲比乙先投出 1 次正面向上的概率；

(2) 甲第 1 次投出正面向上时，乙已经投出正面向上次数的分布；

(3) 若甲乙两人共投出 5 次正面向上时，游戏结束。求游戏持续时间的期望，以及游戏结束时，两人共投硬币次数的期望。

【例题 2.24】 设 U_1，U_2，U_3，U_4，U_5 是 5 个在 $[0，1]$ 上独立均匀分布的随机变量，X_1，X_2，X_3，X_4，X_5 是 $\{U_i，1 \le i \le 5\}$ 的顺序统计量，即 X_i 为 $\{U_i，1 \le i \le 5\}$ 从小到大排序的第 i 个值，

$$X_1 = \min\{U_1，U_2，U_3，U_4，U_5\}，\ \ldots，\ X_5 = \max\{U_1，U_2，U_3，U_4，U_5\}。$$

计算

(1) $\mathrm{E}[X_5]$；

(2) $\mathrm{E}[X_4|X_5 = 0.8]$；

(3) $\mathrm{E}[X_4|X_5 = x_5], x_5 \in [0,1]$；

(4) $\mathrm{E}[X_4]$。

【例题 2.25】 令 $\mathrm{N} = (N(t)，t \ge 0)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，S_1，S_2，... 表示顾客达到的时刻，求

(1) $E(S_1S_2|N(1) = 2)$；

(2) $E(S_1 + S_2 + \cdots + S_5|N(1) = 5)$。

【例题 2.26】 令 $\mathrm{N} = (N(t)，t \ge 0)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，S_1，S_2，... 表示顾客达到的时刻，令

$$U = \frac{S_1}{S_2}，\ V = \frac{1 - S_3}{1 - S_2}。$$

已知 $N(1) = 3$，求 $(U，V)$ 的联合分布。

§2.4 课后习题

1. 修理一个机器所需要的时间 T 是均值为 1/2(小时) 的指数随机变量。

(a) 问修理时间超过 1/2 小时的概率是多少？

(b) 已知修理持续时间超过 12 小时，问修理时间至少需要 $12\frac{1}{2}$ 小时的概率是多少？

2. 假设你到达一个单服务线的银行，你发现有 5 个人在银行中，一个人在接受服务，其余 4 个人排队等待，你加入到队尾如果服务时间都是速率为 μ 的指数时间，问你在银行的平均停留时间是多少？

3. 令 X 是指数随机变量。不做任何计算说出以下哪一个是正确的，解释你的答案。

(1) $\mathbf{E}[X^2|X > 1] = \mathbf{E}[(X+1)^2]$；

(2) $\mathbf{E}[X^2|X > 1] = \mathbf{E}[X^2] + 1$；

(3) $\mathbf{E}[X^2|X > 1] = (\mathbf{E}[X] + 1)^2$。

4. 假设光临某商店的顾客数服从参数为 4 人每小时的泊松过程。已知商店早上 9:00 开业，求：

(1) 到 9:30 为止恰好一位顾客光临的概率？

(2) 到 11:30 为止总共到达 5 位顾客的概率？

5. 令 $N = (N(t)，t \ge 0)$ 是参数为 2 的泊松过程，求：

(1) $P(N(1) = 2)$

(2) $P(N(1) = 2，N(3) = 6)$

(3) $P(N(1) = 2|N(3) = 6)$

(4) $P(N(3)=6|N(1)=2)$

6. 令 $N=(N(t), t\geq 0)$ 是参数为 2 的泊松过程，求：

(1) $P(N(1)\leq 2)$

(2) $P(N(1)=1, N(2)=3)$

(3) $P(N(1)\geq 2|N(1)\geq 1)$

7. 令 $N=(N(t), t\geq 0)$ 是参数为 2 的泊松过程，求：

(1) $\mathbf{E}N(2)$

(2) $\mathbf{E}N(1)^2$

(3) $\mathbf{E}N(1)N(2)$

(4)$\mathbf{E}N(1)N(2)N(3)$

第 3 章

有限状态马尔可夫链

§3.1 引言

设 $\mathcal{X}$ 是一个有限集，思考如下问题的描述复杂度：

1. 如何刻画 $\mathcal{X}$ 上的一个离散随机变量？
2. 如何刻画 $\mathcal{X}^n$ 上的离散随机向量？
3. 如何刻画 $\mathcal{X}^\infty$ 上的离散随机序列？
4. 如何刻画一个独立随机向量？
5. 如何刻画一个独立同分布的随机向量？

【定义 3.1】 一个马尔科夫链是一个时间取整数值的过程 $\{X_n,\ n \geqslant 0\}$，它的样本值对于每个随机变量 X_n，$n \geqslant 1$ 都属于一个可列集 S，并且只通过最近的随机变量 X_{n-1} 依赖于过去。更具体地说，对于所有正整数 n，和 S 中的所有 i，j，$\ldots$，ℓ，对于所有具有正概率的条件事件 $X_{n-1}=i$，$X_{n-2}=k$，$\ldots$，$X_0=\ell$，有

$$P\{X_n=j|X_{n-1}=i,\ X_{n-2}=k,\ \ldots,\ X_0=\ell\}=P\{X_n=j|X_{n-1}=i\}。$$

通常我们将条件写成如下形式：

$$P\{X_n|X_{n-1},\ \ldots,\ X_0\}=P\{X_n|X_{n-1}\}。$$

X_n 可能的取值被称为状态。在给定的时间点上，状态总结了与未来相关的过去的所有信息。一个齐次马尔科夫链是指，$P\{X_n=j|X_{n-1}=i\}$ 不依赖于 n 而只依赖于 i 和 j，记作

$$P\{X_n=j|X_{n-1}=i\}=P_{ij}。$$

相应地，对于一个非齐次马尔科夫链，我们记

$$P\{X_n=j|X_{n-1}=i\}=P_{ij}(n)。$$

马尔科夫链由转移概率 $\{P_{ij}: 1 \leqslant i,\ j \leqslant M\}$ 和初始概率 $P_{X_0}(i)$ 完整地描述。有时我们会将 $\{P_{ij}\}$ 表示为有向图，有时则表示为矩阵。

注：

$$P_{ij} \geq 0，当 1 \leq i,\ j \leq M。$$

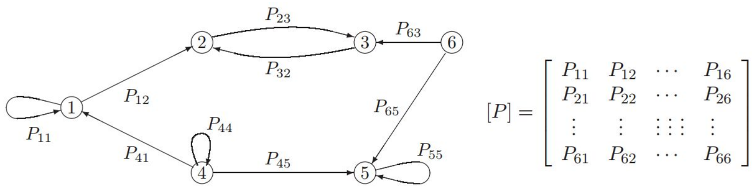


图 3.1: 马尔可夫链的图表示和矩阵表示

$$\sum_{\ell=1}^{M} P_{i\ell} = 1，当 1 \le i \le M。$$

行和等于 1，列和未必。

§3.2 状态分类

【定义 3.2】 • 一个（n 步）路（walk）是一个有序的节点串 $(i_0，i_1，\ldots，i_n)$，其中 $n \geqslant 1$，对于每个 $1 \leqslant m \leqslant n$，从 i_{m-1} 到 i_m 有一条有向弧。

- 一个径（path）是一条路，在其中没有重复的节点。
- 一个环（cycle）是一条路，其中第一个和最后一个节点相同，且没有其他节点重复出现。

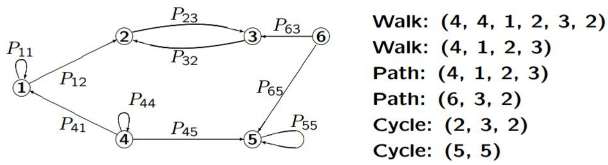


图 3.2: 马尔可夫链的路，径和环

注：从 i 到 j 的边明确表示 $P_{ij} > 0$。

【定义 3.3】 如果在图中存在一个路从 i 到 j，一个状态 j 从 i 可达（简写为 $i \to j$）。

我们用 P_{ij}^n 表示 $\Pr\{X_n = j | X_0 = i\}$。那么如果 $i，k，j$ 是一条路，$P_{ik} > 0$ 和 $P_{kj} > 0$，

$$P_{ij}^2 \geqslant P_{ik} P_{kj} > 0。$$

类似地，如果存在一条 n 步的路从 i 到 j，那么 $P_{ij}^n > 0$。因此，

- $i \to j$：存在某个整数 $n \geqslant 1$，使得 $P_{ij}^n > 0$。
- $i \nrightarrow j$：对于所有整数 $n \geqslant 1$，都有 $P_{ij}^n = 0$。
- $P_{ik}^n > 0$ 和 $P_{kj}^m > 0$ 意味着 $P_{ij}^{m+n} > 0$。
- $i \to k$ 且 $k \to j$ 意味着 $i \to j$。

思考题：给定概率转移矩阵，P^n 表示的意义是什么？如何计算 P^n？

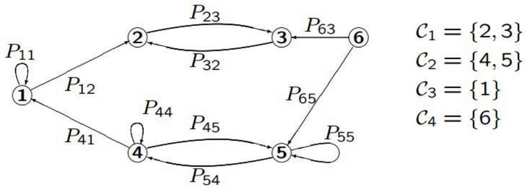
【定义 3.4】 如果从 j 可以到达 i，从 i 可以到达 j，则称 i 与 j 互通（简记为 $i \leftrightarrow j$）。特别地，我们约定 $i \leftrightarrow i$，因为 $P_{ii}^0 = 1$, 即从 i 出发经过 0 步仍然在 i。

可以证明，状态之间的互通关系是一个个等价关系，即满足

- 自反性：$i \leftrightarrow i$
- 对称性：$i \leftrightarrow j$ 蕴含 $j \leftrightarrow i$。

- 传递性：$i \leftrightarrow j$ 且 $j \leftrightarrow k$ 蕴含 $i \leftrightarrow k$。

根据这个互通等价关系，状态集可以划分为等价类。两个状态 i 与 j 在同一个等价类当且仅当 i 与 j 互通。



【定义 3.5】 对于有限状态马尔可夫链，状态 i 是一个常返态是指从所有 i 可达的状态都可以返回到 i（$i \to j$ 蕴含着 $j \to i$，则状态 i 是常返态）。一个瞬时态是指不是常返态的状态。

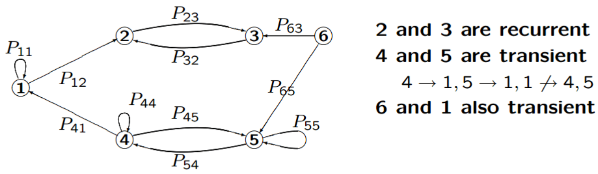


图 3.3: 马尔可夫链中的常返态和瞬时态

注：如果一个马尔可夫链进入了一个常返态，那么它以概率 1 最终会返回到该状态，并且一直无限次返回到该状态。实际上，这本质上就是对于具有可数无限状态空间的马尔可夫链的常返的定义。

【定理 3.6】 对于有限状态马尔可夫链，一个类中的所有状态要么都是瞬时态，要么都是常返态。换句话说，类中的状态具有相同的瞬时性或常返性。

证明.

- 假设状态 i 是瞬时态（即存在状态 j，使得 $i \to j$ 但 $j \nrightarrow i$），并且假设 i 和 m 在同一个类中（即 $i \leftrightarrow m$）。
- 然后有 $m \to i$ 且 $i \to j$，因此 $m \to j$。
- 如果 $j \to m$，那么从 j 到 m 的路可以延伸到 i；这是一个矛盾，因此不存在从 j 到 m 的路，所以 m 是瞬时态。

□

3.2.1 周期性状态和类

【定义 3.7】 一个状态 i 的周期，记为 $d(i)$，是在所有满足 $P_{ii}^n > 0$ 的 n 值中的最大公约数。

$$d(i) = \gcd\{n : P_{ii}^n > 0\}$$

如果 $d(i) = 1$，则状态 i 是非周期性的。如果 $d(i) > 1$，则状态 i 是周期性的，其周期为 $d(i)$。

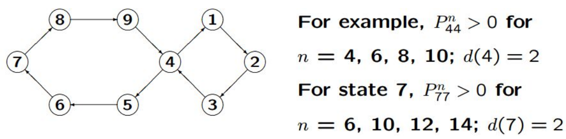


图 3.4: 马尔可夫链的周期

【例题 3.8】 设 m, n 是互素的正整数，则存在正整数 T_0, 使所有的正整数 $T \geq T_0$ 都可以由 m，n 的非负组合表示，即，$\forall T \geq T_0$，$\exists u$，$v \in \mathbb{N}$，使得 $um + vn = T$。

证明：由 m, n 互素（不妨设 $m > n$），则存在正整数 s，t，使得 $sm - tn = 1$。令 $T_0 = tn^2$，则对于所有 $T \geq T_0$，由欧几里得算法，得

$$T = qn + r，\ q \geq tn，\ 0 \leq r < n。$$

所以

$$T = qn + r(sm - tn) = (q - rt) \cdot n + rs \cdot m。$$

【定理 3.9】 对于任意的马尔可夫链（无论其状态数是有限的还是可数无穷的），同一个类中的所有状态具有相同的周期。

证明. 设 i 和 j 是在一个类 C 中任意的不同状态对。那么存在某个 n 使得 $P_{ij}^n > 0$，同时存在某个 m 使得 $P_{ji}^m > 0$。

- 由于存在一条长度为 $n+m$ 的路从 i 到 j 再返回到 i，所以 $n+m$ 必须能被 $d(i)$ 整除。
- 设 t 是一个使得 $P_{jj}^t > 0$ 的整数。由于存在一条长度为 $n+t+m$ 的路从 i 到 j 再返回到 j，最后到达 i，所以 $n+t+m$ 能被 $d(i)$ 整除，因此 t 能被 $d(i)$ 整除。
- 由于这对于所有使得 $P_{jj}^t > 0$ 的 t 都成立，因此 $d(j)$ 能被 $d(i)$ 整除。
- 反过来，交换 i 和 j 的角色，可以得知 $d(i)$ 能被 $d(j)$ 整除，因此 $d(i) = d(j)$。

□

【定理 3.10】 如果一个有限状态马尔可夫链的常返类 C 周期为 d，则可以将 C 中的状态分成 d 个子集，$S_0, S_1, \ldots, S_{d-1}$，使得从 $s_\ell \in S_\ell$ 一步转移进入 $s_{\ell+1} \in S_\ell$. 这里的下标 ℓ 指 $\ell \mod d$。

换句话说，从该类中的任何子类开始，该链将会循环经过 d 个子类。

3.2.2 遍历类

【定义 3.11】 对于一个有限状态马尔科夫链，遍历类是指这类状态既是常返的又是非周期的。如果一个马尔科夫链只包含一个类并且是遍历类，称作遍历链。

【例题 3.12】 假设 $[P]$ 是一个有限状态马尔可夫链的转移矩阵，状态 i 是一个常返态。证明如果 $P_{ii} > 0$，则状态 i 是非周期的。

【例题 3.13】 证明每个 $M < \infty$ 状态马尔科夫链包含至少一个常返态集合。

【例题 3.14】 考虑一个有限状态的马尔可夫链，其中某个给定的状态，比如状态 1，可以从任何其他状态到达。证明该链恰好有一个常返类 $\mathcal{R}$，且状态 $1 \in \mathcal{R}$。（注意，此时该链是单链。）

【定理 3.15】 对于一个遍历的有 M 状态的马尔科夫链，对于所有的 i，j 和 $m \geq (M-1)^2+1$，满足 $P_{ij}^m > 0$。

证明. a）证明一个有 $M(>1)$ 个状态的遍历马尔可夫链，它必然包含一个有 $\tau < M$ 状态的环。

b）假设 ℓ 是一个长度为 $\tau < M$ 的环中的某一状态。假设 $\mathcal{T}(m)$ 是从状态 ℓ 经过 m 步可达的状态集合。证明对于任意 $m \geq 1$，$\mathcal{T}(m) \subseteq \mathcal{T}(m+\tau)$。

对于任意状态 $j \in \mathcal{T}(m)$，我们有 $P_{\ell j}^m > 0$。因此，$P_{\ell j}^{m+\tau} \geq P_{\ell\ell}^\tau P_{\ell j}^m$。

c）将 $\mathcal{T}(0)$ 定义为单元素集合 $\{\ell\}$，并且证明

$$\mathcal{T}(0) \subseteq \mathcal{T}(\tau) \subseteq \mathcal{T}(2\tau) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{T}(n\tau) \subseteq \ldots。$$

d）证明如果上述包含关系中的一个等式成立，那么随后的所有包含关系都将等式成立。由此证明最多只有前 $M-1$ 个包含关系会严格不等式成立，且对于所有 $n \geqslant M-1$，都有 $\mathcal{T}(n\tau) = \mathcal{T}((M-1)\tau)$。

- 可以通过归纳法证明，如果对于某个 k，$\mathcal{T}((k+1)\tau) = \mathcal{T}(k\tau)$，那么对于 $n \geqslant k$，$\mathcal{T}(n\tau) = \mathcal{T}(k\tau)$。
- 设 k 是最小的整数，使得 $\mathcal{T}((k+1)\tau) = \mathcal{T}(k\tau)$ 成立。对于 $n \leqslant k$，$\mathcal{T}(n\tau)$ 的大小必须随着 n 的增加而增加。由于 $|\mathcal{T}(0)| = 1$，我们有 $k+1 \leqslant |\mathcal{T}(k\tau)| \leqslant M$。

e）证明所有状态都包含在 $T((M-1)\tau)$ 中。

f）证明对于所有 i，j，有 $P_{ij}^{(M-1)^2+1} > 0$。

- 对于包含在周期为 $\tau \leqslant M-1$ 的环中的状态 ℓ：
  - 设 ℓ' 是在该环上有转移 (ℓ, ℓ') 的状态，那么 $\mathcal{T}((M-1)\tau+1) \supseteq \mathcal{T}'((M-1)\tau) = \mathcal{S}$。

  - 可以通过归纳证明对于 $m \geqslant (M-1)\tau$，有 $\mathcal{T}(m) = \mathcal{S}$。
  - 由于 $(M-1)^2+1 > (M-1)\tau$，所以 $P_{\ell j}^{(M-1)^2+1} > 0$。

- 对于不包含在该环中的状态 ℓ^*，它最多在 $(M-\tau)$ 步内可以到达该环。我们有:

$$\mathcal{T}^*((M-1)^2+1) \supseteq T((M-1)^2+1-(M-\tau)).$$

由于

$$(M-1)^2+1-(M-\tau)-(M-1)\tau = M(M-1-\tau) \geqslant 0,$$

我们有

$$\mathcal{T}^*((M-1)^2+1) = \mathcal{S}。$$

□

【例题 3.16】 如何将图 3.5推广到任意数量（$M \geq 3$）的状态，其中包含一个 M 个节点的环和一个 $M-1$ 个节点的环。对于 $M=4$，假设节点 1 是不在 $M-1$ 个节点的环中的节点。列出从节点 1 在 n 步内可以到达的状态集合，其中 $n \leq 12$，并证明定理 3.15中的界限等式满足。解释为什么该结果对于所有更大的 M 也成立。

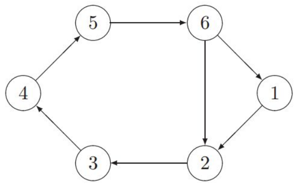


图 3.5: 一个具有 6 个状态的遍历马尔可夫链，其中对于所有 i、j 和 $m > (M-1)^2$，有 $P_{ij}^m > 0$，但是 $P_{11}^{(M-1)^2} > 0$。

【例题 3.17】 考虑一个具有一个常返类的马尔可夫链，该常返类包含 r 个状态，记为 $\{1，2，\ldots，r\}$，并且还有 $M-r$ 个其他瞬态状态。证明对于所有 $j \leq r$ 和 $n \geq (r-1)^2+1+M-r$，有 $P_{ij}^n > 0$。

【例题 3.18】 （a）假设有一个具有 $M \geq 3$ 个状态的任意遍历马尔可夫链中最小循环的状态数为 τ。证明对于所有 $n \geq (M-2)\tau+M$，有 $P_{ij}^n > 0$。提示：参考定理 3.15的证明。

（b）对于 $\tau = 1$，画出一个具有 $M \geq 3$ 个状态的遍历马尔可夫链的图（适用于任意 M），其中存在 i、j 使得当 $n = 2M-3$ 时 $P_{ij}^n = 0$。提示：参考图 3.5。

(c) 对于任意 $\tau < M-1$，画出一个具有 M 个状态的遍历马尔可夫链的图（适用于任意 M），其中存在 i、j 使得当 $n = (M-2)\tau+M-1$ 时 $P_{ij}^n = 0$。

§3.3 矩阵表示

马尔可夫链的转移概率矩阵 $[P]$ 称为随机矩阵，满足以下性质：

$$\sum_{\ell=1}^{M} P_{i\ell} = 1，i = 1，2，\ldots，M。$$

对于长度为 2 的路，利用马尔可夫性质

$$P_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{M} P_{ik}P_{kj}.$$

其中 $[P^2] = [P][P]$ 表示长度为 2 的步长的转移概率矩阵。

Chapman-Kolmogorov 等式:

$$[P^{m+n}] = [P^m][P^n]$$

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=1}^{M} P_{ik}^{m} P_{kj}^{n}.$$

它表示的是从状态 i 走 $m+n$ 步到达状态 j 的概率等于先走 m 步到某个状态 k，再从状态 k 走 n 步到达状态 j 的概率之和。

3.3.1 平稳态和 n 很大时的 $[P^n]$

如果随着 n 的增加，过去的记忆消失了，那么我们预期随着 $n \to \infty$，P_{ij}^n 对 n 和 i 的依赖将会消失，即

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j，1 \leqslant i，j \leqslant M，$$

其中 π_j 只是 j 的函数，并且不依赖于 i 或 n。

我们可以同时乘以 P_{jk} 并在 j 上求和，得到

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j P_{ij}^n P_{jk} = \sum_j \pi_j P_{jk}。$$

左侧可以表示为 $\lim_{n\to\infty} P_{ik}^{n+1} = \pi_k$。因此，如果这个极限存在，向量 π 必须满足

$$\pi_k = \sum_j \pi_j P_{jk}，对任意k。$$

【定义 3.19】 一个具有转移矩阵 $[P]$ 的 M 状态马尔可夫链的稳定分布向量（或稳定分布）是一个行向量 $\boldsymbol{\pi}$，满足

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}[P],$$

其中 $\sum_i \pi_i = 1$ 且 $\pi_i \geqslant 0$，对于 $1 \leqslant i \leqslant M$。

注: 如果 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个稳定分布向量，并不一定意味着当 $n \to \infty$ 时 $[P^n]$ 收敛于 $\boldsymbol{\pi}$。

【定义 3.20】 一个有限状态马尔可夫链称为单链，是指它（有且）仅有一个常返类（或许有多个瞬时态）。如果一个单链的常返类是遍历的，我们称之为遍历单链。

- 在什么条件下，$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}[P]$ 有一个概率向量解？
- 在什么条件下，$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}[P]$ 有一个唯一的概率向量解？
- 在什么条件下，$[P^n]$ 的每一行收敛于概率向量 $\boldsymbol{\pi}$，满足 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}[P]$。
- 首先，$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}[P]$ 总是有一个概率向量解（尽管对于无限状态链并非必然如此）。
- 其次，当且仅当 $[P]$ 是一个单链的转移矩阵，$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}[P]$ 有唯一的概率向量解。
- 最后，当且仅当 $[P]$ 是一个遍历单链的转移矩阵，$[P^n]$ 的每一行收敛于 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}[P]$ 的唯一解。

【引理 3.21】 设 $[P]$ 是一个有限状态马尔可夫链的转移矩阵，$[P^n]$ 是其 n 次幂。对于每个状态 j 和任意整数 $n \geqslant 1$，有以下两个不等式成立：

$$\max_i P_{ij}^{n+1} \leqslant \max_\ell P_{\ell j}^n,$$
$$\min_i P_{ij}^{n+1} \geqslant \min_\ell P_{\ell j}^n。$$

<u>**证明.**</u> 利用 Chapman-Kolmogorov 方程，对于任意的状态 i，j 和步数 n，我们有：

$$P_{ij}^{n+1} = \sum_k P_{ik} P_{kj}^n \leqslant \sum_k P_{ik} \max_\ell P_{\ell j}^n = \max_\ell P_{\ell j}^n。$$

对 i 最大化，得到

$$\max_i P_{ij}^{n+1} \leqslant \max_\ell P_{\ell j}^n。$$

将最大值替换为最小值，并反转不等号，得到

$$\min_i P_{ij}^{n+1} \geqslant \min_\ell P_{\ell j}^n。$$

□

3.3.2 假设 $[P]>0$ 的平稳态

【引理 3.22】 设 $[P]>0$ 是一个有限状态马尔可夫链的转移矩阵，$\alpha=\min_{i,\ j} P_{ij}$。对于所有状态 j 和所有 $n\geqslant 1$，有

$$\max_i P_{ij}^{n+1}-\min_i P_{ij}^{n+1}\leqslant\left(\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n\right)(1-2\alpha)。$$

$$\left(\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n\right)\leqslant(1-2\alpha)^n。$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_\ell P_{\ell j}^n=\lim_{n\to\infty}\min_\ell P_{\ell j}^n\geqslant\alpha>0。$$

证明. 对于给定的 n 和 j，假设 $\ell_{\min}$ 是使得 P_{ij}^n 在 i 上最小化的状态。

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{n+1}&=\sum_k P_{ik}P_{kj}^n\\
&\leqslant\sum_{k\neq\ell_{\min}}P_{ik}\max_\ell P_{\ell j}^n+P_{i\ell_{\min}}\min_\ell P_{\ell j}^n\\
&=(1-P_{i\ell_{\min}})\max_\ell P_{\ell j}^n+P_{i\ell_{\min}}\min_\ell P_{\ell j}^n\\
&=\max_\ell P_{\ell j}^n-P_{i\ell_{\min}}\left(\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n\right)\\
&\leqslant\max_\ell P_{\ell j}^n-\alpha\left(\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n\right)。\\
\max_i P_{ij}^{n+1}&\leqslant\max_\ell P_{\ell j}^n-\alpha\left(\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n\right)。
\end{aligned}$$

类似地，

$$\min_i P_{ij}^{n+1}\geqslant\min_\ell P_{\ell j}^n+\alpha\left(\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n\right)。$$

将上述两个不等式相减，得到

$$\max_i P_{ij}^{n+1}-\min_i P_{ij}^{n+1}\leqslant\left(\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n\right)(1-2\alpha)。$$

因为 $\min_l P_{lj}\geqslant\alpha$ 和 $\max_l P_{lj}\leqslant 1-\alpha$，

$$\max_i P_{ij}-\min_i P_{ij}\leqslant 1-2\alpha。$$

对 n 迭代，得到

$$\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n\leqslant(1-2\alpha)^n。$$

□

3.3.3 遍历马尔科夫链

【定理 3.23】 设 $[P]$ 是一个遍历的有限状态马尔可夫链的转移矩阵。那么存在唯一一个稳态向量 $\boldsymbol{\pi}$ 是正的且满足

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^n=\pi_j，对每对 i，j，$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}[P^n]=\boldsymbol{e\pi}，其中 \boldsymbol{e}=\{1，1，\ldots，1\}^{\mathrm{T}}。$$

随 n 呈几何收敛，满足

$$(\max_\ell P_{\ell j}^n-\min_\ell P_{\ell j}^n)\leqslant(1-2\beta)^{\lfloor\frac{n}{h}\rfloor}，$$

其中 $\beta=\min_{i,\ j}P_{ij}^h$，$h=(M-1)^2+1$。

3.3.4 遍历单链

令 T 表示瞬时态的集合（可能包含多个瞬时类），并假设 T 中的状态编号为 $1,2,\ldots,t$。令 R 表示常返类，假设它的状态编号为 $t+1,\ldots,t+r$。

$$[P]=\begin{bmatrix}[P_T] & [P_{TR}]\\ [0] & [P_R]\end{bmatrix}.$$

左下方的零块对应于从常返态到瞬时态转移的缺失。

我们将证明对于 $i,j\in T$，P_{ij}^n 收敛于 0。

对于每个瞬时态，必定存在一条路到达某个常返态，并且由于只有 t 个瞬时态，所以存在一条长度不超过 t 的路。对于每个 $i\in T$，$\sum_{j\in R}P_{ij}^t>0$，即对于 $i\in T$，$\sum_{j\in T}P_{ij}^t<1$。因此，

$$\gamma\triangleq\max_{i\in T}\sum_{j\in T}P_{ij}^t<1。$$

【引理 3.24】 设 $[P]$ 是一个单链，T 是瞬态状态的集合，令 $t=|T|$。

$$\max_{\ell\in T}\sum_{j\in T}P_{\ell j}^n\leqslant\gamma^{\lfloor n/t\rfloor}。$$

【定理 3.25】 设 $[P]$ 是一个有限状态的遍历单链的转移矩阵。那么，当 $n\to\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}[P^n]=e\boldsymbol{\pi}$，其中 $e=(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\pi}$ 是单链中常返类的稳态向量，并在每个瞬时态处扩展为零。这个收敛对于所有的 i,j 都是几何级数。

3.3.5 任意有限状态马尔科夫链

- 首先考虑具有多个常返类 R_1，$\ldots$，R_m 的马尔可夫链。这些类之间没有通信，应该分开考虑。
- 如果坚持分析整个链路，$[P]$ 将具有 m 个独立的稳态向量，每个类上一个非零。
- 接下来考虑周期为 d 的周期性循环链。它可以被分为 d 个子类，之间进行循环轮换。
- 如果我们观察 $[P^d]$，我们可以看到每个子类成为一个遍历类，记作 C_1，$\ldots$，C_d。因此，$\lim_{n\to\infty}[P^{dn}]$ 存在。

§3.4 随机矩阵的特征值和特征向量

若一个矩阵 $[A]$ 是奇异的，满足以下

- 存在一个向量 $\boldsymbol{v}\neq 0$ 使得 $[A]\boldsymbol{v}=0$；
- $[A]$ 的列线性相关；
- $[A]$ 的行线性相关；
- $[A]$ 的行列式 $\det[A]=0$.

当且仅当 $[P-\lambda I]$ 是奇异值，λ 是矩阵 $[A]$ 的特征值。

【定义 3.26】 一个行向量 $\boldsymbol{\pi}$ 是矩阵 $[P]$ 的一个特征值为 λ 的左特征向量，满足 $\boldsymbol{\pi}\neq 0$ 且 $\boldsymbol{\pi}[P]=\lambda\boldsymbol{\pi}$，即对所有的 j 都有 $\sum_i\pi_iP_{ij}=\lambda\pi_j$。

一个列向量 $\boldsymbol{\nu}$ 是矩阵 $[P]$ 的一个特征值为 λ 的右特征向量，满足 $\boldsymbol{\nu}\neq 0$ 且 $[P]\boldsymbol{\nu}=\lambda\boldsymbol{\nu}$，即对所有的 i 都有 $\sum_j P_{ij}\nu_j=\lambda\nu_j$。

对于每个随机矩阵 $[P]$，都满足 $[P]\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 是一个全为 1 的列向量。因此，矩阵 $[P-I]$ 是奇异的，并且存在一个特征值 $\lambda=1$。

3.4.1 有现状态概率转移矩阵的特征值和特征向量

具有 M 个不同特征值的情况

考虑情况：λ_1，…，λ_M 全部是不同的。对于每个 λ_i，矩阵 $[P-\lambda_i I]$ 是奇异的，因此必然存在右特征向量 $\boldsymbol{\nu}^{(i)}$ 和左特征向量 $\boldsymbol{\pi}^{(i)}$。右特征向量构成了一个 M 维空间，因此具有列 $(\boldsymbol{\nu}^{(1)}$，…，$\boldsymbol{\nu}^{(M)})$ 的矩阵 $[U]$ 是非奇异的。

对于 $i \neq j$，

$$(\lambda_i-\lambda_j)\boldsymbol{\nu}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\pi}^{(j)}=\boldsymbol{\nu}^{(i)}[P]\boldsymbol{\pi}^{(j)}-\boldsymbol{\nu}^{(i)}[P]\boldsymbol{\pi}^{(j)}=0.$$

因此，如果我们将左特征向量归一化，使得对每个 i 都满足 $\boldsymbol{\nu}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\pi}^{(i)}=1$，那么这些左特征向量实际上将成为矩阵 $[U^{-1}]$ 的行。

我们可以将 $[P^n]$ 表示为

$$[P^n]=[U][\Lambda^n][U^{-1}]。$$

其中 $[\Lambda]$ 是对角线上有 λ_1，…，λ_M 的矩阵。将 $[\Lambda^n]$ 拆分成 M 项，

$$[\Lambda^n]=\sum_{i=1}^{M}[\Lambda_i^n],$$

其中 $[\Lambda_i^n]$ 在 $(i，i)$ 位置上有 λ_i^n，其他位置都是零。于是，

$$[P^n]=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i^n\boldsymbol{\nu}^{(i)}\boldsymbol{\pi}^{(i)}。$$

【定理 3.27】 转移矩阵 $[P]$ 具有一个特征值为 $\lambda_1=1$ 的左特征向量 $\boldsymbol{\pi}$，如果将其归一化为 $\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{e}=1$，其中 $\boldsymbol{e}=(1，…，1)^{\mathrm{T}}$，那么它就是一个稳态向量。

【定理 3.28】 对于随机矩阵 $[P]$ 的每个特征值 λ_k，满足 $|\lambda_k|\leqslant 1$。

注：这两个定理对于所有有限状态马尔可夫链都是有效的。

因此，对于有 M 个不同特征值的情况，$[P^n]$ 可以写成

$$[P^n]=\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}+\sum_{i=2}^{M}\lambda_i^n\boldsymbol{\nu}^{(i)}\boldsymbol{\pi}^{(i)}$$

- 对于具有遍历性的单链，$\lim_{n\to\infty}[P^n]=\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}$。这意味着对于 $i=2$，…，M，$|\lambda_i|<1$。在这种情况下，我们可以看到 $[P^n]$ 接近稳态的速率由绝对值第二大特征值给出。
- 如果一个循环链具有周期 d，则发现有 d 个绝对值为 1 的特征值，并且这些特征值在复平面的单位圆上均匀分布，此时 $[P^n]$ 不会收敛。

具有重复特征值和 M 个独立特征向量的情况

由于每个不同特征值的线性无关特征向量的数量等于该特征值的重数，我们仍然可以选择给定特征值的左特征向量与该特征值的右特征向量正交归一化。在这样做之后，定义矩阵 $[U]$ 的列为 $\boldsymbol{\nu}^{(1)}$，…，$\boldsymbol{\nu}^{(M)}$，我们可以看出 $[U]$ 是可逆的，并且 $[U^{-1}]$ 是行为 $\boldsymbol{\pi}^{(1)}$，…，$\boldsymbol{\pi}^{(M)}$ 的矩阵。然后我们再次有

$$[P^n]=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i^n\boldsymbol{\nu}^{(i)}\boldsymbol{\pi}^{(i)}。$$

【例题 3.29】 考虑一个由 $\kappa>1$ 个遍历集合组成的马尔可夫链。很容易看出，有 κ 个不同的稳态向量。每个遍历集合将具有一个特征值等于 1，其右特征向量在该集合的状态上为 1，其他地方为 0。因此，每个常返类的稳态向量在同一常返类的每个状态上都严格为正，而在所有其他状态上都为零。

然后，$[P^n]$ 将收敛到一个分块对角矩阵，其中每个遍历集合内的行是相同的。

矩阵的 Jordan 标准型情况

在某些情况下，矩阵 $[P]$ 的一个或多个特征值重复，但给定重复特征值的线性无关右特征向量的数量小于该特征值的重数。因此，$[P]$ 不能表示为 $[U][\Lambda][U^{-1}]$ 的形式，其中 Λ 是特征值按其重数重复的对角矩阵。

线性代数告诉我们存在一个可逆矩阵 $[U]$ 和一个 Jordan 标准型 $[J]$，使得

$$[P]=[U][J][U^{-1}]。$$

其中，$[J]$ 是具有关于特征值 λ_i 的 Jordan 块的分块对角矩阵。

$$[J]=\begin{bmatrix}[J_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [J_l]\end{bmatrix},\quad [J_s]=\begin{bmatrix}\lambda_s & 1 & & \\ & \lambda_s & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_s\end{bmatrix}.$$

【定理 3.30】 一个有限状态的单链的转移矩阵具有唯一的特征值 $\lambda=1$，并伴随一个满足 $\boldsymbol{\pi}[P]=\boldsymbol{\pi}$ 的左特征向量 $\boldsymbol{\pi}$，以及一个右特征向量 $\boldsymbol{e}=(1,\ \ldots,\ 1)^{\mathrm{T}}$。

其他特征值 λ_i 满足 $|\lambda_i|\leqslant 1$ 的不等式。

除非单链是周期性的，例如周期为 d，否则不等式是严格的。在这种情况下，有 d 个幅度为 1 的特征值均匀分布在单位圆周上。

如果单链是遍历的，那么 $[P^n]$ 收敛到稳态 $\boldsymbol{e\pi}$，每个分量的误差至少以 $n^k\lambda_s^n$ 的速度趋近于零，其中 λ_s 是绝对值小于 1 的最大幅度的特征值，k 是特征值 λ_s 对应的最大 Jordan 块的尺寸。

§3.5 具有报酬的马尔科夫链

假设马尔可夫链的每个状态 i 都与一个给定的报酬 r_i 相关联。令随机变量 X_n 表示时间 n 时的状态，时间 n 的报酬是随机变量 $R(X_n)$，它将 $X_n=i$ 映射为 r_i（对于每个 i）。

我们只关注报酬期望，例如，在给定 $X_0=i$ 的情况下，时间 n 的报酬期望是

$$\mathrm{E}[R(X_n)|X_0=i]=\sum_j P_{ij}^n r_j.$$

在给定 $X_m=i$ 的情况下，从第 m 步到第 $m+n-1$ 步的 n 步累计期望报酬为

$$\begin{aligned}v_i(n)&=\mathrm{E}[R(X_m)+\cdots+R(X_{m+n-1})|X_m=i]\\&=r_i+\sum_j P_{ij}r_j+\cdots+\sum_j P_{ij}^{n-1}r_j。\end{aligned}$$

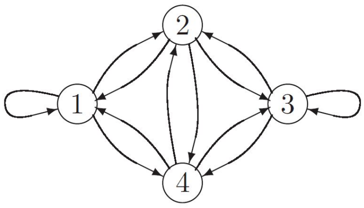
3.5.1 期望首次通过时间

假设对于某个任意的单链，我们想找到从给定状态 i 开始，直到首次进入给定的常返态（比如状态 1）的期望步数。假设 $i\neq 1$。我们可以将这个问题看作是一个报酬问题，通过将每个连续状态分配一个单位的报酬，直到进入状态 1。因此，我们可以修改这个链，将最终状态 1 转变为一个吸收态，即 $P_{11}=1$。

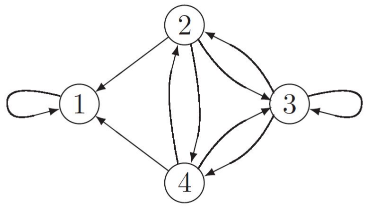
对于每个从状态 $i\neq 1$ 开始的样本径，直到进入状态 1 的初始段的概率保持不变，因此首次通过时间期望保持不变。现在修改后的马尔可夫链是一个具有一个单独常返态的遍历单链。

对于图 (b) 中的链，我们有

$$\begin{cases}v_2=1+P_{23}v_3+P_{24}v_4\\ v_3=1+P_{32}v_2+P_{33}v_3+P_{34}v_4\\ v_4=1+P_{42}v_2+P_{43}v_3\end{cases}.$$



(a)



(b)

从状态 $i \neq 1$ 到达状态 1 的期望首次通过时间可以表示为：

$$v_i = 1 + \sum_j P_{ij} v_j，v_1 = 0。$$

可以将此方程以向量形式表示为：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} + [P]\boldsymbol{v},$$

其中 $\boldsymbol{r} = (0，1，\ldots，1)^\top$，$v_1 = 0$，且 $P_{11} = 1$。

注意到如果 $\boldsymbol{v}$ 满足 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} + [P]\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v} + \alpha \boldsymbol{e}$ 也满足该方程，因此 $v_1 = 0$ 是为了消除歧义性而必要的。另外，由于 $[P]$ 具有特征值 1，因此此方程在 $v_1 = 0$ 的情况下有唯一解。

【例题 3.31】 在二进制序列中找一个字符串：

假设 $\{X_i : i \geqslant 0\}$ 是一个伯努利过程，其满足

$$\Pr\{X_i = 1\} = p_1，\Pr\{X_i = 0\} = p_0 = 1 - p_1。$$

一个二进制串 $\underline{a} = (a_1，\ldots，a_k)$ 在时间 n 发生的条件是

$$(X_{n-k+1}，\ldots，X_n) = (a_1，\ldots，a_k)。$$

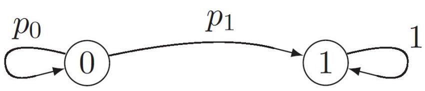
我们想要找到第一次出现该字符串时的期望时间 n。

- 假如该字符串是一个单独的二进制数字，例如 1。

  那么它在时间 n 发生的概率为 $p_0^{n-1}p_1$。期望值可以表示为

  $$\sum_{n=1}^{\infty} n p_0^{n-1} p_1 = \frac{1}{p_1}。$$

  可以把这个问题表述为一个期望首次通过时间的问题，如图 得到 $v_0 = 1 + p_0 v_0$，即 $v_0 = \frac{1}{p_1}$。



- 假设字符串为 $\underline{a} = (1, 0)$。

  方法一：在之前的情况下，首个出现 1 的预期时间为 $1/p_1$。然后会有一个零或多个连续的 1 的延迟，直到下一个 0 出现。此时，字符串 (1, 0) 刚刚出现，额外的预期延迟为 $1/p_0$。因此，总体延迟为

  $$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_0 p_1}。$$

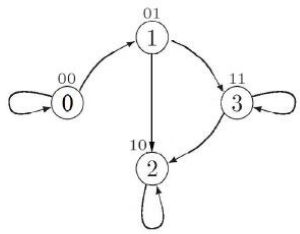
  方法二：假设 $Z_n = (X_{n-1}, X_n)$，初始化 $Z_0 = (0, 0)$。期望首次通过时间

  方法三：构建一个具有 $k+1$ 个状态的马尔可夫链。我们定义在时间 n 时马尔可夫链处于状态 $i < k$，如果 $(a_1，\ldots，a_k)$ 尚未出现，并且 $(X_{n-i+1}，\ldots，X_n)$ 是 $X_1，\ldots，X_n$ 形成 $(a_1，\ldots，a_k)$ 的最长后缀的前缀。得到

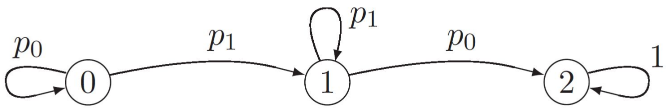
  $$\begin{cases} v_0 = 1 + p_0 v_0 + p_1 v_1 \\ v_1 = 1 + p_1 v_1 \end{cases}$$

  即 $v_0 = \frac{1}{p_0 p_1}$。

$$\begin{cases} v_0 = 1 + p_0 v_0 + p_1 v_1 \\ v_1 = 1 + p_1 v_3 \\ v_3 = 1 + p_1 v_3 \end{cases}.$$

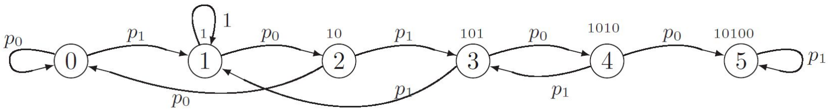


$$v_0 = \frac{1}{p_0 p_1}.$$



- 假设更一般的字符串 $\underline{a} = (1，0，1，0，0)$。

  例如，状态 4 表示如果下一个比特是 0，字符串 10100 将出现。如果下一个比特是 1，则最近的五个比特将是 10101，其中最后三个是 10100 的前三个比特，导致进入状态 3。



§3.6 课后习题

1. 假设 $X = (X_n，n \geq 0)$ 是一个状态空间为 $\{1，2，3\}$ 的马尔可夫链，转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

如果 $\boldsymbol{p}_0 = (0.5，0.5，0)$，求

（1）$P(X_0 = 2，X_1 = 2，X_2 = 1)$。

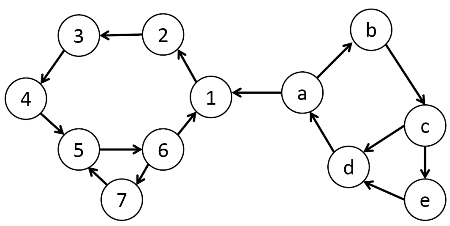
（2）$P(X_1 = 2，X_2 = 2，X_3 = 1)$。

2. 假设 $X = (X_n，n \geq 0)$ 是马尔可夫链，状态空间为 $\{1，2，3，4\}$，转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

问：哪些状态是常返的，哪些是瞬时的？并求每个状态的周期。

3. 考虑下图马尔可夫链，问：



（1）状态可以分为几类？

（2）各类的周期分别是什么？

（3）哪些状态是常返的，哪些状态是瞬时的？

4. 假设 $X=(X_n, n\geq 0)$ 是马尔可夫链，请分别考虑以下两个转移矩阵

$$P1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）分别对上述两个状态空间进行分类；

（2）分别列出上述两个状态空间各自对应的连通类；

（3）上述两个状态空间各自连通类之间互通吗？

5. 某地区的天气状况可分为多云和阴天两种，分别记为 1 和 2，并用马尔可夫链 $X=(X_n, n\geq 0)$ 描述，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

如果已知今天是多云，求 3 天、5 天、10 天及更长时间以后天气状况的分布规律。

6. 在瓮中总含有两个球。球的颜色有红色与蓝色。每个时期随机地取出一个球，并且放回一个新球，新球的颜色以 0.8 的概率与取的球同色，而以 0.2 的概率为相反的颜色。如果开始时两个球都是红色，求第五次取到的球是红色的概率。

7. 假定球逐个地被分配到 8 个瓮中，各球以相等的可能放到其中任意一个瓮中。问在分配 9 次后，其中恰有 3 个瓮不是空的概率是多少？

8. 在一系列独立抛掷一个公平硬币的试验中，以 N 记直至出现连续 3 次正面时的抛掷次数。求

（1）$P(N\leq 8)$

（2）$P(N=8)$

9. 考虑 4 状态 Markov 链，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

计算从各状态出发到状态 1 的平均首次到达时间，及从状态 1 出发到各状态的平均首次到达时间。

10. 甲，乙，丙三人玩游戏。试讨论规则的公平性：丙是仲裁，掷一均匀硬币多次。

（1）若第一次出现正面，则甲胜；否则，乙胜。

（2）若前三次出现的是“正正反”，则甲胜；若前三次出现的是“正正正”，则乙胜；其他情形，和。

（3）依次记录掷硬币结果，若“正正反”先出现，则甲胜；若“正正正”先出现则乙胜。

（4）依次记录掷硬币结果，若“正正反”先出现，则甲胜；若“正反反”先出现，则乙胜。

11. 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返: 出门上班时下雨并家里有伞就带把伞去办公室；下班回家时下雨且办公室有伞就带把伞回家，其它时候都不带伞。假设每天上下班时是否下雨是独立同分布的，下雨的概率为 p，不下雨的概率为 $1-p$，问此人出门上班时碰到下雨且没有雨伞的概率。

12. 假设 $X=(X_n, n\geq 0)$ 是马尔可夫链是 Markov 链，状态空间为 $\{1, 2, \ldots, m\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_m \\ p_m & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_0 \end{pmatrix}$$

其中 $0<p_0<1$，$p_0+p_1+\cdot\cdot\cdot+p_m=1$ 求 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 以及平稳分布。

13.N 个总体中的任一个个体在每个时可能极也可能消极。如果一个个体在某时段积极，那么与所有其他个体独立。他在下一个时也积极的概率是 α。类似地，如果一个个体在某时段消极，那么与所有其他个体独立，他在下一个时段也消积的概率是 β。令 X_n 表在时段 n 积极的个体数

(a) 证明 $\{X_n，n \geq 0\}$ 是马尔可夫链

(b) 求 $\mathrm{E}[X_n|X_0 = i]$

(c) 推导转移概率得表达式

(d) 求恰有 j 个个体积极的长程时间比例。提示: 首先考 $N = 1$ 的情形

14. 设 $\{\xi_n；n \geq 1\}$ 为一列独立同分布的非负整数值随机变量且与非负整数值随机变量 X_0 独立。对 $n > 1$，令

$$X_n = \begin{cases} X_n - 1 + \xi_n，X_{n-1} > 0 \\ \xi_n，X_{n-1} = 0 \end{cases}$$

证明 $\mathrm{X} = \{X_n，n \geq 0\}$ 为时齐马氏链。若记 $p_k = P(\xi_k = 1)$。求 X 的转移概率矩阵。进一步若设 $\mu_k = P(X_0 = k)$，求 $P(X_0 = 1，X_1 = 2，X_3 = 4)$

第 4 章

更新过程

§4.1 引言

回顾以下概念。设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其中 Ω 是样本空间，$\mathcal{F}$ 是事件类，而 P 是概率。概率是从事件类到实数的一个映射，满足

- 规范性：$P(\Omega) = 1$。
- 非负性：$P(A) \geq 0$，对所有$A \in \mathcal{F}$成立。
- 可列可加性：设 $A_i \in \mathcal{F}$，$i \geq 0$ 是一列两两不相交的事件，则 $P(\bigcup_{i\geq 0} A_i) = \sum_{i\geq 0} P(A_i)$。

随机变量是从样本空间到实数轴的映射，即

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

任意 $\omega \in \Omega$, 有唯一的 $X(\omega) \in \mathbb{R}$ 与之对应，满足对于任意 x，$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$(是一个事件)。

多维随机变量是从样本空间到多维实空间的映射，即

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n。$$

一维随机变量可以用累积分布函数

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}，x \in \mathbb{R}。$$

来刻画。n 维随机变量可以用联合累积分布函数

$$F_{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = P\{X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2,\ \cdots,\ X_n \leq x_n\},\ x_1^n \in \mathbb{R}^n$$

来刻画。

思考题：

- 随机变量序列是怎样的映射？
- 随机过程是怎样的映射？
- 二者什么关系？如何刻画它们？

随机变量序列是从样本空间到数列空间的一个映射；$X_n(\omega)$，$n \in \mathbb{Z}$，$\omega \in \Omega$；

随机过程是从样本空间到函数空间的一个映射；$X(t;\omega)$，$t \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$；

对于随机过程而言，需要用任意有限维的联合分布函数来描述，即，对于任意 n, 任意 $-\infty < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$，我们需要掌握 $(X(t_1)，X(t_2)，\cdots，X(t_n))$ 的联合累积分布函数。这对于一般化的随机过程是不可能的。

思考题：你认为比较简单的随机过程是什么？

4.1.1 更新过程

一个到达过程可以用以下三个角度之一的联合分布进行描述。

- 到达时刻 S_1，S_2，$\ldots$，$S_n <$，$\ldots$
- 间隔时间 X_1，X_2，$\ldots$，$X_n <$，$\ldots$
- 计数随机变量，$N(t)$，$t \geq 0$。
- 当 $i \geqslant 2$ 时，$X_i = S_i - S_{i-1}$，且 $X_1 = S_1$。$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$。
- $\{S_n \leqslant t\} = \{N(t) \geqslant n\}$ 对于所有 $n \geqslant 1$，$t > 0$ 成立。

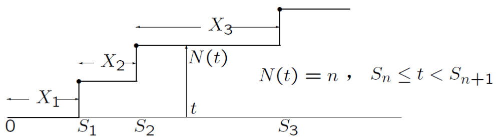


图 4.1: 到达过程示意图

【定义 4.1】 一个更新过程是一个间隔时间序列 X_1，X_2，$\ldots$ 是独立同分布（i.i.d）的到达过程

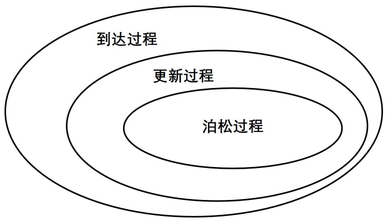


图 4.2: 更新过程，到达过程以及泊松过程三者的关系

【例题 4.2】 对于任意给定的常返状态，马尔科夫链在连续访问该状态时都有更新。假设一个常返的有限状态马尔科夫链从 0 时刻 i 状态开始，有一个转移矩阵 $[P]$。在时刻为 n 时第一次返回 i 状态，从时刻 n 开始的马尔科夫链是从时刻 0 开始的马尔科夫链的概率副本。

每次在给定 n 时刻返回 i 状态，都会启动一个新的马尔可夫链的概率副本，该链从 0 时刻的 i 状态开始。因此，进入 i 状态的时间序列可以看作是更新过程的到达时刻。很明显访问一个常返态的间隔时间是独立的。

通过研究更新可以得到一个不明显结果，即 i 状态之间的期望再访时间是 $1/\pi_i$。我们可以直接从马尔可夫链推导出来，但使用更新过程更简洁。

假设如下图 (a) 给出的马尔科夫链，我们可以利用陷阱状态的技巧计算从 1 状态到 1 状态的期望首次通过时间。期望首次通过时间

$$v_1 = 1 + \sum_{k \neq 1} P_{1,k} v_k,$$

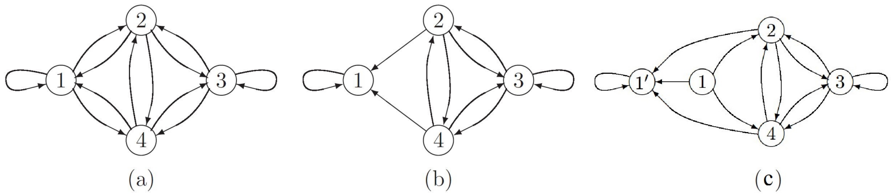


图 4.3: 利用陷阱状态的技巧计算从 1 状态到 1 状态的期望首次通过时间

其中对于任意 $j \neq 1$，v_j 满足 $v_j = 1 + \sum_{k\neq 1} P_{j,k} v_k$。等式两边同时乘 π_j 并求和，可以得到

$$\begin{aligned}\sum_j \pi_j v_j =& 1 + \sum_j \sum_{k\neq 1} \pi_j P_{j,k} v_k \\ =& 1 + \sum_{k\neq 1} \sum_j \pi_j P_{j,k} v_k \\ =& 1 + \sum_{k\neq 1} \pi_k v_k\end{aligned}$$

因此，得到 $\pi_1 v_1 = 1$ 即 $v_1 = 1/\pi_1$。

思考题：考虑有限状态 Markov 链 X_1，X_2，$\cdots$，X_n，$\cdots$。设其是遍历的，稳态概率（也是极限概率）分布记作 π。在 n 长的序列中，状态“1”大致发生多少次呢？

【例题 4.3】 考虑掷一个硬币的 Bernoulli 试验，其中正面朝上（称之为成功）的概率是 p。定义随机变量 X: 如果正面朝上，$X = 1$；如果反面朝上，$X = 0$。则我们可以考虑如下分布的概率质量函数、均值、方差、矩生成函数等

- Bernoulli 分布（一次试验成功的次数）
- 二项分布（n 次试验中成功的次数）
- 几何分布（首次成功需要的次数；成功后再次成功所需要的次数）
- Pascal 分布, 又名负二项分布（第 r 次成功所需要的次数）

【例题 4.4】 以速率 $\lambda > 0$“到达”的泊松过程。则我们可以考虑如下分布的概率密度函数、均值、方差、矩生成函数等

- 指数分布（“首次到达”，间隔分布）：到达间隔 X 服从指数分布 $\Pr\{X > t\} = e^{-\lambda t}$，$t \geq 0$。
- 泊松分布：$(0，t]$ 到达次数
- Erlang 分布（第 n 次到达的时刻）

【例题 4.5】 **The G/G/m queue:** 顾客到达间隔服从一个一般分布，i.i.d；服务时间也服从另一个一般分布，i.i.d，有 m 个服务窗口。先到先服务（first-come-first-served）。若都在忙，就排队。到达的是一个到达过程 $N(t)$ 表示 $(0，t]$ 内到达的顾客数；而这个系统还嵌入一个更新过程，$N^r(t)$，$(0，t]$ 内有多少次顾客看到了空系统。

- 更新过程的特点是在每个到达时刻都会" 重新开始"。
- 在我们对更新过程进行研究的过程中，我们可以互换使用 $\overline{X}$ 和 $\mathrm{E}[X]$ 来表示平均更新间隔，并使用 σ_X^2 或简单地用 σ^2 表示更新间隔的方差。通常我们会假设 $\overline{X}$ 是有限的。
- 主要关注当 t 变得很大时 $N(t)$ 和 $N(t)/t$ 的行为。

4.1.2 随机变量的收敛

回顾随机变量的四种收敛类型，见第 1 章第 1.2 节，第 16 页。

4.1.3 强大数定律

【定理 4.6】(强大数定律) 对于任意整数 $n \geq 1$，假设 $S_n = X_1 + \ldots + X_n$，其中 X_1，X_2，$\ldots$ 是独立同分布的（i.i.d）随机变量序列且满足 $\mathbf{E}[|X|] < \infty$。然后有

$$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \overline{X}\} = 1$$

强大数定律与其他形式的收敛性有很大的区别。它直接关注从 $n = 1$ 到 ∞ 的样本路径。

§4.2 更新过程的强定律

【引理 4.7】 假设 $\{N(t);\ t > 0\}$ 是一个更新计数过程，其间隔更新时间随机变量序列为 $\{X_n;\ n \geqslant 1\}$。无论 $\overline{X} < \infty$ 与否，$\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ WP1 且 $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[N(t)] = \infty$

证明思路：（1）论证每个样本函数都有极限，或有限，或无穷。（因为样本函数是不减的）

（2）论证 $\{N(t) < n\}$ 这个事件应包含事件 $\{\lim_{t\to\infty} N(t) < n\}$

所以，$P\{\lim N(t) < n\} \leq P\{N(t) < n\} = P\{S_n > t\} \to 0$, 因为 S_n 是随机变量。

【引理 4.8】 假设 $\{Z_n;\ n \geqslant 1\}$ 是一个随机变量序列满足 $\lim_{n\to\infty} Z_n = \alpha$WP1。设 f 是在 α 点连续的实变量的实值函数，有

$$\lim_{n\to\infty} f(Z_n) = f(\alpha) \quad \text{WP1。}$$

【定理 4.9】 (更新过程的强定律) 对于一个平均间隔更新时间 $\overline{X} < \infty$ 的更新过程，

$$\lim_{t\to\infty} N(t)/t = 1/\overline{X} \quad \text{WP1。}$$

即 $P\{\omega : \lim_{t\to\infty} N(t,\ \omega)/t = 1/\overline{X}\} = 1$。

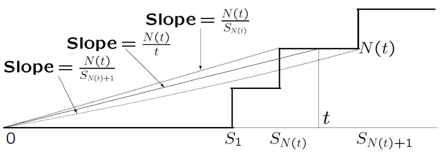


图 4.4: $\frac{N(t)}{S_{N(t)+1}} < \frac{N(t)}{t} \leqslant \frac{N(t)}{S_{N(t)}}$

<u>证明.</u> 设 $n = N(t)$，根据上述引理，我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{S_{N(t)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n} = \frac{1}{\overline{X}} \quad \text{WP1。}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{S_{N(t)+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{S_{n+1}} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\overline{X}} \quad \text{WP1。}$$

因为 $N(t)/t$ 在具有相同极限的这两个量之间，所以

$$\lim_{t\to\infty} N(t)/t = 1/\overline{X} \quad \text{WP1。}$$

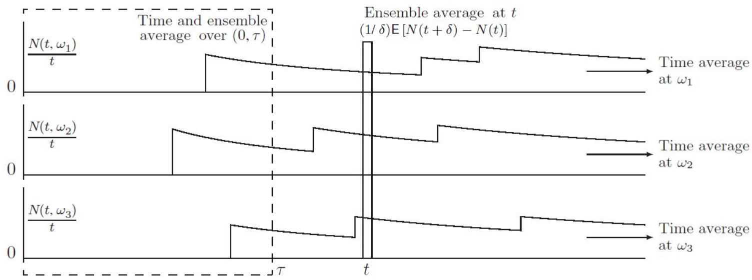
□

下图展示在一个样本点 ω 处的时间平均，从 0 到给定 τ 的时间和集合平均，以及在区间 $(t,\ t+\delta]$ 内的集合平均。

更新过程的时间平均和极限集合平均的这种相等性延续到大量的随机过程中，并形成遍历理论的基础。

需要注意，为了使时间平均和限制集合平均相等，需要满足一些条件。

- 第一，随着 $t \to \infty$，时间平均值必须以概率 1 存在；该时间平均值在概率 1 的样本点集中也必须相同。



- 第二，随着 $t\to\infty$，集合平均值必须趋于一个极限值。
- 第三，时间平均值和集合平均值必须相等。

【例题 4.10】 反例 设 $\{X_i; i\geqslant 1\}$ 是一个二元独立同分布的随机变量序列，每个随机变量以概率 $1/2$ 取值 0，以概率 $1/2$ 取值 2。令 $M_n = X_1X_2\cdots X_n$。

- 可以看出，当 $n\to\infty$ 时，有 $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$，以概率 1 成立。
- 同样地，对于所有 $n\geqslant 1$，有 $\mathbf{E}[M_n] = 1$。

因此，时间平均存在且以概率 1 等于 0，集合平均存在且对所有 n 等于 1，但这两者是不同的。

【定理 4.11】 （$N(t)$ 的中心极限定理）假设一个计数过程 $\{N(t); t>0\}$ 的间隔时间有有限的标准差 $\sigma>0$，则

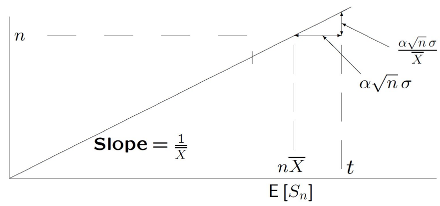
$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{N(t)-t/\overline{X}}{\sigma\overline{X}^{-3/2}\sqrt{t}} < \alpha\right\} = \Phi(\alpha),$$

其中

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\mathrm{d}x。$$

这个定理表明，$N(t)$ 的累积分布函数（CDF）趋近于均值为 $t/\overline{X}$，标准差为 $\sigma\overline{X}^{-3/2}\sqrt{t}$ 的高斯分布。

证明思路：当 t 足够大时，S_n 的均值是 $n\bar{X}$, 方差是 $n\sigma^2$, 所以，$\frac{S_n-n\bar{X}}{\sqrt{n}\sigma}$ 可以用标准正态分布近似描述。$\{S_n\leq t\}$ 等价于 $\{N(t)\geq n\}$。



- $t = n\overline{X} + \alpha\sqrt{n}\sigma$
- $n \approx t/\overline{X} - \alpha\sigma\sqrt{t/\overline{X}}/\overline{X}$

§4.3 更新-报酬过程；时间平均

4.3.1 剩余寿命

【定义 4.12】 对于一个更新过程 $\{N(t);\ t>0\}$，在时间 t 的剩余寿命是指到下一次更新剩余的时间，即 $Y(t) = S_{N(t)+1} - t$。

如果公交车的到达是一个更新过程，这相当于等待公交车需要的时间。我们可以将剩余寿命视为更新过程上的报酬函数。在 t 时刻的样本报酬是样本更新路径的函数。剩余寿命作为 t 的函数是一个随机过程，我们可以观察它的时间平均值，即 $[\int_0^t Y(\tau)\mathrm{d}\tau]/t$。注意，剩余寿命的样本函数是一个等腰直角三角形的序列，在结尾处是一个三角形的部分。因此，

$$\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n(t)} x_i^2 + \int_{\tau=s_{n(t)}}^t y(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\{x_i; 0 < i < \infty\}$ 是更新间隔的样本值集合。

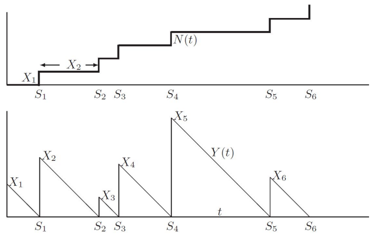


图 4.5: 剩余寿命示意图

平均剩余寿命为 $\overline{Y}_{ta} = \frac{\mathbf{E}[X^2]}{2\mathbf{E}[X]}$。

<u>**证明.**</u> 平均剩余寿命满足

$$\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)} X_n^2 \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t Y(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n^2$$

。

我们有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} X_n^2}{2t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} X_n^2}{N(t)}\frac{N(t)}{2t} = \frac{\mathbf{E}[X^2]}{2\mathbf{E}[X]} \quad \text{WP1。}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n^2}{2t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n^2}{N(t)+1}\frac{N(t)+1}{N(t)}\frac{N(t)}{2t} = \frac{\mathbf{E}[X^2]}{2\mathbf{E}[X]} \quad \text{WP1。}$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Y(\tau)\mathrm{d}\tau}{t} = \frac{\mathbf{E}[X^2]}{2\mathbf{E}[X]} \quad \text{WP1。}$$

□

如果 X 是指数分布（相当于泊松过程），则 $\overline{Y}_{ta} = \mathbf{E}[X]$。如果 X 几乎确定性，那么 $\overline{Y}_{ta} \approx \frac{\mathbf{E}[X]}{2}$。

【例题 4.13】 有这样的情况：在一个系统中，有两种更新情况：更新间隔很大但发生的可能性很小，更新间隔很小但发生的可能性很大。令 X 以概率 $1-\epsilon$ 取值为 ϵ，以概率 ϵ 取值为 $1/\epsilon$。平均剩余寿命是 $\overline{Y}_{ta} = \frac{1}{2\epsilon}$。

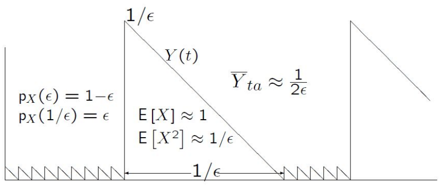


图 4.6: 在一个系统中，更新间隔很大但发生的概率很小，对平均剩余寿命影响很大

4.3.2 平均年龄

【定义 4.14】 令 $Z(t)$ 表示时间 t 时更新过程的年龄，其中年龄定义为在 t 之前（或等于 t）的最近的一次到达到 t 的间隔，即 $Z(t) = t - S_{N(t)}$。

平均年龄为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Z(\tau)\mathrm{d}\tau}{t}=\frac{\mathbf{E}[X^2]}{2\mathbf{E}[X]}\quad \text{WP1。}$$

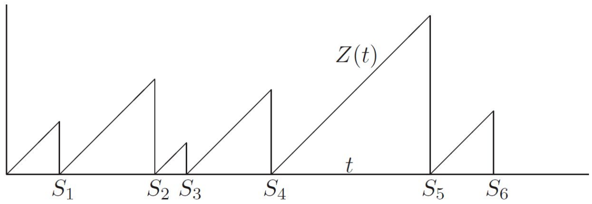


图 4.7: 年龄示意图

4.3.3 持续时间

【定义 4.15】 设 $\widetilde{X}(t)$ 表示包含时间 t 的更新间隔的持续时间，即 $\widetilde{X}(t)=X_{N(t)+1}=S_{N(t)+1}-S_{N(t)}$。

显然有 $\widetilde{X}(t)=Y(t)+Z(t)$。平均持续时间为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \widetilde{X}(\tau)\mathrm{d}\tau}{t}=\frac{\mathbf{E}[X^2]}{\mathbf{E}[X]}\quad \text{WP1。}$$

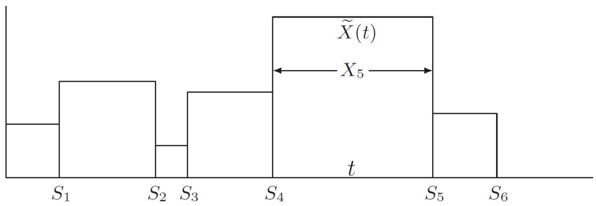


图 4.8: 持续时间示意图

4.3.4 一般的更新报酬过程

现在我们研究一般类的报酬函数，其中 t 时刻的报酬最多只取决于 t 时刻的年龄和持续时间，即时刻 t 的奖励 $R(t)$ 可以明确地表示为一个函数 $R(Z(t),\ \widetilde{X}(t))$。我们希望找到 $R(t)$ 的时间平均值，即 $\lim_{t\to\infty}[\int_0^t R(\tau)\mathrm{d}\tau]/t$。

首先将 R_n 定义为第 n 个更新间隔中的累积报酬，

$$\begin{aligned}R_n \triangleq \int_{S_{n-1}}^{S_n} R(\tau)\mathrm{d}\tau &= \int_{S_{n-1}}^{S_n} R(Z(\tau),\widetilde{X}(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{S_{n-1}}^{S_n} R(\tau-S_{n-1},X_n)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{z=0}^{X_n} R(z,X_n)\mathrm{d}z\text{。}\end{aligned}$$

这是一个仅与随机变量 X_n 有关的函数。

一般情况下，R_n 的期望值为

$$\mathrm{E}[R_n]=\int_{x=0}^{\infty}\left(\int_{z=0}^{x} R(z,x)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}F_X(x)\text{。}$$

【定理 4.16】 假设 $\{R(t);\ t>0\}$ 是一个期望间隔时间为 $\mathrm{E}[X]=\overline{X}<\infty$ 的更新过程的非负更新报酬函数。如果每个 R_n 都是一个随机变量，并且满足 $\mathbf{E}[R_n]<\infty$，那么有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{\tau=0}^{t} R(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{\mathbf{E}[R_n]}{\overline{X}}\quad \text{WP1。}$$

证明. 因为

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{t} \leqslant \frac{\int_0^t R(\tau)\mathrm{d}\tau}{t} \leqslant \frac{\sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n}{t}。$$

我们有

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)} \frac{N(t)}{t} \to \frac{\mathbf{E}[R_n]}{\overline{X}} \quad \text{WP1},$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)} \frac{N(t)}{t} \to \frac{\mathbf{E}[R_n]}{\overline{X}} \quad \text{WP1}。$$

所以

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\tau=0}^{t} R(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\mathbf{E}[R_n]}{\overline{X}} \quad \text{WP1}。$$

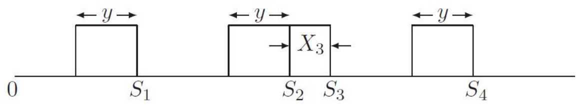
□

对于非正的报酬函数，同样的结果成立。

【推论 4.17】 假设 $\{R(t); t > 0\}$ 是一个期望间隔时间为 $\mathbf{E}[X] = \overline{X} < \infty$ 的更新过程的更新报酬函数。如果每个 R_n 都是一个随机变量，并且满足 $\mathbf{E}[|R_n|] < \infty$，那么有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\tau=0}^{t} R(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\mathbf{E}[R_n]}{\overline{X}} \quad \text{WP1}。$$

【例题 4.18】 剩余寿命的分布 我们想要找到 $Y(t)$ 的时间平均累积分布函数（CDF），即对于任何给定的 y，$Y(t) \leqslant y$ 的时间所占的比例。



$$R(t) = \begin{cases} 1, & \widetilde{X}(t) - Z(t) \leqslant y, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

因此，$R_n = \min\{y, X_n\}$。

$$\mathbf{E}[R_n] = \mathbf{E}[\min\{X, y\}] = \int_{x=0}^{y} \Pr\{X > x\}\mathrm{d}x。$$

$$F_Y(y) = \frac{\mathbf{E}[R_n]}{\overline{X}} = \frac{1}{\overline{X}} \int_{x=0}^{y} \Pr\{X > x\}\mathrm{d}x \quad \text{WP1}。$$

§4.4 重复实验的停止时间

【定义 4.19】 一个随机变量序列 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 的停止试验（或停止时间）J，是一个值为正整数的随机变量。对于每个 $n \geqslant 1$，指示随机变量 $\mathbb{I}_{\{J=n\}}$ 是 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的函数。（我们可以进一步放宽定义，允许 J 是一个可能有缺陷的随机变量。可能有缺陷的意味 $\{J = \infty\}$ 或 $\{J = -\infty\}$ 可能具有正概率）

例如，

- 一个赌徒进入赌场赌博直到破产
- 抛掷一枚硬币直到 10 次连续头部朝上
- 用重复实验测试一个假设是否成立，直到一个假设在后验概率上足够可靠。
- 树搜索过程中，如果某些路径再搜索下去没有收益的话，也可以停下来。

【例题 4.20】 独立掷一个均匀的骰子。令 X_n 表示第 n 次所得点数。令 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$。定义一个正整数变量 J，$J = n$ 当且仅当 $S_n > 6$.

（1）说明 J 是一个停止时间。

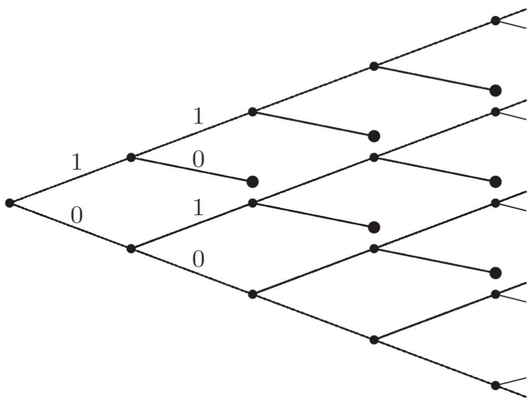
（2）计算 $\{J < 3\}$ 的概率。

（3）计算 $\{J \geq 3\}$ 的概率。

（4）计算在给定 $X_3 = 6$ 的条件下，$\{J \geq 3\}$ 的概率。

假设随机变量序列 X_i 在一个过程 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 中具有有限数量的可能样本值。那么任何（可能有缺陷的）终止试验 J 可以表示为一棵根树，其中每个样本路径停止的试验被表示为一个终端节点。

【例题 4.21】 对于一个伯努利过程 $\{X_n; n \geqslant 1\}$，模式（1，0）第一次出现时停止。



4.4.1 瓦尔德等式

【定理 4.22】 (瓦尔德等式) 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是一组独立同分布的随机变量序列，每个随机变量的均值为 $\overline{X}$。如果 J 是 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 的停止时间，并且 $\mathbf{E}[J] < \infty$，那么在停止时间 J 时的和 $S_J = X_1 + X_2 + \cdots + X_J$ 满足

$$\mathbf{E}[S_J] = \overline{X}\mathbf{E}[J]。$$

<u>证明.</u>

$$S_J = \sum_{n=1}^{J} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}}.$$

$$\mathbf{E}[S_J] = \mathbf{E}\left[\sum\nolimits_n X_n \mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}}\right] = \sum\nolimits_n \mathbf{E}\left[X_n \mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}}\right]$$

证明的关键在于证明 X_n 和 $\mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}}$ 是独立的。注意到

$$\mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}} = 1 - \mathbb{I}_{\{J < n\}}.$$

而 $\mathbb{I}_{\{J<n\}}$ 是 $X_1, \ldots, X_{n-1}$ 的函数。由于 X_i 是独立同分布的，X_n 与 $X_1, \ldots, X_{n-1}$、$\mathbb{I}_{\{J<n\}}$ 以及 $\mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}}$ 都是相互独立的。因此，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_J] &= \sum_n \mathbf{E}[X_n \mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}}] \\
&= \sum_n \mathbf{E}[X_n]\mathbf{E}[\mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}}] \\
&= \overline{X} \sum_n \mathbf{E}[\mathbb{I}_{\{J \geqslant n\}}] \\
&= \overline{X} \sum_n \Pr\{J \geqslant n\} = \overline{X}\mathbf{E}[J]。
\end{aligned}$$

□

思考题: 掷一个骰子，点数记为 J。接着再掷 J 次骰子，点数分别记为 $X_1, X_2, \cdots, X_J$。若骰子是均匀的，且各次投掷是独立的，求 $\mathbf{E}[S_J]$。

思考题: 成功概率 p 的 Bernoulli 试验，首次成功平均需要几次试验？能想到多少种解法？

【例题 4.23】 考虑一个抛硬币的情景，正面出现的概率为 p。每次抛掷结果正面赢得 \$1，反面输掉 \$1。当赢钱达到 \$1 时停止。我们可以将其建模为一系列独立同分布的随机变量 X_1，X_2，...，其中每个 X_i 以概率 p 取值为 1，以概率 $1-p$ 取值为 -1。考虑可能缺陷的停止时间 J 是第一个使得 $S_n = X_1 + \cdots + X_n = 1$ 的 n，即赌徒首次取得盈利的试验。

令 $\theta = \Pr\{J < \infty\}$. 则 $\theta = p + (1-p)\theta^2$，解得 $\theta = 1$ 或者 $\theta = p/(1-p)$。

- 考虑 $p > 1/2$，对应的解是 $\theta = 1$, 因为后者不是概率。从另外角度，在没有停止的情况下，你的赢钱会无限增长，经过 \$1，因此 J 必须是一个随机变量。$S_J = 1$ WP1，所以 $\mathbf{E}[S_J] = 1$。

  因此，我们有
  $$\mathbf{E}[J] = \frac{1}{\overline{X}} = \frac{1}{2p-1}。$$

  从另一角度来说，注意到 $J = 1$ 的概率为 p。如果 $J > 1$，即 $S_1 = -1$，那么达到 $S_n = 1$ 的唯一方法是从 $S_1 = -1$ 到达某个 $S_m = 0$（平均需要 $\overline{J}$ 步）；然后再平均需要 $\overline{J}$ 步到达 1。因此，
  $$\overline{J} = p + (1-p)(1 + 2\overline{J}),$$
  这意味着 $\overline{J} = \frac{1}{2p-1}$.

- 考虑 $p < 1/2$，$\theta = p/(1-p)$ 是正确的解, $\theta = 1$ 不是。因此，$\theta = \Pr\{J < \infty\} \neq 1$，瓦尔德等式不适用于这种情况。

- 考虑 $p = 1/2$，当 p 从下方接近 1/2 时，$\Pr\{J < \infty\} = p/(1-p) \to 1$。然而，当 p 从上方接近 1/2 时，我们可以看到 $\mathbf{E}[J] = 1/(2p-1) \to \infty$。

  瓦尔德等式在这里不成立，因为 $\mathbf{E}[J] = \infty$，实际上因为 $\overline{X} = 0$，也没有意义。

领先的概率是 1，但有两个问题：一，平均时间是无穷；二、潜在资本风险。

4.4.2 广义停止试验

【定义 4.24】 对于一系列随机变量 (X_1, Y_1)，(X_2, Y_2)，... 的配对的广义停止试验 J 是一个取正整数值的随机变量，对于每个 $n \geqslant 1$，$\mathbb{I}_{J=n}$ 是由 X_1、Y_1 X_2、Y_2，$\cdots$，X_n、Y_n 确定的函数。

由此可知，$\mathbb{I}_{J<n} = 1 - \mathbb{I}_{J\geqslant n}$ 是由 X_1、$Y_1, \cdots, X_{n-1}$、Y_{n-1} 确定的函数。

【定理 4.25】 (广义瓦尔德等式) 假设 $\{(X_n, (Y_n); (n \geqslant 1\}$ 是一系列随机变量对, 其中每对随机变量与其他随机变量独立同分布。假设每个 X_i 的均值有限且为 $\overline{X}$。如果 J 是 $\{(X_n, Y_n); n \geqslant 1\}$ 的停时，并且 $\mathrm{E}[J] < \infty$，那么和 $S_J = X_1 + X_2 + \cdots + X_J$ 满足以下公式:
$$\mathbf{E}[S_J] = \overline{X}\mathbf{E}[J]。$$

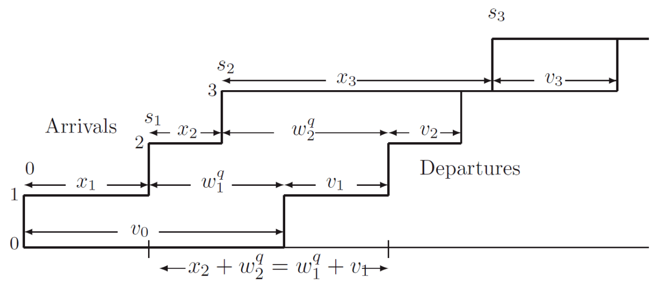
注：同时，每个 Y_i 也可以被替换为一组随机变量序列的向量。

4.4.3 G/G/1 队列

- 到达间隔时间是独立同分布的。让 $\{X_i; i \geqslant 1\}$ 表示独立同分布的到达间隔时间序列，其中 X_i 是顾客 $i-1$ 到达和顾客 i 到达之间的时间间隔。

- 服务时间是独立同分布的，并且与到达间隔时间相互独立。让 $\{V_i; i \geqslant 0\}$ 表示这些顾客所需的独立同分布的服务时间；这些服务时间与到达间隔时间相互独立。

- 顾客 0 在时间 0 到达并立即进入服务器。如果服务器忙碌，后续到达的顾客将排队等待。



- 当服务器完成前一个服务时，每个排队等待的到达顺序按照先到先服务（FCFS）的原则进入服务器。

- 对于顾客 1，如果 $X_1 < V_0$，则第一位到达的顾客需要在队列中等待 $W_1^q = V_0 - X_1$。否则，顾客 1 将立即进入服务。因此，

$$W_1^q = \max\{V_0 - X_1，0\}。$$

- 对于顾客 i，其在系统中的时间为排队等待时间和服务时间之和，即：

$$W_i^q = \max\{W_{i-1}^q + V_{i-1} - X_i，0\}。$$

考虑开始一个新的繁忙期的第一次到达（s_3 上面）为广义停止试验。

- 成对随机变量的序列为 (X_1, V_0)，(X_2, V_1)，$\ldots$。
- J 是满足 $\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=0}^{n-1} V_{i-1} \geqslant 0$ 的最小 n。
- 如果 $\mathbf{E}[X] > \mathbf{E}[V]$，那么 $\lim_{n\to\infty} \Pr\{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=0}^{n-1} V_{i-1}) \geqslant 0\} = 1$。因此，$J$ 是一个广义的停时。
- 如果 $\mathbf{E}[J] < \infty$，则广义 Wald 等式成立且 $\mathrm{E}[S_J] < \infty$。

新的繁忙期之间的时间间隔构成一个更新过程。

在给定 $J = j$ 的条件下，对于 $k \geqslant 1$，令 $X_{2,k} = X_{j+k}$，$V_{2,k-1} = V_{j+k-1}$，则 $\{(X_{2,k}, V_{2,k-1}); k \geqslant 1\}$ 是一组具有原始分布的独立同分布的随机变量对，并且在 J 和 (X_i, V_{i-1})，$1 \leqslant i \leqslant J$ 的统计上独立。

【定理 4.26】 *考虑一个具有有限期望到达时间 $\mathrm{E}[X]$ 和有限期望服务时间 $\mathbf{E}[V](< \mathbf{E}[X])$ 的 G/G/1 队列。那么看到一个空系统的到达次数的子序列构成一个更新过程。到达一个空系统的期望到达次数 $\mathbf{E}[J]$ 是有限的，连续的繁忙期之间的期望时间等于 $\mathbf{E}[J]\mathbf{E}[X]$。*

注：

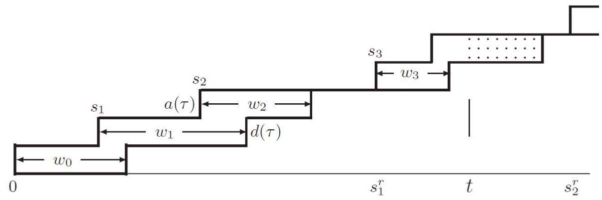
- 新的繁忙期之间的时间间隔构成一个更新过程。我们有一个更新过程嵌入另一个当中。可以将其中一个称为到达过程，另一个称为更新过程。更新过程包含了到达和服务两个方面。

- 尽管连续的 (X_i, Y_i) 对被假设为相互独立，但 X_i 和 Y_i 之间并不一定要独立。这种缺乏独立性在 G/G/1（或 G/G/m）队列中并不会出现。

- 上述对于 G/G/1 队列的论证并没有使用先来先服务（FCFS）的服务规则。可以采用任何一种服务规则，只要在给定时间 t 选择要服务的顾客仅基于该时间之前系统中顾客的到达和服务时间即可。

4.4.4 Little 定理

考虑一个排队系统，其中到达过程是一个更新过程 $A(t)$。假设在时间 0 有一个到达，因此 $A(t) = N(t) + 1$。服务过程可以是几乎任何形式，但我们具体假设为 G/G/1 队列，用 $D(t)$ 表示。假设系统最终以 WP1 的方式清空，并在下一次到达时重新启动。我们已经看到，不仅更新间隔 $X_i^r = S_i^r - S_{i-1}^r$ 是独立同分布的，而且在随后的更新间隔中顾客到达的数量也是独立同分布的。



令 $L(\tau) = A(\tau) - D(\tau)$。这取决于离开过程，但其值是当前更新间隔期内的到达和服务时间的函数。因此，它可以被视为 $N^r(t)$ 上的广义更新报酬函数。在一个更新间隔期内的总报酬 L_n 是 $L(\tau)$ 在该期间内的积分。

对于图中的样本值，这个积分可以表示为

$$\int_0^{s_1^r} L(\tau)\mathrm{d}\tau = w_0 + w_1 + w_2。$$

我们可以看到

$$\int_0^{S_1^r} L(\tau)\mathrm{d}\tau = \sum_{i=0}^{N(S_1^r)-1} W_i。$$

在每个更新间隔中都存在相同的关系，特别地，我们定义每个 $n \geqslant 1$ 的 L_n 为

$$L_n \triangleq \int_{S_{n-1}^r}^{S_n^r} L(\tau)\mathrm{d}\tau = \sum_{i=N(S_{n-1}^r)}^{N(S_n^r)-1} W_i。$$

函数 $L(\tau)$ 具有与更新报酬函数相同的行为，但它稍微更加通用，因为它是关于更新计数过程 $\{N^r(t); t \geq 0\}$ 在 $t = \tau$ 处的年龄或持续时间的函数。然而，$\{L_n; n \geq 1\}$ 是独立同分布的序列使我们能够使用与之前处理更新报酬函数相同的方法来处理 $L(\tau)$。

【定理 4.27】 （Little 定理）对于一个先到先服务的 G/G/1 队列，其中期望更新间隔是有限的，系统中的顾客的平均数量极限按概率 1 等于一个常数 $\overline{L}$。每位顾客的平均等待时间也按概率 1 等于一个常数 $\overline{W}$。最后，$\overline{L} = \lambda\overline{W}$，其中 λ 是顾客到达率，即平均到达时间的倒数。

证明.

$$\sum_{n=1}^{N^r(t)} L_n \leqslant \int_{\tau=0}^{t} L(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \sum_{i=0}^{N(t)} W_i \leqslant \sum_{n=1}^{N^r(t)+1} L_n.$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{N(t)} W_i}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_{\tau=0}^{t} L(\tau)\mathrm{d}\tau}{t} = \frac{\mathbf{E}[L_n]}{\mathbf{E}[X^r]} \quad \text{WP1}。$$

因此，$L(\tau)$ 的有限时间平均按概率 1 存在，并且等于

$$\overline{L} = \mathbf{E}[L_n]/\mathbf{E}[X^r].$$

另一方面，我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{N(t)} W_i}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{N(t)} W_i}{N(t)} \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}.$$

- 左侧的项按概率 1 存在（并且等于 $\overline{L}$）。
- 右边的第二个极限也按概率 1 存在，根据更新过程的强大数定律，这个极限被称为到达率 $\lambda = 1/\overline{X}$。
- 因此，右边的第一个极限，每个顾客的平均等待时间，记作 $\overline{W}$，也按概率 1 存在。

因此，我们有 $\overline{L} = \lambda\overline{W}$。(直观意义：系统人数等于到达速率乘以呆在系统的时间)。 □

注：

- 本质上说，Little 定理是一个计数等式。在一个繁忙期和随后的闲置期（即一个更新周期内），$\int L(\tau)\mathrm{d}\tau = \sum_i W_i$。从数学上讲，难点在于证明 $\{N^r(t); t > 0\}$ 实际上是一个更新过程，并且证明 L_n 是独立同分布的，这就是我们需要理解停止规则的地方。

- 问题不在于 $\overline{L}=\lambda\overline{W}$ 是否成立，而在于这些数量是否以有意义的时间平均方式存在（WP1）或作为极限集合平均存在。
- 显然，先到先服务顺序并不是论证所必需的。因此，该定理推广到具有多个服务器和顾客不按照先到先服务顺序的任意服务规则的系统中。

4.4.5 M/G/1 队列

- 到达序列 $\{X_i;i\geqslant 1\}$ 是泊松过程，其速率为 $\lambda=1/\overline{X}$。
- 设 $\{V_i;i\geqslant 0\}$ 为服务需求序列，这些需求是独立同分布的，且与到达过程无关。
- 假设 $\overline{X}>\overline{V}>0$。
- 第一个到达时间 $J>0$，在空系统中看到的是最小 $n>0$，使得 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-V_{i-1})\geqslant 0$。

【定理 4.28】 对于有 $\overline{V}<\overline{X}<\infty$ 的 M/G/1 队列，期望到达次数 $\mathrm{E}[J]$ 和连续繁忙期之间的期望时间 $\overline{X}\mathrm{E}[J]$ 分别为

$$\mathbf{E}[J]=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-\overline{V}},\quad \overline{X}\mathbf{E}[J]=\frac{\overline{X}^2}{\overline{X}-\overline{V}}。$$

<u>**证明.**</u> 由于泊松过程的无记忆性，从顾客 $J-1$ 的服务完成到顾客 J 到达的时间服从具有均值 $\overline{X}$ 的指数分布。这意味着

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{J}X_i-\sum_{i=0}^{J-1}V_i\right]=\overline{X}.$$

对 $\{X_i-V_{i-1};i\geqslant 1\}$ 应用瓦尔德等式，我们得到

$$(\overline{X}-\overline{V})\mathbf{E}[J]=\overline{X}。$$

因此，

$$\mathbf{E}[J]=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-\overline{V}},\quad \overline{X}\mathbf{E}[J]=\frac{\overline{X}^2}{\overline{X}-\overline{V}}。$$

□

Pollaczek-Khinchin 公式

- 假设服务时间 V 有有限的二阶矩 $\mathrm{E}[V^2]<\infty$。
- 记 $L^q(t)$ 为队列中的顾客数量，$R(t)$ 为正在接受服务的顾客剩余的服务时间。
- 假设按照先来先服务的方式进行服务，$U(t)$ 表示一个在时刻 t 到达的顾客在队列中等待的时间。

因此，

$$U(t)=\sum_{i=0}^{L^q(t)-1}V_{N(t)-i}+R(t)。$$

注意，如果在时刻 t 队列中有 $L^q(t)\geqslant 1$ 个顾客，则顾客编号 $N(t)$ 在队列的末尾，而顾客编号 $N(t)-L^q(t)+1$ 在队列的前端。截至 t，共有 $N(t)$ 客户到达，而队列长度是 $L^q(t)$，完成服务或正在接受服务的顾客数目是 $N(t)-L^q(t)$，因此此时排在队首的是 $N(t)-L^q(t)+1$，而队尾的是 $N(t)$。

由于这些已完成的服务的服务时间和到达时间与队列中顾客的服务时间无关，因此，给定 $L^q(t)=\ell$，有

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{L^q(t)-1}V_{N(t)-i}\middle|L^q(t)=\ell\right]=\ell\overline{V}。$$

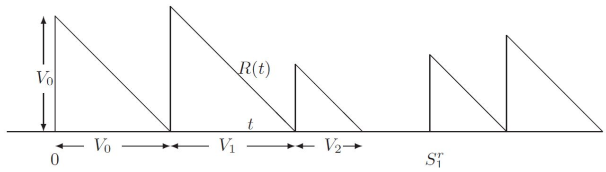
对 $L^q(t)$ 求期望，

$$\mathrm{E}[U(t)]=\mathrm{E}[L^q(t)]\overline{V}+\mathrm{E}[R(t)]。$$

我们首先将 $R(t)$ 视为一个报酬函数，计算其时间平均值。

注意到 $S^r_{N^r(t)}$ 不仅是更新过程的一个更新时刻，也是到达过程的一个到达时刻；特别地，它是第 $N(S^r_{N^r(t)})$ 个到达时刻，而前面的 $N(S^r_{N^r(t)})-1$ 个到达时刻是在时间 $S^r_{N^r(t)}$ 前已经接受了服务的顾客。

$$\int_0^{S^r_{N^r(t)}} R(\tau)\mathrm{d}\tau = \sum_{i=0}^{N(S^r_{N^r(t)})-1} \frac{V_i^2}{2} \leqslant \sum_{i=0}^{N(t)-1} \frac{V_i^2}{2} \leqslant \int_0^{S^r_{N^r(t)+1}} R(\tau)\mathrm{d}\tau$$



通过多次进行几乎相同的推导，我们可以证明：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t R(\tau)\mathrm{d}\tau}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{N(t)-1} V_i^2}{2N(t)} \frac{N(t)}{t} = \frac{\lambda \mathrm{E}[V^2]}{2} \quad \text{WP1。}$$

上述时间平均值可以用极限集合平均值来代替，因此有

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[R(t)] = \frac{\lambda \mathbf{E}[V^2]}{2}\text{。}$$

类似地，Little 定理还有一个极限集合平均值的形式

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[L^q(t)] = \lambda \overline{W^q}\text{。}$$

因此，

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[U(t)] = \lambda \mathbf{E}[V^2]\overline{W^q} + \frac{\lambda \mathbf{E}[V^2]}{2}\text{。}$$

注意，

- $\mathrm{E}[U(t)]$ 是时间 t 的期望未完成工作量，即顾客在 t 到达时可能遭受的排队延迟。
- $\overline{W^q}$ 是样本轨迹平均的期望排队延迟。

对于泊松到达过程，$(t，t+\delta]$ 内出现到达的概率与所有之前的到达和服务时间是独立的，因此它与 $U(t)$ 无关。因此，$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[U(t)]$ 必须等于 $\overline{W^q}$。

因此，我们得到了 Pollaczek-Khinchin 公式

$$\overline{W^q} = \frac{\lambda \mathbf{E}[V^2]}{2(1-\lambda \mathbf{E}[V])}\text{。}$$

慢车效应

如果 $\mathrm{E}[V^2]=\infty$，即服务时间的方差无穷大，那么即使期望服务时间小于期望到达时间间隔，极限期望排队延迟也会是无穷大。

为什么 $\overline{W^q}$ 随着 $\mathrm{E}[V^2]$ 的增加而增加呢？

当你排队等候服务时，是否注意到正在接受服务的客户往往比其他人花费更长的时间？

值得注意的是，在进行特别长的服务时，会有大量到达者进入系统，并且所有到达者都会被这个单个长时间的服务所延迟。换句话说，由于长时间的服务，新顾客的数量与服务时间成比例，而每个顾客被延迟的时间也与服务时间成比例。

§4.5
课后作业

1. 以下是否正确：

(1) 是否 $N(t) < n$ 当且仅当 $S_n > t$?

(2) 是否 $N(t) \leq n$ 当且仅当 $S_n \geq t$?

(3) 是否 $N(t) > n$ 当且仅当 $S_n < t$?

2. 假设更新过程的到达间隔分布是均值为 μ 的泊松分布。即假设 $\mathrm{P}\{\mathrm{X_n} = \mathrm{k}\} = \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}$，$\mathrm{k} = 0$，1，$\cdots$

(1) 求 S_n 的分。

(2) 计算 $P\{N(t) = n\}$。

3. 设一个更新过程，间隔 X 服从分布 $\Pr\{X = 1\} = 1/2$，$\Pr\{X = 2\} = 1/2$。画出 5 条计数样本 $N(t)$，$t \leq 5$。试着讨论 S_3 的分布律，$N(3)$ 的分布律。

4. 令 $\{N_1(t)$，$t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t)$，$t \geq 0\}$ 是独立的更新过程。令 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$。

(1) $\{N(t)$，$t \geq 0\}$ 的到达间隔时间是否独立？

(2) 它们是否同分布？

(3) $\{N(t)$，$t \geq 0\}$ 是否是更新过程？

5. 以 S_n 记具有到达间隔分布函数 F 的更新过程 $\{N(t)$，$t \geq 0\}$ 的第 n 个事件时刻。

(1) 问 $P\{N(t) = n | S_n = y\}$ 是什么？

(2) 从 $P\{N(t) = n\} = \int_0^\infty P\{N(\mathrm{t}) = n | S_n = y\} f_{S_n}(y)\,\mathrm{d}y$ 开始，利用 n 个速率为 λ 的独立指数随机变量的和具有参数为 $(n$，$\lambda)$ 的伽马分布，当 $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ 时计算 $P\{N(t) = n\}$。

5. 考虑一个平均到达间隔时间为 μ 的更新过程。假设这个过程的每一个事件以概率 p 被记入。以 $N_C(t)$ 计到时刻 $t(t > 0)$ 为止被计入的事件数。

(1) $\{N_C(t)$，$t \geq 0\}$ 是更新过程吗？

(2) $\lim_{t\to\infty} \frac{N_C(t)}{t}$ 是多少？

7. 令 U_1，U_2，... 是独立的 (0，1) 均匀随机变量，定义 N 为 $N = \min\{n : U_1 + U_2 + \cdots + U_n > 1\}$，$\mathbf{E}[N]$ 是多少？

8. 假设 $\{N(t); t > 0\}$ 是一个更新计数过程，间隔时间随机变量序列为 $\{X_n; n \geqslant 1\}$。不论是否 $\overline{X} < \infty$，我们有 $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ WP1 和 $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[N(t)] = \infty$。

(1) 请论证每个样本函数都有极限，或有限，或无穷。（因为样本函数是不减的）

(2) 请论证 $\{N(t) < n\}$ 这个事件应包含事件 $\{\lim_{t\to\infty} N(t) < n\}$ 所以，$\Pr\{\lim N(t) < n\} \leq P\{N(t) < n\} = P\{S_n > t\} \to 0$，因为 S_n 是随机变量。

(3) 证明 $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[N(t)] = \infty$。

9. 假设乘客按照一个更新过程来到一火车站，其平均来到间隔时间为 μ。每当有 N 个人在车站上等待时，就开出一辆火车。若每当有 n 个乘客等待时，车站就以每单位时间 nc 元的比率开支费用，且每开出一辆火车要多开支 K 元，那么此车站每单位时间的平均费用是多少？

10. 科学研究是磨练心智的过程。一个研究生的情绪或有周期现象。周期是两天或四天的机会均等且互不影响。设一个周期内快乐指数 h 是以区间中点为圆心的半圆曲线。

(1) 画图示意一个快乐指数的样本。

(2) 若一个研究生快乐指数大于 3/4，我们称他是快乐的。试求长时间观察，一个研究生平均快乐的时间的比例。

参考文献