

FOCALISATION AND CLASSICAL REALISABILITY

MUNCH-MACCAGNONI

Pablo Donato

1^{er} avril 2020

Université de Paris

CONTEXTE ET MOTIVATIONS

Deux approches historiques à la correspondance preuves-programmes :

- **Formules = types** (Curry, Howard, Griffin...) :

preuve \iff programme

- **Formules = spécifications** (Kleene, Kreisel, Krivine...) :

preuve \implies programme

Isomorphisme **syntactique** entre logique et calcul :

Formule	\iff	Type
Preuve	\iff	Programme
Élimination des coupures	\iff	Exécution

- On ne s'intéresse qu'aux programmes **bien typés**...
- ...vus comme une syntaxe de **termes** pour les preuves

S'applique à de nombreuses logiques, incarnées dans divers systèmes de déduction/langages de programmation :

	Intuitionniste	Classique
Systèmes à la Hilbert	Logique Combinatoire	Logique Combinatoire Classique
Déduction naturelle	λ -calcul (simplement typé, polymorphe...)	$\lambda\mu$ -calcul
Calcul des séquents	Machine de Krivine	Système L

Mais aussi logique linéaire, logiques modales... et biensûr *théorie des types* !

Interprétation “**sémantique**” de la logique dans le calcul :

Interprétation BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov)

Une preuve de $A \Rightarrow B$ est une **fonction** qui prend une preuve de A et renvoie une preuve de B .

- On s'autorise un espace de fonctions **plus riche** que celui des preuves !
- Permet de donner un contenu calculatoire à des théories **mathématiques** et pas seulement logiques

S'applique à diverses théories intuitionnistes et classiques, interprétées dans divers langages de programmations :

	Intuitionniste	Classique
Logique du 2 nd ordre	Système F	Système L
Arithmétique du 2 nd ordre	Système F	λ_c -calcul
Théorie des ensembles	?	λ_c -calcul
HoTT	Théorie des types cubiques	–

SÉQUENTS \Leftrightarrow MACHINES ABSTRAITES

Groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{cut}$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'} xR$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta} xL$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} wR$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} wL$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} cR$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} cL$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg R$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge R$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_i, \Delta}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2, \Delta} \vee R_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg L$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow L$$

$$\frac{\Gamma, A_i \vdash \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash \Delta} \wedge L_i$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee L$$

Termes

t, u	$::=$	x	(Variable)
		$\mu\alpha.c$	(Abstraction de contexte)
		$[e]$	(Réification de contexte)
		$\lambda x.t$	(Fonction)
		$\mu(\pi_1 \cdot \alpha_1.c_1 \mid \pi_2 \cdot \alpha_2.c_2)$	(Paire)
		$\iota_1(t) \mid \iota_2(t)$	(Injections)

Contextes d'évaluation

e	$::=$	α	(Co-variable)
		$\tilde{\mu}x.c$	(Abstraction de terme)
		$\tilde{\mu}[\alpha].c$	(Récupération de contexte)
		$t \cdot e$	(Argument)
		$\pi_1 \cdot e \mid \pi_2 \cdot e$	(Projections)
		$\tilde{\mu}(\iota_1(x_1).c_1 \mid \iota_2(x_2).c_2)$	(Pattern matching)

Commandes

$$c ::= \langle t \parallel e \rangle$$

Groupe identité

$$\frac{}{x : A \vdash x : A} \text{axR}$$

$$\frac{}{|\alpha : A \vdash \alpha : A} \text{axL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e : A \vdash \Delta'}{\langle t \parallel e \rangle : (\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta')} \text{cut}$$

Groupe structurel

$$\frac{c : (\Gamma \vdash \Delta, \alpha : A, \beta : B, \Delta')}{c : (\Gamma \vdash \Delta, \beta : B, \alpha : A, \Delta')} xR$$

$$\frac{c : (\Gamma, x : A, y : B, \Gamma' \vdash \Delta)}{c : (\Gamma, y : B, x : A, \Gamma' \vdash \Delta)} xL$$

$$\frac{c : (\Gamma \vdash \Delta)}{c : (\Gamma \vdash \alpha : A, \Delta)} wR$$

$$\frac{c : (\Gamma \vdash \Delta)}{c : (\Gamma, x : A \vdash \Delta)} wL$$

$$\frac{c : (\Gamma \vdash \alpha : A, \beta : A, \Delta)}{c[\alpha / \beta] : (\Gamma \vdash \alpha : A, \Delta)} cR$$

$$\frac{c : (\Gamma, x : A, y : A \vdash \Delta)}{c[x / y] : (\Gamma, x : A \vdash \Delta)} cL$$

Groupe logique

$$\frac{\Gamma \mid e : A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash [e] : \neg A \mid \Delta} \neg R$$

$$\frac{c : (\Gamma \vdash \alpha : A, \Delta)}{\Gamma \mid \tilde{\mu}[\alpha].c : \neg A \vdash \Delta} \neg L$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \Rightarrow B \mid \Delta} \Rightarrow R$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e : B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid t \cdot e : A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow L$$

$$\frac{c_1 : (\Gamma \vdash \alpha_1 : A, \Delta) \quad c_2 : (\Gamma \vdash \alpha_2 : B, \Delta)}{\Gamma \vdash \mu(\pi_1 \cdot \alpha_1.c_1 \mid \pi_2 \cdot \alpha_2.c_2) : A \wedge B \mid \Delta} \wedge R$$

$$\frac{\Gamma \mid e : A_i \vdash \Delta}{\Gamma \mid \pi_i \cdot e : A_1 \wedge A_2 \vdash \Delta} \wedge L_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A_i \mid \Delta}{\Gamma \vdash \iota_i(t) : A_1 \vee A_2 \mid \Delta} \vee R_i$$

$$\frac{c_1 : (\Gamma, x_1 : A \vdash \Delta) \quad c_2 : (\Gamma, x_2 : B \vdash \Delta)}{\Gamma \mid \tilde{\mu}(\iota_1(x_1).c_1 \mid \iota_2(x_2).c_2) : A \vee B \vdash \Delta} \vee L$$

ÉLIMINATION DES COUPURES \iff EXÉCUTION

Calcul défini comme **interaction** entre un terme t et son contexte e dans la commande $\langle t \parallel e \rangle$:

β -réduction

$$\begin{aligned}\langle \lambda x. t \parallel u \cdot e \rangle &\rightarrow_{\beta} \langle u \parallel \tilde{\mu} x. \langle t \parallel e \rangle \rangle && \text{(Fonction/Argument)} \\ \langle \mu (\pi_1 \cdot \alpha_1 \cdot c_1 \mid \pi_2 \cdot \alpha_2 \cdot c_2) \parallel \pi_1 \cdot e \rangle &\rightarrow_{\beta} c_1[e / \alpha_1] && \text{(Paire/Projection)} \\ \langle \iota_1(t) \parallel \tilde{\mu} (\iota_1(x_1) \cdot c_1 \mid \iota_2(x_2) \cdot c_2) \rangle &\rightarrow_{\beta} c_1[t / x_1] && \text{(Injection/Pattern-matching)} \\ &\vdots\end{aligned}$$

μ -réduction

$$\begin{aligned}\langle \mu \alpha. c \parallel e \rangle &\rightarrow_{\mu} c[e / \alpha] \\ \langle t \parallel \tilde{\mu} x. c \rangle &\rightarrow_{\mu} c[t / x]\end{aligned}$$

\rightarrow_μ non-confluente à cause de la *paire critique* :

$$c[\tilde{\mu}x.c' / \alpha] \stackrel{?}{\leftarrow} \langle \mu\alpha.c \parallel \tilde{\mu}x.c' \rangle \stackrel{?}{\rightarrow} c'[\mu\alpha.c / x]$$

Deux solutions possibles :

1. (Curien/Herbelin) choix *global* en fixant une **stratégie d'évaluation** :

$$c[\tilde{\mu}x.c' / \alpha] \stackrel{\text{cbv}}{\leftarrow} \langle \mu\alpha.c \parallel \tilde{\mu}x.c' \rangle \stackrel{\text{cbn}}{\rightarrow} c'[\mu\alpha.c / x]$$

2. (Munch-Maccagnoni) choix *local* en fixant l'ordre d'évaluation dans les **constructions du langage** (termes/types)

FOCALISATION

Formules

$$A, B ::= X \mid X^\perp \quad (\text{Atomes})$$

$$\mid A \otimes B \mid A \& B \quad (\text{Conjonctions})$$

$$\mid A \oplus B \mid A \wp B \quad (\text{Disjonctions})$$

Négation

\cdot^\perp définie inductivement par dualité de De Morgan :

$$(A \otimes B)^\perp \triangleq A^\perp \wp B^\perp \qquad (A \wp B)^\perp \triangleq A^\perp \otimes B^\perp$$

$$(A \oplus B)^\perp \triangleq A^\perp \& B^\perp \qquad (A \& B)^\perp \triangleq A^\perp \oplus B^\perp$$

En programmation logique, Andreoli découvre que la recherche d'une preuve peut être organisée en une **alternance** de deux phases :

- **Asynchrone** : décomposition de toutes les formules **négatives** *dès que possible*
- **Synchrone** : choix d'une formule **positive**, et décomposition de toutes ses sous-formules jusqu'à la prochaine phase asynchrone (c'est la **focalisation**)

Cette nouvelle dualité reflète l'**inversibilité** des règles d'introduction des connecteurs.

Formules

$A, B ::= \textcolor{red}{X} \mid \textcolor{blue}{X}^\perp$ (Atomes)

$\mid \textcolor{red}{A} \otimes \textcolor{red}{B} \mid \textcolor{blue}{A} \& \textcolor{blue}{B}$ (Conjonctions)

$\mid \textcolor{red}{A} \oplus \textcolor{red}{B} \mid \textcolor{blue}{A} \wp \textcolor{blue}{B}$ (Disjonctions)

Négation

\cdot^\perp définie inductivement par dualité de De Morgan :

$$(\textcolor{red}{A} \otimes \textcolor{red}{B})^\perp \triangleq \textcolor{blue}{A}^\perp \wp \textcolor{blue}{B}^\perp \qquad (\textcolor{blue}{A} \wp \textcolor{blue}{B})^\perp \triangleq \textcolor{red}{A}^\perp \otimes \textcolor{red}{B}^\perp$$

$$(\textcolor{red}{A} \oplus \textcolor{red}{B})^\perp \triangleq \textcolor{blue}{A}^\perp \& \textcolor{blue}{B}^\perp \qquad (\textcolor{blue}{A} \& \textcolor{blue}{B})^\perp \triangleq \textcolor{red}{A}^\perp \oplus \textcolor{red}{B}^\perp$$

- Munch-Maccagnoni interprète cette dualité comme celle entre évaluations **stricte** (cbv) et **paresseuse** (cbn)
- Réduction **focalisante** basée sur une syntaxe de **valeurs polarisées** :

$$V ::= V_+ \mid t_-$$

$$V_+ ::= x \mid (V, V) \mid \iota_i(V)$$

$$t_- ::= \alpha \mid \mu(\kappa, \kappa').c \mid \mu(\iota_1(\kappa_1).c_1 \mid \iota_2(\kappa_2).c_2)$$

- Formes normales \Longleftrightarrow Preuves focalisées

Remarque : on a remplacé la dualité **terme**/**contexte** par **positif**/**négatif**, on peut alors oublier la distinction **droite**/**gauche** des séquents.

$$\frac{}{\vdash x : P \mid x : P^\perp} (ax_+) \quad \frac{}{\vdash \alpha : N \mid \alpha : N^\perp} (ax_-)$$

$$\frac{c : (\vdash \kappa : A, \Gamma)}{\vdash \mu \kappa.c : A \mid \Gamma} (\mu) \quad \frac{\vdash t : A \mid \Gamma \quad \vdash u : A^\perp \mid \Delta}{\langle t \parallel u \rangle : (\vdash \Gamma, \Delta)} (cut)$$

$$\frac{\vdash t : A \mid \Gamma \quad \vdash u : B \mid \Delta}{\vdash (t, u) : A \otimes B \mid \Gamma, \Delta} (\otimes) \quad \frac{c : (\vdash \kappa : A, \kappa' : B, \Gamma)}{\vdash \mu(\kappa, \kappa').c : A \wp B \mid \Gamma} (\wp)$$

$$\frac{c : (\vdash \kappa : A, \Gamma) \quad c' : (\vdash \kappa' : B, \Gamma)}{\vdash \mu(l_1(\kappa).c \mid l_2(\kappa').c') : A \& B \mid \Gamma} (\&) \quad \frac{\vdash t : A \mid \Gamma}{\vdash l_i(t) : A_1 \oplus A_2 \mid \Gamma} (\oplus_i)$$

$$\frac{c : (\vdash \Gamma)}{c : (\vdash \kappa : A, \Gamma)} (w) \quad \frac{c : (\vdash \kappa : A, \kappa' : A, \Gamma)}{c[\kappa/\kappa'] : (\vdash \kappa : A, \Gamma)} (c)$$

RÉALISABILITÉ CLASSIQUE

Définition (Observation)

Une *observation* \Downarrow est un ensemble de commandes closes, qui est clos par anti-réduction :

$$c \rightarrow c', c' \in \Downarrow \implies c \in \Downarrow$$

Définition (Orthogonalité)

t_+ est *orthogonal* à t_- (noté $t_+ \Downarrow t_-$) ssi $\langle t_+ \parallel t_- \rangle \in \Downarrow$.

Définition (Orthogonal)

L'*orthogonal* T^\perp d'un ensemble de termes de même polarité T est défini par :

$$T^\perp \triangleq \{u \mid \forall t \in T, t \Downarrow u\}$$

On peut alors interpréter les connecteurs de la logique par des **comportements**, c'est-à-dire des ensembles de termes de même polarité clos par biorthogonal $\cdot^{\perp\perp}$:

$$\begin{aligned} |A \otimes B| &\triangleq (|A| \times |B|)^{\perp\perp} & |A \wp B| &\triangleq (|A^\perp| \times |B^\perp|)^\perp \\ |A \oplus B| &\triangleq (|A| + |B|)^{\perp\perp} & |A \& B| &\triangleq (|A^\perp| + |B^\perp|)^\perp \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} T \times U &\triangleq \{(\mathbf{t}, \mathbf{u}) \mid t \in T, u \in U\} \\ T + U &\triangleq \{\iota_1(\mathbf{t}) \mid t \in T\} \cup \{\iota_2(\mathbf{u}) \mid u \in U\} \end{aligned}$$

Définition (Relation de réalisabilité)

On dit que t réalise A (noté $t \Vdash A$) lorsque $t \in |A|$.

Théorème (Lemme d'adéquation)

Soit t un terme typable dans LK_{pol} par $\vdash t : B \mid \kappa_1 : A_1, \dots, \kappa_n : A_n$. Alors pour tous termes clos u_1, \dots, u_n , on a :

$$u_1 \Vdash A_1^\perp, \dots, u_n \Vdash A_n^\perp \implies t[\vec{u}_i / \vec{\kappa}_i] \Vdash B$$

- Propriété de **constructivité** des connecteurs (notamment propriété de la disjonction pour \oplus)
- **Normalisation** (faible)
- **Paramétricité** (en passant au second ordre)

Merci !