Programmation linéaire

Chapitre 1:

Introduction à la programmation linéaire

EXEMPLES DE PROGRAMME LINÉAIRE

Exemple 1 : Production de peinture

Une société produit de la peinture intérieure et extérieure à partir de deux produits de base M1 et M2.

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

<u>**Contraintes supplémentaires :**</u>

- Demande maximum de peinture intérieure : 2 tonnes/jour.
- La production en peinture intérieure ne dépasse celle de l'extérieur que d'une tonne au maximum.

FORMULATION

Variables, inconnus du problème :

x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour

x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour

Fonction objectif :

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

Restrictions (*contraintes*)

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 2 : Diet problem

Une personne doit décider de son régime alimentaire.
– Elle a le choix entre deux types d'aliments (maïs, fèves) à mélanger pour un repas.
– La quantité nécessaire par jour est de 400g.
– Le régime stipule que la personne doit manger au moins 30% de protéines et au plus 5% de fibres.

Données :

	Quantité par gramme d'aliment		Coût
Aliment	Protéines	Fibres	(EUR / kg)
Maïs	0.09	0.02	1.5
Fèves	0.60	0.06	4.5

Variables : $x_1 = \text{grammes de maïs par repas} \quad x_2 = \text{grammes de fèves par repas}$

Objectif

$\min z = 0.0015x_1 + 0.0045x_2$

Contraintes

Quantité totale : $x_1 + x_2 \geq 400$

Protéines : $0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$

Fibres : $0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2)$

Non-négativité : $x_1, x_2 \geq 0$

EXERCICE : PLAN DE TRANSPORT OPTIMAL

L'exemple ci-dessous est le cas de deux usines de boites de conserves qui expédient des caisses vers ses dépôts. Nous cherchons le plan d'expédition des caisses qui minimise le coût total de transport des usines aux dépôts. Pour simplifier, supposons qu'il y en a deux usines et trois dépôts. Les offres des usines et les demandes des dépôts sont décrites ci-dessous :

usine 1 :	350	dépôt 1 :	200
usine 2 :	450	dépôt 2 :	300
		dépôt 3 :	50

Les coûts de transport de chaque origine vers chaque destination sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Usines	Dépôts		
	1	2	3
1	25	17	16
2	24	18	14

Si x_{ij} représente le nombre de caisses expédiées de l'origine i vers la destination j, le coût total de l'expédition se traduit alors par l'équation :

$$z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} c_{ij}x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13}$$
$$c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

$$z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}$$

C'est la fonction objectif à minimiser.

Comme il est impossible d'expédier plus de caisses d'une origine donnée qu'il n'y en a de disponibles, nous sommes confrontés aux deux contraintes :

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350 \quad \text{(usine 1)}$$
$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450 \quad \text{(usine 2)}$$

De plus, il faut approvisionner chacun des trois dépôts avec la quantité requise, ce qui nous donne trois nouvelles contraintes :

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i1} = x_{11} + x_{21} = 200 \quad \text{(dépôt 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i2} = x_{12} + x_{22} = 300 \quad \text{(dépôt 2)}$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i3} = x_{13} + x_{23} = 50 \quad \text{(dépôt 3)}$$

Soit a_i la quantité de caisses disponibles à l'origine i et b_j celle requise à la destination j.

À noter que le nombre de caisses disponibles doit être supérieur ou égal au nombre de caisses requises :

$$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 + b_3$$

Dans le cas contraire, le problème n'a pas de solutions réalisables.

Comme il n'est pas possible d'expédier des quantités négatives, nous avons encore les six contraintes de non-négativité suivantes :

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2 \quad \text{et} \quad j = 1,2,3$$

Finalement, le programme linéaire à résoudre est :

$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23} \\ \text{sous contraintes} & & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350 \\ & & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450 \\ & & x_{11} + x_{21} = 200 \\ & & x_{12} + x_{22} = 300 \\ & & x_{13} + x_{23} = 50 \\ \text{et} & & x_{ij} \geq 0, \ i = 1,2 \ \text{ et } \ j = 1,2,3 \end{array}$$

Définition d’un programme linéaire :

• *Les variables de décision :*
Ce sont les inconnus à déterminer et dont dépend fonction objective.
• *La fonction objectif :*
C’est la fonction qui décrit l’objectif à optimiser : c’est une combinaison linéaire des variables de décision.
• *Les contraintes du modèles :*
elles décrivent les restrictions imposées par le problème.

Remarque :

Les variables de décision peuvent être :
1- *Continues* : dans ce cas, on dit que le programme linéaire est continue.
2- *Entières* : Le programme linéaire est dit entier.
3- *Binaires* : le programme linéaire est dit binaire.
4- *Mixtes* : le programme linéaire est dit mixte.

Définitions :

• Une solution est dite réalisable si elle vérifie les contraintes du programme linéaire.
• Une solution est dite optimale si elle est réalisable et optimise l’objectif.

Planification ouvriers

On considère un lieu de travail (FedEx, DHL…) où il existe des besoins quotidiens en ouvriers.

Quelques restrictions :

- Il faut que tout ouvrier soit engagé à plein temps.
- Chaque ouvrier travail cinq jours consécutifs et il se repose deux jours.
- Le travail durant les samedis et les dimanches doit être payé deux fois plus que le travail durant le reste des jours.

Les besoins en nombre d'ouvriers par jour sont donnés par le tableau suivant

lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
17	13	15	19	14	16	11

Le salaire par jour s'élève à 200 Euros.

Formulation :

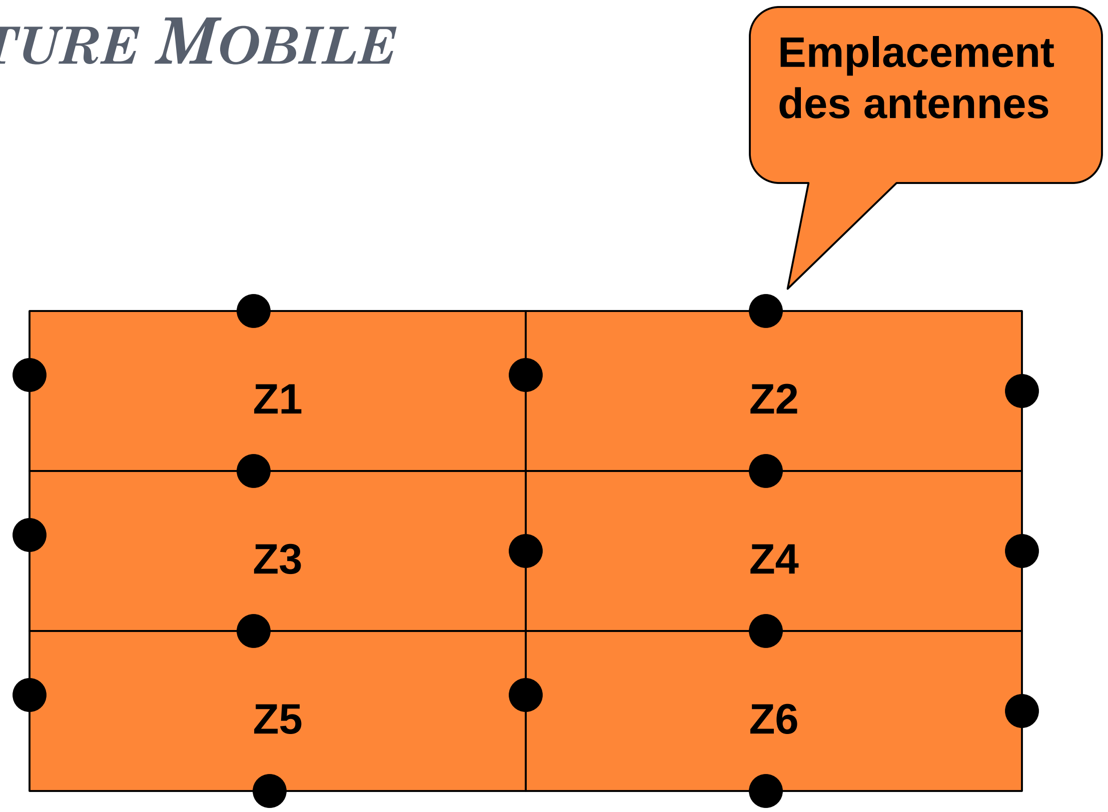
Soit Y_j le nombre d'ouvriers qui commencent leur travail le jour (j) de la semaine.

	Jour de début	Salaire	Jours de travail
Y1	lundi	1000	Lun -> Ven
Y2	Mardi	1200	Mar -> Sam
Y3	Mercredi	1400	Mer ->dim
…	…	…	….

$$
\begin{array}{llcccccccccccccccc}
\min & 5y_1 & + & 6y_2 & + & 7y_3 & + & 7y_4 & + & 7y_5 & + & 7y_6 & + & 6y_7 & & \\
 & y_1 & & & & & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 17 \\
 & y_1 & + & y_2 & & & & & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 13 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & & & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 15 \\
\text{s. à} & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & & & + & y_7 & \geq & 19 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & & & & & \geq & 14 \\
 & & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & & & \geq & 16 \\
 & & & & & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & + & y_6 & + & y_7 & \geq & 11 \\
\end{array}
$$

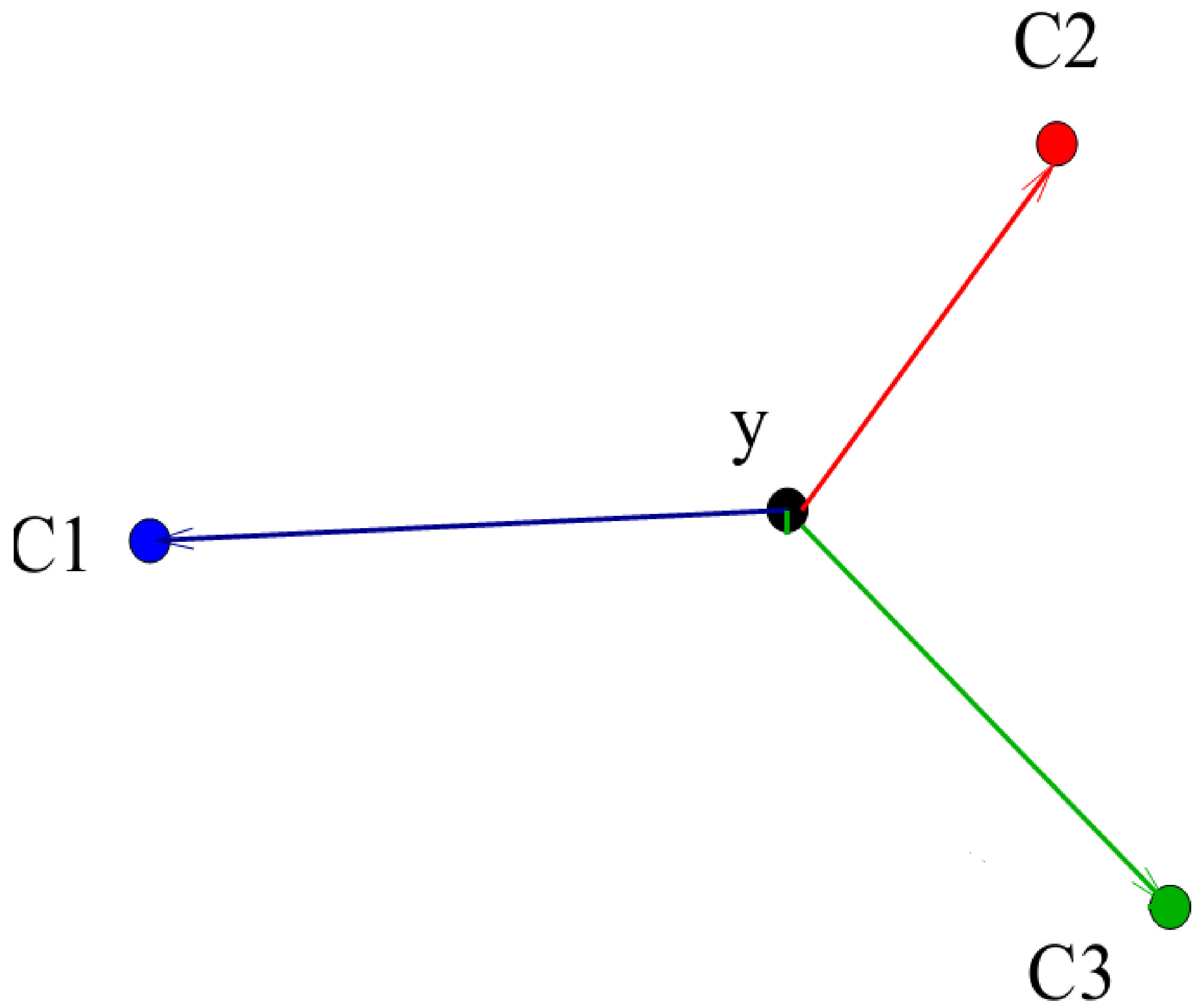
$$y_i \geq 0, y_i \in \mathbb{Z}, i = 1, ..., 7$$

COUVERTURE MOBILE



Objectif : assurer la couverture des différentes zones moyennant un coût global minimal.

Facility Locations



Facility Locations

$$\text{Min} \quad \sum_{i\in F}\sum_{j\in D} C_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in F} f_i y_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in F} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, j \in D$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad \forall\, j \in D, \forall\, i \in F$$

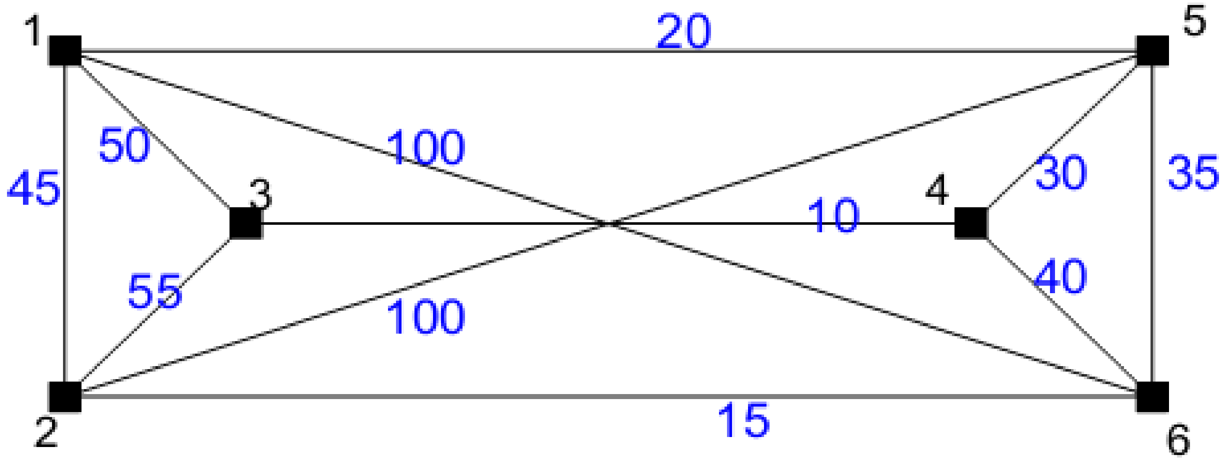
$$x_{ij},\, y_i \in \{0,1\} \quad \forall\, j \in D, \forall\, i \in F$$

Le voyageur de commerce

Le probème, c'est de trouver un *tour* de coût minimum.

Un tour, c'est un cycle qui contient tous les nœuds.

Autrement dit, il faut visiter tous les nœuds dans une séquence telle que chaque nœud n'est visité qu'une seule fois. Il faut trouver la telle séquence qui minimiset la somme des coûts dans le cycle défini.



Pour chaque arête $(i, j) \in A$, il y a un coût c_{ij}

Notons Xij une variable de succession, binaire, qui prend la valeur 1 si la ville j est visitée immédiatement après la ville i et zéro sinon.

$$
\begin{array}{lll}
Min & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j}.x_{i,j} & \\
\text{s.c.} & \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1 & \forall\, i = 1..n \\
 & \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1 & \forall\, j = 1..n \\
 & \sum_{i \in S, j \notin S} x_{i,j} \geq 2 & \forall\, S \subset X, S \neq \emptyset \\
 & x_{i,j} \in \{0,1\} & \forall\, i = 1..n, \forall\, j = 1..n
\end{array}
$$

Plan de production optimal

La compagnie Remington a mis en place une politique de production. La compagnie prévoit de commercialiser trois produits, dont chacun doit subir l'usinage, meulage, et les opérations d'assemblage. Le tableau ci-dessous résume les heures d'usinage, meulage et assemblage requises par chaque unité de chaque produit, et le total heures de capacité disponibles pour chaque opération.

	Hours Required By			
Operation	**Product 1**	**Product 2**	**Product 3**	**Total Hours Available**
Machining	2	3	6	600
Grinding	6	3	4	300
Assembly	5	6	2	400

Le département de finance a estimé que les produits 1, 2 et 3 contribuent respectivement de 48, 55 et 50 $ au profit. Toutefois, la production nécessite des opérations de réglage sur la ligne de production qui coûtent 1000, 800 et 900$ respectivement pour les produits 1, 2 et 3. Le département marketing prévoit de vendre l'ensemble des produits. Par conséquent, la gestion de Remington veut déterminer la combinaison la plus rentable de produits à produire.

Plan de production optimal

$$\text{MAX:} \quad 48X_1 + 55X_2 + 50X_3 - 1000Y_1 - 800Y_2 - 900Y_3$$

$$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 600$$

$$6X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 300$$

$$5X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 400$$

$$X_1 \leq M_1Y_1$$

$$X_2 \leq M_2Y_2$$

$$X_3 \leq M_3Y_3$$

Yi : Binaire
Xj : Réel

EXEMPLE :

- Trois types de produits
- Deux usines
- Profit/unité de produit (1000 $)
- Ventes potentielles par produit (unités/semaine)
- Capacité de production par usine (h/semaine)
- Pas plus de deux produits peuvent être fabriqués
- Une seule des deux usines doit être exploitée

	Produit 1 tps production (h/unité)	Produit 2 tps production (h/unité)	Produit 3 tps production (h/unité)	Capacité de production (h/semaine)
Usine 1	3	4	2	30
Usine 2	4	6	2	40
Profit/unité (1000 $)	5	7	3	
Ventes potentielles (/semaine)	7	5	9	

SOLUTION

Variables :

Xj : nombre d'unités fabriquées du produit j.

Pour représenter la contrainte « Pas plus de deux produits », on doit introduire des variables 0-1 :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases}$$

Pour représenter la contrainte « Une seule des deux usines », on doit ajouter une variable 0-1 :

$$y_4 = \begin{cases} 1 & \text{si l'usine 1 est choisie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Objectif :

$$\max Z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

Ventes potentielles :

$$x_1 \leq 7, x_2 \leq 5, x_3 \leq 9$$

Pas plus de deux produits :

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

Relation entre variables continues et variables 0-1 :

$$x_1 \leq 7y_1, x_2 \leq 5y_2, x_3 \leq 9y_3$$

Une seule des deux usines :

$$\text{soit } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$\text{soit } 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40$$

En utilisant la variable 0-1 (et M très grand) :

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30 + M(1 - y_4)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40 + My_4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4$$

Problème de Financement :

Une société a les problèmes de financement à court terme suivants :

Mois	1	2	3	4	5	6
financement	-150	-100	200	-200	50	300

L'entreprise dispose des sources de financement suivantes :

- Une ligne de crédit d'un maximum de 100 $ à un taux d'intérêt de 1% par mois.

- Il peut émettre du papier commercial à 90 jours portant un intérêt total de 2% pour une période de 3 mois,

-Les fonds excédentaires peuvent être investis à un taux d'intérêt de 0,3% par mois.

Variables de décisions

-xi montant associé à la ligne de crédit du mois i.

-yi montant associé au papier de commerce publié le mois i.

-zi l'excès de finance du Mois i.

-v le montant de richesse à la fin du sixième mois.

$$
\begin{array}{lrclclclclcr}
\max & v & & & & & & & & & & \\
& x_1 & + & y_1 & & & & & - & z_1 & = & 150 \\
& x_2 & + & y_2 & - & 1.01x_1 & + & 1.003z_1 & - & z_2 & = & 100 \\
& x_3 & + & y_3 & - & 1.01x_2 & + & 1.003z_2 & - & z_3 & = & -200 \\
& x_4 & - & 1.02y_1 & - & 1.01x_3 & + & 1.003z_3 & - & z_4 & = & 200 \\
& x_5 & - & 1.02y_2 & - & 1.01x_4 & + & 1.003z_4 & - & z_5 & = & -50 \\
& & - & 1.02y_3 & - & 1.01x_5 & + & 1.003z_5 & - & v & = & -300 \\
& x_1 & \leq & 100 & & & & & & & & \\
& x_2 & \leq & 100 & & & & & & & & \\
& x_3 & \leq & 100 & & & & & & & & \\
& x_4 & \leq & 100 & & & & & & & & \\
& x_5 & \leq & 100 & & & & & & & & \\
& x_i, y_i, z_i & \geq & 0. & & & & & & & &
\end{array}
$$

RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'UN PL CONTINUES À 2 VARIABLES

Problèmes de maximisation :

Définition : Courbe de niveau

Soit $f : IR^2 \longrightarrow IR$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

Une courbe de niveau est $\{(x, y)/f(x, y) = cste\}$

1ère méthode : courbe de niveau

1ère Etape : Représentation de l'ensemble des sols réalisables.

2ème Etape : Localisation de la solution optimale.

Faire déplacer la courbe de niveau associée à l'objectif jusqu'au obtenir le meilleur niveau dans le sens d'amélioration, tout en restant à l'intérieur du domaine de faisabilité.

3ème Etape : Calcul de la solution optimale.

2ème méthode : points anguleux

Remarque : Vu la linéarité des contraintes et de l'objectif, la solution optimale correspond à l'un des points anguleux (solutions de bases).

1ère Etape : Représentation de l'ensemble des sols réalisables.

2ème Etape : Identification des solutions de bases.

3ème Etape : Calcul de la solution optimale.

Exemple :

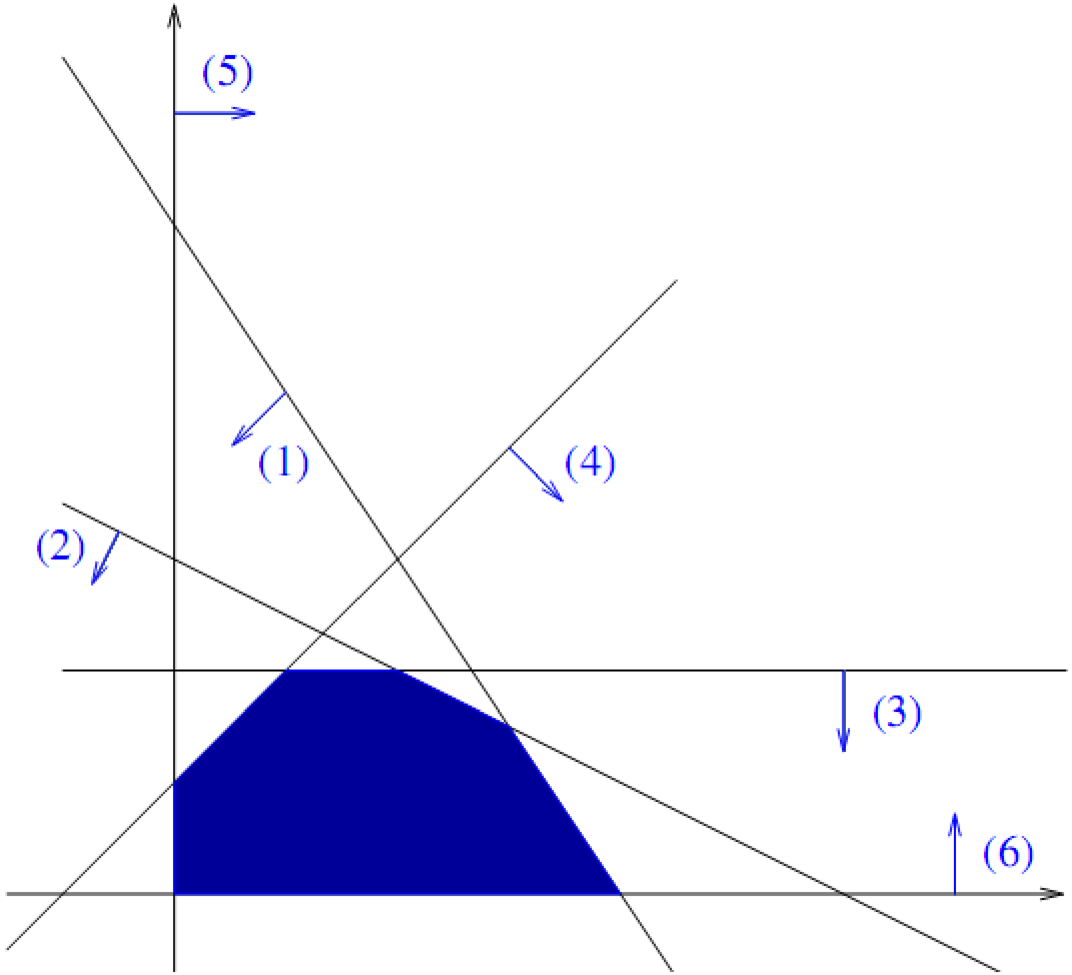
Production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

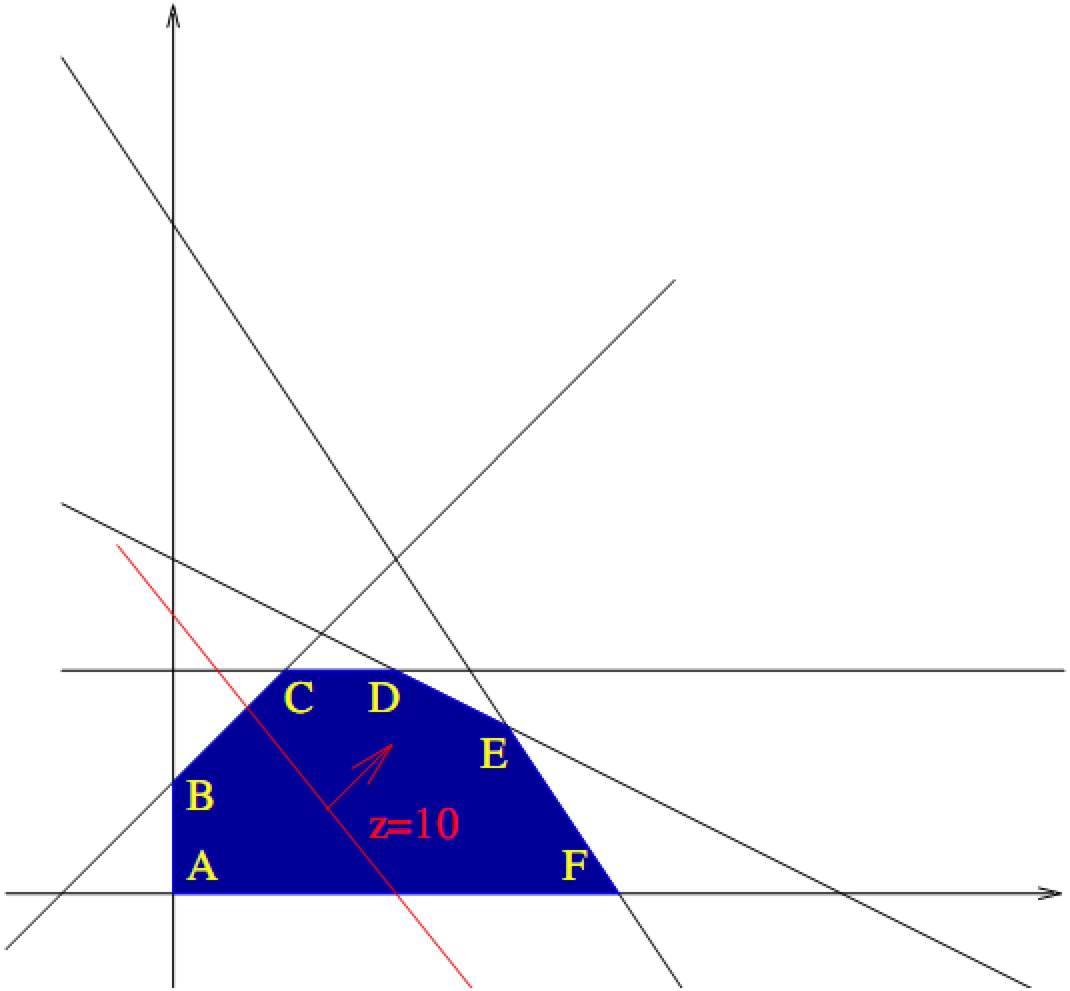
sous les contraintes

$$\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \quad (1)\\
x_1 + 2x_2 &\leq 6 \quad (2)\\
x_2 &\leq 2 \quad (3)\\
x_2 - x_1 &\leq 1 \quad (4)\\
x_1 &\geq 0 \quad (5)\\
x_2 &\geq 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

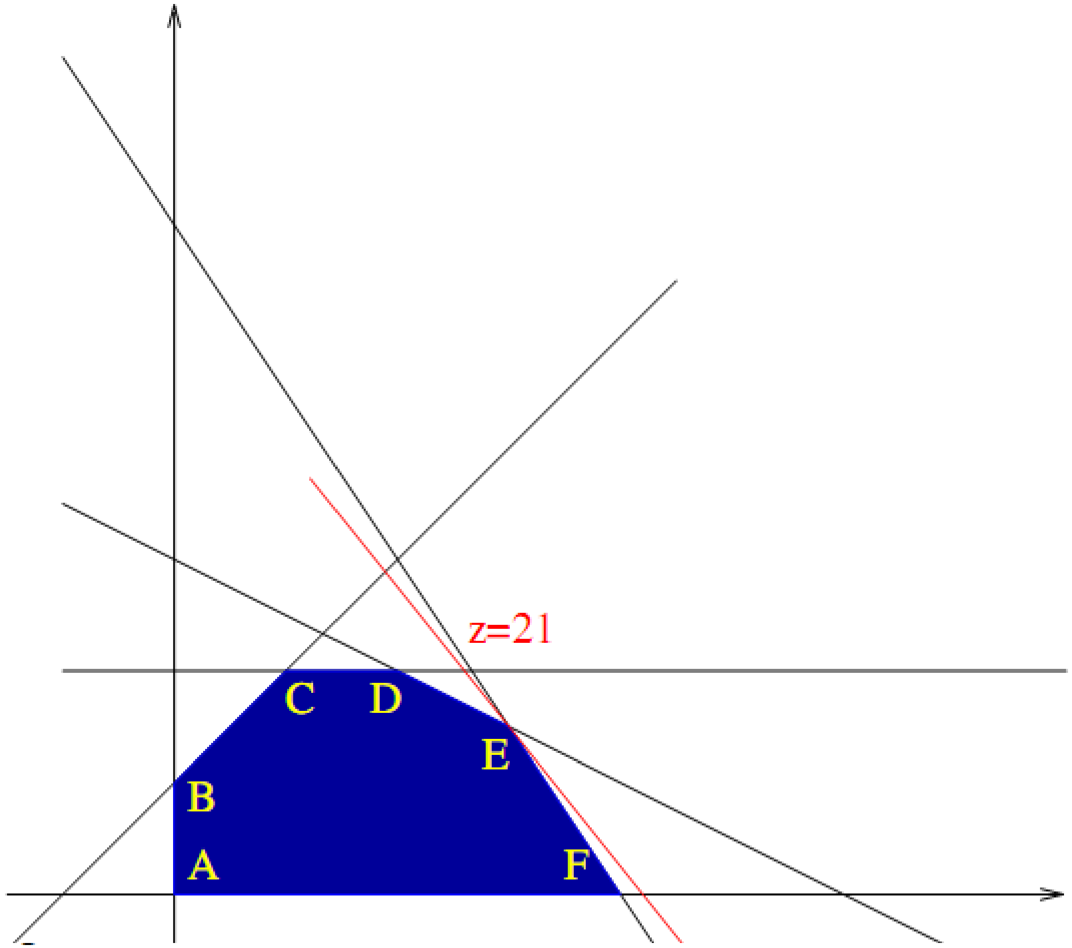
Représentation graphique



Géométrie des solutions



Résolution graphique (Production de peinture)



La droite mobile doit garder une intersection avec l'ensemble des solutions admissibles.

Solution optimale : $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$ (E)

La solution optimale est un *sommet du polyèdre*.

Cette observation est la base de l'algorithme du simplexe.

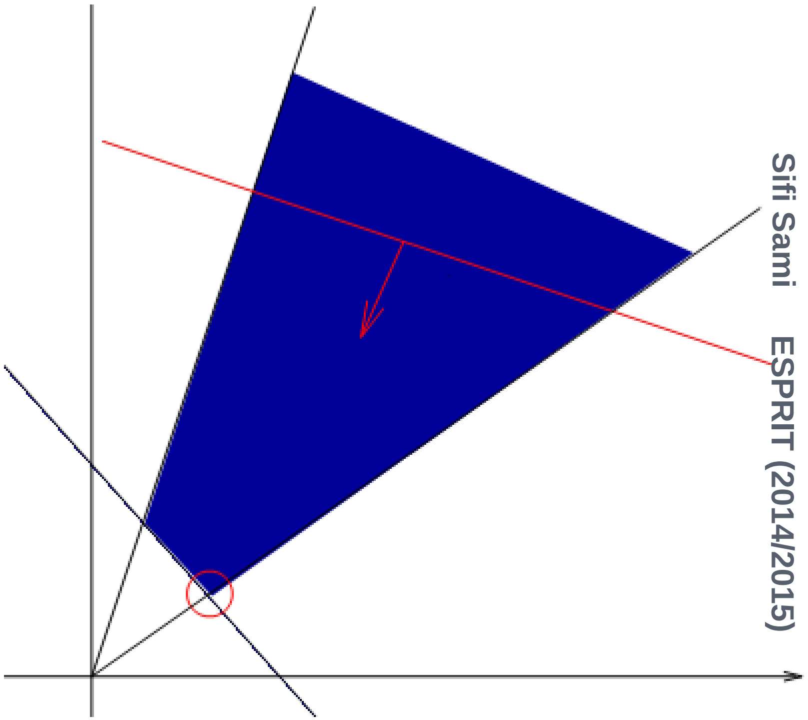
Résolution graphique (Diet problem)

Diet problem

$$\min z = 0.0015x_1 + 0.0045x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \geq & 400 \\ 0.21x_1 - 0.30x_2 & \leq & 0 \\ 0.03x_1 - 0.01x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Solution optimale

$$x_1 = \frac{4000}{17} \simeq 235.3 \quad x_2 = \frac{2800}{17} \simeq 164.7 \quad z = \frac{186}{170} \simeq 1.094$$

Sifi Sami ESPRIT (2014/2015)

__Exercice :__ Résoudre graphiquement les problèmes suivants

P1 :
$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

P2 :
$$\begin{array}{rcl} \text{Minimiser } z & = & 1000x_1 + 1000x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + 2x_2 \geq 90 \\ & & x_1 + 4x_2 \geq 120 \\ & & 6x_1 + 3x_2 \geq 180 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

P3 :
$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 8x_1 + 4x_2 \geq 40 \\ & & x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

P4 :
$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & x_1 + 2x_2 \\ \text{sous contraintes} & & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & & x_1 - x_2 \geq 3 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

P5 :
$$\begin{array}{rcl} \text{Maximiser } z & = & x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} & & 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \text{et} & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 1:

Un fermier possède 50 hectares de terre. Il désire planter des pommes de terre dans une partie, du froment dans une autre et laisser, peut-être, la troisième partie en jachère. Le prix de la culture est de 5 CHF par hectare pour la pomme de terre et de 10 CHF par hectare pour le froment. Le fermier travaille 1/2 jour par hectare pour la pomme de terre et 2 jours par hectare pour le froment. Il dispose d'un capital de 550 CHF et peut travailler 80 jours. Le bénéfice est de 20 CHF par hectare pour la pomme de terre et de 60 CHF par hectare pour le froment. Comment doit-il organiser ses plantations pour réaliser un bénéfice maximal ?

Programmation linéaire

Chapitre 2:

Résolution d’un programme linéaire :

- Méthode du simplexe

Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

Forme standard

Définition (Forme standard) : Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

n variables, m contraintes, m < n.

Forme canonique

Définition (Forme canonique) : Un programme linéaire est sous forme canonique lorsque toutes ses contraintes sont des inégalités et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

n variables, m contraintes, m < n.

Forme standard du problème de production de peinture

$$\begin{aligned} \max z = 5x_1 + 4x_2 & & \\ s.c. 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccccccl} \max z = & 5x_1 & +4x_2 & & & & & & \\ \text{s.c.} & 6x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & & = & 24 \\ & x_1 & +2x_2 & & +s_2 & & & = & 6 \\ & & x_2 & & & +s_3 & & = & 2 \\ & -x_1 & +x_2 & & & & +s_4 & = & 1 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 & \geq & 0 \end{array}$$

<u>S_i : Variables d'écart</u>

Représentation matricielle

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformation minimisation-maximisation

$$\text{Minimiser } z = \boldsymbol{cx}$$

$$\text{Maximiser } (-z) = -\boldsymbol{cx}$$

Variables sans restriction de signe

$$x = x^+ - x^-$$

où $x^+ = \text{maximum } (0, x)$ et $x^- = \text{maximum } (0, -x)$

Exercice : Transformer le problème suivant sous sa forme standard

$$\begin{aligned} \text{Minimiser } z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{sous contraintes} \quad & -x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \text{ sans restriction de signe} \end{aligned}$$

Variables pouvant prendre des valeurs négatives
Exemple 5 (Vente de hamburgers) :

- Un fast-food vend des hamburgers et des cheeseburgers. Un hamburger utilise 125 g. de viande alors qu'un cheeseburger n'en utilise que 100 g.
- Le fast-food démarre chaque journée avec 10 kg de viande mais peut commander de la viande supplémentaire avec un coût additionnel de 2 EUR par kg pour la livraison.
- Le profit est de 0.02 EUR pour un hamburger et 0.015 EUR pour un cheeseburger.
- La demande ne dépasse pas 900 sandwiches / jour, et les surplus de viande sont donnés au Restos du Coeur.

Combien le fast-food doit-il produire de sandwiches de chaque type par jour ?

Solution :

Variables

x_1 = nombre de hamburgers / jour x_2 = nombre de cheeseburgers / jour

Contraintes

- Commande de viande supplémentaire :

$$125x_1 + 100x_2 + x_3 = 10000, \qquad x_3 \text{non restreint}$$

- Le coût pour la viande supplémentaire apparaît seulement si $x_3 < 0$.

– Substitution de x3 par 2 variables non-négatives :

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-, \; x_3^+, x_3^- \geq 0$$
$$125x_1 + 100x_2 + x_3^+ - x_3^- = 10000$$

– Borne supérieure sur les ventes : $x_1 + x_2 \leq 900$.

Modèle complet

$$\begin{array}{rll} \max z = & 0.02x_1 + 0.015x_2 - 0.002x_3^- & \\ \text{s.c.} & 125x_1 + 100x_2 + x_3^+ - x_3^- & = 10000 \\ & x_1 + x_2 & \leq 900 \\ & x_1, x_2, x_3^+, x_3^- & \geq 0 \end{array}$$

Remarque : Il existe une solution optimale telle que $x_3^+ = 0$ ou $x_3^- = 0$.

Solutions de base réalisables

Définition
Supposons qu'après introduction des variables d'écarts, on obtient un système d'équations composé de m contraintes et n variables. Alors une solution est dite de base réalisable, s'il est réalisable et elle vérifie :

- (n − m) variables sont nulles (variables hors base).
- m variables ne sont pas nécessairement nulles (variables de base).

Propriété :
(x_1, ..., x_k, s_1, ..., s_m) est une solution de base réalisable $\Longleftrightarrow$ (x_1, ..., x_k) est un point extrême (point anguleux).

Détermination de la solution de base optimale
- Nombre maximum de solutions de base : n!/(m!(n-m)!)
- Mauvaise solution : énumérer toutes les solutions de base
- **Méthode du simplexe** : partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine permettant d'améliorer la valeur de l'objectif (changement d'une variable en base).

3 étapes:
1. Détermination de la variable entrante.
2. Détermination de la variable sortante.
3. Pivotage.

La méthode du simplexe (Hypothèse: second membre b positif)

Description algébrique :
Idée de base : partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif.

Etape 1: Le choix d'une solution de base réalisable. En général on pose $x_1 = \dots = x_k = 0$

$$\begin{array}{rcrrr} z & = & 0 & +5x_1 & +4x_2 \\ s_1 & = & 24 & -6x_1 & -4x_2 \\ s_2 & = & 6 & -x_1 & -2x_2 \\ s_3 & = & 2 & & -x_2 \\ s_4 & = & 1 & +x_1 & -x_2 \end{array}$$

Solution de base réalisable S_0=(x1=0, x2=0, s1=24, s2=6, s3=1)

Etape 2 : Choix de la variable (hors base) entrante dans la base

- Si x_1 augmente d'une unité (entre en base), la valeur de la fonction objectif z augmente de 5 unité.
- Si x_2 augmente d'une unité (entre en base), la valeur de la fonction objectif z augmente de 4 unité.

Dans ce cas la variable entrante est x_1

<u>Quelle est la valeur maximale de x1 ?</u>

Variable sortante

$$\begin{array}{llllll} s_1 = & 24 - 6x_1 & \geq 0 & \rightarrow x_1 \leq 4 & & \\ s_2 = & 6 \quad - x_1 & \geq 0 & \rightarrow x_1 \leq 6 & & \\ s_3 = & 2 & \geq 0 & \rightarrow 2 \geq 0 & \textit{toujours!} & \\ s_4 = & 1 \quad + x_1 & \geq 0 & \rightarrow x_1 \geq -1 & \textit{toujours!} & \end{array} \quad \Rightarrow x_1 \leq 4$$

Pivotage

- Si $x_1 = 4$, alors $s_1 = 0$.
- *x_1 entre en base, s_1 sort de la base.*
- Substitution :

$$x_1 = 4 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{2}{3}x_2$$

- Nouveau système :

$$\begin{array}{rllll} z = & 20 & -\frac{5}{6}s_1 & +\frac{2}{3}x_2 \\ x_1 = & 4 & -\frac{1}{6}s_1 & -\frac{2}{3}x_2 \\ s_2 = & 2 & +\frac{1}{6}s_1 & -\frac{4}{3}x_2 \\ s_3 = & 2 & & -x_2 \\ s_4 = & 5 & -\frac{1}{6}s_1 & -\frac{5}{3}x_2 \end{array}$$

Solution de base réalisable S_1=(x1=4, x2=0, s1=0, s2=6, s3=1)

Représentation matricielle

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

n variables, m contraintes, m < n.

Etant donné les VB et VHB d'une SBR, en peut partitionner toute solution réalisable X en X_B et X_H. Dans ce cas le système AX=b peut être réecrit sous la forme :

$$BX_B + HX_H = b$$

$$ou \text{ encore}$$

$$X_B = B^{-1}b - HX_H$$

D'où la SBR vérifie : $\left\{ \begin{array}{c} X_H = 0 \\ X_B = B^{-1}b \end{array} \right.$

Remarque :

Le vecteur C peut être aussi partionné en C_B et C_H.

Sifi Sami ESPRIT (2014/2015)

Les tableaux simplexe

A chaque SBR on fait correspondre un et un seul tableau simplexe, à partir du quel on lit :

- les VB ainsi que leurs valeurs et leurs coefficients dans la fonction objectif (Z) (colonne c_B).
- la valeur de la fonction objectif Z.
- le système des contraintes écrit sous la forme $X_B = B^{-1}b - HX_H$.
- les variables entrantes.($\uparrow$)
- les ratios.
- la variables sortantes($\longrightarrow$) .

Représentation matricielle

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tableau : (0)

	Cj	5	4	0	0	0	0			
C_B	V_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$Valeur$	$ratio{=}\dfrac{valeur}{colonne\ Pivot}$	
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24	4	$V.S$
0	s_2	$[1]\ P$	2	0	1	0	0	6	6	
0	s_3	0	1	0	0	1	0	2	$-$	
0	s_4	-1	1	0	0	0	1	1	$-$	
	Zj	0	0	0	0	0	0	$Z{=}0\ [C_B * valeur]$		
	$Cj{-}Zj$	5	4	0	0	0	0			
		$V.E$								

Remarque :

On s'intéresse qu'aux ratios positifs finis.

Etape 2 : Construction du tableau (i+1) à partir du tableau i.

- La ligne de la variable enrante dans le tableau (i+1) est la ligne pivot dans le tableau (i) divisée par le pivot.
- Pour le reste des valeurs manquantes, on utilise la formule du rectangle.

	b		a
	pivot		c

Tableau (i)

La valeur de (a) dans le tableau (i+1) est donnée par : $a' = a - \dfrac{bc}{pivot}$

Sifi Sami ESPRIT (2014/2015)

Forme standard du problème de production de peinture

$$
\begin{aligned}
\max z = 5x_1 + 4x_2 & & \\
s.c. 6x_1 + 4x_2 & \leq & 24 \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\
x_2 & \leq & 2 \\
x_2 - x_1 & \leq & 1 \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcccccccl}
\max z = & 5x_1 & +4x_2 & & & & & & \\
\text{s.c.} & 6x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & & = & 24 \\
& x_1 & +2x_2 & & +s_2 & & & = & 6 \\
& & x_2 & & & +s_3 & & = & 2 \\
& -x_1 & +x_2 & & & & +s_4 & = & 1 \\
& x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

S_i : Variables d'écart

Représentation matricielle

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

			Colonne pivot							
	Tab1		5	4	0	0	0	0		RATIO
	Base	**Cb**	**X1 (VE)**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**VAL**	
Ligne Pivot (Lp)	S1	0	6=p	4	1	0	0	0	24	24/6 (VS)
	S2	0	1	2	0	1	0	0	6	6/1
	S3	0	0	1	0	0	1	0	2	-
	S4	0	-1	1	0	0	0	1	1	-
	C-Z		5	4	0	0	0	0	0	

Tab2		5	4	0	0	0	0		Ratio
Base	**Cb**	**X1**	**X2 (VE)**	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**VAL**	
x1	5	1	2 / 3	1 / 6	0	0	0	4	6
S2	0	0	4 / 3	0	1	0	0	2	6/4
S3	0	0	1	0	0	1	0	2	2
S4	0	0	5 / 3	1 / 6	0	0	1	5	3
C-Z		0	2/3	-5 / 6	0	0	0	20	

Tableau 3		5	4	0	0	0	0	
Base	**Cb**	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**VAL**
x1	5	1	0	1 / 4	0	0	0	3
x2	4	0	1	0	3 / 4	0	0	3 / 2
S3	0	0	0	1 / 8	0	1	0	1 / 2
S4	0	0	0	3 / 8	0	0	1	5 / 2
C-Z		0	0	-3 / 4	-1 / 2	0	0	Z=21=5x3+4x(3.5)

Résumé des opérations :

- Variable entrante : Max (C-Z)
- Variable Sortante : Min (Ratios >= 0)

$$Lp \longleftarrow \frac{Lp}{p}$$

$$Li(i \neq p) \longleftarrow Li - \frac{Lp}{p}\alpha \text{ (α le terme à annuler dans la colonne pivot)}$$

Cas particuliers :

Solutions multiples

Si à l'optimalité on a une variable hors base ayant un (cj-zj=0), alors cette variable peut entrer dans la base sans changer la valeur de Z=Z*. Ainsi, on peut obtenir une deuxième solution optimale.

Exemple :

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 2x_1 & +4x_2 & & \\ \text{s.c.} & & x_1 & +2x_2 & \leq & 5 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

Problème non borné

L'algorithme du simplexe identifie un PL non borné si à l'optimalité on n'a aucune variable sortante (les ratios sont négatifs ou infinis).

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 2x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.c.} & & x_1 & -x_2 & \leq & 1 \\ & & 2x_1 & & \leq & 4 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

Exercice : 3

Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{sous contraintes} &\quad 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ &\quad x_1 + x_2 \leq 25 \\ &\quad 3x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ \text{et} &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Exercice : 4

Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{sous contraintes} &\quad 2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ &\quad 4y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ \text{et} &\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Recherche de solutions de base réalisables: le cas des contraintes mixtes

Si toutes les contraintes sont de type $\leq$ (second membre positif), alors on obtient une solution de base réalisable en posant ($x_1 = x_2 = 0$). Ceci n'est plus le cas en présence de contraintes de type $\geqslant$ ou $=$. En effet une contrainte de type $a_1x_1 + .a_nx_n >= b$ ($b > 0$) n'est plus vérifié pour la cas où $x_1 = x_2 = 0$.

Soit le PL suivant :

$$Max : Z = 1000x_1 + 1200x_2$$

$$\text{Sc :}\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ 4x_1 + 6x_2 = 120 \\ x_1 \leq 12 \\ x_2 \geqslant 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard du PL est :

$$Max : Z = 1000x_1 + 1200x_2$$

$$\text{Sc :}\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + e_1 = 160 \\ 4x_1 + 6x_2 = 120 \\ x_1 + e_3 = 12 \\ x_2 - e_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_3 \geq 0, e_4 \geq 0 \end{cases} \qquad système(1)$$

Si on pose $x_1=x_2=0$, on obtient :

$$\begin{cases} e_1 = 160 \\ 0 = 120 \quad (impossible) \\ e_3 = 12 \\ -e_4 = 6 \quad (impossible) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_3 \geq 0, e_4 \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas on ajoute des variables de décision dites "variables artificielles" au niveau des contraintes de type $\geq$ ou $=$.

On obtient alors le système (II) :

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + e_1 = 160 \\ 4x_1 + 6x_2 + a_2 = 120 \\ x_1 + e_3 = 12 \\ x_2 - e_4 + a_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0, a_2 \geq 0, a_4 \geq 0 \end{cases} \qquad syst\grave{e}me(II)$$

Une SBR pour ce système est obtenue en posant $(x_1 = x_2 = 0)$. Le système (II) n'est équivalent au système (I) que si $a_2 = a_4 = 0$. Ainsi s'il existe une solution du système (II) / $a_2 = a_4 = 0$, on peut la considérer comme une solution de base réalisable pour le problème initial.

Résolution du programme linéaire avec contraintes mixtes :

Méthode des deux phases :

Soit la fonction objectif artificielle :

$min : Z_A = a_2 + a_4$

S'il existe une solution du système (II) / $a_2 = a_4 = 0$, alors elle est aussi solution optimale du programme linéaire PL_A :

$PL_A : Min : Z_A = a_2 + a_4$

$Sc : système(II)$

Réciproquement, si PL_A admet une solution optimale/ $a_2 = a_4 = 0$, alors elle sera aussi une solution de base réalisable pour le problème :

$Max : Z = 1000x_1 + 1200x_2$

$Sc : système(I)$

Application :

$$(PL_A) : \begin{array}{l} Min : Z_A = a_2 + a_4 \\ Sc(II) \end{array} \iff \begin{array}{l} Max : Z'_A = -a_2 - a_4 \\ Sc(II) \end{array}$$

Dans ce cas, La solution de base réalisable initiale est $SBR_0 = (0; 0; 160; 12; 0; 120; 6)$.

VB : s_1, s_3, a_2, a_4

VHB : x_1, x_2, s_4

La première phase

Tableau (0)

	cj	0	0	0	0	0	-1	-1			
c_b	VB	x_1	x_2	s_1	s_3	s_4	a_2	a_4	Valeur	Ratio	
0	s_1	8	4	1	0	0	0	0	160	40	
-1	a_2	4	6	0	0	0	1	0	120	20	
0	s_3	1	0	0	1	0	0	0	12	∞	
-1	a_4	0	1	0	0	-1	0	1	6	6	V.S
	zj	-4	-7	0	0	1	-1	-1	$Z'_A = -126$		
	c_j-z_j	4	7	0	0	-1	0	0			
			V.E								

Tableau (2), (3)…

	cj	0	0	0	0	0	-1	-1			
c_b	VB	x_1	x_2	s_1	s_3	s_4	a_2	a_4	Valeur	Ratio	
	zj										
	c_j-z_j										

	cj	0	0	0	0	0	-1	-1	
c_b	VB	x_1	x_2	s_1	s_3	s_4	a_2	a_4	Valeur
0	s_1	16/3	0	1	0	0	-2/3	0	80
0	s_4	2/3	0	0	0	1	1/6	-1	14
0	s_3	1	0	0	1	0	0	0	12
0	x_2	2/3	1	0	0	0	1/6	0	20
	zj	0	0	0	0	0	0	0	$Z'_A = 0$
	cj-zj	0	0	0	0	0	-1	-1	

Le tableau 2 correspond à la solution optimale de PL_A. Notons SBR_2 cette solution.

$SBR_2 = (0; 20; 80; 12; 14; 0; 0)$ et $Z^*_A = 0$.

D'où, une SBR pour le programme initial est $SBR_0 = (0; 20; 80; 12; 14)$.

La construction du premier tableau du PL initial se fait à partir du tableau 2 associé au PL_A.

La deuxième phase

Tableau (0)

	cj	1000	1200	0	0	0			
c_b	VB	x1	x2	s1	s3	s4	Valeur	Ratio	
0	s1	16/3	0	1	0	0	80	15	
0	s4	2/3	0	0	0	1	14	21	
0	s3	1	0	0	1	0	12	12	V.S
1200	x2	2/3	1	0	0	0	20	20	
	zj	800	0	0	0	0	$Z = 24000$		
	cj-zj	200	0	0	0	0			
		V.E							

Tableau (1)

	cj	1000	1200	0	0	0	
c_b	VB	x1	x2	s1	s3	s4	Valeur
0	s1	0	0	1	-16/3	0	32
0	s4	0	0	0	-2/3	1	6
1000	x1	1	0	0	1	0	12
1200	x2	0	1	0	-2/3	0	12
	zj	1000	1200	0	200	0	$Z^* = 26400$
	cj-zj	0	0	0	-200	0	

le tableau (1) est optimal et on a : $x_1^* = x_1^* = 12$

Application :

MAX: 2 X1 + 1 X2 X1 $\leq$ 2 X2 $\leq$ 2 X1 + X2 $\leq$ 3 X1 + X2 $\geq$ 2 X1, X2 $\geq$ 0	MAX: 2 X1 + 1 X2 X1 + S1 = 2 X2 + S2 = 2 X1 + X2 + S3= 3 X1 + X2 +A4 - S4 = 2 Xi, Si, Ai$\geq$ 0	P1: MAX: -A4 X1 + S1 = 2 X2 + S2 = 2 X1 + X2 + S3= 3 X1 + X2 +A4 - S4 = 2 Xi, Si, Ai$\geq$ 0

Tableau 1			0	0	0	0	0	0	-1
Cb	Val	Base	X1	X2	S1	S2	S3	S4	A4
0	2	S1	1	0	1	0	0	0	0
0	2	S2	0	1	0	1	0	0	0
0	3	S3	1	1	0	0	1	0	0
-1	2	A4	1	1	0	0	0	-1	1
		C-Z	1	1	0	0	0	-1	0

Tableau 2			0	0	0	0	0	0	-1
Cb	Val	Base	X1	X2	S1	S2	S3	S4	A4
0	0	S1	0	-1	1	0	0	1	-1
0	2	S2	0	1	0	1	0	0	0
0	1	S3	0	0	0	0	1	1	-1
0	2	X1	1	1	0	0	0	-1	1
		C-Z	0	0	0	0	0	0	-1

Tableau 1			2	1	0	0	0	0
Cb	Val	Base	X1	X2	S1	S2	S3	S4
0	0	S1	0	-1	1	0	0	1
0	2	S2	0	1	0	1	0	0
0	1	S3	0	0	0	0	1	1
2	2	X1	1	1	0	0	0	-1
		C-Z	0	-1	0	0	0	2

Tableau 2			2	1	0	0	0	0
Cb	Val	Base	X1	X2	S1	S2	S3	S4
0	0	S4	0	-1	1	0	0	1
0	2	S2	0	1	0	1	0	0
0	1	S3	0	1	-1	0	1	0
2	2	X1	1	0	1	0	0	0
		C-Z	0	1	-2	0	0	0

Tableau 3			2	1	0	0	0	0
Cb	Val	Base	X1	X2	S1	S2	S3	S4
0	1	S4	0	0	0	0	1	1
0	1	S2	0	0	1	1	-1	0
1	1	X2	0	1	-1	0	1	0
2	2	X1	1	0	1	0	0	0
		C-Z	0	0	-1	0	-1	0

Exercice : 7

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode des deux phases :

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiser } z &= x_1 + x_2 \\
\text{sous contraintes} \quad & 5x_1 - 2x_2 \leq 3 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& -3x_1 + x_2 \leq 3 \\
& -3x_1 - 3x_2 \leq 2 \\
\text{et} \quad & x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exercice : 8

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode du "big M" :

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiser } z &= 10x_1 + 30x_2 \\
\text{sous contraintes} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
& 6x_1 + x_2 \geq 6 \\
& x_2 \geq 2 \\
\text{et} \quad & x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exercice : 8

Un mélange doit contenir au moins 15 g de fluore, 20 g de chlore, 10 g d'iode et 25 g de sodium. Il existe sur le marché trois produits qui contiennent ces quatre composants, dans les quantités suivantes (grammes par kg) :

	fluore	chlore	iode	sodium
1	1	1	0,5	1
2	1	2	0,5	3
3	1	1	1	2

Le premier produit coûte 3,50 CHF le kg, le deuxième 6,50 CHF le kg et le troisième 5 CHF le kg.

Quel mélange faut-il faire pour minimiser le coût ?

Dualité

Le problème dual

Exemple -1

Considérons le problème de programmation linéaire suivant : une fabrique quelconque produit n outputs différents en utilisant m matériaux bruts comme inputs. Chaque unité de l'output j a un prix de vente égal à c_j, $j = 1, 2, ..., n$, et requiert pour sa fabrication une quantité a_{ij} des différents inputs, $i = 1, 2, ...m$. La quantité totale disponible pour le matériau i est notée b_i. Quelle quantité x_j de chaque output, $j = 1, 2, ...n$, faut-il produire afin de maximiser le chiffre d'affaires ?

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{s.c.} \quad & a_{i1}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \\ \text{et} \quad & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \boldsymbol{c'x} \\ \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ \text{et} \quad & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Supposons à présent que le directeur financier désire assurer les différents inputs contre le feu, les inondations ou contre une éventuelle perte. Selon les règles de la rationalité économique, il est souhaitable de payer les primes les plus basses possibles, tout en s'assurant que les prestations seront assez élevées pour couvrir complètement les pertes, c'est-à-dire remplacer le revenu des ventes en cas de sinistre.

En tenant compte de ces considérations, comment définir le plan d'assurances optimal ?

Notons par u_i la prime d'assurance unitaire pour l'input i, $i = 1, 2, ..., m$ de telle sorte que la prime totale pour chaque input s'élève à $b_i u_i$. De plus la prime d'assurance ne pouvant prendre une valeur négative, nous sommes confrontés à une contrainte de non-négativité:

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m$$

Si nous considérons que le coût de l'assurance est la somme des primes pour chaque input, la fonction objectif à minimiser est donc :

$$\text{Min } z^* = b_1 u_1 + b_2 u_2 + ... + b_m u_m$$

Quelles que soient les valeurs individuelles des différents inputs, il est évident que les assurances combinées de tous les inputs nécessaires pour produire une unité du premier produit (c'est-à-dire a_{11} unités du premier input, a_{21} unités du deuxième input, etc) doivent être au moins égales à c_1. Cette contrainte s'exprime mathématiquement sous la forme :

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1$$

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_m \geq c_j, \ \ j = 1, 2, ..., n$$

Compte tenu de ce qui vient d'être formulé, nous obtenons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl}\text{Min } z^* & = & b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m \\ \text{s.c.} & & a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_m \geq c_j, \ j = 1, 2, ..., n \\ \text{et} & & u_i \geq 0, \ i = 1, 2, ..., m\end{array}$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \text{Min } z^* &= \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u} \\ \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c} \\ \text{et} \quad & \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

En plaçant les deux problèmes de programmation linéaire côte à côte sous leur forme matricielle, on remarque qu'ils sont symétriques.

Problème de production	Problème d'assurances
$\text{Max } z = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$	$\text{Min } z^* = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$
s.c. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$	s.c. $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}$
et $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	et $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$

Le vecteur des coûts ($\boldsymbol{c}$) dans la fonction objectif du premier problème correspond au membre de droite des contraintes du second problème. La matrice des contraintes ($\boldsymbol{A}$) dans le premier problème est simplement transposée dans le second problème.

Exemple -2

Un RU sert trois plats différents contenant des calories et vitamines dans es proportions suivantes :

	Plat 1	*Plat 2*	*Plat 3*
Vitamines	3	4	6
Calories	2	5	7
Prix de la portion	10	11	12

Un repas "convenable" contient 100 vitamines et 200 calories au moins.

On cherche le repas convenable pour le plus bas prix.

Variables :

On note x_1, x_2, x_3 les quantités respectives, en portion, des plats 1, 2 et **3**

Fonction objectif :

Min : $10x_1 + 11x_2 + 12x_3$

Contraintes

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geqslant 100$$
$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geqslant 200$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

Un pharmacien se met en face du RU pour le concurrencer. Il vend deux pilules : V, qui contient 1 vitamine, et C, qui contient 1 calorie. Il cherche le prix de vente de ces deux pilules de façon a maximiser son gain (*i.e.* le prix de vente maximum inférieur à celui du RU).

Variables :

Soient y_v et y_c les prix respectifs des deux pilules.

Fonction objectif :

Max : $100y_v + 200y_c$

Contraintes

$$3y_v + 2y_c \leqslant 10$$
$$4y_v + 5y_c \leqslant 11$$
$$6y_v + 7y_c \leqslant 12$$

Relation Primal-Dual
Exemple

Primal (Max)	Dual (Min)
Contraintes	Variables
$\leq$	≥ 0
$\geq$	≤ 0
$=$	non restreinte
Variables	Contraintes
≥ 0	$\geq$
≤ 0	$\leq$
non restreinte	$=$

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 - x_3 \leq 6 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } z^* &= 7u_1 + 6u_2 \\ \text{s.c.} \quad & u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ & 3u_1 \geq 5 \\ & 2u_1 - u_2 \geq 4 \\ \text{et} \quad & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ \text{et} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.à} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 - x_2 \leq 7 \\ & x_3 - x_4 \leq 9 \\ & -x_1 + x_3 \leq 3 \\ & x_2 + x_4 \leq 5 \\ \text{et} \quad & x_i \text{ sans restriction de signe} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.à} \quad & -x_1 \leq -2 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

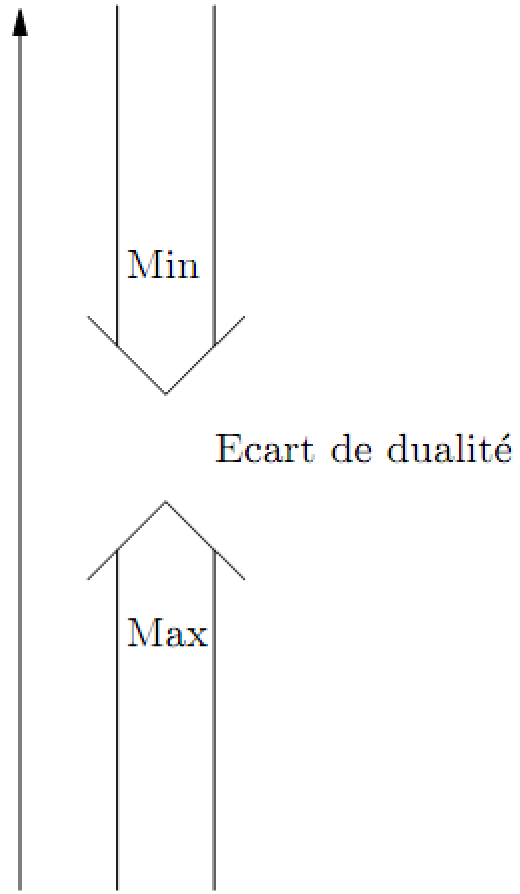
		DUAL		
		optimal	irréalisable	non-borné
	optimal	possible	impossible	impossible
PRIMAL	irréalisable	impossible	possible	possible
	non-borné	impossible	possible	impossible

On peut appliquer le simplex au dual au lieu du primal si le dual a moins de contraintes que le primal (cf complexité empirique du simplex).

Relation entre primal Dual

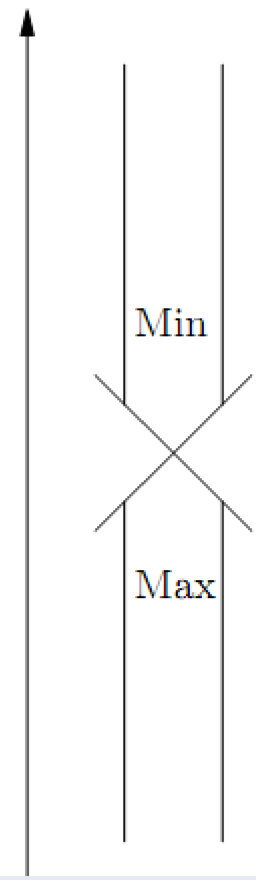
Ecart de Dualité

Dualité faible



$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Dualité forte



$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Interprétation économique de la dualité

- La forme canonique d'un programme linéaire peut être interprétée comme un problème d'allocation de ressources.

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rl} \min & b^T y \\ \text{s.c.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

– Données :

c_j : profit par unité d'activité j.

b_i : disponibilité de la ressource i.

a_{ij} : consommation de la ressource i par unité d'activité j.

– Variables :

x_j : niveau de l'activité j.

y_i : *valeur d'une unité de la ressource* i.

Théorème des écarts complémentaires

Théorème

Si une solution x^* est primale réalisable et qu'une solution y^* est duale réalisable, alors les conditions nécessaires et suffisantes à leur optimalité simultanée sont

1. $\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^*\right) y_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, m$
2. $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0, \quad j = 1, \ldots, n$

- Si une ressource n'est pas limitative du profit, sa valeur (expliquant de combien le profit augmenterait si sa capacité était augmentée) doit être nulle :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0.$$
$$y_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i^* = b_i.$$

- Si la valeur totale des ressources utilisées pour produire j dépasse le profit escompté, on ne produira pas j :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}y_i^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0.$$
$$x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}y_i^* = c_j.$$

Utilité des écarts complémentaires

Connaissant la solution optimale x^* du primal, le théorème des écarts complémentaire permet de retrouver directement la solution optimale y^* du dual.
Permet de vérifier si une solution donnée est optimale.

Théorème

Une solution primale réalisable $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ est optimale si, et seulement si, il existe des nombres $(y_1^*, \ldots y_m^*)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i^* \begin{cases} = c_j & \text{pour tout } j : x_j^* > 0 \quad (1a) \\ \geq c_j & \text{pour tout } j : x_j^* = 0 \quad (1b) \end{cases}$$

$$y_i^* \begin{cases} = 0 & \text{pour tout } i : \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^* < b_i \quad (2a) \\ \geq 0 & \text{pour tout } i : \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^* = b_i \quad (2b) \end{cases}$$

Exemple : Dualité dans le problème de production de peinture

$$\begin{array}{rcccc} \max z = & 5x_1 & +4x_2 & & \\ \text{s.c} & 6x_1 & +4x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 & +2x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccl} \min w = & 24y_1 & +6y_2 & +2y_3 & +y_4 & \\ & 6y_1 & +y_2 & & -y_4 & \geq 5 \\ & 4y_1 & +2y_2 & +y_3 & +y_4 & \geq 4 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq 0 \end{array}$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1.5,\ z = 21$$

$$y_1 = 0.75,\ y_2 = 0.5,\ y_3 = y_4 = 0,\ w = 21$$

– Le profit augmente de 0.75 par augmentation d'une tonne de M1 et de 0.5 par tonne de M2

– Les "ressources" 3 et 4 sont abondantes, augmenter ces ressources n'apporte aucun profit supplémentaire

Analyse de sensibilité : perturbation horizontale (le vecteur C)

a-Modification du cj d'une variable originale hors base :

-Dans la ligne supérieure du tableau final, remplacer le coefficient cj par c'j = cj +**Δ**.

-La modification apportée au tableau n'affectera qu'une seule autre entrée, celle du coût marginal de xj. Calculer ce coût marginal c'j – z'j.

-S'il s'agit d'un problème de maximisation, la solution admissible de base restera optimale si c'j – z'j $\leq$ 0.

-S'il s'agit d'un problème de minimisation, la solution admissible de base restera optimale si c'j – z'j $\geq$ 0.

(remarque : si le coût marginal d'une variable hors base est nul, il existe une infinité de solutions)

b-Modification du cj d'une variable originale de base :

-Dans la ligne supérieure du tableau final et dans la colonne des coefficients des variables de base du tableau final, remplacer le coefficient cj par c'j = cj + D.

-La modification apportée au tableau affectera tous les coûts marginaux des variables hors base. Calculer les nouveaux z'j et les nouveaux coûts marginaux c'j – z'j.
S'il s'agit d'un problème de maximisation, la solution admissible de base restera optimale si c'j – z'j $\leq$ 0.

-S'il s'agit d'un problème de minimisation, la solution admissible de base restera optimale si c'j – z'j $\geq$ 0.

Analyse de sensibilité : perturbation verticale (le vecteur b)

Contrainte de signe « ≤ » : bi' = bi + Δ

-Dans le tableau final, ajouter une colonne associée à Δ à droite de la colonne « Valeur ». Les entrées de cette colonne sont identiques à celles de ei.

-Les modifications apportées n'affectent pas les coûts marginaux. Toutefois, les valeurs de certaines variables de bases pourraient changer.

-Déduire les équations d'ajustement à partir des lignes du tableau modifié et recalculer la valeur des variables de base tout en s'assurant de la non négativité de ces variables (b'i doit rester dans un certain intervalle de variation. En dehors de cet intervalle, il faudrait utiliser un nouveau tableau optimal).

Contrainte de signe « ≥ » : attention : bi' = bi - Δ

-On a recours au signe « - » de façon à ce que les entrées de la colonne associée à Δ dans le tableau final demeurent identiques aux entrées de la colonne ei.

Pour le reste : mêmes indications que les cas précédents.

EX 1:

1. Donner le PL dual du PL suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 7x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 + 5x_2 = 6 \\ & 4x_1 + 2x_2 = 15 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

2. A l'aide du théorème des écarts complémentaires, trouver une solution optimale au PL dual.

EX : 2

Résoudre le programme linéaire suivant graphiquement :

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 \geq 5 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \geq 7 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

EX 3:

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{5}{2}x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Résoudre ce PL par l'algorithme du simplexe : à chaque itération, on fera entrer en base la variable de plus petit indice et de coût réduit > 0. Pour quelles valeurs de $\lambda < 1$ la solution optimale obtenue reste-t-elle optimale pour la fonction objectif $\frac{5\lambda}{2}x_1 + 5x_2$?

Vérifier ensuite graphiquement.

EX 4:

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ & x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Calculer le tableau optimal du simplexe pour ce PL en le résolvant graphiquement, puis en calculant algébriquement l'expression des variables de base en fonction des variables hors-base.

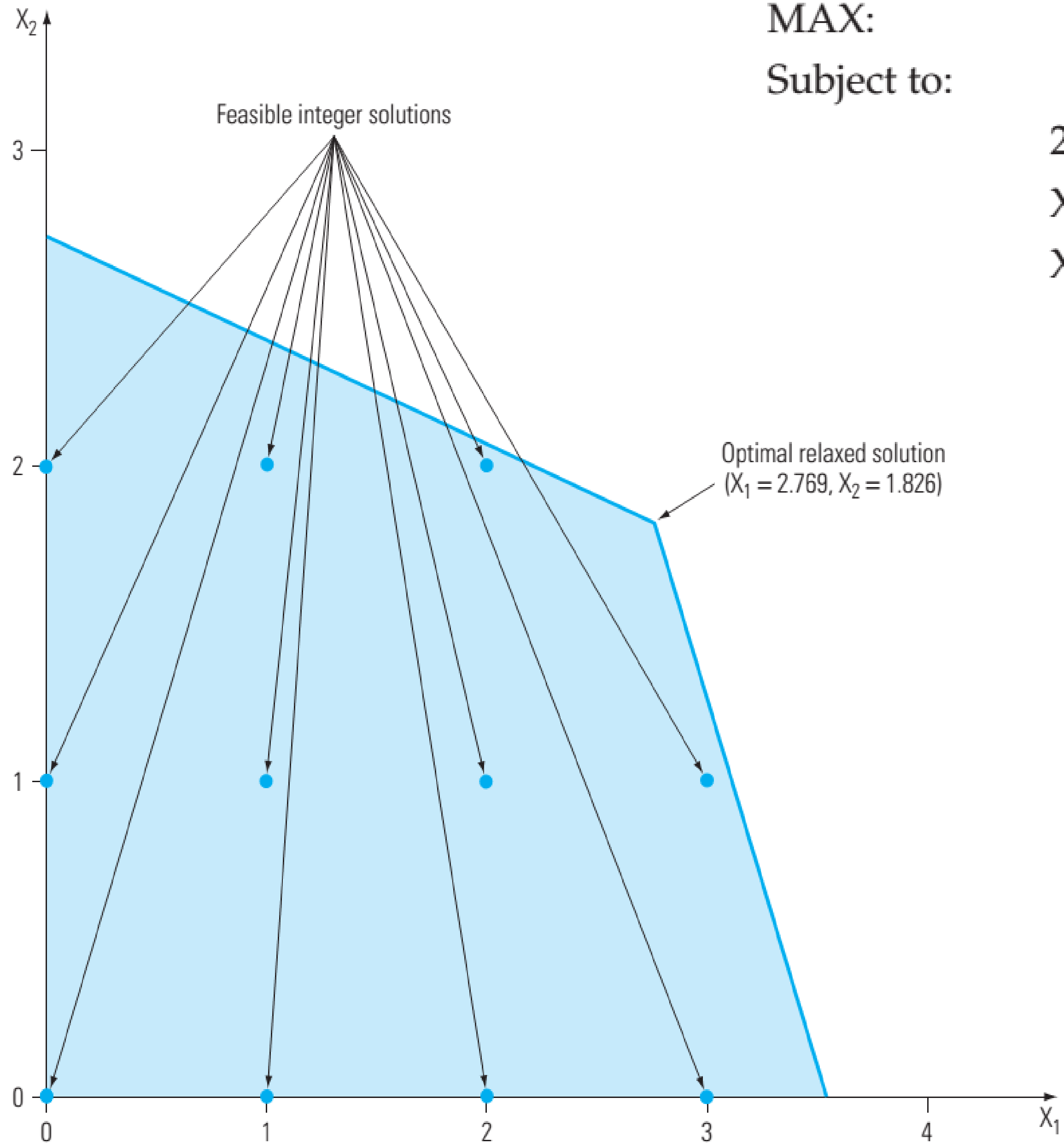
2. La solution optimale obtenue reste-t-elle optimale si on modifie la fonction objectif en $\max 3x_1 + 5x_2$?

3. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & -9x_1 + 3x_2 + 12x_3 \\ \text{s.c.} \quad & -3x_1 + 3x_3 \geq 2 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Que se passe-t-il si on remplace les valeurs 2 et 1 du second membre de ce PL par 3 et 5 respectivement ?

Programmation en nombres entiers
Branch & Bound



MAX: $2X_1 + 3X_2$

Subject to: $X_1 + 3X_2 \leq 8.25$

$2.5X_1 + X_2 \leq 8.75$

$X_1, X_2 \geq 0$

X_1, X_2 must be integers

Problem I: MAX: $2X_1 + 3X_2$

Subject to:

$$X_1 + 3X_2 \le 8.25$$
$$2.5X_1 + X_2 \le 8.75$$
$$X_1 \le 2$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

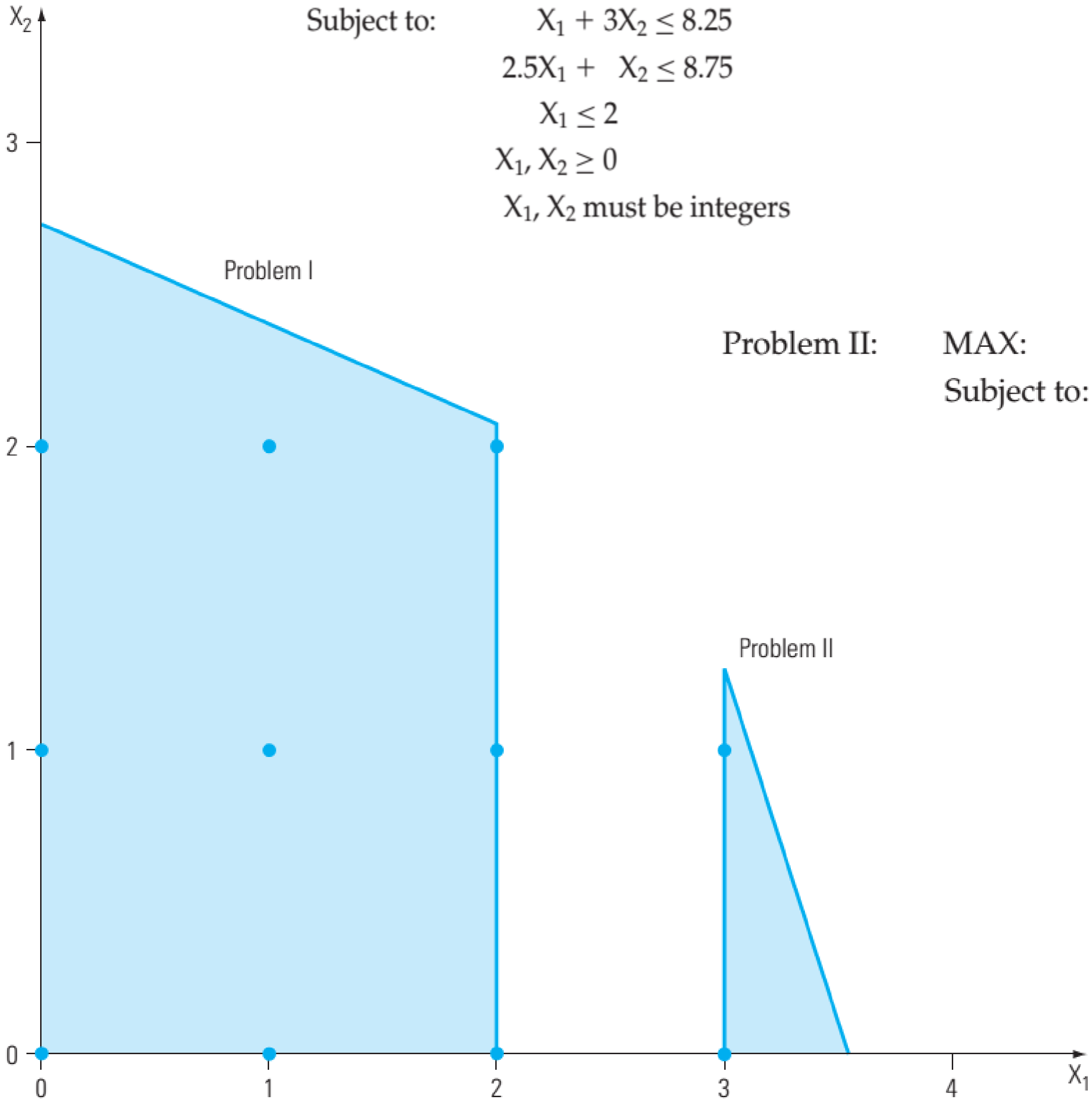
X_1, X_2 must be integers

Problem II: MAX: $2X_1 + 3X_2$

Subject to:

$$X_1 + 3X_2 \le 8.25$$
$$2.5X_1 + X_2 \le 8.75$$
$$X_1 \ge 3$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

X_1, X_2 must be integers



Problem III: MAX: $2X_1 + 3X_2$

Subject to:

$X_1 + 3X_2 \le 8.25$

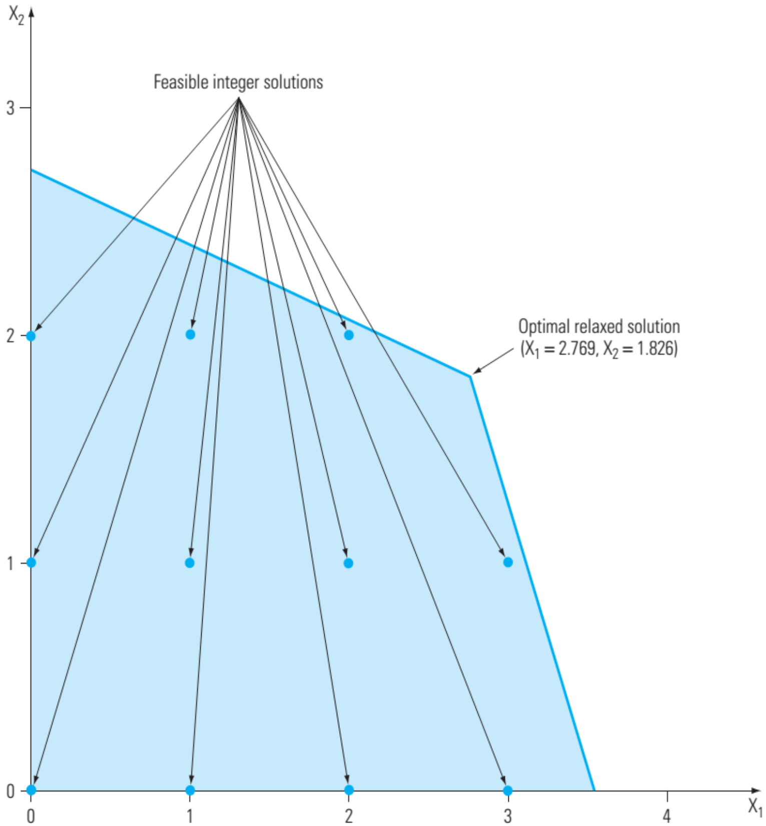
$2.5X_1 + X_2 \le 8.75$

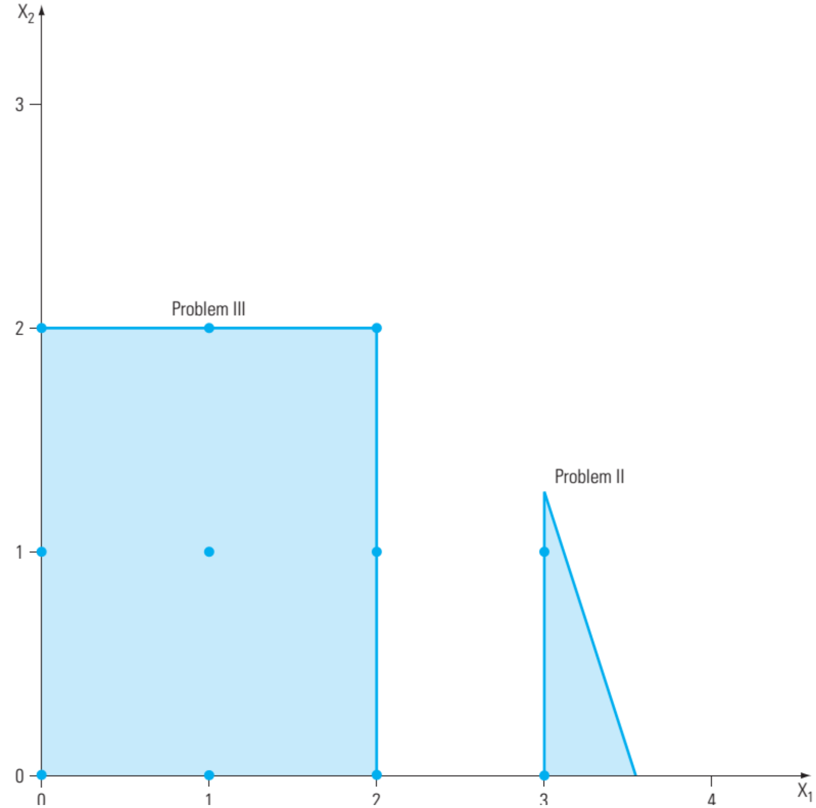
$X_1 \le 2$

$X_2 \le 2$

$X_1, X_2 \ge 0$

X_1, X_2 must be integers





Problem IV: MAX: $2X_1 + 3X_2$

Subject to:

$X_1 + 3X_2 \le 8.25$

$2.5X_1 + X_2 \le 8.75$

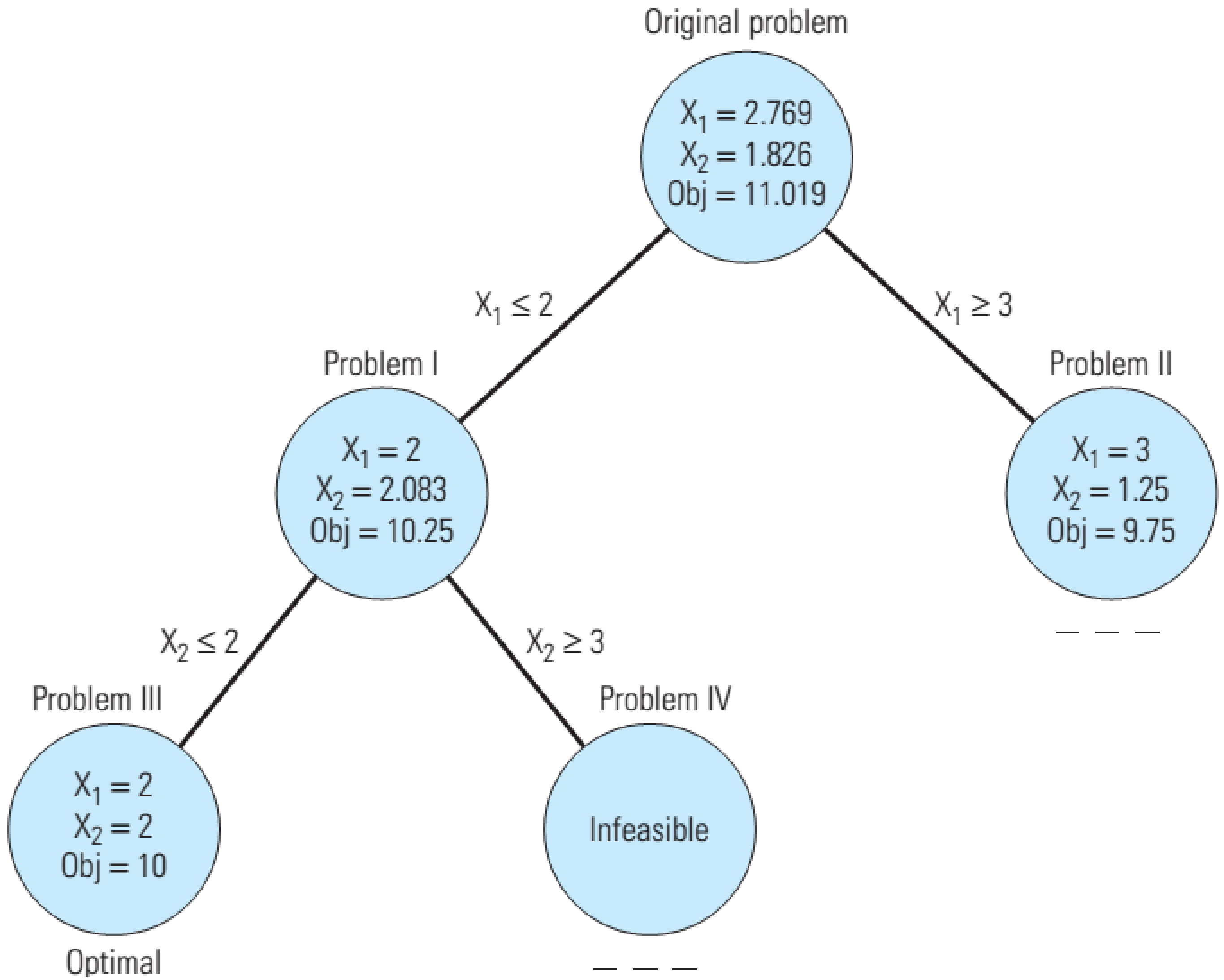
$X_1 \le 2$

$X_2 \ge 3$

$X_1, X_2 \ge 0$

X_1, X_2 must be integers

Résumé



Original problem
$X_1 = 2.769$
$X_2 = 1.826$
$Obj = 11.019$
$X_1 \leq 2$
$X_1 \geq 3$
Problem I
$X_1 = 2$
$X_2 = 2.083$
$Obj = 10.25$
Problem II
$X_1 = 3$
$X_2 = 1.25$
$Obj = 9.75$
— — —
$X_2 \leq 2$
$X_2 \geq 3$
Problem III
$X_1 = 2$
$X_2 = 2$
$Obj = 10$
Optimal
Problem IV
Infeasible
— — —