90(1) (i) $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{6}$

(iii) $\sin x . \cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0$ සමීකරණ විසඳන්න.

- $a.\cos\theta + b.\sin\theta = c$ ආකාරයේ සමීකරණවල විසඳුම් •) $\frac{n\pi}{6}$ කෝණ සඳහා වෘත්ත ශ්‍රිතවල අගයන් •) ව්‍යාකලන සූත්‍ර
- $\sin\theta = \sin\alpha$ හි සාධාරණ විසඳුම් •) ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත •) ආදේශක ආශ්‍රයෙන් සුළුකිරීම්
- $\left(\frac{n\pi}{2} \pm \theta\right)$ කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික සම්බන්ධතා •) $\cos\theta = \cos\alpha$ හි සාධාරණ විසඳුම් •) ද්විත්ව කෝණ සූත්‍ර
- ත්‍රිකෝණමිතික ප්‍රකාශණයක සාධක සෙවීම •) මූලික ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත •) $\cos 2x$ හා $\tan x$ අතර සම්බන්ධය
- $a^2 - b^2$ •) $\tan\theta = \tan\alpha$ හි සාධාරණ විසඳුම් •) $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ •) විවේචකය භාවිතයෙන් මූලවල ස්වභාවය
- සමීකරණවල පරිණාමනය •) වර්ගජ සමීකරණයක මූල •) $\cos\theta = \cos\alpha$ හි විසඳුම් පැවතීමට අවශ්‍යතාව

(i)

ලබාදී ඇති සමීකරණය $a.\cos\theta + b.\sin\theta = c$ ආකාරයේ සමීකරණයක් බැවින්, $\frac{n\pi}{6}$ කෝණ සඳහා වෘත්ත ශ්‍රිතවල අගයන් හා $\sin(A - B)$ ව්‍යාකලන සූත්‍රය භාවිතයෙන් සුළුකරමු

$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow \sin\theta . \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\theta . \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\theta = \sin\alpha$ හි සාධාරණ විසඳුම් භාවිතයෙන් අවසන් පිළිතුර වෙත එළඹෙමු

$\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ $\quad\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$; මෙහි $n \in Z$

(ii)

ප්‍රථමයෙන් ලබාදී ඇති ප්‍රකාශණයේ ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතවලට ආදේශක යොදා, අදාළ සමීකරණය එම ආදේශක ඇසුරෙන් දක්වමු

$\cos^{-1} x = \alpha$, $\sin^{-1}(x) = \beta$ ලෙස ගනිමු

$\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{6}$ $\quad\Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ $\rightarrow$ (1)

α , β පද දෙක එකිනෙකට වෙනස් ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත වලට අයත් බැවින්, ඉහත යොදාගත් ආදේශක භාවිතයෙන් α , β පද අතර තවත් සම්බන්ධයක් ගොඩනගමු

$\cos^{-1} x = \alpha$ $\quad\Rightarrow x = \cos\alpha$ $\rightarrow$ (2)

$\sin^{-1} x = \beta$ $\quad\Rightarrow x = \sin\beta$ $\rightarrow$ (3)

(2),(3)න් $\Rightarrow \cos\alpha = \sin\beta$

ඉහත ප්‍රතිඵලයෙන් $\cos\theta = \cos\alpha$ ආකාරයේ ප්‍රකාශණයක් ගොඩනගා එමඟින් α , β පද අතර සම්බන්ධයක් ලබාගැනීමට, $\sin\beta$ පදය $\left(\frac{n\pi}{2} \pm \theta\right)$ කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික සම්බන්ධතා භාවිතයෙන් cos ශ්‍රිතයක් ලෙස දක්වා සුළුකරමු

$\cos\alpha = \sin\beta$ $\quad\Rightarrow \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ $\quad\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ $\quad\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ (4)

ඉහත (1),(4) ප්‍රතිඵල සමගාමීව විසඳීමෙන් α (හෝ β) අගයමු

(1) + (4) $\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow 2\alpha = \frac{4\pi}{6}$ $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

ලබාදී ඇති සමීකරණය x සඳහා විසඳිය යුතු බැවින්, ඉහත ලබාගත් α අගය (2) සමීකරණයේ ආදේශ කොට $\frac{n\pi}{6}$ කෝණ සඳහා වෘත්ත ශ්‍රිතවල අගයන් භාවිතයෙන් සුළුකරමු

(2)හි $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ආදේශයෙන් $\Rightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

(iii)

ප්‍රථමයෙන් ලබාදී ඇති සමීකරණයෙන් $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ පදයක් පොදු සාධකයක් ලෙස ඉවතට ගෙන අදාළ සමීකරණය සුළුකල හැකි පරිදි, එහි ඇතුළත් $\sin x$, $\cos x$ පද ද්විත්ව කෝණ සූත්‍ර භාවිතයෙන් සුදුසු ලෙස විහිදුවමු

$$\sin x.\cos x - 6.\sin x + 6.\cos x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cos x - 6\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] + 6\left[2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right] + 6 = 0$$
$$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos x - 12\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 12\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 6 + 6 = 0$$
$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos x - 6.\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 6.\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 0$$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow$ (1) හෝ $\sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos x - 6.\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 6.\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow$ (2)

$\frac{n\pi}{6}$ කෝණ සඳහා වෘත්ත ශ්‍රිතවල අගයන් හා $\cos\theta = \cos\alpha$ හි සාධාරණ විසඳුම් භාවිතයෙන් ඉහත (1) සමීකරණය සුළුකරමු

(1)න් $\Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow \frac{x}{2} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = 4n\pi \pm \pi$ $\Rightarrow x = \pi\,(4n \pm 1)$; මෙහි $n \in Z$

ඉහත (2) සමීකරණයෙහි $\frac{x}{2}$ හා x කෝණ ඇති බැවින්ද, එහි $\sin, \cos$ ශ්‍රිත පමණක් ඇති බැවින් හා $\cos x$ පද $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ පද මඟින් දැක්විය හැකි බැවින්, ප්‍රථමයෙන් එම සමීකරණයේ දෙපස $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ පදයකින් බෙදා, එය $\cos 2x$ හා $\tan x$ අතර සම්බන්ධය හා වර්ග දෙකක අන්තරය භාවිතයෙන් සුළුකිරීමෙන් $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ හි සමීකරණයක් ගොඩනගමු

(2)න් $\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right).\cos x - 6.\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 6.\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$; මෙහි දෙපස $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ගෙන් බෙදීමෙන්

$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right).\cos x - 6.\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 6 = 0$; මෙහි $\cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ ආදේශයෙන්

$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right] - 6\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 6 = 0$; මෙහි දෙපස $\left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ පදයකින් ගුණකිරීමෙන්

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)\left[1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] - 6.\tan\left(\frac{x}{2}\right)\left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] + 6\left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 0$$
$$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)\left[1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] + 6\left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 0$$
$$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)\left[1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + 6\left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 0$$
$$\Rightarrow \left[1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left\{\tan\left(\frac{x}{2}\right)\left[1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + 6 + 6.\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\} = 0$$

$\Rightarrow \left[1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left\{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+6+\ 6.\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\}=0$

$\Rightarrow \left[1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[7.\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)+6\right]=0$

$\Rightarrow 1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)=0 \quad \rightarrow (3)$ හෝ $7.\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)+6=0 \quad \rightarrow (4)$

\# $\frac{n\pi}{6}$ කෝණ සඳහා වෘත්ත ශ්‍රිතවල අගයන් හා $\tan\theta=\tan\alpha$ හි සාධාරණ විසඳුම් භාවිතයෙන් ඉහත (3)සමීකරණය සුළුකරමු

(3)න් $\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)=1$ $\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\Rightarrow \frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}(4n+1)$; මෙහි $n\in Z$

\# ඉහත (4) සමීකරණය $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ හි වර්ගජ සමීකරණයක් බැවින් $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ භාවිතයෙන් එහි මූල අගයමු

(4)න් $\Rightarrow 7.\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)+6=0$ $\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(7)(6)}}{2(7)}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{-167}}{14}$; මෙහි වර්ගමූලය තුළ කොටස සෘණ බැවින්

$\Rightarrow 7.\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)+6=0$ සමීකරණයට x සඳහා තාත්වික මූල නොමැත.

එබැවින් $\sin x.\cos x-6.\sin x+6.\cos x+6=0$ හි සාධාරණ විසඳුම් $x=\pi(4n\pm1)$ හා $x=\frac{\pi}{2}(4n+1)$ වේ

*** (iii) කොටස, පහත දැක්වෙන පරිදි සුළුකිරීමෙන්ද පිළිතුර වෙත එළඹිය හැක

$\sin x.\cos x-6.\sin x+6.\cos x+6=0$ $\Rightarrow \frac{\sin 2x}{2}+6(\cos x-\sin x)+6=0$

$\Rightarrow \sin 2x+12(\cos x-\sin x)+12=0$; මෙහි $\sin 2x=1-(\cos x-\sin x)^2$ ආදේශයෙන්

$\Rightarrow [1-(\cos x-\sin x)^2]+12(\cos x-\sin x)+12=0$; මෙහි $(\cos x-\sin x)\rightarrow y$ මඟින් ප්‍රතිස්ථාපනයෙන්

$\Rightarrow [1-y^2]+12(y)+12=0$ $\Rightarrow -y^2+12y+13=0$

$\Rightarrow y^2-12y-13=0$ $\Rightarrow (y-13)(y+1)=0$

$\Rightarrow y=13$ හෝ $y=-1$; මෙහි $y=\cos x-\sin x$ යෙදීමෙන්

$\Rightarrow \cos x-\sin x=13 \quad \rightarrow (1)$ හෝ $\cos x-\sin x=-1 \quad \rightarrow (2)$

(1)න් $\Rightarrow \cos x-\sin x=13$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin x=\frac{13}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{13}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)>1$

නමුත් ඕනෑම θ අගයක් සඳහා , $-1\le\cos\theta\le1$ විය යුතු බැවින් $\Rightarrow y\neq 13$

(2)න් $\Rightarrow \cos x-\sin x=-1$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow x=2n\pi+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$ හෝ $x=2n\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x=2n\pi+\frac{\pi}{2}\ , n\in Z$ හෝ $x=2n\pi-\pi\ , n\in Z$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}(4n+1)\ , n\in Z$ හෝ $x=(2n-1)\pi\ , n\in Z$