

## 1 定义

### 1.1 $\mathbf{R}$ 中稠密

### 1.2 数列收敛

### 1.3 上界、下界、有界数列

### 1.4 子列

### 1.5 数列趋向 $\pm\infty$

数列正(负)无穷大的定义.

### 1.6 单调数列

## 2 实数

任何分数一定是有尽小数或无尽循环小数。

每一个实数都可以用有理数去逼近到任意精确的程度。

有理数集 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中是稠密的。

## 3 数列极限

**定理3.1** 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限。

**定理3.2** 收敛数列是有界的。

**定理3.3** 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 $a$ , 那么 $\{a_n\}$ 的任何一个子列都收敛于 $a$ 。

**推论** 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它的偶数项子列 $\{a_{2n}\}$ 和奇数项子列 $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛, 并且有相同的极限。

**定理3.4 (极限的四则运算)** 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是收敛数列, 则 $a_n + b_n$ ,  $a_n b_n$ 也是收敛数列。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , 则 $\{a_n/b_n\}$ 也收敛, 并且有:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 特别的, 如果  $c$  是常熟, 便有  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ , 其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ .

**定理3.5 (夹逼定理)** 设  $a_n \leq b_n \leq c_n (n \in N_*)$ , 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ , 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

### 定理3.6

1. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha < a < \beta$ , 那么当  $n$  充分大时, 有  $a_n > \alpha$ ; 同样, 当  $n$  充分大时, 有  $a_n < \beta$
2. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 且  $a < b$ , 那么当  $n$  充分大时, 一定有  $a_n < b_n$ .
3. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 并且当  $n$  充分大时  $a_n \leq b_n$ , 那么有  $a \leq b$ .

### 无穷大的性质

1. 如果  $\{a_n\}$  是无穷大, 那么  $\{a_n\}$  必然无界.
2. 从无界数列中一定能选出一个子列是无穷大.
3. 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  (或  $-\infty, \infty$ ), 那么对  $\{a_n\}$  的任意子列  $\{a_{k_n}\}$ , 也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = +\infty \text{ (或 } -\infty, \infty \text{)}$$

.

4. 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = +\infty$$

5.  $\{a_n\}$  是无穷大的充分必要条件是  $\{1/a_n\}$  为无穷小.

**定理3.7** 单调有界数列一定有极限.