1 定义

1.1 R 中稠密

1.2 数列收敛

1.3 上界、下界、有界数列

1.4 子列

1.5 数列趋向 $\pm\infty$

数列正 (负) 无穷大的定义.

1.6 单调数列

1.7 基本列

1.8 上下确界

1.9 开覆盖

1.10 上下极限

2 实数

任何分数一定是有尽小数或无尽循环小数。
每一个实数都可以用有理数去逼近到任意精确的程度。
有理数集 Q 在 R 中是稠密的。

3 数列极限

定理 3.1 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限。

定理 3.2 收敛数列是有界的。

定理 3.3 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a，那么 $\{a_n\}$ 的任何一个子列都收敛于 a。

推论 3.3.1 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它的偶数项子列 $\{a_{2n}\}$ 和奇数项子列 $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛，并且有相同的极限。

定理 3.4（极限的四则运算）设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是收敛数列，则 $a_n + b_n$，$a_n b_b$ 也是收敛数列。如果 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, 则 $\{a_n/b_n\}$ 也收敛，并且有:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 特别的, 如果 c 是常熟, 便有 $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

定理 3.5（夹逼定理）设 $a_n \leq b_n \leq c_n (n \in N_*)$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

定理 3.6 保号性

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \alpha, \beta$ 满足 $\alpha < a < \beta$, 那么当 n 充分大时, 有 $a_n > \alpha$; 同样, 当 n 充分大时, 有 $a_n < \beta$
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 且 $a < b$, 那么当 n 充分大时, 一定有 $a_n < b_n$.
3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 并且当 n 充分大时 $a_n \leq b_n$, 那么有 $a \leq b$.

命题 3.1 无穷大的性质

1. 如果 $\{a_n\}$ 是无穷大, 那么 $\{a_n\}$ 必然无界.
2. 从无界数列中一定能选出一个子列是无穷大.
3. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$(或 $-\infty, \infty$), 那么对 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{k_n}\}$, 也有
$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty(\text{或} -\infty, \infty)$$
.
4. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 那么
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty, \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$$

5. $\{a_n\}$ 是无穷大的充分必要条件是 $\{1/a_n\}$ 为无穷小.

定理 3.7 单调有界数列一定有极限.

定理 3.8 *(闭区间套定理)* 设 $I_n = [a_n, b_n](n \in N^*)$, 并且$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. 如果这一列区间的长度 $\langle I_n \langle = b_n - a_n \to 0(n \to \infty)$, 那么交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 含有唯一的一点.

定理 3.9 自然对数的底是无理数.

引理 3.1 从任一数列中必可取出一个单调数列.

定理 3.10 *(列紧性定理)* 从任何有界数列必可选出一个收敛子列.

定理 3.11 *(Cauchy 收敛定理)* 一个数列收敛的充分必要条件是, 它是基本列.

定理 3.12 *(确界定理)* 非空有上界的集合必有上确界.

非空有下界的集合必有下确界.

命题 3.2 $-sup(-E) = infE$ 或 $sup(-E) = -infE$

定理 3.13 *(紧致性定理, 有限覆盖定理,Heine-Borel 定理)* 设 $[a, b]$ 是一个有限闭区间, 并且它有一个开覆盖 $\{I_\lambda\}$, 那么从这个开区间族必可选出有限个成员 (开区间) 来, 这有限个开区间所成的族仍是 $[a, b]$ 的开覆盖.

定理 3.14 设 $\{a_n\}$ 为一数列,E 为 $\{a_n\}$ 所有极限点组成的集合,a^* 为上极限. 那么:

1. $a^* \in E$;
2. 若$x > a^*$,则存在$N \in N^*$,使得当$n \leq N$时, 有$a_n < x$;
3. a^* 是满足前两条性质的唯一数.

对下极限 a_* 也有类似定理.

定理 3.15 设 $\{a_n\}, \{n\}$ 是两个数列.

1. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 当且仅当 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

3. 若 N 是某个正整数, 当 $n > N$ 时,$a_{\leq} b_n$, 那么

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n, \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$

定理 3.16 对数列 $\{a_n\}$, 定义 $\alpha_n = \inf\limits_{k\geq n} a_k, \beta_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$, 那么:

1. $\{\alpha_n\}$ 是递增数列,$\{\beta_n\}$ 是递减数列;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a_*, \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = a^*$.