1 定义

1.1 R中稠密

1.2 数列收敛

1.3 上界、下界、有界数列

1.4 子列

1.5 数列趋向$\pm\infty$

数列正(负)无穷大的定义.

1.6 单调数列

2 实数

任何分数一定是有尽小数或无尽循环小数。
每一个实数都可以用有理数去逼近到任意精确的程度。
有理数集Q在R中是稠密的。

3 数列极限

定理3.1 如果数列$\{a_n\}$收敛，则它只有一个极限。

定理3.2 收敛数列是有界的。

定理3.3 设收敛数列$\{a_n\}$的极限是a，那么$\{a_n\}$的任何一个子列都收敛于a。

推论 数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是它的偶数项子列$\{a_{2n}\}$和奇数项子列$\{a_{2n-1}\}$都收敛，并且有相同的极限。

定理3.4（极限的四则运算） 设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都是收敛数列，则a_n+b_n，a_nb_b也是收敛数列。如果$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$,则$\{a_n/b_n\}$也收敛，并且有：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，特别的，如果$c$是常熟，便有$\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$,其中$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

定理3.5（夹逼定理） 设$a_n \le b_n \le c_n (n \in N_*)$,如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$,那么$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

定理3.6

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \alpha, \beta$满足$\alpha < a < \beta$,那么当$n$充分大时,有$a_n > \alpha$;同样,当$n$充分大时,有$a_n < \beta$
2. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,且$a < b$,那么当$n$充分大时,一定有$a_n < b_n$.
3. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,并且当$n$充分大时$a_n \le b_n$,那么有$a \le b$.

无穷大的性质

1. 如果$\{a_n\}$是无穷大,那么$\{a_n\}$必然无界.
2. 从无界数列中一定能选出一个子列是无穷大.
3. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$(或$-\infty, \infty$),那么对$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{k_n}\}$,也有
$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty(\text{或} -\infty, \infty)$$
.
4. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,那么
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty, \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$$
5. $\{a_n\}$是无穷大的充分必要条件是$\{1/a_n\}$为无穷小.

定理3.7 单调有界数列一定有极限.