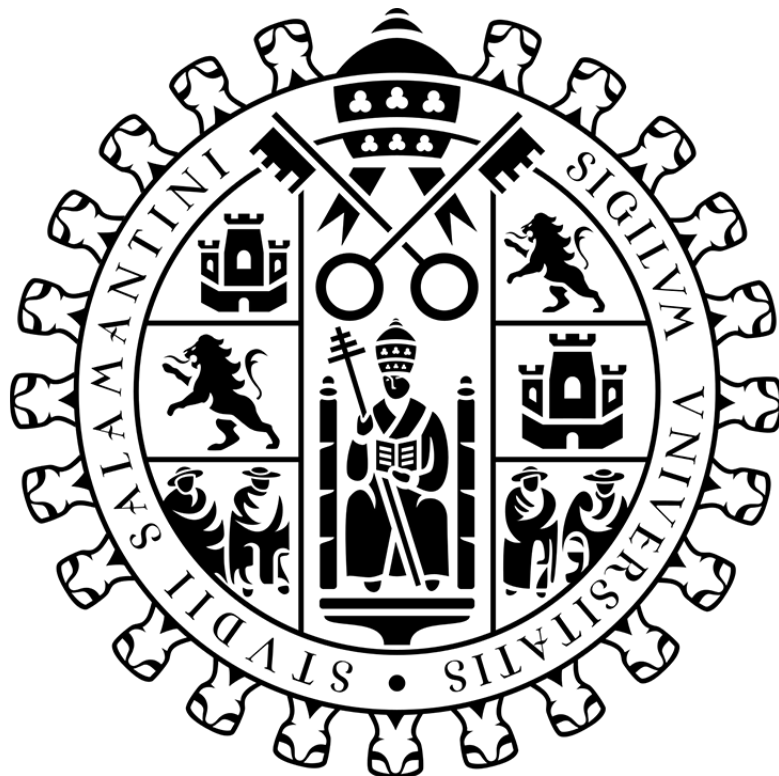


**UNIVERSIDAD DE SALAMANCA**

Departamento de Física Aplicada

Área de Electromagnetismo



Trabajo de Fin de Grado

---

Simulaciones Micromagnéticas de Texturas Magnéticas

---

Tutor: Luis Torres Rincón

**Alberto Alonso Chana**

Facultad de Ciencias Físicas

**2021**

Firma electrónica de tutor y alumno:

Salamanca, a día 6 de julio de 2021.

# Índice general

0.1. Resumen . . . . .	4
0.2. Summary . . . . .	4
0.3. Palabras Clave . . . . .	4
0.4. Key Words . . . . .	5
<b>1. Introducción al Micromagnetismo y la Espintrónica</b>	<b>6</b>
1.1. Magnetostática . . . . .	6
1.1.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	6
1.1.2. Corrientes estacionarias . . . . .	7
1.2. Momentos magnéticos . . . . .	8
1.3. Medios magnéticos . . . . .	8
1.3.1. Momentos magnéticos y magnetización . . . . .	9
1.3.2. Analogía con la electrostática . . . . .	9
1.3.3. Campos de desmagnetización . . . . .	10
1.4. Relaciones de energía . . . . .	11
1.4.1. Energía de las corrientes estacionarias . . . . .	11
1.4.2. Teorema de Poynting . . . . .	12
1.5. Trabajo magnético . . . . .	12
1.5.1. El cuerpo magnético como un conjunto de momentos magnéticos . . . . .	13
1.5.2. Conservación de la energía y trabajo magnético . . . . .	13
1.5.3. Diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo . . . . .	14
1.6. Relaciones termodinámicas . . . . .	15
1.6.1. Materiales magnéticos en procesos reversibles . . . . .	15
1.6.2. Materiales magnéticos en procesos irreversibles . . . . .	16
1.7. Micromagnetismo . . . . .	16
1.7.1. Intercambio . . . . .	17
1.7.2. Anisotropía . . . . .	18
1.7.3. Energía libre dependiente del espacio . . . . .	20
1.7.4. Minimización de la energía . . . . .	22
1.8. Espintrónica: Casos experimentales y aplicaciones tecnológicas . . . . .	24
1.8.1. El efecto GMR en nanotiras ferromagnéticas . . . . .	24
1.8.2. MFM aplicado a paredes de dominio . . . . .	25
1.8.3. Uniones de túnel magnético en MRAM . . . . .	27
<b>2. Métodos Computacionales en el Micromagnetismo</b>	<b>32</b>
2.1. Modelo computacional básico . . . . .	32
2.2. Discretización e integración numérica . . . . .	33
2.3. MuMax <sup>3</sup> . . . . .	33
<b>3. Simulación de los Problemas Estándar Micromagnéticos</b>	<b>34</b>
3.1. Problema estándar 4 . . . . .	34
3.1.1. Resultados obtenidos . . . . .	35
3.2. Problema estándar 2 . . . . .	37
3.2.1. Resultados obtenidos . . . . .	38
<b>4. Resonancia Ferromagnética en una Esfera</b>	<b>42</b>
4.1. Resultados obtenidos . . . . .	43
<b>5. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>6. Conclusions</b>	<b>46</b>

<b>A. Anexo. Problema estándar 4</b>	<b>47</b>
<b>B. Anexo. Problema estándar 2</b>	<b>48</b>
<b>C. Anexo. Resonancia ferromagnética en una esfera</b>	<b>51</b>

## 0.1. Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se trata el tema del Micromagnetismo y la Espintrónica. Las ideas y experimentos presentados se organizan en cuatro capítulos principales seguidos de un capítulo final en el que se exponen las conclusiones generales del trabajo. El primer capítulo consta de dos partes. La primera, es una introducción teórica al Micromagnetismo que servirá de base para entender las simulaciones llevadas a cabo en los capítulos posteriores. Al final del capítulo también se hace una introducción teórica a la Espintrónica, revisando y comentando algunos de los principales experimentos realizados en este campo. En el segundo capítulo, se repasan brevemente los principales tipos de software, hardware y métodos computacionales empleados en simulaciones micromagnéticas. Los dos capítulos siguientes se corresponden a los problemas estándar 2 y 4. Estos problemas son de utilidad a la hora de iniciarse con simulaciones micromagnéticas. El capítulo siguiente a los problemas estándar trata el fenómeno de la resonancia ferromagnética. Una vez obtenida cierta experiencia con los programas micromagnéticos gracias a los problemas estándar, se simula una nanoesfera ferromagnética con el objetivo de identificar y estudiar el fenómeno de resonancia.

## 0.2. Summary

This work deals with the subject of Micromagnetism and Spintronics. The ideas and experiments are organized in four main chapters followed by a final chapter where the general conclusions of the work are stated. The first chapter is split in two parts. The first one, it's a theoretical introduction to Micromagnetism in order to provide a basis to understand the simulations exposed in next chapters. At the end of this chapter, a theoretical introduction to Spintronics is also conducted, reviewing and commenting on some of the main experiments carried out in this field. In the second chapter, a brief overview about the type of software, hardware and computational methods used in micromagnetic simulations is carried out. The next two chapters are related with the standard problems 2 and 4. These problems are useful to get started with micromagnetic simulations. The following chapter cope with the ferromagnetic resonance phenomena. Once we have certain experience with the programs by having the standard problems done, we are ready to simulate a ferromagnetic nanosphere in order to identify and study the resonance phenomenon.

## 0.3. Palabras Clave

- Micromagnetismo
- Ferromagnetismo
- Histéresis
- Campo magnetostático
- Intercambio
- Anisotropía
- Campo efectivo
- Magnetización de saturación
- Ecuaciones de Brown
- Ecuación de Gilbert
- Ecuación Landau-Lifsthitiz
- Mumax3
- Problemas estándar de mumax
- Resonancia ferromagnética

## 0.4. Key Words

- Micromagnetism
- Ferromagnetism
- Hysteresis
- Magnetostatic field
- Exchange
- Anisotropy
- Effective field
- Magnetization of saturation
- Brown equations
- Gilbert equation
- Landau-Lifshitz equation
- Mumax3
- Standard problems of mumax
- Ferromagnetic resonance

# Capítulo 1

## Introducción al Micromagnetismo y la Espintrónica

Se conocen con el nombre de materiales magnéticos a aquellos capaces de producir un campo magnético estático en el espacio que los rodea. Tal y como demostró el experimento de Oersted, los campos magnéticos son producidos por cargas en movimiento, por lo tanto aquellos creados por materiales magnéticos deben ser consecuencia del movimiento de las cargas eléctricas que componen el cuerpo magnético. El conocimiento de este tipo de corrientes moleculares es complejo e implicaría profundizar en la mecánica cuántica relativista. Para salvar esta dificultad y poder estudiarlos desde la perspectiva de las ecuaciones de Maxwell, se postula la existencia de *momentos magnéticos* puntuales y permanentes en el interior del material. Los efectos cuánticos quedan aglomerados dentro de estos momentos y junto a las cargas eléctricas permiten describir los materiales magnéticos en términos clásicos.

Una vez que podemos interpretar el cuerpo magnético desde el formalismo de las ecuaciones de Maxwell, la dificultad radica ahora en el movimiento de sus cargas y portadores de momento elementales. Conocer la complejidad de estos movimientos no es de utilidad cuando se estudia el cuerpo magnético a una escala suficientemente grande. Por ello, se divide el cuerpo en un conjunto de *volúmenes elementales*  $\Delta V$ . Dichos volúmenes se definen suficientemente pequeños respecto a la escala de estudio pero suficientemente grandes como para contener un considerable número de partículas. En vez de tomar la cantidad  $F_{micro}$  para describir una propiedad a escala microscópica, la aproximación a volúmenes elementales permite describir en cada punto  $\mathbf{r}$  del espacio:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{F}_{micro} \cdot d^3r \quad (1.1)$$

Donde  $\Delta V$  está centrado en torno a  $\mathbf{r}$ . Trabajando con estos volúmenes promedio perdemos información acerca de los procesos ocurriendo dentro de ellos. Pero permiten reducir la complejidad del estudio de los fenómenos magnéticos cuando nos situamos a escalas mucho mayores que  $\Delta V$ .

### 1.1. Magnetostática

Los fenómenos magnéticos de la *magnetostática* son aquellos producidos por corrientes estacionarias, o lo que es lo mismo, corrientes que no varían su densidad de carga en el tiempo. Los resultados de la magnetostática también se extienden a aquellos casos en los que sí existen variaciones de corriente, pero estas son tan lentas que podemos suponer que en cada instante de tiempo el sistema se comporta bajo condiciones estacionarias. Las ecuaciones de la magnetostática se pueden obtener como una restricción de las ecuaciones de Maxwell generales.

#### 1.1.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell generales son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (1.5)$$

Tomando volúmenes elementales  $\Delta V$  como los anteriormente descritos, tanto el *campo eléctrico*  $E(\mathbf{r}, t)$  como el *campo inducción magnética*  $B(\mathbf{r}, t)$  son los campos promedio producidos por  $\Delta V$  en la posición  $\mathbf{r}$  en torno a la cual se encuentra  $\Delta V$ . Análogamente,  $\rho$  y  $\mathbf{j}$  representan la densidad de carga y corriente eléctrica promedio en  $\Delta V$ .

Las ecuaciones de Maxwell dan una descripción de cómo serán los campos creados por las cargas. La *fuerza de Lorentz* experimentada por una carga  $q$  moviéndose a velocidad  $\mathbf{v}$  sometida a estos campos viene dada por la expresión:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.6)$$

Si consideramos ahora la fuerza por unidad de volumen actuando sobre distribuciones continuas de carga y corriente la ecuación (1.6) se convierte en:

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.7)$$

### 1.1.2. Corrientes estacionarias

De acuerdo con la ley de conservación de la carga eléctrica, las densidades de corriente estacionarias son solenoidales, es decir,  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Se define la corriente eléctrica  $I$  como la integral a la densidad de corriente sobre la sección transversal. En el caso estacionario,  $I$  se conserva a lo largo del tubo de corriente descrito por las sucesivas secciones transversales.

El campo magnético creado en la posición  $\mathbf{r}$  por un bucle de corriente obedece la *ley de Biot y Savart*:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.8)$$

donde  $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$  es el elemento de línea orientado en el sentido de la corriente y la integral aplica a lo largo de todo el bucle.

Si queremos expresar el campo creado por múltiples bucles de corriente, conocido que  $I d\mathbf{l}$  puede también expresarse como  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'$ , siendo  $\mathbf{j}$  la densidad de corriente en el elemento de volumen  $d^3 r'$ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (1.9)$$

Haciendo análisis vectorial, de la ecuación (1.9) se puede deducir que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , por lo que cumple con la ecuación (1.2). Tras algunas transformaciones algebraicas y supuesto el caso en el que  $\mathbf{j}$  es solenoidal, de la ecuación (1.9) también se deduce que:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad (1.10)$$

Que es la expresión (1.5) cuando no existen corrientes de desplazamiento, o lo que es lo mismo, cuando el flujo de campo eléctrico es constante en el tiempo. Las ecuaciones (1.2) y (1.5) son las dos ecuaciones fundamentales que gobiernan los problemas magnetostáticos. Para estudiarlos se introduce el *potencial vector*  $\mathbf{A}$ , definido por la relación

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.11)$$

la cual garantiza que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . La ecuación (1.10) se puede escribir ahora como:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.12)$$

Podemos elegir trabajar en el caso en el que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  para que la expresión (1.12) se reduzca a la conocida como *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (1.13)$$

Aplicando condiciones de frontera apropiadas, podemos resolver la ecuación (1.13) para obtener la expresión general del potencial vector para corrientes estacionarias:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (1.14)$$

## 1.2. Momentos magnéticos

Consideremos una distribución de corriente estacionaria confinada en una región de espacio  $\Omega$ . Tomando el origen de coordenadas al interior de  $\Omega$ , se puede calcular el potencial vector  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  en una región exterior a  $\Omega$  tal que  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ , siendo  $\mathbf{r}'$  un vector que varía sobre  $\Omega$ . Haciendo una expansión en serie del término  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  de la ecuación (1.14) se obtiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' + \frac{1}{r^3} \int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' + \dots \right] \quad (1.15)$$

El hecho de que la  $\mathbf{j}$  sea solenoidal y confinada por  $\Omega$  implica dos cambios sobre los términos de la serie en (1.15): La primera integral es cero y en la segunda para cualquier pareja de componentes cartesianas  $(x'_i, x'_j)$  y  $(j_i, j_j)$  la integral sobre  $\Omega$  de  $(x'_i j_j + x'_j j_i)$  es cero. Esto permite escribir el término dominante del potencial vector como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (1.16)$$

donde

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{2} d^3 r' \quad (1.17)$$

representa el *momento magnético* de la distribución de corriente estacionaria. Este momento tiene validez cuando se toma un  $r$  mucho mayor que las dimensiones de  $\Omega$  y se le conoce como *momento magnético elemental* o *dipolo magnético*.

Cuando la corriente es producida por partículas todas ellas con la misma relación carga-masa la ecuación (1.17) se reduce a

$$\mathbf{m} = \frac{q_0}{2m_0} \mathbf{L} \quad (1.18)$$

donde  $\mathbf{L}$  es el *momento angular orbital*.

Si  $\mathbf{m}$  está asociado a un bucle de corriente elemental de corriente  $I$  delimitando un área  $A$ , entonces

$$\mathbf{m} = nAI \quad (1.19)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a  $A$ .

El campo magnético creado por un dipolo  $\mathbf{m}$ , el cual genera un potencial vector como el de (1.16), en cualquier punto del espacio  $r \neq 0$  será

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \quad (1.20)$$

Conocido como *campo dipolar*. Para que quede también definido en el origen, el siguiente resultado general de la magnetostática es de utilidad: Dada una distribución de corriente confinada en una región  $\Omega$ , la integral de volumen a una esfera conteniendo a  $\Omega$  del campo magnético generado por dicha distribución es igual a

$$\int_{\text{esfera}} \mathbf{B}(\mathbf{r}') d^3 r' = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m} \quad (1.21)$$

Por lo tanto, también es cierto que la integral del campo al espacio entre dos esferas, ambas conteniendo a  $\Omega$ , es cero. Para que (1.20) sea compatible con (1.21), podemos modificarla para obtener

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \right] \quad (1.22)$$

Esta modificación resume en la singularidad  $r = 0$  todos los detalles a menor escala de la distribución de corriente responsable de  $\mathbf{m}$ , sin cambiar el valor del campo en otros casos.

## 1.3. Medios magnéticos

La materia, cuando está magnetizada, es capaz de crear un campo magnético gracias a movimientos electrónicos dentro de los átomos y al *momento angular de espín* de sus electrones. A estas corrientes microscópicas,  $\mathbf{j}_{\text{micro}}$ , se las puede estudiar bajo las consideraciones de distribución de corriente estacionaria y campo lejano desarrolladas en la sección 1.2.

La existencia de corrientes microscópicas lleva a la introducción de un campo adicional, el campo  $\mathbf{H}$ , el cual va a ser de gran importancia a la hora de caracterizar los efectos magnetostáticos en presencia de materia magnetizada.



### 1.3.1. Momentos magnéticos y magnetización

Consideremos un medio magnético por el que no circulan corrientes macroscópicas. Tomando un volumen elemental  $\Delta V$  centrado en la posición  $\mathbf{r}$  su corriente promedio será

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{j}_{micro}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (1.23)$$

$\mathbf{j}_M(\mathbf{r})$  es la *corriente de magnetización* y describe bucles de corriente confinados en distancias atómicas. Esto implica que la integral a cualquier superficie que atravesase el cuerpo debe ser cero, ya que las líneas cerradas de corriente que atravesasen dicha superficie en un sentido volverán a atravesarla en el sentido contrario. Este hecho permite expresar los bucles de corriente microscópicos rotando en torno a otro vector  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (1.24)$$

Este valor  $\mathbf{M}$  solo puede ser distinto de cero al interior del cuerpo y recibe el nombre de *magnetización*. Sustituyendo la expresión (1.24) en (1.17) se obtiene el valor del momento dipolar magnético en función de la magnetización. Aplicando relaciones vectoriales y teniendo en cuenta el hecho de que  $\mathbf{M} = 0$  fuera del cuerpo se llega a la siguiente expresión:

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega} \mathbf{M}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (1.25)$$

$\Omega$  representa la región del espacio ocupada por las corrientes microscópicas. Esta ecuación muestra que  $\mathbf{M}$  es la densidad de momentos magnéticos en el cuerpo.

Para terminar con la descripción de la magnetización, consideremos el cuerpo como una colección de momentos elementales  $\mathbf{m}_i$  asociados a un volumen  $\Delta V$ . En este caso, el momento magnético total para  $\Delta V$  será  $\Delta \mathbf{m}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{m}_i$ . Siendo consistentes con la expresión (1.25), la magnetización para cada volumen elemental queda como

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V} \quad (1.26)$$

En presencia de materiales magnéticos se define un campo  $\mathbf{H}$  o *campo magnético*, descrito en función del campo  $B$  o *campo inducción magnética* y de la magnetización:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (1.27)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación magnetostática (1.10) se llega a

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (1.28)$$

En la que  $\mathbf{j}$  se refiere a todo tipo de corriente de tipo estacionario o que se pueda considerar como tal.

El término  $\mathbf{j}_M$  no solo incluye a las densidades de corriente electrónica orbitales ya mencionadas, si no que también hace referencia a la densidad de corriente de espín. De hecho, el *momento angular de espín del electrón* es el principal responsable del magnetismo de los materiales ferromagnéticos. El momento magnético de espín es igual al valor esperado de  $(q_e/m_e)\mathbf{s}$ . La componente  $\mathbf{s}$  toma los valores  $\pm h/4\pi$ . La cantidad  $\mu_B = hq_e/4\pi m_e \approx 9,2710^{-24} Am^2$  es conocida como *magnetón de Bohr* y representa la unidad atómica natural de los momentos magnéticos.

### 1.3.2. Analogía con la electrostática

Siempre que se postule existencia de momentos magnéticos, las características cuánticas podrán definirse a través de las ecuaciones de Maxwell. Conocido el caso clásico en el que sólo intervienen corrientes estacionarias de conducción, es de interés compararlo con el caso magnetostático. Consideremos que existe una magnetización permanente y todas las corrientes están asociadas a dicha magnetización. Para este caso, las ecuaciones (1.2) y (1.28) se escriben como

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_M = 0 \quad (1.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_M = 0 \quad (1.30)$$

De estas ecuaciones se deduce

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_M = \rho_M \quad (1.31)$$

donde

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1.32)$$

La cantidad  $\rho_M$  es conocida como *densidad de polos magnéticos libres* y son análogos a las cargas libres del caso electrostático. Estos polos son una abstracción matemática útil pero no tienen una existencia física.

Siguiendo con la analogía con el caso electrostático, se introduce un *potencial escalar magnético*,  $\phi_M$ , definido por la relación

$$\mathbf{H}_M = -\nabla \phi_M \quad (1.33)$$

la cual garantiza que  $\nabla \times \mathbf{H}_M = 0$ . De la ecuación (1.31) se deduce que  $\phi_M$  cumple la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi_M = -\rho_M \quad (1.34)$$

De la que se obtiene la solución

$$\phi_M(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (1.35)$$

La expresión análoga para el potencial vector magnético,  $\mathbf{A}_M(\mathbf{r})$ , se obtiene sustituyendo la ecuación (1.24) en (1.14):

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (1.36)$$

Para ambos potenciales el resultado vendrá condicionado por el hecho de que  $\mathbf{M}$  se haga 0 en la superficie del cuerpo. Esto produce un comportamiento cuasi-singular de  $\nabla \cdot \mathbf{M}$  y  $\nabla \times \mathbf{M}$  en la superficie del cuerpo, que dará lugar a contribuciones separadas en la integral de (1.35) y de (1.36):

$$\phi_M(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad (1.37)$$

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad (1.38)$$

Donde la primera integral es al cuerpo de volumen  $V$  y la segunda a la superficie límite  $S$  del cuerpo.

### 1.3.3. Campos de desmagnetización

Consideremos un cuerpo con magnetización uniforme. En este caso, se puede describir la magnetización de todo el cuerpo en función de un único vector  $\mathbf{M}$ . Bajo estas condiciones,  $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$  en cualquier parte dentro del cuerpo y por tanto la ecuación (1.37) del potencial escalar queda reducida a

$$\phi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{M} \cdot \int_S \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad (1.39)$$

Esta ecuación muestra que, aparte de la proporcionalidad con  $\mathbf{M}$ , el potencial escalar depende únicamente de la geometría del cuerpo. De la ecuación (1.33) se deduce que si  $\mathbf{M}$  es uniforme entonces  $\mathbf{H}_M$  también lo será dentro del cuerpo si este tiene forma de elipsoide. Además, si  $\mathbf{M}$  es paralelo a alguno de los ejes principales, entonces  $\mathbf{H}_M$  tiene la misma dirección que  $\mathbf{M}$  y sentido contrario dentro del cuerpo:

$$\mathbf{H}_M = -N\mathbf{M} \quad (1.40)$$

$N$  es el *factor de desmagnetización* y  $\mathbf{H}_M$  dentro del cuerpo el *campo de desmagnetización*. El valor de  $N$  depende de a que eje principal sea paralelo  $\mathbf{M}$ . Existen tres factores de desmagnetización, cada uno de ellos asociado a un eje principal:

$$N_a + N_b + N_c = 1 \quad (1.41)$$

El estudio de la ecuación del elipsoide de revolución, es decir, aquel con dos ejes del mismo tamaño, muestra que el campo de desmagnetización es pequeño cuando el cuerpo es alargado y la magnetización se dirige en la dirección del eje mayor.

En el caso más general,  $\mathbf{M}$  no se dirige a lo largo de uno de los ejes principales y estos pueden tener cualquier longitud. Las relaciones entre el campo y la magnetización toman forma matricial:

$$\begin{pmatrix} H_{Mx} \\ H_{My} \\ H_{Mz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} N_a & 0 & 0 \\ 0 & N_b & 0 \\ 0 & 0 & N_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Es importante notar que el campo de desmagnetización se mantiene invariante al modificar las dimensiones lineales por el mismo factor de escala. Por lo tanto, el efecto de las cargas magnéticas no desaparece por mucho que aumente el tamaño del cuerpo, y el resultado final obtenido en el límite de tamaño infinito seguirá dependiendo de la forma del cuerpo. Este comportamiento se opone al de las cargas eléctricas, para las cuales a distancias tendiendo a infinito el potencial ejercido sobre otras cargas se volvía cero.

Además de los cuerpos magnéticos de formas elipsoidales, existe otro caso de particular interés físico. Supongamos que la magnetización del cuerpo no diverge y que esta es siempre perpendicular a la superficie. De la ecuación (1.37) se deduce que  $\phi_M(\mathbf{r})$  es cero y por lo tanto  $\mathbf{H}_M = 0$ . Ejemplos de cuerpos con campo de desmagnetización nulo son los marcos cuadrados y anillos. En ellos las líneas de magnetización siguen un ciclo cerrado a través del cuerpo.

## 1.4. Relaciones de energía

Hasta ahora, la relación entre electrostática y magnetostática ha sido de utilidad en el estudio de los fenómenos de magnetización. Sin embargo, no es obvio como extender esta analogía al caso energético. El hecho es que, mientras que  $\mathbf{E}$  actúa sobre las cargas eléctricas ejerciendo trabajo sobre ellas, el campo  $\mathbf{B}$ , al dar siempre una fuerza perpendicular al vector velocidad de los portadores de carga (Ec. 1.6) no produce trabajo. Para poder calcular la energía asociada a una configuración magnetostática dada, es necesario considerar el trabajo realizado por los campos eléctricos inducidos por la ley de Faraday cuando se construye dicha configuración.

### 1.4.1. Energía de las corrientes estacionarias

Consideremos una cierta distribución de corriente en una región del espacio donde existen materiales magnéticos. Dicha distribución se construye aumentando el número de corrientes desde cero hasta un valor final. El trabajo necesario para construir la distribución será realizado por los procesos internos teniendo lugar en el interior de los materiales magnéticos, por lo que dependerá del tipo de material magnético que exista en esa región. Supongamos que la distribución a la que se le induce el trabajo esta formada por bucles portadores de corriente,  $L_k$ , en torno al material magnético, similares a cables de resistencia  $R_k$  por los que circulan corrientes  $I_k$  impulsadas por un voltaje  $V_k$ . Si asumimos que las corrientes y los campos magnéticos producidos por los  $L_k$  cambian lentamente a lo largo del tiempo, por la ley de Faraday inducirán una fuerza electromotriz en cada bucle de corriente. El flujo magnético asociado a cada cable  $k$ :

$$\phi_k = \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.43)$$

Donde  $S_k$  es la superficie abierta limitada por  $L_k$ . El voltaje en cada cable será

$$V_k = R_k I_k + \frac{d\phi_k}{dt} \quad (1.44)$$

Multiplicando por  $I_k$  y sumando a todos los  $k$  se obtiene la energía total por unidad de tiempo suministrada por las fuentes de voltaje. Parte de esta energía,  $\sum_k R_k I_k^2$ , es disipada por calentamiento Joule de los cables y podemos ignorarla. La otra parte,  $\sum_k I_k d\phi_k/dt$ , representa el ritmo al que la energía es almacenada en la configuración magnetostática a medida que aumentan las corrientes de los bucles desde cero a su valor final. Si  $\phi_k$  varía  $\delta\phi_k$  en el lapso de tiempo  $\delta t$ , la variación en energía de la configuración magnética será

$$\delta U = \sum_k I_k \delta\phi_k \quad (1.45)$$

Expresando  $I_k$  en términos de  $\mathbf{j}$  y haciendo uso de la ecuación (1.43) la expresión anterior se generaliza a una distribución espacial continua:

$$\delta U = \int \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A} d^3r \quad (1.46)$$

Si ahora se pasa de un estado de referencia inicial,  $S_0$ , con todas las corrientes cero, hasta el estado final de interés,  $S$ , la energía total realizada por las fuentes de voltaje es

$$U = \int d^3r \int_{S_0}^S \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A} \quad (1.47)$$

Recordando que  $\nabla \times \delta \mathbf{A} = \delta \mathbf{B}$  y que  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$  y aplicando relaciones de vectores se obtiene que

$$\mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}) + \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \quad (1.48)$$

El término con divergencia no contribuye al introducirlo en la ecuación (1.47) por el teorema de la divergencia si se integra a todo el espacio, con lo que se obtiene

$$U = \int_{V_\infty} d^3r \int_{S_0}^S \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \quad (1.49)$$

Esta ecuación representa el trabajo empleado en construir una cierta configuración de corriente en términos de las modificaciones magnéticas que esto produce en los medios magnéticos. Dicho trabajo puede conocerse conocida la ley constitutiva  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ . El papel de  $S_0$  no es trivial en el caso de materiales ferromagnéticos, ya que por las histéresis pueden encontrarse magnetizados al inicio del proceso, por lo que todas las corrientes en  $S_0$  no serían cero.

Si la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  es lineal y isótropa,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , la ecuación (1.49) se reduce a

$$U = \int_{V_\infty} \frac{B^2}{2\mu} d^3r = \int_{V_\infty} \frac{\mu H^2}{2} d^3r \quad (1.50)$$

Esta expresión también aplica al espacio vacío con hacer  $\mu = \mu_0$ .

### 1.4.2. Teorema de Poynting

La ecuación de balance energético conocida como *teorema de Poynting* puede derivarse de la ecuaciones de Maxwell. Para ello, se comienza considerando que una ecuación de equilibrio como esta debe incluir el término  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ , el cual representa el trabajo realizado por el campo electromagnético por unidad de tiempo sobre corrientes de conducción. Este término se obtiene multiplicando escalarmente por  $\mathbf{E}$  en la expresión (1.28):

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (1.51)$$

Por otro lado, la ecuación (1.49) sugiere que  $\mathbf{H} \cdot \partial \mathbf{B} / \partial t$  debe estar también presente en el balance. Este término aparece haciendo el producto escalar entre  $\mathbf{H}$  y la segunda ecuación de Maxwell, la (1.3):

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.52)$$

Combinando ambas expresiones y aplicando la relación vectorial adecuada se obtiene

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (1.53)$$

Cuando la densidad de corriente  $\mathbf{j}$  obedece la ley constitutiva

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}') \quad (1.54)$$

Donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica y  $\mathbf{E}'$  el campo eléctrico que caracteriza a las fuentes responsables del flujo de corriente, las cuales actúan como suministradores de energía. Expresando el campo como  $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma - \mathbf{E}'$ , sustituyendo esta expresión en el primer sumando a la izquierda en la ecuación (1.53), integrando dicha ecuación sobre un volumen genérico  $\Omega$  y aplicándole el teorema de Gauss al término que se encuentra a la derecha del igual se tiene

$$\int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d^3r + \int_{\Omega} \frac{j^2}{\sigma} d^3r = - \oint_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' d^3r \quad (1.55)$$

Donde  $\Sigma$  se refiere a la superficie que delimita al volumen. Este resultado es conocido como *teorema de Poynting* y el vector  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  como *vector de Poynting*. El término que contiene  $\mathbf{S}$  representa la energía que fluye por unidad de tiempo en  $\Omega$  a través de  $\Sigma$ . La integral con  $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  representa, análogamente a la ecuación (1.49), la energía almacenada como energía interna del medio magnético. El último término por la derecha representa la energía suministrada a  $\Omega$  por fuentes externas. El término con  $j^2/\sigma$  representa la cantidad de energía irreversiblemente perdida en forma de calor por efecto Joule.

## 1.5. Trabajo magnético

La energía magnetostática es, en un sentido idealizado, el trabajo mecánico necesario para construir la configuración magnética final pieza por pieza. Este trabajo dependerá de la ley constitutiva,  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  o  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ , que a su vez dependen de efectos magnetostáticos a escala atómica como el *intercambio* o la *anisotropía*; y de la *disipación de energía* por histéresis.

### 1.5.1. El cuerpo magnético como un conjunto de momentos magnéticos

Cuando se considera el cuerpo como un conjunto de momentos magnéticos, existen dos aspectos que lo caracterizan: la distribución espacial de magnetización  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  y la forma geométrica del cuerpo. Para describir la energía asociada a esta descripción, conocida como *energía magnetostática*, se estudia el trabajo necesario para construir el cuerpo magnético trayendo cada momento magnético desde el infinito hasta su posición final.

El cuerpo magnético consiste en una colección de momentos elementales  $\mathbf{m}_i$ .  $\sum_i \mathbf{B}_i$  es el campo total creado por todos los momentos. Podemos dividir el cuerpo en volúmenes elementales  $\Delta V$  compuestos por unos cuantos momentos con posiciones aleatorias. Tomemos uno de estos momentos y llamémoslo  $\mathbf{m}_0$ . Su energía potencial en el campo magnético creado por el resto de momentos es  $-\mathbf{m}_0 \cdot \sum_i \mathbf{B}_i$ . Como  $\mathbf{m}_0$  ocupa una posición aleatoria dentro de  $\Delta V$ , experimentará en promedio el campo obtenido de promediar  $\sum_i \mathbf{B}_i$  sobre  $\Delta V$ :

$$\mathbf{B}_M = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sum_i \mathbf{B}_i d^3r \quad (1.56)$$

Como la posición de  $\mathbf{m}_0$  dentro de  $\Delta V$  no puede ser totalmente aleatoria, pues no puede ocupar posiciones ocupadas por otros momentos, es necesario substraer de  $\mathbf{B}_M$  el valor medio del campo en las posiciones de los otros momentos de  $\Delta V$ . Para ello, calculamos el campo magnético promedio a el resto de momentos en  $\Delta V$ . De acuerdo con la ecuación (1.22) aplicada en el límite cuando  $r$  tiende a cero este campo promedio es

$$\frac{2\mu_0}{3} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{m}_i \delta(\mathbf{r}) d^3r = \frac{2\mu_0}{3} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{m}_i = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} \quad (1.57)$$

Donde en la última igualdad se ha hecho uso de la expresión (1.26). La energía potencial promedio en  $\mathbf{m}_0$  será

$$U_0 = -\mathbf{m}_0 \cdot \left( \mathbf{B}_M - \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} \right) \quad (1.58)$$

Sumando las energías de todos los momentos en  $\Delta V$  y luego las de todos los volúmenes elementales del cuerpo, se obtiene

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} \cdot \left( \mathbf{B}_M - \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} \right) d^3r \quad (1.59)$$

El término  $1/2$  aparece porque cada momento contribuye dos veces a la suma, una como fuente del campo y otra como momento sobre el que actúa el campo. Utilizando la relación general (1.27), podemos expresar  $U$  convenientemente en términos de  $\mathbf{H}$ :

$$U = -\frac{\mu_0}{2} \int_V \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{M} d^3r - \frac{\mu_0}{6} \int_V M^2 d^3r \quad (1.60)$$

El segundo término domina cuando  $M$  se hace lo más grande posible en cada volumen elemental. Esto se consigue alineando los momentos elementales de cada  $\Delta V$  en una misma dirección favorecida energéticamente. En muchos casos, sin embargo, este término juega un papel menor. En el caso de los materiales ferromagnéticos, el alineamiento de los momentos está dictado por las fuerzas de intercambio, que serán descritas más adelante, más que por las interacciones magnetostáticas. Podemos definir la energía magnetostática del cuerpo,  $U_M$ , como la suma de  $U$  mas el término con  $M^2$  cambiado de signo de la ecuación (1.60). De este modo,

$$U_M = -\frac{\mu_0}{2} \int_V \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{M} d^3r \quad (1.61)$$

que puede ser escrita, utilizando la expresión  $\mathbf{M} = \mathbf{B}_M/\mu_0 - \mathbf{H}_M$  y aprovechando que la integral a todo el volumen de  $\mathbf{H}_M \cdot \mathbf{B}_M$  es cero, como

$$U_M = \frac{\mu_0}{2} \int_{V_\infty} H_M^2 d^3r \quad (1.62)$$

### 1.5.2. Conservación de la energía y trabajo magnético

La ecuación de conservación de la energía viene dada por el teorema de Poynting (Ec. 1.55). Consideremos la forma que toma cuando el volumen  $\Omega$  se extiende a todo el espacio y el flujo del vector de Poynting, en consecuencia, vaya a cero. El trabajo  $\delta L$  realizado por fuerzas electromotrices externas  $\mathbf{E}'$ , con una densidad de corriente aplicada  $\mathbf{j}_a$  en el intervalo  $\delta t$ :

$$\delta L \equiv \delta t \int_{V_\infty} \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{E}' d^3r = \int_{V_\infty} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} d^3r + \delta t \int_V \frac{j^2}{\sigma} d^3r \quad (1.63)$$

Donde  $V$  se refiere al volumen del cuerpo y  $j^2$  es el módulo al cuadrado de la densidad de corriente inducida en el cuerpo por la acción de  $\mathbf{E}'$ . Si consideramos que las corrientes magnetizadoras  $\mathbf{j}_a$  se conectan lentamente, la disipación  $j^2/\sigma$  en forma de calor dentro del cuerpo puede despreciarse. La expresión del trabajo se reduce a

$$\delta L = \int_{V_\infty} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} d^3r \quad (1.64)$$

Esta ecuación no se reduce a cero en ausencia de cuerpo magnético. Por ello, es apropiado substraer de  $\delta L$  la energía gastada en crear el campo magnético aplicado al espacio vacío:

$$\delta L = \int_{V_\infty} (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}_a \cdot \delta \mathbf{H}_a) d^3r \quad (1.65)$$

Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, el campo magnético total puede expresarse como la suma del campo magnético aplicado y el campo creado por las corrientes de inducción del cuerpo magnético:  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_M$ . La correspondiente inducción magnética es  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_M + \mathbf{M})$ . Estas dos expresiones y el hecho de que la integral a todo el espacio de  $\mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_M$  sea 0 porque  $\nabla \cdot \mathbf{H}_a = 0$  y  $\nabla \times \mathbf{H}_M = 0$  permiten escribir la ecuación (1.65) como

$$\delta L = \delta U_M + \mu_0 \int_V \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{M} d^3r \quad (1.66)$$

De acuerdo a la ecuación (1.61), podemos expresar  $\delta U_M$  de una forma alternativa:

$$\delta U_M = -\frac{\mu_0}{2} \int_V \mathbf{H}_M \cdot \delta \mathbf{M} d^3r - \frac{\mu_0}{2} \int_V \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{H}_M d^3r = -\mu_0 \int_V \mathbf{H}_M \cdot \delta \mathbf{M} d^3r \quad (1.67)$$

Donde la última igualdad se ha obtenido aplicando teoremas de reciprocidad. Introduciendo la ecuación (1.67) en (1.66) se obtiene

$$\delta L = \mu_0 \int_V \mathbf{H}_a \cdot \delta \mathbf{M} d^3r \quad (1.68)$$

La cual es una expresión del trabajo en un instante de tiempo que dependerá del campo magnético aplicado, pero no del campo inducido. Con esta ecuación se expresa el trabajo en términos de cantidades de interés físico directo: el campo aplicado  $\mathbf{H}_a$ , independiente de las propiedades del cuerpo, y el estado magnético del cuerpo, descrito por  $\mathbf{M}$ . Cuando  $\mathbf{H}_a$  es uniforme dentro del cuerpo, sale fuera de la integral. Recordando la ecuación (1.25) se tiene

$$\delta L = \mu_0 \mathbf{H}_a \cdot \delta \mathbf{m} \quad (1.69)$$

### 1.5.3. Diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo

En la expresión (1.66), la energía magnetostática  $U_M$  viene determinada por la distribución espacial de la magnetización y por la forma del cuerpo. Procesos adicionales a los considerados en el cálculo de  $U_M$  contribuyen a la energía a través del término:

$$\delta L - \delta U_M = \mu_0 \int_V \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{M} d^3r. \quad (1.70)$$

De acuerdo a esta expresión, la ley constitutiva  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  permite clasificar los medios magnéticos en función de estos mecanismos internos en *diamagnéticos*, *paramagnéticos* y *ferromagnéticos*.

- *Diamagnetismo*. Son aquellas sustancias en las que la ley lineal  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$  presenta una susceptibilidad  $\chi$  negativa de valor muy pequeño, de un orden entre  $-10^{-6}$  y  $-10^{-5}$ . En los materiales diamagnéticos los electrones modifican su movimiento en presencia de un campo externo para apantallarlo. El hecho de que  $\chi$  sea negativa conduce a un valor de la integral en (1.70) negativo. Sin embargo, esto no significa que la energía sea liberada por el sistema, lo que implica este signo es que el trabajo total sobre un material diamagnético es menos que el realizado al espacio vacío, pero continúa siendo positivo.

- *Paramagnetismo.* Las sustancias paramagnéticas siguen una ley lineal para campos pequeños,  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ , con susceptibilidades positivas del orden de  $10^{-3}$  a  $10^{-5}$ . Desviaciones de la ley lineal tienen lugar para campos muy altos donde el efecto satura. El paramagnetismo es el resultado de la competición entre el campo externo, que trata de alinear todos los momentos en su dirección, y la agitación térmica, que tiende a destruir cualquier tipo de alineamiento posible. Un *paramagnético ideal* será aquel para el que no se consideran los efectos de interacción entre momentos como el acople dipolar. Para el elemento de volumen  $\Delta V$ , este tipo de paramagnético cumple la ley de Curie cuando el campo es pequeño:

$$\chi = \frac{\mu_0 m M_0}{k_B} \frac{1}{T} = \frac{C}{T} \quad (1.71)$$

donde  $M_0 = \frac{Nm}{\Delta V}$  es la máxima magnetización posible, alcanzada cuando todos los momentos se encuentran perfectamente alineados.

- *Ferromagnetismo.* La caracterización de los materiales ferromagnéticos no puede hacerse por una única ley constitutiva, ya que la existencia de magnetización espontánea e histéresis permiten poder describir infinitas curvas de magnetización. En este tipo de materiales, los principales mecanismos que determinan su ley constitutiva son el intercambio y la anisotropía. Estos mecanismos son responsables de la existencia de dominios magnéticos, descritos a escala mucho menor que la de la ley constitutiva  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ . Además, la energía calculada en la ecuación (1.70) no se almacena en el material necesariamente por procesos reversibles, pues parte de ella puede transformarse en energía térmica por los efectos de histéresis.

## 1.6. Relaciones termodinámicas

Para poder conocer las relaciones termodinámicas de un sistema, es necesario haber definido adecuadamente el trabajo realizado. En el caso que nos concierne tomamos la expresión del trabajo magnético de la ecuación (1.69), la cual no incluye la energía necesaria para crear el campo aplicado en el espacio vacío. El momento magnético  $\mu_0 \mathbf{m}$  y el campo  $\mathbf{H}_a$  son las variables de estado *extensiva* e *intensiva* del sistema, respectivamente. Los *potenciales termodinámicos* son funciones de estado que permiten definir las transformaciones termodinámicas bajo ciertas condiciones. En nuestro caso tomaremos la función de Helmholtz  $F(\mathbf{m}, T)$  y de Gibbs  $G(\mathbf{H}, T)$  para describir un sistema magnético a volumen y temperatura constantes. Para poder aplicar estas relaciones termodinámicas es necesario que  $\mathbf{H}_a$  sea uniforme dentro del cuerpo.

### 1.6.1. Materiales magnéticos en procesos reversibles

La Termodinámica nos dice que la energía libre de Helmholtz y de Gibbs se pueden expresar en forma diferencial como

$$dF \leq \mu_0 \mathbf{H}_a \cdot d\mathbf{m} - SdT \quad (1.72)$$

$$dG \leq -\mu_0 \mathbf{m} \cdot d\mathbf{H}_a - SdT \quad (1.73)$$

donde el signo igual de la inecuación aplica en el caso reversible, obteniéndose

$$\mathbf{H}_a = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{m}} \right]_T \quad (1.74)$$

$$\mu_0 \mathbf{m} = - \left[ \frac{\partial G}{\partial \mathbf{H}_a} \right]_T \quad (1.75)$$

De acuerdo a las ecuaciones (1.74) y (1.75) la variación de la energía libre cuando  $T$  es constante será

$$\Delta F = \mu_0 \int \mathbf{H}_a \cdot d\mathbf{m} \quad (1.76)$$

$$\Delta G = -\mu_0 \int \mathbf{m} \cdot d\mathbf{H}_a \quad (1.77)$$

Esto muestra que podemos estimar el valor de  $\Delta F$  y de  $\Delta G$  haciendo la representación de la ley constitutiva del material, donde estas variaciones se representan como las áreas delimitadas por la curva de magnetización y los ejes  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{H}_a$ . Esta correspondencia es únicamente aplicable en el caso en el que dicha curva sea reversible y la disipación debida a la histéresis inexistente o despreciable.

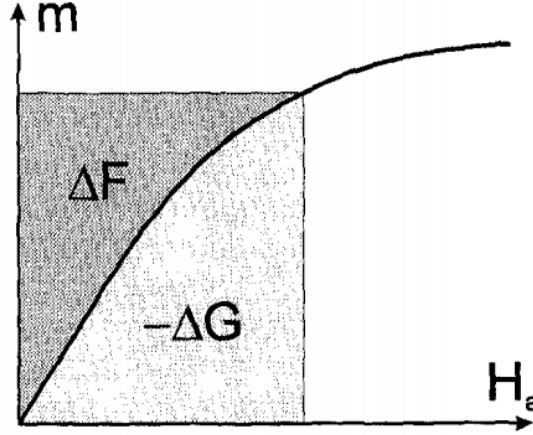


Figura 1.1: Energías libres de Helmholtz y de Gibbs estimadas de la curva de magnetización reversible.

### 1.6.2. Materiales magnéticos en procesos irreversibles

En el caso del no equilibrio la entropía debe ser una cantidad que fluye en el espacio y que debe ser creada. El cambio de entropía puede ser interpretado en este caso como

$$dS = \delta_e S + \delta_i S = \frac{\delta Q}{T} + \delta_i S \quad (1.78)$$

donde  $\delta_e S$  se refiere a la entropía fluyendo en el sistema y  $\delta_i S$  a la entropía creada dentro del sistema por procesos irreversibles.

La *hipótesis del equilibrio local* para el caso irreversible asume que, aunque el sistema no se encuentre en conjunto en equilibrio, el equilibrio se sigue manteniendo en cada volumen elemental. Bajo esta condición, podemos utilizar las expresiones (1.72) y (1.73) con el signo igual como hacíamos en el caso de equilibrio. Sustituyendo el valor de la entropía descrito en (1.78) se obtiene

$$dF = \mu_0 \mathbf{H}_a \cdot d\mathbf{m} - T\delta_i S - SdT \quad (1.79)$$

$$dG = -\mu_0 \mathbf{m} \cdot d\mathbf{H}_a - T\delta_i S - SdT \quad (1.80)$$

que para una transformación a temperatura constante resulta

$$\Delta F = \mu_0 \mathbf{H}_a \cdot d\mathbf{m} - \int T\delta_i S \quad (1.81)$$

$$\Delta G = -\mu_0 \mathbf{m} \cdot d\mathbf{H}_a - \int T\delta_i S \quad (1.82)$$

donde el valor  $\delta_i S \geq 0$  por la segunda ley de la Termodinámica. De la ecuación (1.81) se deduce que el trabajo magnético sobre el cuerpo (Ec. 1.69) contribuye en parte a la energía libre y en parte a la producción de entropía.

## 1.7. Micromagnetismo

Los dos principales procesos internos encargados de controlar la magnetización macroscópica de un material,  $\mathbf{M}$ , así como su consiguiente ley constitutiva,  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ , son el *intercambio* y la *anisotropía*. Ambos fenómenos se producen como consecuencia de cambios a nivel microscópico del material magnético: El intercambio deriva de la combinación entre el acoplamiento electrostático de los orbitales electrónicos y la necesidad de cumplir el principio de exclusión de Pauli, según el cual dos electrones no pueden ocupar el mismo estado cuántico simultáneamente. En cuanto a la anisotropía, se relaciona con la interacciones entre los orbitales electrónicos y el potencial creado por el resto del entramado que en conjunto componen el cuerpo magnético.

La formación de dominios magnéticos viene determinada por las propiedades de simetría de la energía de anisotropía, la cual favorecerá ciertas orientaciones de espín. Mientras que la interacción de unos dominios con otros a través de la pared de dominio dependerá del intercambio. En el estudio de estos dominios, es necesario tomar un volumen elemental  $\Delta V$  suficientemente grande como para contener muchos momentos magnéticos



pero suficientemente pequeño como para no apreciarse grandes cambios en su magnetización. Para ello, las dimensiones de estos volúmenes deben de ser aproximadamente un orden de magnitud menor que la dimensión del muro que separa los dominios vecinos. En esta sección nos centraremos en las propiedades de uno de estos volúmenes elementales.

El intercambio y la anisotropía, junto con la energía magnetostática, son las principales contribuciones que podemos esperar en un material ferromagnético. A estas se puede añadir también la interacción con un campo externo. Todas estas contribuciones describen las ecuaciones del Micromagnetismo, las cuales son obtenidas de minimizar la energía libre del cuerpo magnético dependiente del espacio.

### 1.7.1. Intercambio

Los materiales ferromagnéticos pueden ser interpretados como un caso especial de material paramagnético. Tomando la expresión (1.71) en el caso de saturación, la cual se alcanza cuando  $M$  se hace máxima y por tanto  $M = M_0 = \chi H_a$ , se tiene que el campo externo aplicado es  $H_a \sim \frac{k_B T}{\mu_0 m}$ . Tomando  $m \sim \mu_B$  tenemos que a temperatura ambiente la magnetización será sustancial para enormes campos aplicados, del orden de  $10^8 \text{ Am}^{-1}$ . Sin embargo, se observan materiales que, actuando como un paramagnético ideal a temperaturas altas, a temperatura ambiente presentan una importante magnetización (del orden de 1 T) para campos de tan solo unas decenas de amperios por metro. Esta contradicción se produce porque en el caso del paramagnético ideal no se considera el acoplamiento entre los momentos. Es necesario postular la existencia un cierto campo, conocido como *campo molecular de Weiss*, que favorece el alineamiento colectivo de los momentos a lo largo de una dirección común. Dicho campo será proporcional a la magnetización:

$$H_W = N_W M \quad (1.83)$$

La constante adimensional  $N_W$  mide la fuerza de la interacción entre momentos, cada uno de los cuales experimentará un campo efectivo que será la suma del campo aplicado y el campo molecular. El valor de la susceptibilidad ya no es el de la expresión (1.71). Ahora, cuando  $M = \chi H_a$  tenemos

$$\chi = \frac{\mu_0 m M_0}{k_B} \frac{1}{T - T_c} = \frac{C}{T - T_c} \quad (1.84)$$

Conocida como *ley de Curie-Weiss*. La temperatura característica o *temperatura de Curie* es

$$T_c = \frac{\mu_0 m N_W M_0}{k_B} \quad (1.85)$$

Cuando  $T$  tiende a  $T_c$  desde temperaturas superiores, la susceptibilidad se va a infinito. Esta ley falla cuando, para  $T$  menor que  $T_c$ , aparece una susceptibilidad negativa muy grande que lleva a inestabilidad. Si  $T$  es mayor que  $T_c$  la susceptibilidad cae y aumenta el campo aplicado necesario para conseguir una cierta magnetización, recuperándose así el caso paramagnético.  $T_c$  es la temperatura a la cual la acción del campo molecular supera la agitación térmica del sistema llevándolo a un estado globalmente ordenado.

En el caso en que  $T < T_c$  manteniéndose la estabilidad, el sistema adquiere una *magnetización espontánea* o *magnetización de saturación*  $M_s(T)$ . Esta magnetización existe incluso en ausencia de campo aplicado. Si  $H_a = 0$  y  $T$  se hace mayor que  $T_c$  la magnetización espontánea cae a cero. La dependencia de la magnetización de saturación con el campo aplicado viene dada por la siguiente expresión:

$$M_s(H_a, T) \cong M_s(0, T) + \frac{H_a T_c}{N_W T} ch^{-2} \left( \frac{T_c}{T} \right) \quad (1.86)$$

Cuando la temperatura está por debajo del punto de Curie y  $T$  no se encuentra muy cerca de  $T_c$ , el segundo término puede despreciarse y se tiene que  $M_s$  no depende de  $H_a$ .

La energía por unidad de volumen producida por el campo molecular es

$$\frac{U_W}{\Delta V} = -\frac{\mu_0}{2} N_W M^2 \quad (1.87)$$

Un término similar a este aparecía para la energía magnetostática en la expresión (1.60). La energía molecular es mayor al término magnetostático por un factor  $3N_W$ . Estimando los posibles valores de las magnitudes implicadas, se llega a que la interacción del campo molecular es  $10^3$  veces mayor que la magnetostática. Por ello, el término con  $M^2$  en la ecuación (1.60) es despreciable cuando se consideran materiales ferromagnéticos.

### 1.7.2. Anisotropía

Las interacciones de intercambio son isótropas en el espacio. Esto implica que la energía de intercambio de un cierto volumen  $\Delta V$  es la misma para una cierta magnetización independientemente de su dirección. Sin embargo, esta invarianza rotacional siempre se rompe por efectos de *anisotropía*, los cuales favorecen energéticamente ciertas direcciones espaciales.

Considerando un volumen  $\Delta V$  de magnetización uniforme  $\mathbf{M}$ , su energía libre en la orientación de  $\mathbf{M}$  vendrá dada por  $F_{AN}(\mathbf{m})$ , donde  $\mathbf{m}$  es el vector unitario de la magnetización. Asumiendo que a una cierta temperatura  $|\mathbf{M}| = M_s$  se tendrá que  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$ . Las componentes cartesianas de  $\mathbf{m}$ ,  $m_x$ ,  $m_y$  y  $m_z$ , expresadas en coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned} m_x &= \sin\theta \cos\phi \\ m_y &= \sin\theta \sin\phi \\ m_z &= \cos\theta \end{aligned} \quad (1.88)$$

La densidad de energía libre  $f_{AN} = F_{AN}(\mathbf{m})/\Delta V$  puede ser representada gráficamente como una superficie en el espacio. En esta representación, el intercambio isotrópico da lugar a una esfera, figura que no presenta direcciones privilegiadas. La presencia de depresiones en la superficie rompe la simetría esférica dando lugar a direcciones espaciales favorecidas, denominadas *ejes de fácil magnetización*.

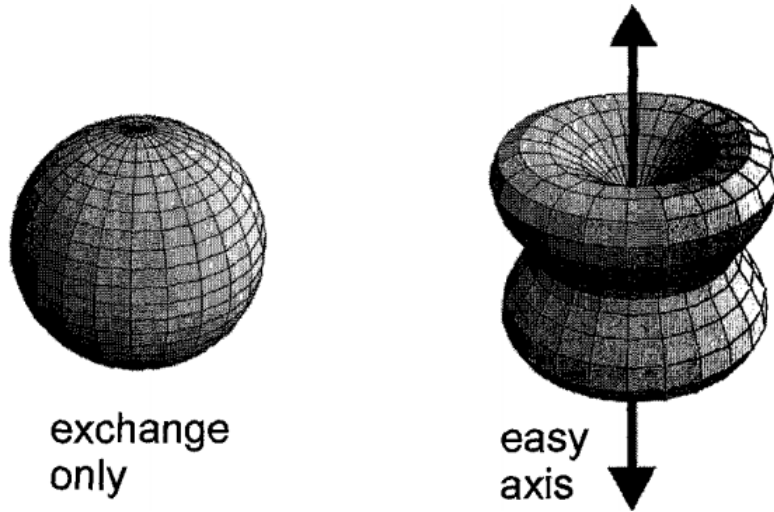


Figura 1.2: Ruptura de la simetría esférica dando lugar a la formación de un eje de fácil magnetización.

$f_{AN}(\mathbf{m})$  está definido salvo por una constante independiente de  $\mathbf{m}$  cuyo valor influirá en aspectos cuantitativos de la función, pero no en la información acerca del tipo de simetría. Los ejes fáciles son las direcciones hacia las que el conjunto de vectores  $\mathbf{m}$  tienden a apuntar para minimizar la energía libre del sistema. Estos ejes contienen a aquellos puntos de la superficie que representan un mínimo local. Los mínimos locales, máximos locales y puntos de silla vendrán dados por los vectores  $\mathbf{m}$  que cumplan la condición de equilibrio:

$$\frac{\partial f_{AN}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = 0 \quad (1.89)$$

Dependiendo de la cantidad de ejes que nos proporcione la simetría, las anisotropías pueden clasificarse en grupos. Las dos clasificaciones más importantes son la *anisotropía uniaxial* y la *anisotropía cúbica*. Para conocer sus superficies de energía se hace el desarrollo en serie de potencias en función de  $\mathbf{m}$ . Como  $f_{AN}(\mathbf{m})$  es en general invariante bajo inversión, el desarrollo contendrá únicamente potencias pares.

#### Anisotropía uniaxial

Como su propio nombre indica, solo existe una dirección espacial privilegiada que controle la energía de anisotropía. Al este eje se le conoce como eje de anisotropía y se define a lo largo de  $z$ . La energía de anisotropía dependerá únicamente de la orientación relativa de  $\mathbf{m}$  respecto al eje de anisotropía. Bajo estas condiciones, la energía de anisotropía es una función par de la componente de magnetización a lo largo del eje  $z$ . El valor de  $m_z$  en esféricas lo conocemos (Ec. 1.88). Para conocer la variable de expansión procedemos del siguiente modo: Por la definición de módulo  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$   $m_z^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ . La densidad de energía tendrá la siguiente expansión general:

$$f_{AN}(\mathbf{m}) = K_0 + K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta + K_3 \sin^6\theta + \dots \quad (1.90)$$

donde las *constantes de anisotropía*  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  tienen dimensiones de energía por unidad de volumen. Si truncamos la serie después del término con  $\sin^2\theta$ , la superficie de energía presenta dos formas distintas. Cuando  $K_1 > 0$  se tiene un toroide (Fig. 1.3).

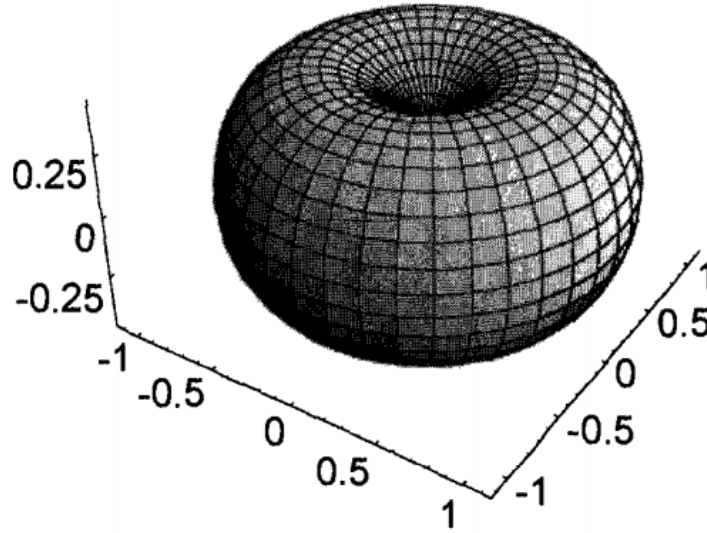


Figura 1.3: Superficie de energía asociada a la ecuación (1.90) cuando  $K_1 > 0$ .

Tomando el origen en el centro de masas, tenemos dos mínimos de energía, uno para  $\theta = 0$  y otro para  $\theta = \pi$ . Para estos mínimos la magnetización apunta en la dirección positiva del eje de anisotropía o en la dirección negativa. Por lo tanto, el eje anisotropía coincide con el eje fácil para  $\mathbf{m}$ . Por otro lado, cuando  $K_1 < 0$  en la expresión de la energía libre truncada, se tiene la superficie representada en la figura 1.4.

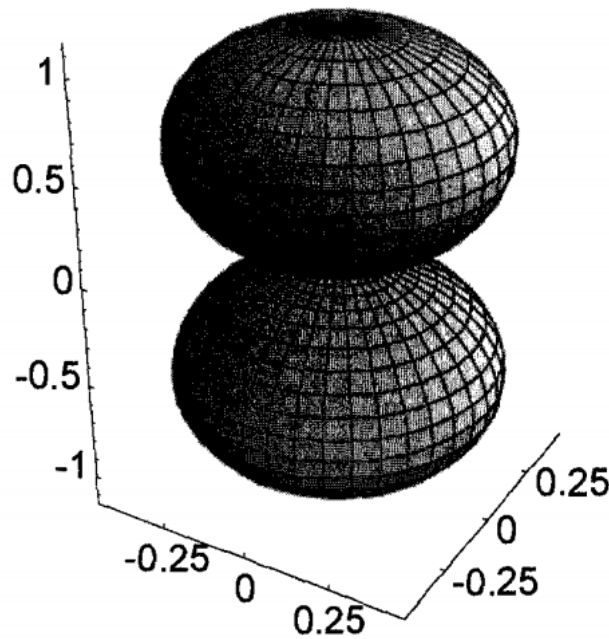


Figura 1.4: Superficie de energía asociada a la ecuación (1.90) cuando  $K_1 < 0$ .

En este caso existe un mínimo cuando  $\theta = \pi/2$ , que se corresponde a  $\mathbf{m}$  apuntando en cualquier dirección del plano  $x - y$ . Por lo tanto no existe un único eje fácil, sino una degeneración continua de orientaciones equivalentes perpendiculares al eje de anisotropía.

Consideremos el caso con  $K_1 > 0$  y  $\mathbf{m}$  paralelo al eje fácil. Si lo tomamos como el caso con energía cero, entonces  $f_{AN}(\mathbf{m}) = 0$  con  $K_0 = 0$  y  $\theta = 0$  para el segundo orden en  $\theta$ . Pequeñas desviaciones del vector de magnetización de la posición de equilibrio conducen a una densidad de energía tal que

$$\begin{aligned} f_{AN}(\mathbf{m}) &\cong K_1 \theta^2 \cong 2K_1 - 2K_1 \cos\theta \\ &= 2K_1 - \mu_0 M_s \frac{2K_1}{\mu_0 M_s} \cos\theta = 2K_1 - \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{AN} \end{aligned} \quad (1.91)$$

La dependencia angular es la misma que si hubiera un campo de intensidad

$$H_{AN} = \frac{2K_1}{\mu_0 M_s} \quad (1.92)$$

actuando a lo largo del eje fácil. Este campo es conocido como *campo de anisotropía* y da una medida de la intensidad del efecto de la anisotropía.

### Anisotropía cúbica

En este caso existen tres direcciones privilegiadas que se identifican con tres ejes de anisotropía perpendiculares entre ellos y paralelos a los ejes  $x - y - z$ . Para hacer el desarrollo de la energía de anisotropía, tomaremos las combinaciones de componentes de  $\mathbf{m}$  de cuarto orden  $m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2$  y de sexto orden,  $m_x^2 m_y^2 m_z^2$ . Estas combinaciones son las de orden más bajo y pueden extraerse, junto con la combinación también admisible  $m_x^4 + m_y^4 + m_z^4$ , de la definición de módulo unitario en coordenadas cartesianas:

$$m_x^4 + m_y^4 + m_z^4 + 2(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) = (m_x^2 m_y^2 m_z^2)^2 = 1 \quad (1.93)$$

La expansión de la energía de anisotropía toma la forma

$$f_{AN}(\mathbf{m}) = K_0 + K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) + K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2 + \dots \quad (1.94)$$

Expresando esta función en coordenadas esféricas y limitando el desarrollo hasta el cuarto orden ( $K_2 = 0$ )

$$f_{AN} = K_0 + K_1 \left( \frac{\sin^2 \theta \sin^2 2\phi}{4} + \cos^2 \theta \right) \sin^2 \theta \quad (1.95)$$

Cuando  $K_1 > 0$  la superficie de energía toma la forma de la figura 1.5.

Existen seis mínimos de energía equivalentes para los ejes  $x - y - z$ , en sentido positivo y negativo. Estas tres direcciones identifican a los tres ejes de fácil magnetización, que además coinciden con los ejes de anisotropía. Para desviaciones pequeñas de la magnetización respecto a uno de los ejes fáciles la intensidad del campo  $H_{AN}$  coincide con la calculada en (5.92).

Para el caso con  $K_1 < 0$ , la representación de la superficie es la de la figura (1.6). Las direcciones donde se encontraban los mínimos se han intercambiado con las de los máximos respecto al caso con  $K_1 > 0$ , modificándose los ejes fáciles. El campo de anisotropía alrededor de estos ejes se convierte en

$$H_{AN} = \frac{4}{3} \frac{|K_1|}{\mu_0 M_s} \quad (1.96)$$

### 1.7.3. Energía libre dependiente del espacio

La estructura de dominios de los materiales ferromagnéticos no es más que una configuración en la que la magnetización cambia drásticamente de un punto a otro del espacio. Se define una energía libre  $\Delta G_L[\mathbf{M}(\mathbf{r}); \mathbf{H}_a, T]$  asociada a un volumen elemental de magnetización homogénea  $\Delta V$  en torno a la posición  $r$  como el descrito al inicio de esta sección. El valor de  $\Delta G_L$  depende del intercambio, la anisotropía, el campo aplicado y la energía magnetostática. Asumiremos que la temperatura es fija e inferior a la temperatura del punto de Curie. También consideraremos que cada volumen elemental cumple la condición de equilibrio local, aunque el sistema en conjunto sea irreversible.

*Intercambio.* En un material ferromagnético, la intensidad de  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  asociada a cada volumen elemental puede considerarse igual a la de la magnetización espontánea  $M_s(T)$ . Debido a la isotropía del intercambio, en principio cualquier dirección de la magnetización sería aceptable para cada  $\Delta V$ . A temperaturas no muy cercanas a la

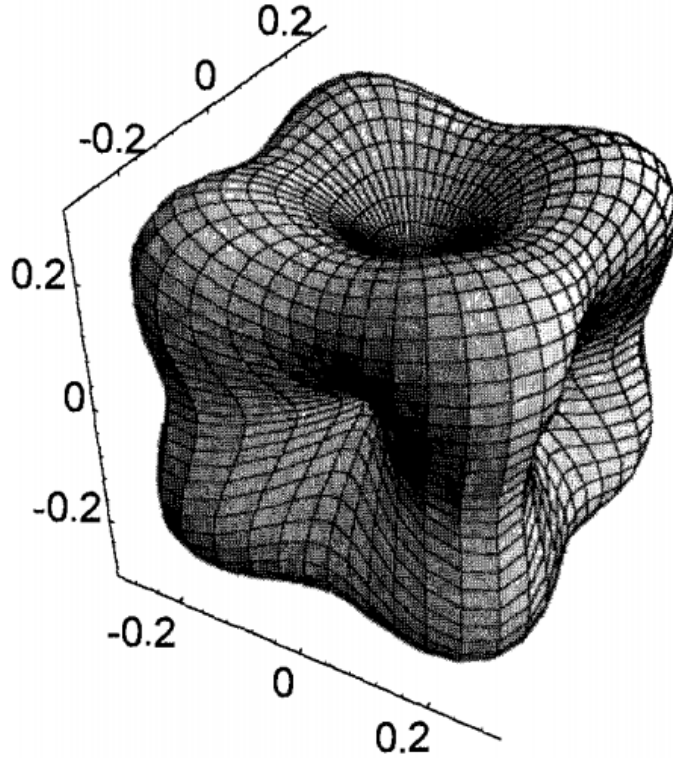


Figura 1.5: Superficie de energía asociada a la ecuación (1.94) cuando  $K_1 > 0$ .

temperatura de Curie, podemos considerar  $M_s$  únicamente función de la temperatura. Como tenemos  $T$  fijada, la energía libre de intercambio  $\Delta F_{EX}$  daría una contribución constante. Sin embargo, en las fronteras de dominio, la magnetización de  $\Delta V$  cambia en el espacio. Si consideramos que la energía de intercambio solo contribuye cuando  $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r})/M_s$  varía de punto a punto y para el resto de casos la constante vale cero, para cada volumen elemental tenemos:

$$\Delta F_{EX} = A(|\nabla m_x|^2 + |\nabla m_y|^2 + |\nabla m_z|^2)\Delta V \quad (1.97)$$

que es la energía de intercambio consistente con la simetría cúbica, aunque supone una buena aproximación para la mayoría de casos.

*Anisotropía.* La energía de anisotropía depende de la orientación relativa de la magnetización respecto a las direcciones preferidas. En general, estas direcciones variarán de punto a punto. Si indicamos  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  el conjunto de ejes locales preferidos, la energía de anisotropía de  $\Delta V$  tiene la forma

$$\Delta F_{AN} = f_{AN}[\mathbf{M}(\mathbf{r}); \mathbf{n}(\mathbf{r})]\Delta V \quad (1.98)$$

donde  $f_{AN}$  es la densidad de energía de anisotropía.

*Energía magnetostática.* Es la energía potencial adquirida por cada momento magnético en el campo que ellos mismos han creado. Dicha energía fue descrita con la ecuación (1.61), que aplicada al elemento de volumen da lugar a la contribución:

$$\Delta F_M = -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{M} \Delta V \quad (1.99)$$

*Interacción con el campo aplicado:* Es la energía potencial de los momentos magnéticos en el campo aplicado:

$$\Delta F_H = -\mu_0 \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M} \Delta V \quad (1.100)$$

Sumando todas estas contribuciones se obtiene la energía libre para cada elemento de volumen del material ferromagnético:

$$\Delta G_L[\mathbf{M}(\mathbf{r}); \mathbf{H}_a] = \left( A(|\nabla m_x|^2 + |\nabla m_y|^2 + |\nabla m_z|^2) + f_{AN}(\mathbf{M}; \mathbf{n}) - \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{M} - \mu_0 \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{M} \right) \Delta V \quad (1.101)$$

La energía libre del cuerpo magnético se obtiene integrando esta ecuación a todo el volumen.

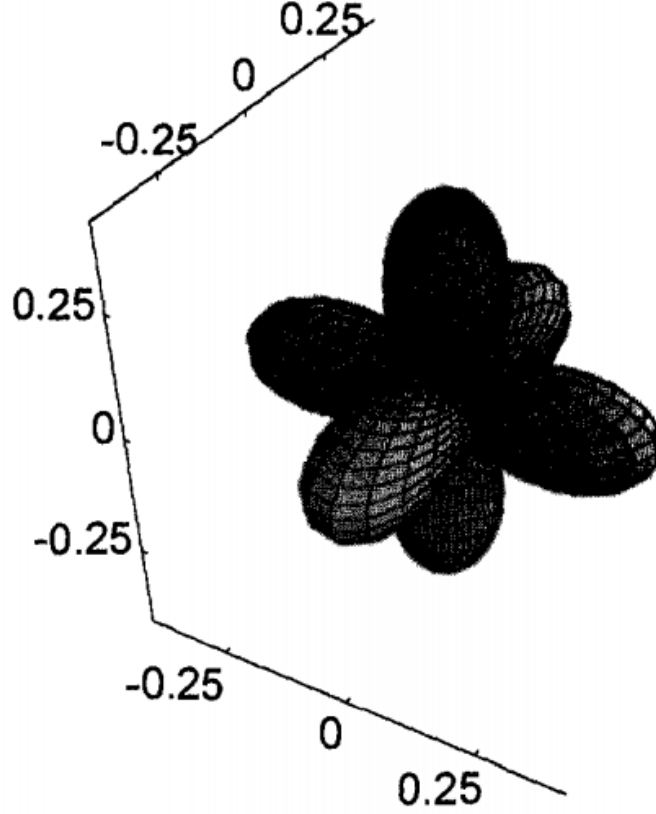


Figura 1.6: Superficie de energía asociada a la ecuación (1.94) cuando  $K_1 < 0$ .

$$G_L[\mathbf{M}(\cdot); \mathbf{H}_a] = \int_V \left( A(\nabla \mathbf{m})^2 + f_{AN}(\mathbf{m}; \mathbf{n}) - \frac{\mu_0}{2} M_s \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{m} - \mu_0 M_s \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{m} \right) d^3r \quad (1.102)$$

El punto de  $\mathbf{M}(\cdot)$  indica que la función  $G_L$  no es función de la magnetización en un cierto punto, si no que depende del total de la dependencia de  $\mathbf{M}$  en  $\mathbf{r}$ . En otras palabras,  $G_L$  es una función de otra función o *funcional*. De conocerse, los mínimos de  $G_L$  darían información de los estados metaestables en los que el sistema tiende a mantenerse cuando la agitación térmica no sea importante.  $\mathbf{M}(\cdot)$  jugaría el papel de variable de estado, dando lugar a distintas configuraciones de magnetización para un mismo campo aplicado, caracterizadas por prácticamente idénticos valores del momento total. El problema de identificar los mínimos de energía no es en absoluto trivial, ya que implicaría poder representar el espacio de infinitas dimensiones de todos los posibles  $\mathbf{M}(\cdot)$  e identificar los mínimos locales de dicho espacio. En consecuencia, las conclusiones de este análisis son muy difíciles de visualizar en sus efectos esencialmente físicos. Para conseguirlo, nos valemos de programas informáticos, como *mumax*, que permiten simular diversos materiales con propiedades magnéticas cambiantes en el espacio y en el tiempo.

#### 1.7.4. Minimización de la energía

Como ya vimos en la ecuación (1.102),  $G_L$  es un funcional del campo vector  $\mathbf{m}(\cdot)$  dependiente del espacio. Si queremos conocer las condiciones que minimizan la energía, tendremos que imaginar una cierta configuración  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  y variarla en cada punto del espacio una pequeña cantidad arbitraria:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{m}(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{m}(\mathbf{r}) \quad (1.103)$$

Tomando la correspondiente variación  $\delta G_L$  a primer orden se obtiene

$$\delta G_L = \int_V \left( 2A \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \delta \mathbf{m} + \frac{\partial f_{AN}}{\partial \mathbf{m}} \cdot \delta \mathbf{m} - \mu_0 M_s \mathbf{H}_M \cdot \delta \mathbf{m} - \mu_0 M_s \mathbf{H}_a \cdot \delta \mathbf{m} \right) d^3r \quad (1.104)$$

La identidad vectorial  $\mathbf{a} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) - \phi \nabla \cdot \mathbf{a}$ , aplicada a cada término espacial del primer sumando, junto con el teorema de Gauss aplicado al primer término de divergencia resultante, permiten obtener a partir de la expresión (1.104):

$$\delta G_L = - \int_V \left( 2 \nabla \cdot (A \nabla \mathbf{m}) - \frac{\partial f_{AN}}{\partial \mathbf{m}} + \mu_0 M_s \mathbf{H}_M + \mu_0 M_s \mathbf{H}_a \right) \cdot \delta \mathbf{m} d^3 r + 2 \oint_S A \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n} \cdot \delta \mathbf{m} da - \mu_0 \int_V M_s \mathbf{H}_{eff} \cdot \delta \mathbf{m} d^3 r + 2 \oint_S A \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n} \cdot \delta \mathbf{m} da \quad (1.105)$$

donde  $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n}$  indica la derivada a lo largo de la normal hacia fuera de la superficie de cuerpo,  $S$ .  $\mathbf{H}_{eff}$  es el campo efectivo en cada punto interior del cuerpo:

$$\mathbf{H}_{eff} = \frac{2}{\mu_0 M_s} \nabla \cdot (A \nabla \mathbf{m}) - \frac{1}{\mu_0 M_s} \frac{\partial f_{AN}}{\partial \mathbf{m}} + \mathbf{H}_M + \mathbf{H}_a \quad (1.106)$$

La variación del vector de magnetización,  $\delta \mathbf{m}$ , que cumple con la condición  $|\mathbf{m}| = 1$  es

$$\delta \mathbf{m} = \mathbf{m} \times \delta \boldsymbol{\theta} \quad (1.107)$$

donde  $\delta \boldsymbol{\theta}$  es un pequeño vector arbitrario con el mismo módulo que  $\delta \mathbf{m}$ . Sustituyendo Ec. (1.107) en Ec. (1.105) y aplicando la identidad vectorial  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  se obtiene

$$\delta G_L = \mu_0 \int_V M_s (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} d^3 r - 2 \oint_S A \left( \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} da \quad (1.108)$$

La condición de extremo para el funcional de energía libre es  $\delta G_L = 0$  para cualquier variación arbitraria  $\delta \boldsymbol{\theta}$ . Las ecuaciones que cumplen esta condición reciben el nombre de *ecuaciones de Brown* y son las siguientes:

$$\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} = 0 \quad (1.109)$$

$$\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n} = 0 \quad (1.110)$$

Para que el extremo en  $\delta G_L = 0$  sea un mínimo, necesariamente debe verificarse que  $\delta G_L \geq 0$  para pequeñas perturbaciones de la solución.

Las ecuaciones de Brown no nos dicen nada acerca de como el sistema se aproxima al equilibrio, ni sobre como reaccionaría la magnetización a un campo aplicado dependiente del tiempo. Para discutir estos puntos, consideremos que un momento magnético elemental  $\mathbf{m}_i$  también lleva su correspondiente momento angular  $\mathbf{J}_i$ . Los dos momentos son proporcionales,  $\mathbf{m}_i = \gamma \mathbf{J}_i$ . En el caso en que  $\mathbf{J}_i$  hace referencia al espín del electrón,  $\gamma = q_e/m_e$ . El cambio en el momento angular es producido por un campo  $\mathbf{B}$  actuando sobre los momentos magnéticos. Este torque viene dado por  $d\mathbf{J}_i/dt = \mathbf{m}_i \times \mathbf{B}$ . Por la relación de proporcionalidad entre momentos,  $d\mathbf{m}_i/dt = \gamma \mathbf{m}_i \times \mathbf{B}$ .

En nuestro caso particular, el campo ejerciendo el torque es  $\mathbf{H}_{eff}$ , el cual engloba los efectos de intercambio, de anisotropía y de interacción magnetostática. Tomando  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$  de cada volumen elemental en vez del momento magnético se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma_G \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} \quad (1.111)$$

con  $\gamma_G = \mu_0 \gamma \cong -2,21 \cdot 10^5 \text{ mA}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Esta ecuación es compatible con la condición de equilibrio de Brown, ya que cuando  $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}$  sea cero, esta se reduce a la expresión (1.109).

La ecuación (1.111) predice que, siempre que la magnetización del sistema no se encuentre inicialmente en equilibrio, esta se encuentra precesionando indefinidamente en torno al campo. Para que el sistema pueda alcanzar el equilibrio, es necesario definir una ecuación de relajación que tenga en cuenta la disipación:

$$\mathbf{H}_{eff}^\perp - \alpha_G \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = 0 \quad (1.112)$$

con  $\alpha_G > 0$ . Como  $\mathbf{m}$  siempre tiene módulo uno, es la componente perpendicular del campo la única que produce cambios sobre  $\mathbf{m}$ . Esta expresión se puede escribir en la forma equivalente

$$\mathbf{m} \times \left( \mathbf{H}_{eff} - \alpha_G \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.113)$$

Esta ecuación es en cierto sentido complementaria a la ecuación (1.111) y, al igual que esta, también compatible con Ec. (1.109). De la combinación de las expresiones (1.111) y (1.112) se obtiene una ecuación que tiene en cuenta tanto el efecto de la precesión como el de la disipación:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma_G \mathbf{m} \times \left( \mathbf{H}_{eff} - \alpha_G \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right) = \gamma_G \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} - \gamma_G \alpha_G \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \quad (1.114)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación de Gilbert*<sup>1</sup>. La Ec. (1.111) es recuperada cuando  $\alpha_G \rightarrow 0$ . Cuando  $\alpha_G \rightarrow \infty$ ,  $\partial \mathbf{m} / \partial t$  tiende a hacerse muy pequeño por la Ec. (1.112), o lo que es lo mismo, la disipación no deja al sistema precesionar.

## 1.8. Espintrónica: Casos experimentales y aplicaciones tecnológicas

Existen diversos experimentos que nos dan información sobre el comportamiento de los materiales ferromagnéticos. Es el caso de las *nanotiras magnéticas*, las cuales permiten entender cualitativamente el comportamiento de los dominios en función de la dinámica de sus paredes.

Las particulares propiedades de los materiales ferromagnéticos, como son los *movimientos de pared de dominio (PD) impulsados por corriente* y la *inyección de espín y torque magnético*, pueden ser aprovechadas en la producción de dispositivos electrónicos de memoria no volátiles. En el estudio teórico de este tipo de fenómenos, ya no es posible una interpretación clásica basada en las ecuaciones de Maxwell como la llevada a cabo por el Micromagnetismo. El uso de las propiedades del espín hacen necesaria la aplicación de la teoría cuántica.

### 1.8.1. El efecto GMR en nanotiras ferromagnéticas

El carácter dinámico de las paredes de dominio es una de las cuestiones fundamentales en el campo de la Espintrónica. Los avances en nanolitografía han hecho posible fabricar imanes con una estructura de dominio magnético simple. En un cable magnético muy estrecho, la magnetización queda restringida a ser paralela a su eje por condición de la anisotropía. Cuando un campo magnético externo es aplicado en sentido opuesto a dicha magnetización, una pared de dominio se forma por un extremo, invirtiendo la magnetización a medida que avanza (Fig. 1.7).

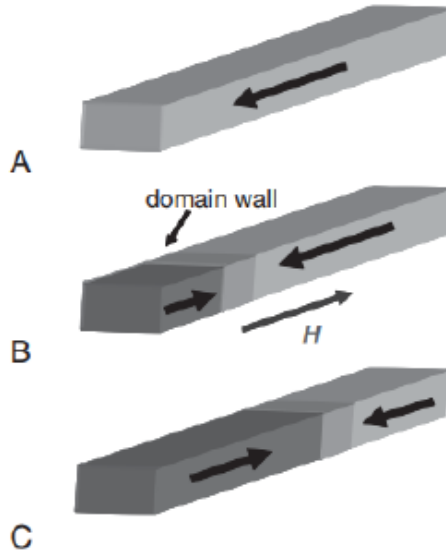


Figura 1.7: Ilustración esquemática de la inversión de magnetización en un cable magnético

Detectar la propagación de la pared de dominio no es una tarea sencilla, ya que el pequeño tamaño de la tira hace que los cambios en los momentos sean muy pequeños y, en consecuencia, difícilmente medibles. Es aquí donde entra en juego el *efecto de magnetorresistencia gigante*, GMR por sus siglas en inglés. Este fenómeno se basa en el cambio de la resistencia eléctrica causado por el cambio de la estructura magnética en sistemas magnéticos de tres capas. Cada capa se corresponde a una nanotira. La central no es magnética y las situadas encima y debajo de esta sí lo son. Durante la inversión de la magnetización de una de las dos tiras magnéticas, la resistencia total del sistema depende del valor de la resistencia en el caso de configuración paralela de la magnetización y en el caso de configuración antiparalela de la magnetización:

<sup>1</sup>G. Bertotti. Hysteresis in Magnetism: For Physicists, Materials Scientists, and Engineers. Academic Press, 1998.



$$R = \frac{x}{L} R_{\uparrow\uparrow} + \frac{L-x}{L} R_{\uparrow\downarrow} \quad (1.115)$$

donde  $L$  es la longitud de las tiras y  $x$  la posición de la pared de dominio. Con esta ecuación se puede determinar la posición de la pared de dominio midiendo la resistencia.

Experimentalmente, este efecto pudo ser medido empleando un cable de 500 nm de grosor y 20  $\mu\text{m}$  de largo compuesto por dos capas de  $\text{Ni}_{81}\text{Fe}_{19}$  de 20 nm y 5 nm de espesor y por una central de Cu de 10 nm. El cable presenta un cuello de 350 nm a 1/3 de su distancia total. Debido al espesor de la capa de Cu, el intercambio entre las capas gruesa y fina de  $\text{Ni}_{81}\text{Fe}_{19}$  es despreciable. Inicialmente, se aplica un campo externo muy intenso para alinear todas las magnetizaciones en una dirección. A continuación, en unas condiciones de temperatura de 300 K, se va aplicando gradualmente un campo externo y se miden los valores de resistencia en la nanotira<sup>2</sup>. Los resultados obtenidos vienen representados en la figura 1.8.

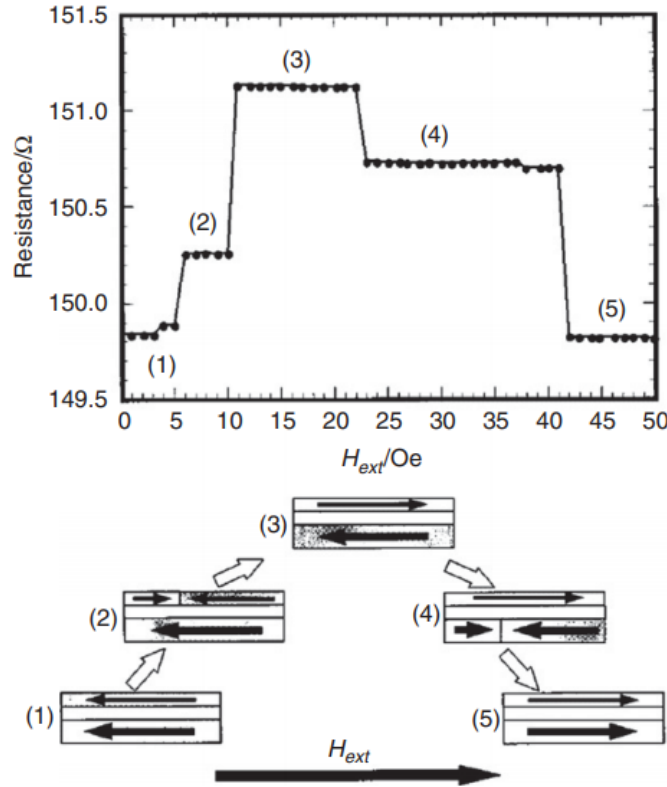


Figura 1.8: Resistencia en función del campo magnético externo a 300 K.

Los desplazamientos de las paredes de dominio se corresponden con cambios abruptos en el valor de la resistencia, siendo esta menor cuando toda la magnetización es paralela y alcanzando su máximo cuando la magnetización es antiparalela. En los estados (2) y (4) se observa como la pared de dominio se mantiene estable aunque se aumente el campo externo cuando alcanza el cuello estrecho. La velocidad de la pared de dominio puede ser calculada a partir de la ecuación (1.115) diferenciando en función del tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{L}{R_{\uparrow\downarrow} - R_{\uparrow\uparrow}} \frac{dR}{dt} \quad (1.116)$$

Conocido el tiempo que se tarda en pasar de una resistencia a otra y el tamaño del escalón se puede conocer la velocidad.

### 1.8.2. MFM aplicado a paredes de dominio

En la sección sobre el efecto GMR vimos como un campo magnético externo, el cual induce una corriente en el material magnético, produce el desplazamiento de una pared de dominio. La explicación a este fenómeno viene dada por el movimiento de PD impulsado por corriente. Cuando un electrón de conducción fluye de izquierda a derecha en una pared de dominio, su espín sigue la dirección de los momentos magnéticos locales por efecto

<sup>2</sup>Ono, T., Miyajima, H., Shigeto, K., and Shinjo, T. (1998). Appl. Phys. Lett. 72, 1116.

de la interacción entre estos electrones de conducción,  $s$ , y los electrones de la red,  $d$ . En reacción a esto, los momentos magnéticos locales comienzan a rotar a la inversa, cambiando su magnetización y desplazando la pared de dominio. Antes se necesitaban corrientes enormes para desplazar la pared de dominio debido a la gran sección eficaz. Actualmente la fabricación de nanotiras magnéticas ha permitido reducir el coste eléctrico.

La *microscopía de fuerza magnética* (MFM) permite observar como una pared de dominio puede ser desplazada hacia adelante y hacia atrás con pulsos de corriente negativos y positivos. Para ello, se prepara una tira magnética doblada a la mitad de su recorrido. Uno de los extremos se conecta a un material ferromagnético blando (fácilmente magnetizable) con forma de diamante que actuará como inyector de pared de dominio. El otro extremo se hace más grueso que el resto de la tira para evitar la formación de dominios por ese lado. Para posicionar la pared de dominio en las cercanías del doblez, la dirección del campo externo forma un cierto ángulo con la vertical <sup>3</sup>.

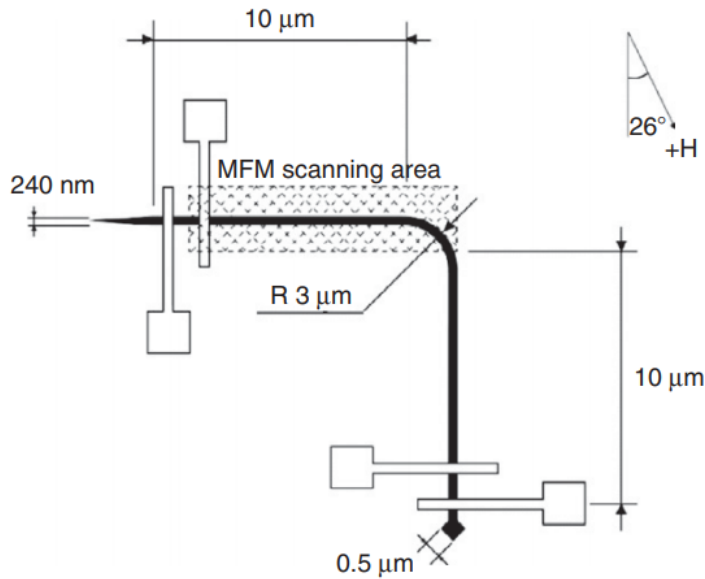


Figura 1.9: Ilustración esquemática del experimento. El cable presenta cuatro electrodos hechos de Cu. Las observaciones MFM fueron realizadas para la zona sombreada a temperatura normal.

El método MFM identifica la pared de dominio como una zona brillante. En la figura 1.10 se muestra la imagen microscópica obtenida en tres situaciones distintas.

La dirección del movimiento de la pared de dominio es opuesta a la de la corriente. Este experimento también demostró que la velocidad de la pared es la misma independientemente de la dirección del pulso y que esta aumenta al aumentar la densidad de corriente. Además, cuanto más largo sea el pulso mayor será el desplazamiento de la pared de dominio. Todas estas características posicionan a los movimientos de PD impulsados por corriente como potencialmente útiles en el desarrollo de aparatos espintrónicos, como nuevos tipos de memorias y dispositivos de almacenamiento. No obstante, existen tres problemas principales a superar para su aplicación práctica:

*Corriente umbral:* Se denomina corriente umbral a la mínima necesaria para que la pared de dominio comience a desplazarse. Con el objetivo de un menor consumo, esta corriente debe ser lo más baja posible. Experimentalmente, la aplicación de corrientes del orden de  $10^{11}$  A/m<sup>2</sup> resulta en el aumento de la temperatura hasta alcanzar el punto de Curie (Fig. 1.11) <sup>4</sup>.

Como puede verse, el efecto Joule depende fuertemente del tipo de sustrato. La corriente umbral, representada en la gráfica como  $J_c$ , es menor para el SiO<sub>2</sub>. En resumen, es necesario encontrar las dimensiones y el tipo de sustrato más adecuado para que el efecto térmico sobre la nanotira al aplicar una corriente proporcione una  $J_c$  baja.

*Velocidad de la pared de dominio:* En un modelo simple en el que todos los electrones de conducción son empleados en mover la pared de dominio, la velocidad teórica de la pared sería

<sup>3</sup>Yamaguchi, A., Ono, T., Nasu, S., Miyake, K., Mibu, K., and Shinjo, T. (2004). Phys. Rev. Lett. 92, 077205; Phys. Rev. Lett. 96, 179904(E) (2006).

<sup>4</sup>Yamaguchi, A., Yano, K., Tanigawa, H., Kasai, S., and Ono, T. (2006). Jpn. J. Appl. Phys. 45, 3850.

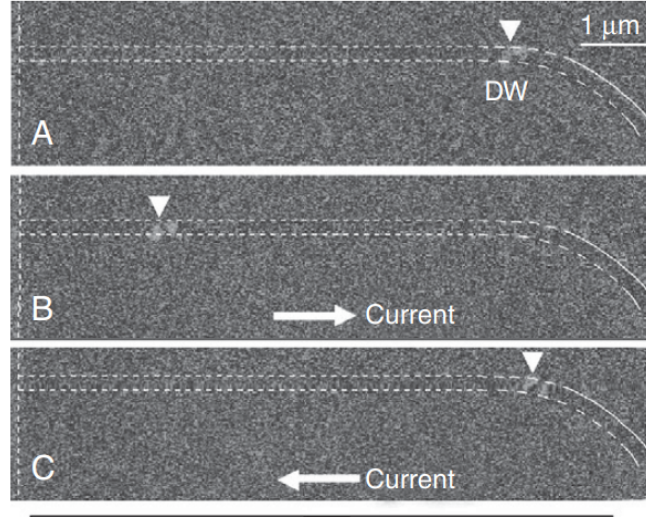


Figura 1.10: Una vez posicionada la pared de dominio aplicando el campo magnético externo (caso A) se desconecta este campo y se observa que la pared conserva su posición. A continuación, se aplica un pulso de corriente de izquierda a derecha (caso B) y de derecha a izquierda (caso C) en ausencia de campo externo.

$$v = \frac{jPg\mu_B}{2eM_s} \quad (1.117)$$

donde  $j$  es la densidad de corriente,  $P$  la polarización de espín y  $g$  el valor- $g$  del electrón. Experimentalmente, para valores de la densidad de corriente del orden de  $10^{11}$  A/m<sup>2</sup>, la eficiencia de la velocidad fue del 10 %. Es decir, la mayor parte del momento transferido parecía estar disipándose por excitaciones locales. Experimentos más recientes demostraron una alta velocidad, de cerca de 100 m/s, en sustratos de NiFe para una corriente de  $1.5 \cdot 10^{12}$  A/m<sup>2</sup> y un campo de desfijación de 10 Oe. El problema es que la fijación de la pared de dominio en ciertos puntos del recorrido, debido a rugosidades en la superficie y bordes de la nanotira, aumenta la densidad de corriente necesaria. Una mejora en la calidad de la de la nanotira, eliminando las imperfecciones, podría ayudar, ya que se reducirían las pérdidas y permitiría operar a corrientes y campos de desfijación menores.

*Estabilidad de la pared de dominio:* Uno de los problemas de utilizar campos de desfijación es que el aumento de la actividad térmica podría desestabilizar la posición de la pared de dominio. Recientes simulaciones superan este problema mediante el uso de anisotropía magnética perpendicular. Se demostró que con solo un pulso de nanosegundos se puede controlar la pared de dominio de una nanotira de Co/Ni con anisotropía perpendicular, en vez de tener que utilizar campos de desfijación.

### 1.8.3. Uniones de túnel magnético en MRAM

Antes de conocer en que consisten este tipo de uniones y sus aplicaciones es necesario definir el fenómeno de inyección de espín. Se tiene un material ferromagnético (FM) con una cierta polarización de espín unido a otro material no magnético (NM); o bien dos materiales ferromagnéticos unidos (FM1 y FM2). Al aplicar una cierta corriente, se puede excitar precesión de los electrones y la magnetización de todo el ferromagnético puede cambiar. El momento de espín puede ser transferido por intercambio incluso cuando las posiciones de los electrones permanecen fijas.

La inyección de espín produce torque en el material ferromagnético. Como resultado, la magnetización del material puede pasar a tener una nueva dirección (*spin-injection magnetization switching*, SIMS) o bien sufrir oscilaciones continuas (*spin-torque oscillation*, STO). Experimentalmente, los efectos SIMS y STO se consiguen utilizando nanopilares magnéticos como el de la figura 1.13.

El momento angular de espín de los vectores  $s$  cambia debido a la interacción  $s-d$  cuando atraviesan FM2. Por conservación del momento, la cantidad de espín sobrante debe ser transferida a los electrones  $d$  de la capa FM2. Es decir,

$$\frac{d\mathbf{S}_2}{dt} = \mathbf{J}_1^S - \mathbf{J}_2^S \quad (1.118)$$

$\mathbf{S}_2$  es el momento angular total en FM2.  $\mathbf{J}_1^S$  y  $\mathbf{J}_2^S$  son las corrientes de espín sobre la sección transversal del pilar fluyendo por NM1 y NM2, respectivamente. Como FM2 es muy estrecho, se puede despreciar la interacción

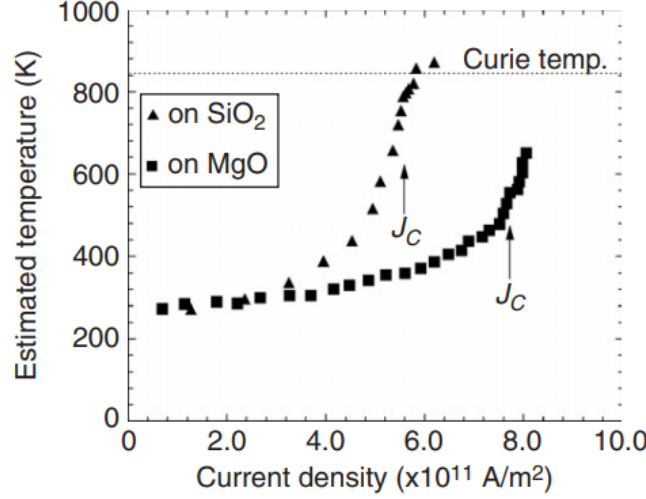


Figura 1.11: Temperatura en función de la densidad de corriente para dos muestras con las mismas dimensiones preparadas en diferentes sustratos ( $\text{SiO}_2/\text{Si}$  y  $\text{MgO}$ ).

espín-órbita. La ecuación (1.118) indica que un torque puede ejercerse sobre el momento angular local, como consecuencia de la transferencia de espín de electrones de conducción. Este tipo de torque recibe el nombre de *torque de transferencia de espín*.

Calculemos el valor de las densidades de corriente para ver como afecta a los electrones de conducción su paso por FM2. Para ello, suponemos que FM1 es más grueso que la longitud de difusión de espín. De este modo, los electrones de conducción inyectados en NM1 tendrán la misma polarización de espín que FM1. Sea  $\mathbf{S}_1$  la polarización de espín de FM1, si esta se orienta a lo largo de  $(\theta, \phi)$  en un sistema de coordenadas polares, la función del espín inyectado puede escribirse como

$$|(\theta, \phi)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$$

o bien en su forma matricial

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

Los  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  son los autoestados de espín a lo largo de las direcciones  $+z$  y  $-z$ , respectivamente. Que la ecuación (1.119) representa el espín apuntando en la dirección  $(\theta, \phi)$  se hace evidente al calcular el valor esperado de las matrices de Pauli,  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ , obteniéndose  $(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$  que es la base de vectores unitarios linealmente independientes sobre la que se calcula la dirección de espín. Como FM2 está magnetizado en la dirección del eje  $z$ , los electrones  $s$  inyectados se dividirán en dos bandas de energía,  $s_\uparrow$  y  $s_\downarrow$ . Si se considera que los electrones  $d$  ejercen sobre el electrón  $s$  un potencial periódico,  $s_\uparrow$  y  $s_\downarrow$  pueden tomarse como ondas parciales (estados de Bloch) cada una con su vector de onda  $k_\uparrow$  y  $k_\downarrow$ . Como resultado, la fase adquirida por los electrones  $s$  tras su paso por la capa FM2 de anchura  $d_2$  será  $k_\uparrow d_2$  y  $k_\downarrow d_2$  para cada onda parcial:

$$\begin{pmatrix} e^{ik_\uparrow d_2} & 0 \\ 0 & e^{ik_\downarrow d_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{ik_\uparrow d_2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i(\phi+(k_\downarrow-k_\uparrow)d_2)}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

Se observa que el ángulo  $\phi$  se altera y pasa a ser  $\phi + (k_\downarrow - k_\uparrow)d_2$ . Esto significa que los espines de los electrones de conducción adquieren una precesión en torno a  $\mathbf{S}_2$ . En los casos realistas, como las capas magnéticas suelen ser policristalinas, cada electron de conducción viaja a lo largo de distintas orientaciones del cristal en FM2, dando lugar a distintos ángulos de precesión a su salida en NM2. Como resultado, las componentes transversales se cancelan unas con otras y solo sobrevive la componente vertical. Para este caso, el cambio en el espín total de FM2 por el par de transferencia de espín puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{S}_2}{dt} = g(\theta) \frac{J^Q}{-e} \left( \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right) = g(\theta) \frac{J^Q}{-e} \frac{\hbar}{2} \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \quad (1.121)$$

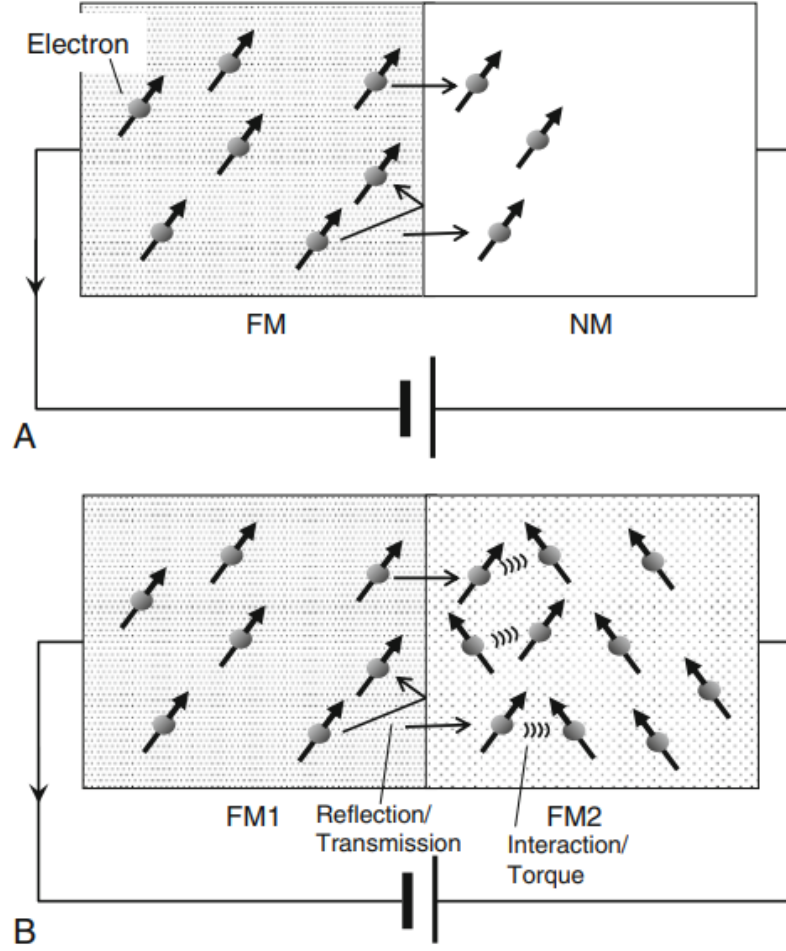


Figura 1.12: Al conectar el sistema a un potencial, la corriente provocada permite la inyección de algunos espines de FM al material NM (caso A). Debido a interacciones del tipo espín-órbita, los espines inyectados acaban perdiendo su polarización a medida que se alejan de la superficie de contacto. Cuando el sistema está formado por dos materiales ferromagnéticos de distinta magnetización (caso B) parte de los espines se reflejan en la superficie de contacto por efecto del scattering dependiente de espín. Los espines del primer ferromagnético (FM1) que sí se transmiten interactúan con los espines del segundo (FM2) por intercambio.

donde  $\mathbf{e}_1 = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$  y  $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1)$  son vectores unitarios a lo largo del momento angular en FM1 y FM2, respectivamente.  $J^Q/(-e)$  es el número de electrones fluyendo por unidad de tiempo.  $g(\theta)$  representa la eficiencia de la transferencia de espín. Depende de la polarización,  $P$ , de los electrones de conducción en FM1 y FM2 y del ángulo entre  $\mathbf{S}_1$  y  $\mathbf{S}_2$ ,  $\theta$ . Toda la ecuación (1.109) va multiplicada por  $\hbar/2$  por ser el factor que, multiplicado por un número entero (en el caso del electrón +1 o -1) da el valor del espín.

A continuación, consideramos el torque de transferencia de espín en el caso de uniones de túnel magnético. Estas uniones son similares a los nanopilares anteriormente descritos pero sin la capa NM2. En este caso, NM1 se compone de MgO o AlO. FM1 es suficientemente ancho para que en el punto P los espines de conducción se hayan relajado y alineado paralelamente a  $\mathbf{S}_1$ . Además, se asume que en el punto Q en FM2, los electrones de conducción ya han perdido su componente transversal y sus espines se han alineado con  $\mathbf{S}_2$ . La corriente de carga,  $J^Q$ , tendrá dos componentes, una por cada polarización de espín de los electrones de conducción. Esto es debido a que por cada dirección de espín existen dos proyecciones de espín: el espín *up* o espín mayoritario y el espín *down* o espín minoritario. Llamaremos  $J_{1,+}^Q$  y  $J_{1,-}^Q$  a las dos corrientes mayoritaria y minoritaria, respectivamente, de los electrones de conducción en el punto P. Siguiendo un razonamiento análogo, para el punto Q tenemos  $J_{2,+}^Q$  y  $J_{2,-}^Q$ . Suponiendo que el sentido de la corriente es de izquierda a derecha, cada una de las dos corrientes de carga provenientes de FM1 en dirección a FM2 tienen dos posibilidades: O bien contribuyen a la banda mayoritaria de espín en FM2 o bien a la banda minoritaria. La marcha de la corriente de carga en una unión de túnel magnética viene representada en el circuito de la figura 1.14.

Las resistencias representan la magnetoresistencia en NM1 que los electrones de conducción tienen que superar para llegar a FM2. A la vista de este circuito, resulta evidente que la corriente de carga total se puede

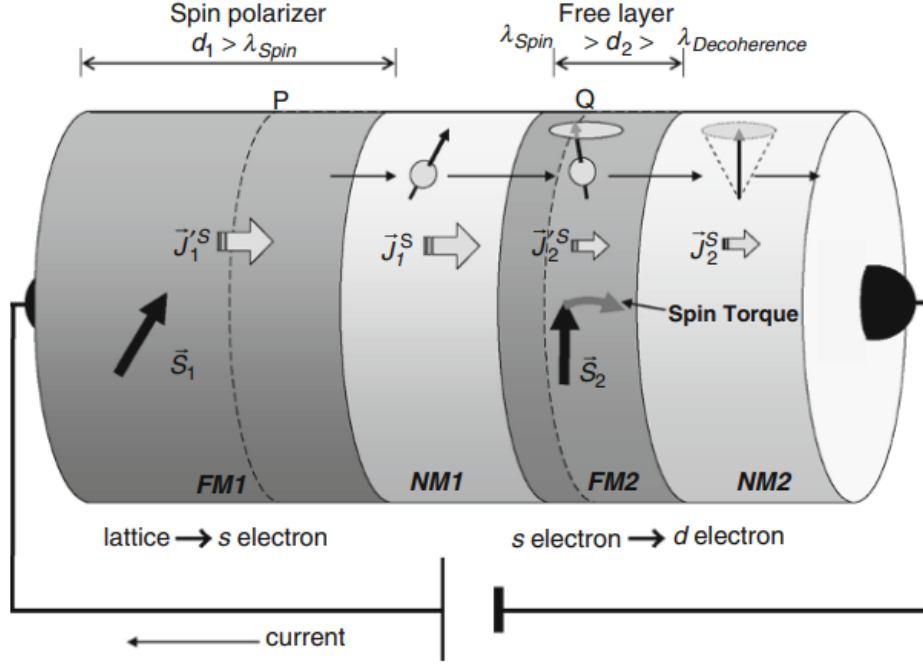


Figura 1.13: Nanopilar magnético consistente en dos capas ferromagnéticas y dos capas no magnéticas. Cuando se le pasa corriente, los electrones polarizados provenientes de FM1 (electrones s) atraviesan NM1 llegando a FM2. El intercambio entre los espines de los electrones inyectados (s) y los locales (d) produce torque.

escribir como suma de cuatro componentes:

$$J^Q = J_{++}^Q + J_{+-}^Q + J_{-+}^Q + J_{--}^Q \quad (1.122)$$

El valor esperado de estas componentes en función del potencial  $V$  aplicado y de la conductancia  $G$  es el siguiente:

$$\begin{aligned} J_{\pm\pm}^Q &= VG_{\pm\pm} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ J_{\mp\pm}^Q &= VG_{\mp\pm} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1.123)$$

Sustituyendo el valor de las cuatro corrientes de la ecuación (1.123) en la ecuación (1.122) se obtiene la siguiente expresión para la corriente de carga total:

$$J^Q = \frac{1}{2}V[(G_{++} + G_{--} + G_{+-} + G_{-+}) + (G_{++} + G_{--} - G_{+-} - G_{-+})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] \quad (1.124)$$

Como los ejes de cuantización de espín en P y Q tienen la misma dirección que  $\mathbf{S}_1$  y  $\mathbf{S}_2$ , las corrientes de espín en estos puntos pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1^{tS} &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{-e} (J_{++}^Q + J_{+-}^Q - J_{-+}^Q - J_{--}^Q) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{J}_2^{tS} &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{-e} (J_{++}^Q - J_{+-}^Q + J_{-+}^Q - J_{--}^Q) \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (1.125)$$

El signo menos/mas delante de la corriente viene de la proyección negativa/positiva del espín para la banda de espín minoritaria/mayoritaria. Empleando este resultado en la expresión (1.118) y poniendo las corrientes de carga en función de  $G$ ,  $\theta$  y  $V$  (Ec. 1.123) se obtiene la siguiente expresión para el torque:

$$\frac{d\mathbf{S}_2}{dt} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{-e} \frac{1}{2} V [(G_{++} - G_{--}) + (G_{+-} - G_{-+})] (\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)) \quad (1.126)$$

De esta ecuación se pueden deducir efectos interesantes. Asumamos que FM1 y FM2 están hechos del mismo material. Si aplicamos voltaje, los valores de  $G_{++}$  y  $G_{--}$ , por simetría, no dependerán del signo de  $V$ . De modo



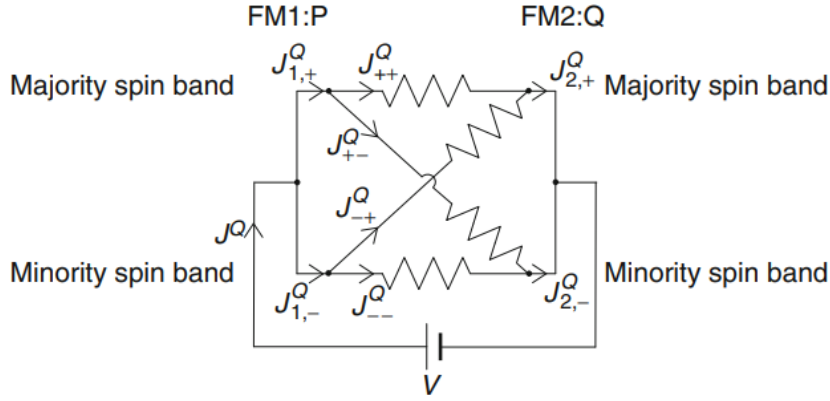


Figura 1.14: Modelo de circuito de una unión de túnel magnético

que el término  $(G_{++} - G_{--})V$  será impar respecto al voltaje, o lo que es lo mismo, que el término se hace negativo cuando el voltaje es negativo. Para voltajes positivos,  $G_{+-}$  crece y  $G_{-+}$  cae. Para voltajes negativos, tenemos la situación contraria y  $G_{+-} - G_{-+}$  tiene signo negativo. Pero como  $V$  es también negativo, el término  $(G_{+-} - G_{-+})V$  es positivo, es decir, el término es par respecto al voltaje. Esta combinación de términos pares e impares da lugar a una asimetría en el torque de espín como función del voltaje (Fig. 1.15).<sup>5</sup>

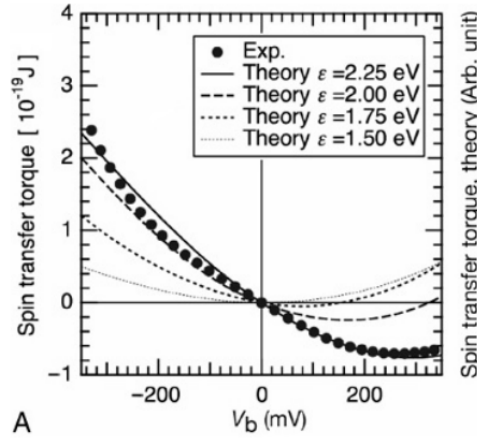


Figura 1.15: Dependencia del torque de espín con el signo de la tensión aplicada para el caso experimental con una unión del tipo CoFeB/MgO/CoFeB y varios casos teóricos.  $\epsilon$  representa la separación entre las bandas de espín mayoritario y minoritario.

Las memorias MRAM de transferencia de par de espín (STT-RAM) consisten en una matriz de uniones de túnel magnético. Dichas uniones poseen una capa ferromagnética libre que puede cambiar su dirección de magnetización. Al pasar de un voltaje, que puede ser positivo o negativo, más alto a uno más bajo se cambia de escritura a lectura. El desarrollo de la transferencia de espín en uniones de túnel de MgO de alta magnetorresistencia abre un nuevo paradigma en la fabricación de células magnetorresistivas, compactas, no volátiles y escritas en voltaje bipolar que además son compatibles con las características eléctricas de los transistores CMOS más pequeños.

<sup>5</sup>Kubota, H., Fukushima, A., Yakushiji, K., Nagahama, T., Yuasa, S., Ando, K., Maehara, H., Nagamine, Y., Tsunekawa, K., Djayaprawira, D. D., Watanabe, N., and Suzuki, Y. (2008). Nat. Phys. 4, 37–41.

## Capítulo 2

# Métodos Computacionales en el Micromagnetismo

Hasta hace un par de décadas, únicamente los grupos especializados llevaban a cabo simulaciones micromagnéticas. Hoy en día, el desarrollo a nivel computacional ha permitido la aparición de programas tanto de código abierto como comerciales accesibles al público no especializado. En la década de 1960 Brown estableció la base teórica del formalismo micromagnético, la cual se explicó en la sección 1.7.4 del capítulo anterior. Como ya vimos, son muchos los grados de libertad a tener en cuenta para obtener resultados con sentido físico, por lo que las simulaciones han necesitado varios años para aumentar en velocidad y reducir el coste computacional en su adaptación a los casos reales.

En las últimas tres décadas, un significativo avance en técnicas de miniaturización ha permitido medir propiedades magnéticas en materiales fabricados a escala inferior al nanómetro. Este enorme progreso, junto con las mejoras en velocidad de computación, capacidad y el desarrollo de métodos computacionales más eficientes, han hecho posible la creación de simulaciones con las dimensiones de los aparatos reales utilizando ordenadores estándar a un coste de tiempo razonable.

Actualmente, existe un creciente interés en el uso de las unidades de procesamiento gráfico, GPUs, frente a las unidades de procesamiento central o CPUs para la realización de los cálculos numéricos. Aunque originalmente fueron fabricadas con fines puramente gráficos, la gran capacidad de paralelización a bajo coste de las GPUs las hacen adecuadas en computación científica de alto rendimiento. Sin embargo, para poder aprovechar la capacidad de cómputo de la GPU, los programas en los que se basan las simulaciones deben ser escritos en lenguajes específicamente creados para el tipo de hardware de la GPU. En los últimos años se han desarrollado solucionadores de problemas micromagnéticos para GPUs tanto por el método de las diferencias finitas (FD) como por el método de los elementos finitos (FE).

### 2.1. Modelo computacional básico

Como vimos en el Capítulo 1, la teoría micromagnética propone que para un material ferromagnético a una cierta temperatura (suficientemente por debajo de  $T_c$ ) el módulo de la magnetización de saturación no cambia. En las posteriores simulaciones supondremos materiales ferromagnéticos en los que  $T$  no cambia, por lo que  $M_s$  puede considerarse constante. Por otro lado, también consideraremos que todas las cantidades vectoriales cambian lentamente a escala atómica. En estas condiciones, la evolución temporal de la distribución de magnetización en el cuerpo,  $m(\mathbf{r}, t)$ , viene dada por la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = -\gamma_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}) + \alpha \left[ \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{m}}{dt} \right] \quad (2.1)$$

Para facilitar su integración numérica esta ecuación puede escribirse como

$$(1 + \alpha^2) \frac{d\mathbf{m}}{dt} = -\gamma_0 [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} + \alpha \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff})] \quad (2.2)$$

Si únicamente estamos interesados en la magnetización del equilibrio sin tener en cuenta la evolución dinámica del sistema aplicamos la ecuación de Brown:

$$\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} = 0 \quad (2.3)$$



## 2.2. Discretización e integración numérica

La resolución computacional de problemas micromagnéticos requiere resolver las ecuaciones integro-diferenciales no lineales (2.2) y (2.3). Estas expresiones incluyen interacciones de rango largo (campo magnetostático), de rango corto (intercambio) y locales (anisotropía y campo externo). Para la resolución numérica de los casos de interés práctico, la magnetización continua es muestreada como un número finito de puntos en un mallado. De este modo se consigue convertir el campo en un conjunto finito de ecuaciones acopladas, una para cada punto del mallado. En micromagnetismo existen dos tipos de aproximaciones para discretizar la magnetización: La aproximación FD, que utiliza un red rectangular uniforme; y la aproximación FE, que utiliza funciones de base lineal en una red no uniforme típicamente tetraédrica.

En general, la aproximación FD es más fácil de implementar que la FE. En particular, la obtención del mallado es directa y solamente es necesario preocuparse de que el tamaño de cada celda sea menor que la longitud para la cual la magnetización cambia significativamente. Existen dos longitudes características:

$$l_{ex} = \sqrt{\frac{2A}{\mu_0 M_s^2}} \quad (2.4)$$

$$l_w = \sqrt{\frac{A}{K}} \quad (2.5)$$

donde  $A$  es la constante de intercambio y  $K$  la de anisotropía.  $l_{ex}$  es la escala relevante cuando la interacción magnetostática dipolar es dominante sobre la anisotropía, mientras que en materiales con mucha anisotropía,  $l_w$  es la relevante. El valor de estos parámetros esta en el rango entre 4 y 8 nm.

Una vez elegido el mallado, se buscan las expresiones discretizadas para el campo efectivo  $\mathbf{H}_{eff}$ . Para las derivadas espaciales que aparecen en la contribución al intercambio de  $\mathbf{H}_{eff}$ , se utilizan expresiones de Taylor a segundo orden. Para una función escalar arbitraria  $f$ , las expresiones para la primera y segunda derivada respecto a la coordenada espacial  $x$  son

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (2.6)$$

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad (2.7)$$

donde  $h$  es el espaciado e  $i$  el número de celda a lo largo de la dirección  $x$ .

## 2.3. MuMax<sup>3</sup>

La plataforma empleada para obtener los resultados a los problemas estándar del Capítulo 3 es MuMax<sup>3</sup>. Se trata de un programa de simulación micromagnética acelerado por GPU basado en discretización FD. El programa está escrito en Go, utilizando la plataforma CUDA de NVIDIA como compilador. Los datos obtenidos con MuMax<sup>3</sup> deben ser interpretados por otros programas que muestren al usuario la evolución de la magnetización en el material. En nuestro caso, los tres software de análisis y visualización de datos empleados con este fin son OOMMF, SciDAVis y Python.

## Capítulo 3

# Simulación de los Problemas Estándar Micromagnéticos

En este capítulo se obtienen los resultados correspondientes a las simulaciones micromagnéticas de los problemas estándar 2 y 4, comparándolos con los resultados publicados en el NIST.

### 3.1. Problema estándar 4

Este problema se centra en el aspecto dinámico de las computaciones micromagnéticas. Se tiene un material rectangular con una cierta magnetización uniforme en la dirección  $x$  positiva (vector  $(1, 0.1, 0)$ ). En primer lugar, se deja que el sistema alcance su estado de equilibrio. Esto se consigue aplicando un campo de saturación en la dirección  $[1,1,1]$  que reduce lentamente su valor hasta cero. Seguidamente, se aplica sobre el rectángulo un campo externo lo suficientemente intenso como para invertir su magnetización, obteniéndose la evolución temporal de la magnetización hasta alcanzar el nuevo estado de equilibrio bajo la acción del campo externo. El problema será resuelto para dos campos externos diferentes. Los efectos de la anisotropía no serán tenidos en cuenta.

#### Geometría:

Lámina de  $t = 3 \text{ nm}$  de espesor, longitud  $L = 500 \text{ nm}$  y  $d = 125 \text{ nm}$  de ancho.  $L$ ,  $d$  y  $t$  son paralelas a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

#### Parámetros del material:

El material es similar al permalloy, que se trata de una aleación de 20 % en hierro y 80 % en níquel.

$$A = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ J/m}$$

$$M_s = 8,0 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

$$K = 0,0$$

La evolución dinámica de la magnetización en el tiempo se calcula o bien usando la ecuación de Landau-Lifshitz,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma'_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) - \frac{\lambda}{M_s} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff})$$

o bien la ecuación de Gilbert,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) - \frac{\alpha}{M_s} (\mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt})$$

con los siguientes parámetros,

$$\alpha = 0,02$$

$$\gamma'_0 = 2,21 \cdot 10^5 \text{ m/As}$$

$$\gamma_0 = 2,211 \cdot 10^5 \text{ m/As}$$

$$\lambda = 4,42 \cdot 10^3 \text{ m/As}$$

### Campos aplicados:

Los dos campos externos se aplican en el plano  $x - y$  con distinta magnitud y dirección.

- **Campo 1:**  $\mu_0 H_x = -24,6$  mT,  $\mu_0 H_y = 4,3$  mT,  $\mu_0 H_z = 0,0$  mT el cual es un campo de aproximadamente 25 mT a  $170^\circ$  en sentido antihorario respecto al eje  $x$  positivo.
- **Campo 2:**  $\mu_0 H_x = -35,5$  mT,  $\mu_0 H_y = -6,3$  mT,  $\mu_0 H_z = 0,0$  mT el cual es un campo de aproximadamente 36 mT a  $190^\circ$  en sentido antihorario respecto al eje  $x$  positivo.

### Resultados:

Se obtienen dos soluciones para su comparación con los resultados del NIST.

- La representación gráfica de las componentes  $(x, y, z)$  de la magnetización media de la muestra en función del tiempo desde  $t = 0$  hasta que se alcanza el equilibrio en el nuevo campo, es decir, hasta que cada componente espacial de la magnetización se hace constante en el tiempo.
- La imagen 2D (plano  $x - y$ ) de la magnetización en el instante de tiempo en el que la componente  $x$  de la magnetización media pasa por primera vez por cero.

#### 3.1.1. Resultados obtenidos

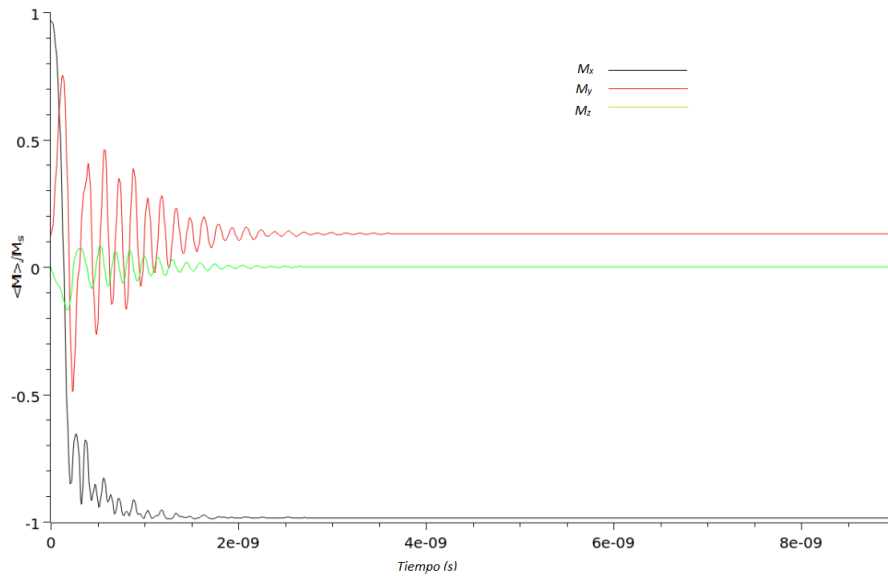


Figura 3.1: Resultado para la evolución de cada componente de la magnetización con el tiempo para el campo 1.

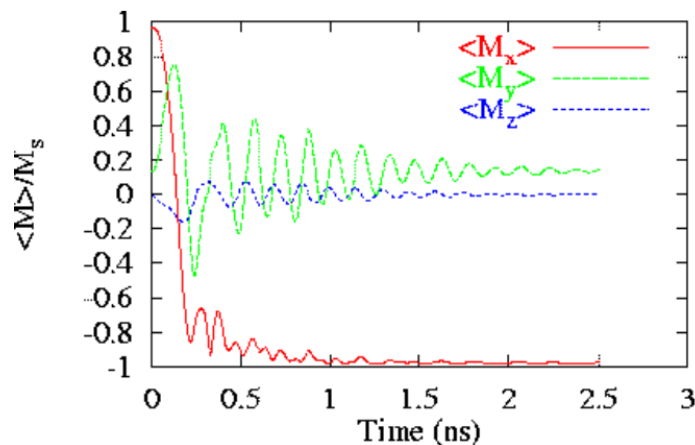


Figura 3.2: Resultado del NIST para la evolución temporal de la magnetización con el tiempo para el campo 1.

En la figura (3.1) las celdas empleadas son de aproximadamente  $3,9 \times 3,9 \times 3$  nm y el paso temporal de 0,01 ns. En el resultado del NIST (Fig. 3.2) las celdas son de 2 nm y el paso temporal de 25 fs <sup>1</sup>. Vemos que los resultados son prácticamente idénticos a pesar de que nuestro paso temporal es mucho mayor, por lo que no hace falta llegar a escalas del orden del femtosegundo para obtener una representación gráfica precisa. Asimismo, la diferencia en el tamaño de celdas tampoco afecta significativamente a la solución

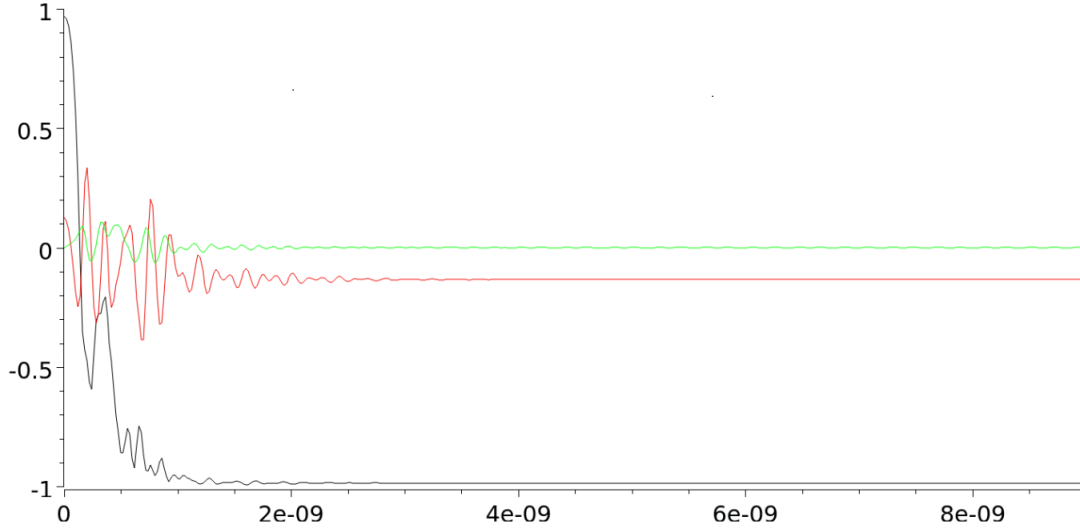


Figura 3.3: Resultado para la evolución temporal de cada componente de la magnetización para el campo 2.

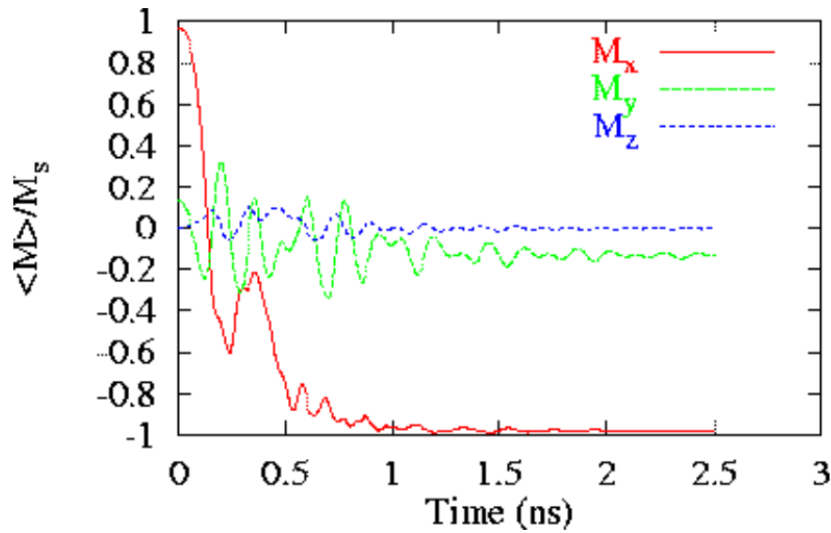


Figura 3.4: Resultado del NIST para la evolución temporal de la magnetización para el campo 2.

Para el campo 2 (Fig. (3.3) y (3.4)) vemos que existen cambios apreciables en la altura de los picos a partir de los 0.5 ns. La razón para ello es que las diferencias en el tamaño de celda entre nuestra solución y la solución del NIST afectan más al resultado final que para el campo 1.

<sup>1</sup>Solución publicada por Gonçalo Albuquerque, Jaques Miltat y André Thiaville, *Laboratoire de Physique des Solides*. 18 de julio del año 2000.



Figura 3.5: Imagen de la magnetización promedio  $\langle M_x \rangle$  cuando pasa por primera vez por cero para el campo 1.



Figura 3.6: Imagen del NIST para la magnetización promedio  $\langle M_x \rangle$  cuando pasa por primera vez por cero para el campo 1.

Como puede verse comparando las figuras (3.5) y (3.6), ambos resultados son prácticamente idénticos. En nuestro resultado, el color ayuda a visualizar la dirección de la magnetización en cada región. Azul intenso indica zonas de magnetización en el eje  $x$  negativa, mientras que rojo intenso zonas en las que la magnetización en el eje  $x$  es positiva.

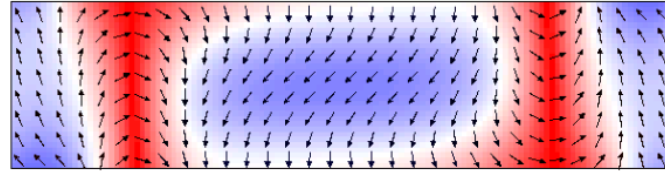


Figura 3.7: Imagen de la magnetización promedio en el eje  $x$ ,  $\langle M_x \rangle$ , cuando pasa por primera vez por cero para el campo 2.



Figura 3.8: Imagen sacada del NIST cuando la magnetización promedio en el eje  $x$ ,  $\langle M_x \rangle$ , pasa por primera vez por cero para el campo 2.

Al comparar las figuras (3.7) y (3.8) volvemos a obtener resultados muy parecidos. Esto concuerda con el hecho de que, en la representación gráfica de la evolución con el tiempo, para ambos campos el punto donde se hace cero por primera vez  $\langle M_x \rangle / M_s$  es el mismo en el NIST y en nuestra solución.

## 3.2. Problema estándar 2

Este problema micromagnético incluye tanto el efecto magnetostático como el de intercambio, pero con la ventaja de presentar un único parámetro de escala. No se tiene en cuenta el efecto de la anisotropía. Para un material con una cierta geometría, las ecuaciones micromagnéticas estáticas o ecuaciones de Brown son aplicadas. Se obtiene así un ciclo de histéresis que depende de la escala geométrica del cuerpo respecto a la longitud de intercambio. El ciclo se obtiene fijando los valores máximo y mínimo del campo externo y variándolo de un valor extremo al otro con un cierto paso. Para cada paso, las ecuaciones de Brown se encargan de encontrar la magnetización de equilibrio. En nuestro caso, variaremos el campo desde  $-B_{max}$  a  $B_{max}$ , pero no de  $B_{max}$  a  $-B_{max}$ , por lo que los resultados obtenidos son para medio ciclo de histéresis. Los valores extremos tomados para el campo externo son de -0,1 T a 0.1 T.

**Geometría:**

Lámina de espesor  $t$ , longitud  $L$  y ancho  $d$ .  $L$ ,  $d$  y  $t$  son paralelas a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Para hacer el problema virtualmente bidimensional tomamos la relación  $t/d = 0,1$ , y para obtener modos de inversión no uniformes de interés,  $L/d = 5$ .

**Parámetros del material:**

- Longitud de intercambio magnetostático,  $l_{ex}$ .
- Anisotropía magnetocristalina de valor cero.

**Resultados:**

- Representación gráfica de la magnetización remanente (magnetización del cuerpo a campo externo cero) en el eje largo (eje  $x$ ) y en el eje corto (eje  $y$ ) en función de la relación  $d/l_{ex}$ .
- Representación gráfica del campo coercitivo (campo externo para el que  $M_x + M_y + M_z$  se hace cero) frente a  $d/l_{ex}$ .

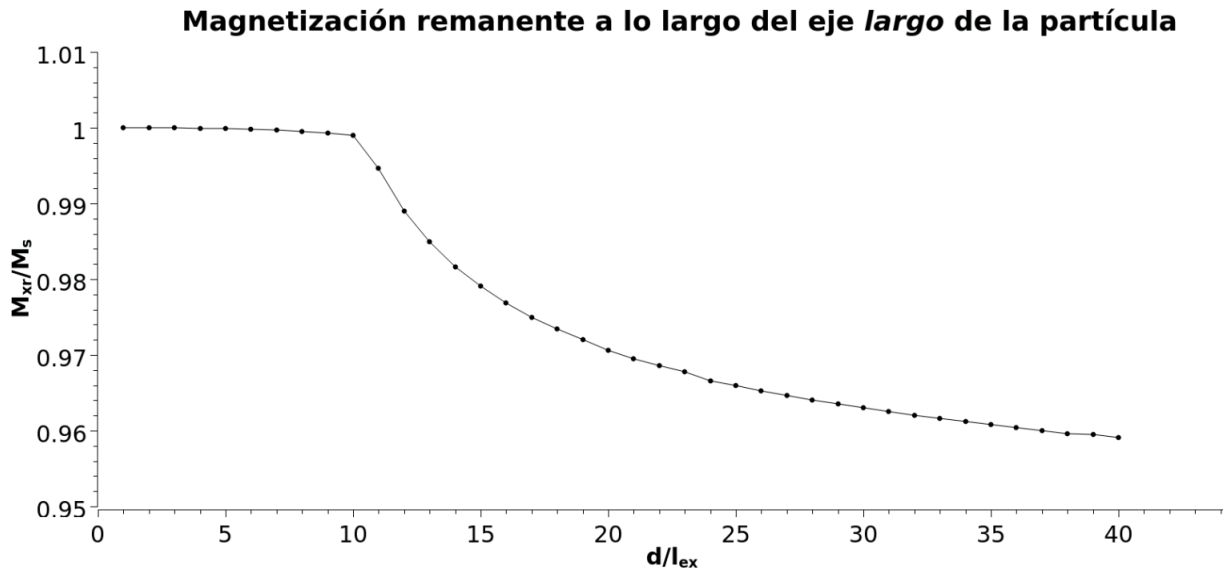
**3.2.1. Resultados obtenidos**

Figura 3.9: Resultado obtenido para la evolución de la magnetización remanente en el eje  $x$  con el cociente entre el ancho de la muestra y la longitud de intercambio.

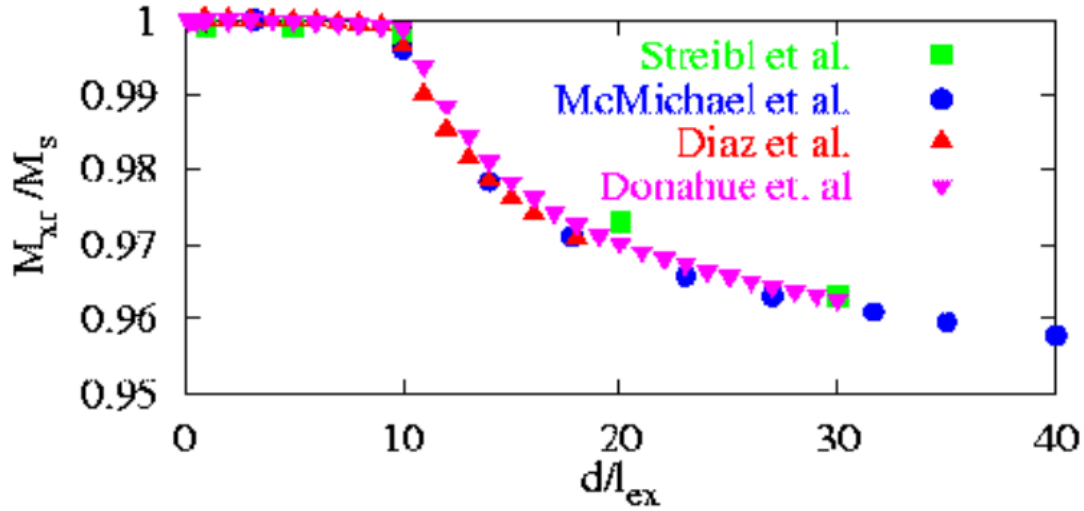


Figura 3.10: Resultado del NIST para la evolución de la magnetización remanente en el eje  $x$  con el cociente entre el ancho de la muestra y la longitud de intercambio.

Vemos que la magnetización remanente en el eje  $x$  cambia a razón de  $d/l_{ex}$  de forma prácticamente idéntica a nuestro caso (Fig. (3.9) y (3.10)). Hasta  $d/l_{ex} = 10$ , la magnetización remanente es prácticamente constante para cada ciclo de histéresis. Pero cuando pasa de este valor, la magnetización remanente en el eje  $x$  cae prácticamente de forma exponencial a medida que aumenta la razón entre  $d$  y  $l_{ex}$ .

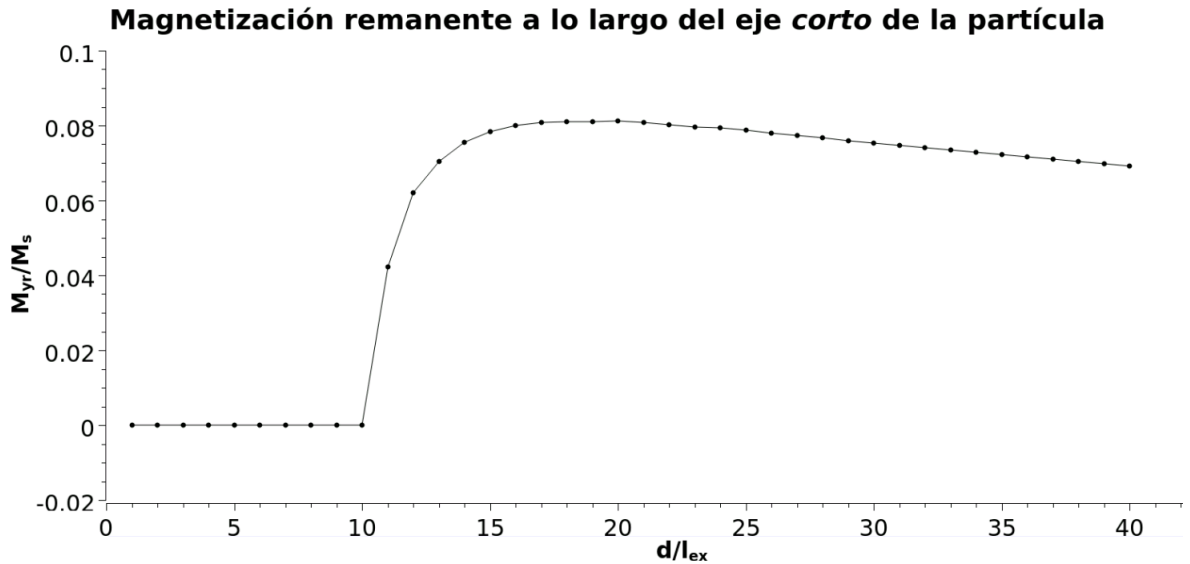


Figura 3.11: Resultado obtenido para la evolución de la magnetización remanente en el eje  $y$  con el cociente entre el ancho de la muestra y la longitud de intercambio.

Fijándonos en las figuras (3.11) y (3.12) vemos que, al igual que en el primer caso, ambos resultados son muy similares. Para el eje  $y$  la magnetización remanente es prácticamente nula hasta  $d/l_{ex} = 10$ , punto para el cual sufre un salto brusco para luego ir decayendo lentamente al aumentar el valor del cociente.

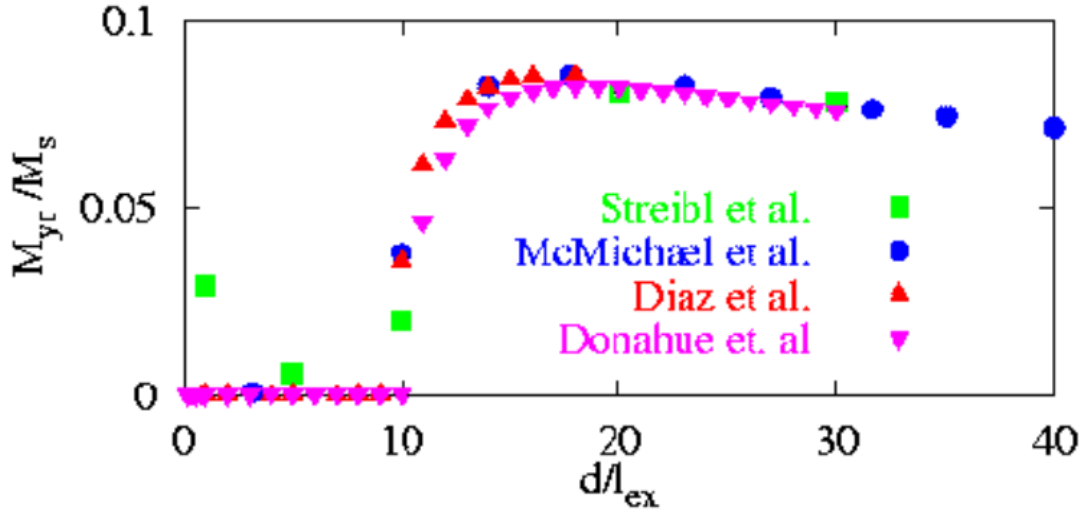


Figura 3.12: Resultado del NIST para la evolución de la magnetización remanente en el eje  $y$  con el cociente entre el ancho de la muestra y la longitud de intercambio.

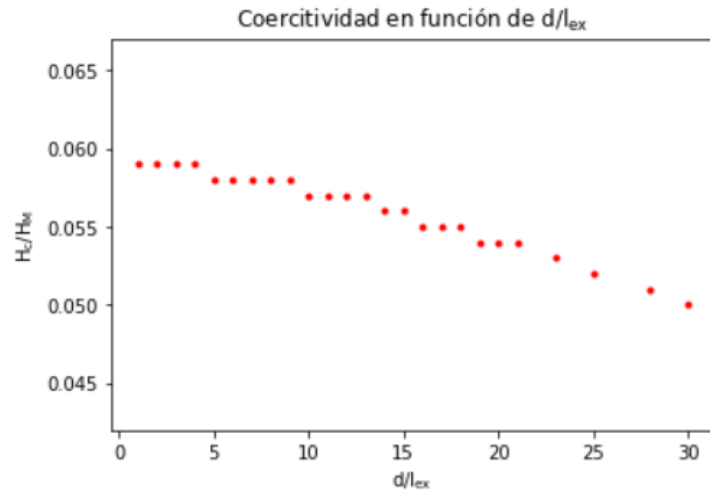


Figura 3.13: Resultado obtenido para la evolución del campo coercitivo en función del cociente entre el ancho de la muestra y la longitud de intercambio..

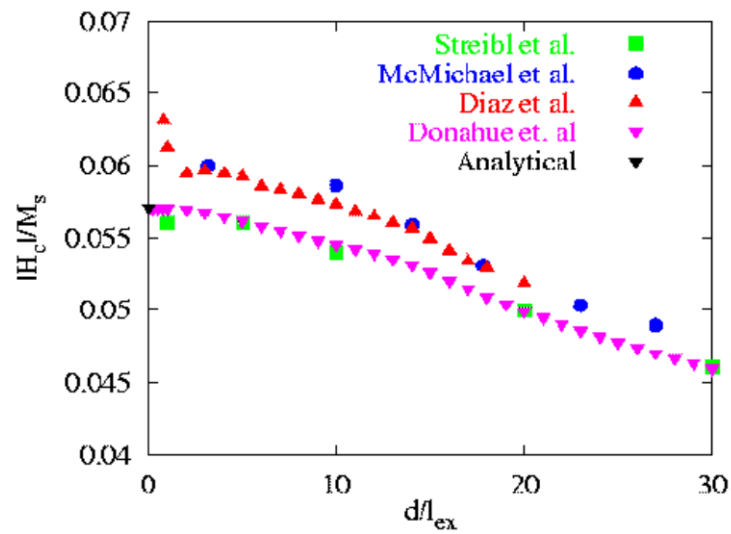


Figura 3.14: Resultado del NIST para la evolución del campo coercitivo en función del cociente entre el ancho de la muestra y la longitud de intercambio..



El intervalo de valores en el que decae el campo coercitivo con  $d/l_{ex}$  es parecido en ambas gráficas (Fig. (3.13) y (3.14)). Sin embargo, en nuestro resultado esta caída es escalonada. Esto es debido a la falta de precisión en las medidas. Por ello, es conveniente disminuir el paso con el que evoluciona el campo externo de  $-B_{max}$  a  $B_{max}$  en el ciclo de histéresis. Hasta ahora hemos utilizado un paso  $\Delta B = 0,001 T$ . Para mejorar la precisión, haremos este paso 10 veces menor. Para ello, tomaremos un paso  $\Delta B' = \Delta B/10 T$ .

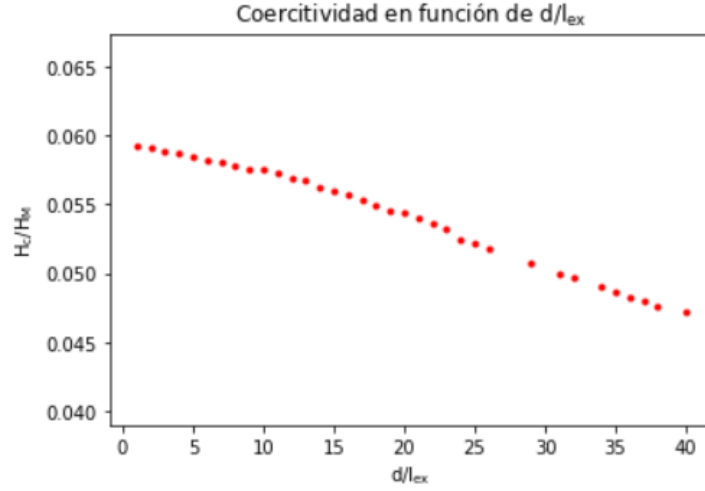


Figura 3.15: Resultado obtenido para la evolución del campo coercitivo en función del cociente entre el ancho de la muestra y la longitud de intercambio (más precisión que en la figura (3.13)).

El resultado aumentando la precisión (Fig. (3.15)) es más parecido al que aparece en el NIST. No obstante, para valores altos de  $d/l_{ex}$  la caída del campo coercitivo es más acusada en las soluciones del NIST. Esto puede deberse a no haber utilizado el comando `MinimizerStop()` de *mumax*, el cual establece un valor máximo para el diferencial de la magnetización,  $dM$ , cuando el programa relaja el valor de la magnetización del cuerpo en presencia de un campo externo.

## Capítulo 4

# Resonancia Ferromagnética en una Esfera

Como vimos en la sección 1.7.4, cuando sobre los momentos magnéticos de un material ferromagnético actúa un campo efectivo se produce un movimiento de precesión.

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma_G \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} \quad (4.1)$$

En principio, este movimiento debería amortiguarse con el tiempo (Ec. 1.112) hasta alcanzar el equilibrio. Sin embargo, esta disipación se puede evitar aplicando un campo oscilante en la dirección perpendicular al campo externo principal. Cuando la frecuencia del campo oscilante coincide con la frecuencia de precesión del sistema, este último absorbe energía. A este fenómeno se le conoce con el nombre de *resonancia ferromagnética*.

Si tenemos una esfera, los tres factores desmagnetizantes valen lo mismo:  $N_x = N_y = N_z = N$ . Aplicando un campo estático en el eje  $y$  tenemos un campo efectivo  $H_{eff} = (0, H, 0)$ . Si aplicamos una variación en la magnetización del tipo  $e^{i\omega t}$  en el eje  $x$ , y despejamos la ecuación (4.1) para cada coordenada, entonces

$$i\omega M_x = -\gamma_G M_z H_y \quad (4.2)$$

$$i\omega M_y \cong 0 \quad (4.3)$$

$$i\omega M_z = \gamma_G M_x H_y \quad (4.4)$$

Resolvemos para  $M_x$ , obteniéndose

$$\omega_0 = \gamma_G H_y \quad (4.5)$$

que es la frecuencia de resonancia para la cual la absorción de energía será máxima. Para llegar a este resultado no se han tenido en cuenta los efectos desmagnetizantes de la muestra. Para una esfera con magnetización uniforme en el eje  $y$ ,  $\mathbf{H}_{My} = -N\mathbf{M}_y$  (Ec. 1.42). Por la ecuación (1.41) sabemos que  $N = 1/3$  para una esfera. Las ecuaciones que describen la precesión se convertirían en:

$$i\omega M_x = -\gamma_G M_z (H_y - \frac{1}{3}M_y) = -\gamma(B_y M_z) \quad (4.6)$$

$$i\omega M_z = \gamma_G M_x H_y \quad (4.7)$$

de donde se obtiene:

$$\omega_0 = (\gamma_G \gamma B_y H_y)^{1/2} \quad (4.8)$$

En nuestro caso, como estamos considerando que  $M_y$  es aproximadamente cero, las expresiones (4.5) y (4.8) llevan al mismo resultado. No obstante, en general, la frecuencia de resonancia dependerá de la geometría de la muestra.

## 4.1. Resultados obtenidos

Para comprobar el fenómeno de resonancia ferromagnética simulamos una esfera de 250 nm de diámetro. A esta esfera se le aplica un campo de radiofrecuencia en el eje  $x$  de  $7,2 \cdot 10^9$  Hz y un campo estático en el eje  $y$  que aumenta en intensidad con el tiempo. Los resultados obtenidos se representan en la figura (4.1).

Evolución de la magnetización promedio con el campo estático

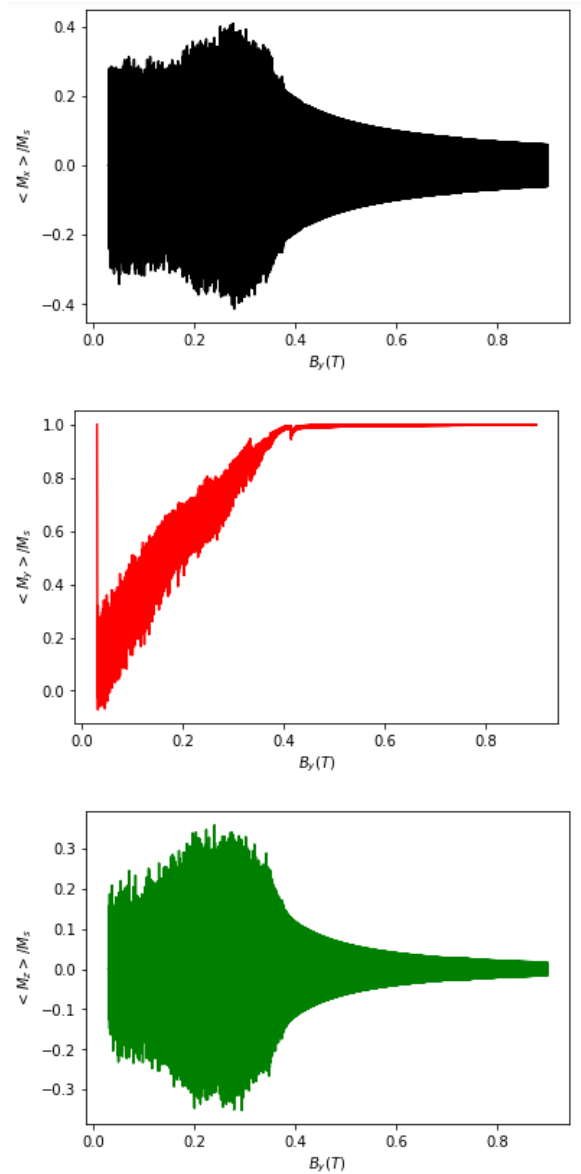


Figura 4.1: Cambio del promedio de la magnetización sobre toda la esfera en función del campo estático aplicado. Las oscilaciones en el intervalo de tiempo son tan rápidas que lo único que se aprecia es una banda de color en la que solo se distinguen los picos superiores e inferiores. La magnetización en el eje  $y$  (en rojo) presenta un pico inicial debido a que toda la esfera se encuentra magnetizada en el eje  $y$  antes de aplicar los campos. Dicha magnetización comienza a oscilar aumentando progresivamente hasta alcanzarse la saturación. Una vez que esta es alcanzada, se observa en las gráficas para los ejes  $x$  y  $z$  (negra y verde, respectivamente) que la amplitud comienza a disminuir y la oscilación del sistema se atenúa.

Antes de comenzar a atenuarse, se observa en la figura (4.1) que la oscilación en los ejes  $x$  y  $z$  alcanza su máximo, siendo mayor para  $m_x$ . A este punto corresponde la resonancia ferromagnética, la cual se produce cuando la frecuencia del campo oscilante aplicado en el eje  $x$  coincide con la frecuencia de precesión de los momentos de la esfera. Para ver más claramente el pico de la resonancia, hagamos la envolvente superior sobre la oscilación del eje  $x$  (Fig. (4.2)).

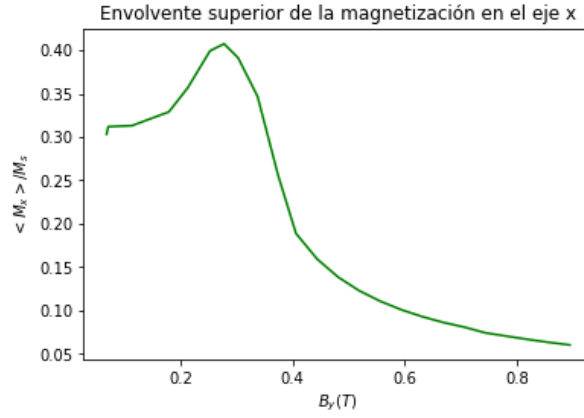


Figura 4.2: Envolvente superior para  $m_x$  frente al campo magnético en el eje  $y$ . El punto máximo se corresponde a un campo  $B_y=0,277$  T.

La ecuación (4.5), conocido que  $B_y = \mu_0 H_y$  y  $\gamma_G = \mu_0 \gamma$ <sup>1</sup>, puede reescribirse como:

$$\omega_0 = \gamma B_y \quad (4.9)$$

Conocida la frecuencia ( $\omega_0 = 2\pi \cdot 7,2 \cdot 10^9$ ) y el valor de  $\gamma$  se llega a un valor teórico de  $B_y^{teor.} = 0,257$  T. Comparando este con el obtenido experimentalmente,  $B_y^{exp.} = 0,277$  T, se tiene un error relativo del 7,78 %.

<sup>1</sup>G. Bertotti. Hysteresis in Magnetism: For Physicists, Materials Scientists, and Engineers. Academic Press, 1998.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo, las ecuaciones del micromagnetismo deducidas teóricamente no presentan una solución analítica. Esto lleva a tener que discretizar el problema, dividiendo el material micromagnético objeto de estudio en numerosas celdas. Cada pequeña celda presenta una magnetización uniforme. Esta depende de los parámetros que describen el campo efectivo para el punto del espacio en el que se encuentre dicha celda. Así, estudiando el fenómeno a una escala adecuada y empleando un considerable número de celdas, se obtiene la magnetización del cuerpo en función del espacio próxima al caso continuo ideal. Los programas micromagnéticos permiten obtener tanto la magnetización a  $t=0$  como su evolución dinámica.

El estudio de los problemas estándar 2 y 4 tenía como objetivo reproducir adecuadamente los resultados ya conocidos. En el caso del problema 4, el tomar distinto tamaño de celda al utilizado en los problemas resueltos ha llevado a ligeras diferencias en los resultados. En el problema 2, los resultados para la magnetización remanente han sido muy similares a los resultados conocidos. Para el caso del campo coercitivo, existen diferencias entre nuestros resultados y los del NIST; probablemente debidos a diferencias en el código ejecutado. En esta segunda parte del problema 2 se ha comprobado que Python es una herramienta útil en la interpretación de los datos micromagnéticos.

Por último, se ha comprobado como la resonancia ferromagnética afecta a la precesión de los momentos de una esfera. Para la limpieza de los datos Python ha sido de utilidad. El resultado experimental obtenido ha sido satisfactorio si se compara con el resultado teórico. Varias simulaciones y muchas horas de compilación han sido necesarias para dar con los valores del campo estático y de radiofrecuencia que mostrasen una resonancia clara.

## Capítulo 6

# Conclusions

In this work, micromagnetic equations theoretically derived don't offer an analytical solution. As a consequence, problems must be discretized by dividing the micromagnetic material in a great number of cells. For each cell we have an uniform magnetization that depends on the parameters that describe the effective field in the space occupied by the cell. That's how, studying the phenomenon in an adequate scale and using large enough number of cells, a good approximation to the continuous, idealized case can be obtained. Micromagnetic programs allow to obtain either the magnetization at  $t=0$  or evolving in time.

The goal of study standard problems 2 and 4 is to adequately replicate the already known solutions. In the case of problem 4, subtle difference between results is due to the fact that we take different cell size for our results than the one taken in the solved problems. In problem 2, results for remanent magnetization are quite similar to the known solution. In the case of coercitive field, there exist differences between our results and those from the NIST; probably caused by differences in the code run. In this second part of problem 2 Python has been verified as a useful tool to interpret micromagnetic data.

At last, we have tested how ferromagnetic resonance affects to the moments precession of a sphere. Python has been useful for data cleaning. The experimental result obtained was satisfactory when compared to the theoretical result. Several simulations and many hours of compilation have been necessary to find the static and radio-frequency field values that showed a clear resonance.

# Apéndice A

## Anexo. Problema estándar 4

El código de *mumax* con el que obtenemos los datos es:

```
SetGridsize(128, 32, 1)
SetCellsize(500e-9/128, 125e-9/32, 3e-9)

Msat = 800e3
Aex = 13e-12
alpha = 0.02

m = uniform(1, .1, 0)
relax()
save(m) // relaxed state, el primero guardado en OOMF

autosave(m, 200e-12)
tableautosave(20e-12)

B_ext = vector(-24.6E-3, 4.3E-3, 0)
run(9e-9)
```

para el campo 1. Para el campo 2:

```
SetGridsize(128, 32, 1)
SetCellsize(500e-9/128, 125e-9/32, 3e-9)

Msat = 800e3
Aex = 13e-12
alpha = 0.02

m = uniform(1, .1, 0)
relax()
save(m) // relaxed state

autosave(m, 200e-12)
tableautosave(20e-12)

B_ext = vector(-35.5E-3, -6.3E-3, 0)
run(9e-9)
```

## Apéndice B

# Anexo. Problema estándar 2

El código de *mumax* con el que obtenemos los datos de la magnetización remanente es:

```
Msat = 1000e3
Aex  = 10e-12

// define exchange length
lex := sqrt(10e-12 / (0.5 * mu0 * pow(1000e3 ,2)))

for i:=1; i<=40; i+=1{
  d      := i * lex           // we test for d/lex = 30
  Sizex  := 5*d              // magnet size x
  Sizey  := 1*d
  Sizez  := 0.1*d

  nx := pow(2, ilogb(Sizex / (0.75*lex))) // power-of-two number of cells
  ny := pow(2, ilogb(Sizey / (0.75*lex))) // not larger than 0.75 exchange lengths

  SetGridSize(nx, ny, 1)
  SetCellSize(Sizex/nx, Sizey/ny, Sizez)

  m = Uniform(1, 0.1, 0)      // initial mag
  relax()
  save(m)

  tablesave()
}
```



El código de *mumax* con el que obtenemos los datos del campo coercitivo (para el caso más preciso) es:

```

Msat = 1000e3
Aex = 10e-12

// define exchange length
lex := sqrt(10e-12 / (0.5 * mu0 * pow(1000e3 ,2)))

Bmax := 100.0e-3
Bstep := 1.0e-4 //paso mas pequeño para mejorar precision

for i:=1; i<=40; i+=1{
  d := i * lex // we test for d/lex = 30
  SizeX := 5*d // magnet size x
  SizeY := 1*d
  SizeZ := 0.1*d

  nx := pow(2, ilogb(SizeX / (0.75*lex))) // power-of-two number of cells
  ny := pow(2, ilogb(SizeY / (0.75*lex))) // not larger than 0.75 exchange lengths

  SetGridSize(nx, ny, 1)
  SetCellSize(SizeX/nx, SizeY/ny, SizeZ)

  m = Uniform(1, 0.1, 0) // initial mag
  relax()
  //save(m)

  for B:=-Bmax; B<=Bmax; B+=Bstep{
    B_ext = vector(B*0.578, B*0.816, B*0.578)

    minimize() // small changes best minimized by minimize()
    tablesave()
  }

  //tablesave()
}

```

El código de *Python* con el que representamos los datos del campo coercitivo (para el caso más preciso) es:

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

df=pd.read_table(r"C:\Users\usuario\Desktop\FISICA 2020-2021\TFG\table3.txt")
df=pd.DataFrame(df)
df.columns

a=df['mx ()']+df['my ()']+df['mz ()']
df['M']=a

b=list(range(-1000,1000,1))
b= list(map(lambda x: x / (10000), b)) #para dividir cada elemento de la lista entre 1000
b=40*b
df['B']=b

c=[2000*[i] for i in list(range(1,41))]
c=[item for lista in c for item in lista] #transforma la lista de listas en una sola lista
df['d/lex']=c

df['M=0'] = abs(df['M'])<=0.0045
df = df.drop(df[df['M=0']==False].index).reset_index()

pd.set_option("max_rows", None) #muestra todas las filas del dataframe

df=df.drop([5,6,8,9,11,12,14,15,17,18,20,21,23,25,26,29,31,32,35,37,38],axis=0)

plt.scatter(df['d/lex'],df['B'],marker='.',color='red')
plt.xlabel('d/l_{ex}')
plt.ylabel('H_{c}/M_{s}')

params = {'mathtext.default': 'regular' }    #para escribir subindice en los titulos de los ejes
plt.rcParams.update(params)

plt.xlabel('$d/l_{ex}$')
plt.ylabel('$H_{c}/H_{M}$')
plt.title('Coercitividad en función de $d/l_{ex}$')
```

## Apéndice C

# Anexo. Resonancia ferromagnética en una esfera

El código de *mumax* con el que obtenemos la magnetización y el campo en función del tiempo es:

```
SetGridSize(50,50,50)
SetCellSize(5e-9, 5e-9, 5e-9)

EdgeSmooth=0

setgeom(ellipsoid(250e-9, 250e-9, 250e-9)) // esfera diametro 250 nanometros
saveas(geom,"ellipsoid")

Msat = 800000
Aex = 1.3e-11

alpha = 0.0072
GammaLL = 1.76e11

freq := 7.2e+9
omega := 2 * pi * freq

TableAdd(B_ext)

// autosave(m, 1e-9)
tableautosave(0.01e-9)

BextY := 0.03
m = uniform(0, 1, 0)

B_ext = vector(0, BextY, 0)
relax()

for i := 1; i <= 900; i = i + 1 {

BextY := 0.03 + ((0.9-0.03)/900)*i
B_ext = vector(0.05*sin(omega*t), BextY, 0)

run(5e-9)

}
```

El código de *Python* con el que representamos los datos de la magnetización frente a  $B_y$ , hacemos la envolvente y calculamos  $B_y$  de resonancia es:

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.ticker as mtick
from decimal import *

df=pd.read_table(r"C:\Users\usuario\Desktop\FISICA 2020-2021\TFG\tabla8.txt")
df=pd.DataFrame(df)
df.columns

t=df['B_exty (T)'].iloc[0:1000]
mx=df['mx ( )'].iloc[0:1000]
my=df['my ( )']
mz=df['mz ( )']

g1=plt.plot(t,mx,color='black')
plt.xlabel('$B_{y}$ (T)$')
plt.ylabel('$M_{x}>/M_{s}$')
plt.title('Evolución de La magnetización promedio con el campo estático')
plt.show(g1)

g3=plt.plot(t,my,color='red')
plt.xlabel('$B_{y}$ (T)$')
plt.ylabel('$M_{y}>/M_{s}$')
plt.show(g3)

g4=plt.plot(t,mz,color='green')
plt.xlabel('$B_{y}$ (T)$')
plt.ylabel('$M_{z}>/M_{s}$')
plt.show(g4)

#código para obtener la envolvente
def hl_envelopes_idx(mx,dmin,dmax): #código para la envolvente
    """
    s : 1d-array, data signal from which to extract high and low envelopes
    dmin, dmax : int, size of chunks, use this if size of data is too big
    """

    # locals min
    lmin = (np.diff(np.sign(np.diff(mx))) > 0).nonzero()[0] + 1
    # locals max
    lmax = (np.diff(np.sign(np.diff(mx))) < 0).nonzero()[0] + 1

    """
    # the following might help in some case by cutting the signal in "half"
    s_mid = np.mean(s) (0 if s centered or more generally mean of signal)
    # pre-sort of locals min based on sign
    lmin = lmin[s[lmin]<s_mid]
    # pre-sort of local max based on sign
    lmax = lmax[s[lmax]>s_mid]
    """

    # global max of dmax-chunks of locals max
    lmin = lmin[(1+np.argmax(mx[lmin[1:1+dmin]])) for i in range(0,len(lmin),dmin)]
    # global min of dmin-chunks of locals min
    lmax = lmax[(1+np.argmax(mx[lmax[1:1+dmax]])) for i in range(0,len(lmax),dmax)]

    return lmin,lmax

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)

high_idx, low_idx = hl_envelopes_idx(mx,dmin=1400,dmax=1400)

#plt.plot(t[high_idx], mx[high_idx], 'r', label='low') #envolvente inferior
g2=ax.plot(t[low_idx], mx[low_idx], 'g', label='high') #envolvente superior
#ax.xaxis.set_major_formatter(mtick.FormatStrFormatter('%e')) # para poner el eje x en notación científica

plt.xlabel('$B_{y}$ (T)$')
plt.ylabel('$M_{x}>/M_{s}$')
plt.title('Envolvente superior de la magnetización en el eje x')
plt.show(g2)

maxs = df["mx ( )"].max() #para conocer el valor máximo exacto de la magnetización
print(maxs)
df[df['mx ( )'] == 0.40742016].index.tolist()
df1=df.iloc[127935]
df1['B_exty (T)'] #valor de By para el que mx es máxima
```