概率论与数理统计笔记

什么是统计学？

人生，是从不充分的证据开始，引出完美结论的一种艺术。——Samuel Bulter

如果我们不在同一时期，把理解了的科学知识变为我们日常生活的一部分，科学家降不可能提高他们互相拥有的知识。——J.D.Bernal

与人类有关的事实，可以由数量来表示，并且经过大量的积累重复可以导出一般规律。——英国皇家统计学会

一、事件与概率

1.1 随机试验和随机事件

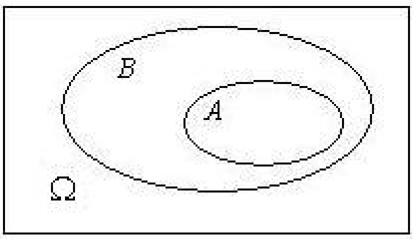
1. **随机现象：**自然界中的客观现象，当人们观测它时，所得结果不能预先确定，而仅仅是多种可能结果之一。
2. **随机试验：**随机现象的实现和对它某个特征的观测。
3. **基本事件：**随机试验中的每个单一结果，犹如分子中的原子，在化学反应中不可再分。

   e.g. 硬币抛3次，有8种结果：正正正、正正反、正反正......这8种可能结果的每一个都是基本事件。
4. **随机事件：**简称事件，在随机试验中我们所关心的可能出现的各种结果，它由一个或若干个基本事件组成。通常用英文大写字母表示或{一种叙述}来表示。
5. **样本空间：**随机试验中所有基本事件所构成的集合，通常用Ω或S表示。

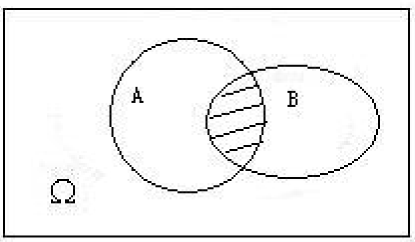
   e.g. 掷一枚骰子，观察出现的点数，则$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
6. **必然事件（Ω）：**在试验中一定会发生的事件。
7. **不可能事件（ϕ）：**在试验中不可能发生的事件。

1.2 事件的运算

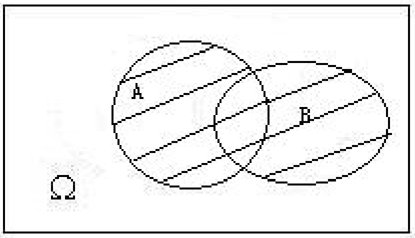
1. **子事件$A\subset B$：**事件A发生蕴含时间B一定发生，则时间A成为事件B的子事件。若$A\subset B$，且$B\subset A$，则称时间A与事件B相等，记为$A=B$.



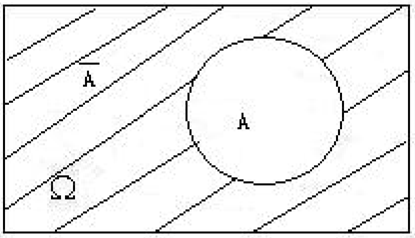
2. **事件的和（$A\cup B$）：**事件A和事件B中至少有一个发生称为事件A和事件B的和。



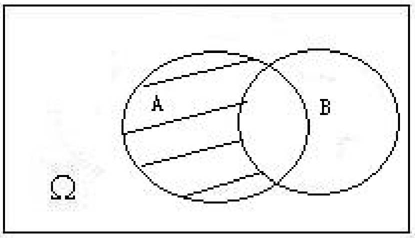
3. **事件的积（$A \cap B$）**：事件A和事件B同时发生称为A和事件B的积。如果$A \cap B = \phi$，则称A和B不相容，即事件A和B不能同时发生。



4. **对立事件A^c（或$\overline{A}$）**：A不发生这一事件称为事件A的对立事件（或余事件）。



5. **事件A和事件B的差（$A - B$）**：事件A发生而事件B不发生这一事件称为事件A和事件B的差，或等价于AB^c.



6. ***De Morgan*对偶法则及其推广**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

上式可推广到*n*个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

1.3 概率的定义

概率是随机事件发生可能性大小的数字表征，其值在0和1之间，即概率是事件的函数。概率有以下定义：

1.3.1 古典概率

设一个试验有*N*个等可能的结果，而事件E恰包含其中的M个结果，则事件E的概率，记为$P(E)$，定义为

$$P(E) = M/N$$

或

$$P(E) = \#(M)/\#(N),$$

其中，$\#(M)$为事件M中基本事件的个数。

古典概型有**两个条件**：

- 有限性，试验结果只有有限个（记为*n*），
- 等可能性，每个基本时间发生的可能性相同。

> **注：**古典概率可引申出"几何概率"。

1.3.2 概率的统计定义

古典概率的两个条件往往不能满足，但可以将事件的随机试验独立反复做*n*次（*Bernouli*试验），设事件A发生了n_A次，称比值$\frac{n_A}{n}$为事件A发生的频率，当*n*越来越大时，频率会在某个值*p*附近波动，且波动越来越小，这个值*p*就定义为事件A的概率。该学派为频率派。

> **注：**不能写为$lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} = p$，因为$\frac{n_A}{n}$不是*n*的函数。

1.3.3 主观概率

主观概率可以理解为一种心态或倾向性。究其根由，大抵有二：一是根据其经验和知识，二是根据其利害关系。该学派在金融和管理有大量的应用，这一学派成为*Bayes*学派。

1.3.4 概率的公理化定义

对概率运算规定一些简单的基本法则：

1. 设A是随机事件，则$0 \le P(A) \le 1$,
2. 设Ω为必然事件，则$P(\Omega) = 1$,
3. 若事件A和B不相容，则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

   可推广至无穷：$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

> **注：**
>
> 1. 一般情况下，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，
> $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
> 2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
> 3. $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

1.4 古典概率计算

1.4.1 排列组合

- **选排列：**从*n*个不同元素中取*r*个不同取法（$1 \le r \le n$），$P_r^n = n(n-1)\dots(n-r+1)$.
- **重复排列：**从*n*个不同元素中可重复地取*r*个不同取法（$1 \le r \le n$），$P_r^n = n^r$.
- **组合：**同选排列，但不考虑次序，$\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!}$.

> **注：**
>
> 1. 排列英文为*Permutation*，组合英文为*Combination*.
> 2. $0!$为1。当*r*不是非负整数时，记号$r!$没有意义.
> 3. 一些书中将组合写成C_n^r或C_r^n，更通用的是$\binom{n}{r}$.

1.4.2 其他公式

- 组合系数$\binom{n}{r}$又常称为二项式系数

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{r} a^i b^{n-1}$$

- n个相异物件分成k堆，各堆物件数分为$r_1, \ldots, r_k$的方法是

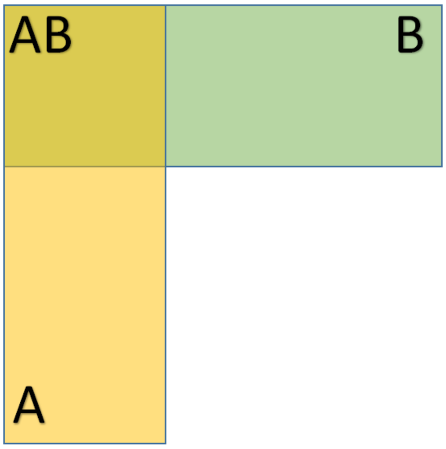
$$n!/(r_1! \ldots r_k!).$$

1.5 条件概率

条件概率就是知道了**一定信息**下得到的随机事件的概率。设事件A和B是随机试验Ω中的两个事件，$P(B) > 0$，称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B发生条件下事件A发生的条件概率，可用图形表示：



> **注**：事实上，我们所考虑的概率都是在一定条件下计算的，因为随机试验就是在一定条件下进行的。

1.5.1 条件概率性质

给定A发生，$P(A) > 0$：

1. $0 \leq P(B|A) \leq 1$
2. $0 \leq P(\Omega|A) = 1$
3. 若$B_1 \cap B_2 = \phi_1$，则$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)$，可推广至无穷。

1.5.2 乘法定理

由$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A|B)P(B)$，可推广至

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$$

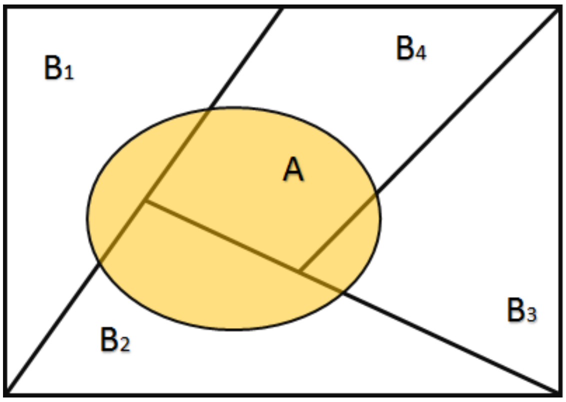
> **注**： 右边看似麻烦，其实容易算，左边看似简单，但是难算。

1.6 全概率

设$B_1, B_2, \ldots B_n$是样本空间Ω中的**两两不相容**的一组事件，即$B_i B_j = \phi$，$i \neq j$，且满足$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，则称$B_1, B_2, \ldots B_n$是样本空间$\Omega$的一个分割（又称为**完备事件群**，英文为*partition*）。

设$\{B_1,B_2,...B_n\}$是样本空间Ω的一个分割，A为Ω的一个事件，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$



推导：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap\Omega)\\&=P(A\cup\sum_{i=1}^{n}B_i)\\&=P(\sum_{i=1}^{n}AB_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)\end{aligned}$$

> **注：**有时不易直接计算事件A的概率，但是在每个B_i上A的条件概率容易求出

1.7 *Bayes*公式

设$\{B_1,B_2,...B_n\}$是样本空间的一个分割，A为Ω中的一个事件，$P(B_i)>0$，$i=1,2,\ldots,n$，$P(A)>0$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

> **注：**当有因果关系互换时必须用*Bayes*公式。

1.8 事件的独立性

设A，B是随机试验中的两个事件，若满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A和B相互独立。判断事件的独立，应该是**从实际出发**，如果能够判断事件B的发生与否对事件A的发生与否不产生影响，则事件A，B即为独立。

设$\widetilde{A}$表示事件A发生和不发生之一，$\widetilde{B}$表示事件B发生和不发生之一。有独立性的定义可推至$P(\widetilde{A}\widetilde{B})=P(\widetilde{A})P(\widetilde{B})$（一共有四个等式）。可推广至：

$$P(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\ldots\widetilde{A}_n)=P(\widetilde{A}_1)\ldots P(\widetilde{A}_n)$$

上面有2^n个等式。

> **注：** 独立（*independent*）和不相容（*exclusive*）是不同的两个概念，前者有公共部分，后者没有公共部分，独立一定相容。

1.9 重要公式与结论

(1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

(3) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

(4) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

(5) $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB), P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),$
$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$

(6) $P(\overline{A}_1|B) = 1 - P(A_1|B), P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$
$P(A_1A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$

(7) 若 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 相独立，则 $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$