概率论与数理统计笔记

什么是统计学？

人生，是从不充分的证据开始，引出完美结论的一种艺术。——Samuel Bulter

如果我们不在同一时期，把理解了的科学知识变为我们日常生活的一部分，科学家降不可能提高他们互相拥有的知识。——J.D.Bernal

与人类有关的事实，可以由数量来表示，并且经过大量的积累重复可以导出一般规律。——英国皇家统计学会

一 事件与概率

1.1 随机试验和随机事件

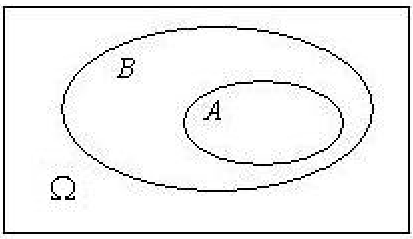
1. **随机现象**：自然界中的客观现象，当人们观测它时，所得结果不能预先确定，而仅仅是多种可能结果之一。
2. **随机试验**：随机现象的实现和对它某个特征的观测。
3. **基本事件**：随机试验中的每个单一结果，犹如分子中的原子，在化学反应中不可再分。

   e.g. 硬币抛3次，有8种结果：正正正、正正反、正反正……这8种可能结果的每一个都是基本事件。
4. **随机事件**：简称事件，在随机试验中我们所关心的可能出现的各种结果，它由一个或若干个基本事件组成。通常用英文大写字母表示或{一种叙述}来表示。
5. **样本空间**：随机试验中所有基本事件所构成的集合，通常用Ω或S表示。

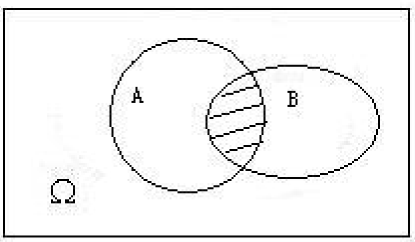
   e.g. 掷一枚骰子，观察出现的点数，则$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
6. **必然事件（Ω）**：在试验中一定会发生的事件。
7. **不可能事件（ϕ）**：在试验中不可能发生的事件。

1.2 事件的运算

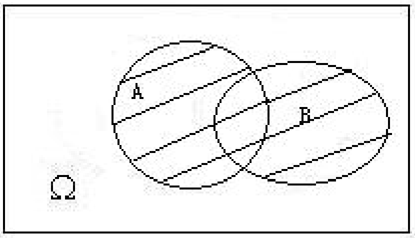
1. **子事件$A\subset B$**：事件A发生蕴含时间B一定发生，则时间A成为事件B的子事件。若$A\subset B$，且$B\subset A$，则称时间A与事件B相等，记为$A=B$.



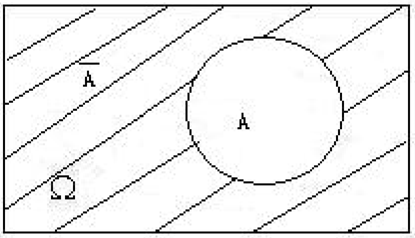
2. **事件的和（$A\cup B$）**：事件A和事件B中至少有一个发生称为事件A和事件B的和。



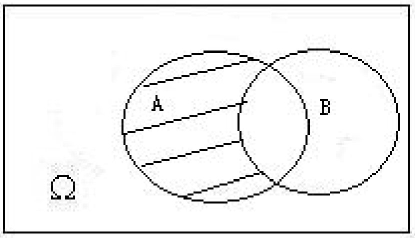
3. **事件的积（$A\cap B$）**：事件A和事件B同时发生称为A和事件B的积。如果$A\cap B=\phi$，则称A和B不相容，即事件A和B不能同时发生。



4. **对立事件A^c（或$\overline{A}$）**：A不发生这一事件称为事件A的对立事件（或余事件）。



5. **事件A和事件B的差（$A-B$）**：事件A发生而事件B不发生这一事件称为事件A和事件B的差，或等价于AB^c.



6. ***De Morgan*对偶法则及其推广**

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

上式可推广到*n*个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

1.3 概率的定义

概率是随机事件发生可能性大小的数字表征，其值在0和1之间，即概率是事件的函数。概率有以下定义：

1.3.1 古典概率

设一个试验有*N*个等可能的结果，而事件E恰包含其中的M个结果，则事件E的概率，记为$P(E)$，定义为

$$P(E)=M/N$$

或

$$P(E) = \#(M)/\#(N),$$

其中，$\#(M)$为事件M中基本事件的个数。

古典概型有**两个条件**：

- 有限性，试验结果只有有限个（记为*n*），
- 等可能性，每个基本时间发生的可能性相同。

> **注：**古典概率可引申出“几何概率”。

1.3.2 概率的统计定义

古典概率的两个条件往往不能满足，但可以将事件的随机试验独立反复做*n*次（*Bernouli*试验），设事件A发生了n_A次，称比值$\frac{n_A}{n}$为事件A发生的频率，当*n*越来越大时，频率会在某个值*p*附近波动，且波动越来越小，这个值*p*就定义为事件A的概率。该学派为频率派。

> **注：**不能写为$lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=p$，因为$\frac{n_A}{n}$不是*n*的函数。

1.3.3 主观概率

主观概率可以理解为一种心态或倾向性。究其根由，大抵有二：一是根据其经验和知识，二是根据其利害关系。该学派在金融和管理有大量的应用，这一学派成为*Bayes*学派。

1.3.4 概率的公理化定义

对概率运算规定一些简单的基本法则：

1. 设A是随机事件，则$0 \le P(A) \le 1,$
2. 设Ω为必然事件，则$P(\Omega) = 1,$
3. 若事件A和B不相容，则$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$

   可推广至无穷：$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$

> **注：**
>
> 1. 一般情况下，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，
> $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
> 2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
> 3. $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

1.4 古典概率计算

1.4.1 排列组合

- **选排列：**从*n*个不同元素中取*r*个不同取法（$1 \le r \le n$），$P_r^n = n(n-1)\dots(n-r+1).$
- **重复排列：**从*n*个不同元素中可重复地取*r*个不同取法（$1 \le r \le n$），$P_r^n = n^r.$
- **组合：**同选排列，但不考虑次序，$\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!}.$

> **注：**
>
> 1. 排列英文为*Permutation*，组合英文为*Combination*.
> 2. $0!$为1。当*r*不是非负整数时，记号$r!$没有意义.
> 3. 一些书中将组合写成C_n^r或C_r^n，更通用的是$\binom{n}{r}$.

1.4.2 其他公式

- 组合系数$\binom{n}{r}$又常称为二项式系数

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{r}a^ib^{n-1}$$

- n个相异物件分成k堆，各堆物件数分为$r_1,\dots,r_k$的方法是

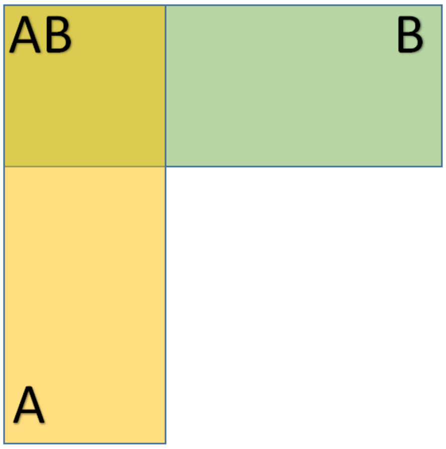
$$n!/(r_1!\dots r_k!).$$

1.5 条件概率

条件概率就是知道了**一定信息**下得到的随机事件的概率。设事件A和B是随机试验Ω中的两个事件，$P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B发生条件下事件A发生的条件概率，可用图形表示：



> **注：**事实上，我们所考虑的概率都是在一定条件下计算的，因为随机试验就是在一定条件下进行的。

1.5.1 条件概率性质

给定A发生，$P(A)>0$：

- $0\le P(B|A)\le 1$
- $0\le P(\Omega|A)=1$
- 若$B_1\cap B_2=\phi_1$，则$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)$，可推广至无穷。

1.5.2 乘法定理

由$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow P(AB)=P(A|B)P(B)$，可推广至

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1\dots A_{n-1})$$

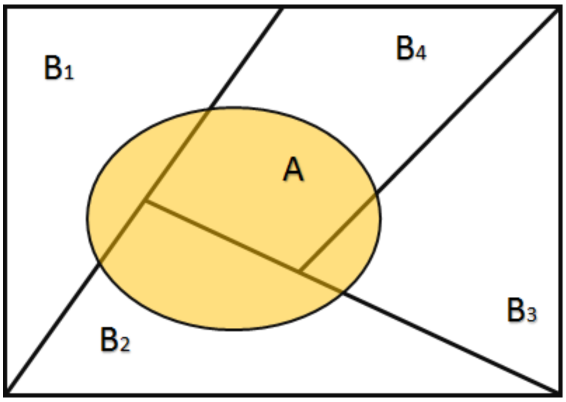
> **注：** 右边看似麻烦，其实容易算，左边看似简单，但是难算。

1.6 全概率

设$B_1,B_2,\dots B_n$是样本空间Ω中的**两两不相容**的一组事件，即$B_iB_j=\phi$，$i\ne j$，且满足$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则称$B_1,B_2,\dots B_n$是样本空间$\Omega$的一个分割（又称为**完备事件群**，英文为*partition*）。

设$\{B_1,B_2,...B_n\}$是样本空间Ω的一个分割，A为Ω的一个事件，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$



推导：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap\Omega)\\&=P(A\cup\sum_{i=1}^{n}B_i)\\&=P(\sum_{i=1}^{n}AB_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)\end{aligned}$$

> **注：**有时不易直接计算事件A的概率，但是在每个B_i上A的条件概率容易求出

1.7 *Bayes*公式

设$\{B_1,B_2,...B_n\}$是样本空间的一个分割，A为Ω中的一个事件，$P(B_i)>0$，$i=1,2,\ldots,n$，$P(A)>0$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

> **注：**当有因果关系互换时必须用*Bayes*公式。

1.8 事件的独立性

设A，B是随机试验中的两个事件，若满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A和B相互独立。判断事件的独立，应该是**从实际出发**，如果能够判断事件B的发生与否对事件A的发生与否不产生影响，则事件A，B即为独立。

设$\widetilde{A}$表示事件A发生和不发生之一，$\widetilde{B}$表示事件B发生和不发生之一。有独立性的定义可推至$P(\widetilde{A}\widetilde{B})=P(\widetilde{A})P(\widetilde{B})$（一共有四个等式）。可推广至：

$$P(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\ldots\widetilde{A}_n)=P(\widetilde{A}_1)\ldots P(\widetilde{A}_n)$$

上面有2^n个等式。

> **注：**独立（*independent*）和不相容（*exclusive*）是不同的两个概念，前者有公共部分，后者没有公共部分，独立一定相容。

1.9 重要公式与结论

$$(1)\ P(\overline{A})=1-P(A)$$

$$(2)\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$(3)\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$(4)\ P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

$$(5)\ P(A\overline{B})=P(A)-P(AB), P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}),\\ P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$$

$$(6)\ P(\overline{A}_1|B)=1-P(A_1|B), P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)\\ P(A_1A_2|B)=P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$$

$$(7)\ \text{若} A_1,A_2,\dots A_n \text{相独立，则} P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i), P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$

二 随机变量及其分布

2.1 随机变量的概念

1. **随机变量（*Random variable*）**：值随机会而定的变量，研究随机试验的一串事件。可按维数分为一维、二维至多维随机变量。按性质可分为**离散型随机变量**以及**连续型随机变量**。
2. **分布（*Distribution*）**：事件之间的联系，用来计算概率。
3. **示性函数（*Indication function*）**：$I_A(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\ 0 & \text{反之}\end{cases}$，事件$A$有随机变量$I_A$表示出来，$I_A$称为事件$A$的示性函数。

2.2 离散型随机变量及其分布

1. **离散型随机变量：**设X为一随机变量，如果X**只取有限个或可数个值**，则称X为一个（一维）离散型随机变量。
2. **概率函数：**设X为一随机变量，其全部可能值为$\{a_1,a_2,\dots\}$，则$p_i=P(X=a_i),i=1,2,\dots$称为X的概率函数。
3. **概率分布：**离散型随机变量的概率分布可以用分布表来表示：

可能值	a_1	a_2	...	a_i	...
概率	p_1	p_2	...	p_i	...

4. **概率分布函数：**
   - **定义：**设X为一随机变量，则函数

$$F(X)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<\infty)$$

称为X的分布函数。（**注：这里并未限定X为离散型的，它对任何随机变量都有定义。**）

- **性质：**

- $F(x)$是单调非降的：当$x_1 < x_2$时，有$F(x_1) \leq F(X_2)$.
- 当$x \to \infty$时，$F(x) \to 1$；当$x \to -\infty$时，$F(x) \to 0$.

- **离散型随机变量分布函数：**

  对于离散型随机变量，
  $F(X) = P(X \leq x) = \sum_{\{i|a_i \leq x\}} p_i, \quad p_i = P(X = i) = F(i) - F(i-1)$。

5. **二项分布（*Bionomial distribution*）**：
   - **定义：**设某事件A在一次试验中发生的概率为p，先把试验独立地重复n次，以X记A在这n次试验中发生的次数，则X取值$0, 1, \dots, n$，且有

     $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

     称X服从二项分布，记为$X \sim B(n, p)$.
   - **服从二项分布的条件：**1. 各次试验的条件是稳定的，即事件A的概率p在各次试验中保持不变；2. 各次试验的独立性
6. **泊松分布（*Poisson distribution*）：**
   - **定义：**设随机变量X的概率分布为

     $$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$$

     则称X服从参数为λ的*Poisson*分布，并记$X \sim P(\lambda)$.
   - **特点：**
     - 描述稀有事件发生概率
     - 作为二项分布的近似。若$X \sim B(n, p)$，其中n很大，p很小，而$np = \lambda$不太大时（一般$n > 30, np \leq 5$），则X的分布接近泊松分布$P(\lambda)$.

       推导：

       若事件$A \sim B(n, p)$，且n很大，p很小，而$np = \lambda$不太大时，设$\lambda = np$，

       $$\begin{aligned} P(X = i) &= \lim_{n \to \infty} \binom{n}{i} (\frac{\lambda}{n})^i (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-i} \\ &= \lambda^i \lim_{n \to \infty} \frac{\binom{n}{i}}{n^i} \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-i} \\ &= \lambda^i e^{-\lambda} \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{i! n^i} \\ &= \lambda^i e^{-\lambda} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{i-1}{n})}{i!} \\ &= \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

2.3 连续型随机变量及其分布

1. **连续型随机变量：**设X为一随机变量，如果X**不仅有无限个而且有不可数个值**，则称X为一个连续型随机变量。
2. **概率密度函数：**
   - **定义：**设连续型随机变量X有概率分布函数$F(x)$，则$F(x)$的导数$f(x) = F'(x)$称为X的概率密度函数。
   - **性质：**
     - 对于所有的$-\infty < x < +\infty$，有$f(x) \geq 0$；
     - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$；
     - 对于任意的$-\infty < a \leq b < +\infty$，有$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.

- **注：**
  - 对于任意的$-\infty < x < +\infty$，有$P(X=x)=\int_x^x f(u)du=0.$
  - 假设有总共一个单位的质量连续地分布在$a \le x \le b$上，那么$f(x)$表示在点x的质量密度且$\int_c^d f(x)dx$表示在区间$[c,d]$上的全部质量。

3. **概率分布函数**：设X为一连续型随机变量，则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du, \quad -\infty < x < +\infty$$

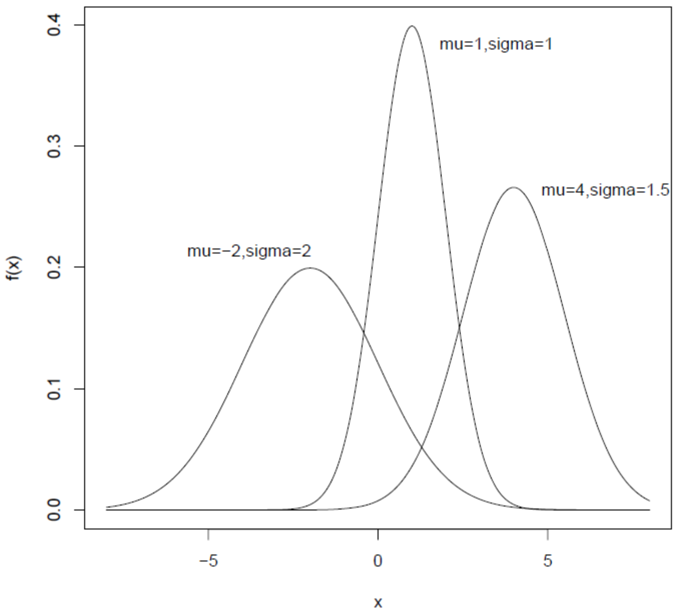
4. **正态分布（*Normal distribution*）：**

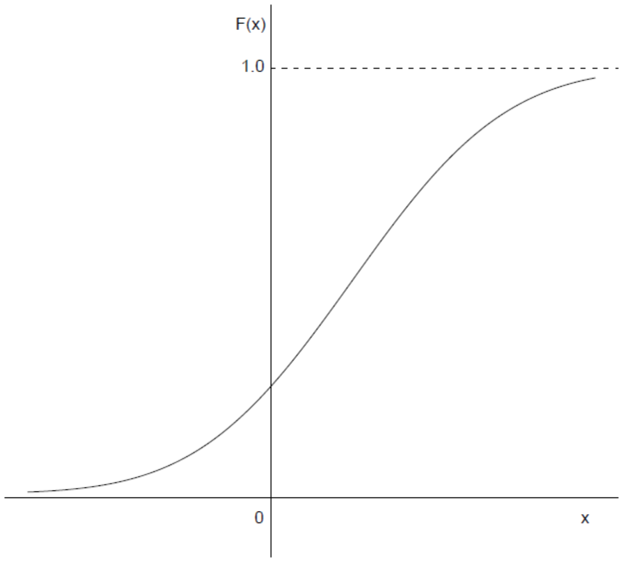
- **定义**：如果一个随机变量具有概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

  其中$-\infty < \mu < +\infty,\ \sigma^2 > 0$，则称$X$为正态随机变量，并记为$X \sim N(\mu,\sigma^2)$.特别地，$\mu=0,\sigma=1$的正态分布成为标准正态分布。用$\Phi(x)$和$\phi(x)$表示标准正态分布$N(0,1)$的分布函数和密度函数。

- **性质：**
  - 正态分布的密度函数是以$x=\mu$为对称轴的对称函数，μ称为位置参数，密度函数在$x=\mu$处达到最大值，在$(-\infty,\mu)$和$(\mu,+\infty)$内严格单调。
  - σ的大小决定了密度函数的陡峭程度，通常称σ为正态分布的形状参数。
  - 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y=(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$.
  - $\Phi(-k)=1-\Phi(k)$
- **图像（密度和分布函数图）：**

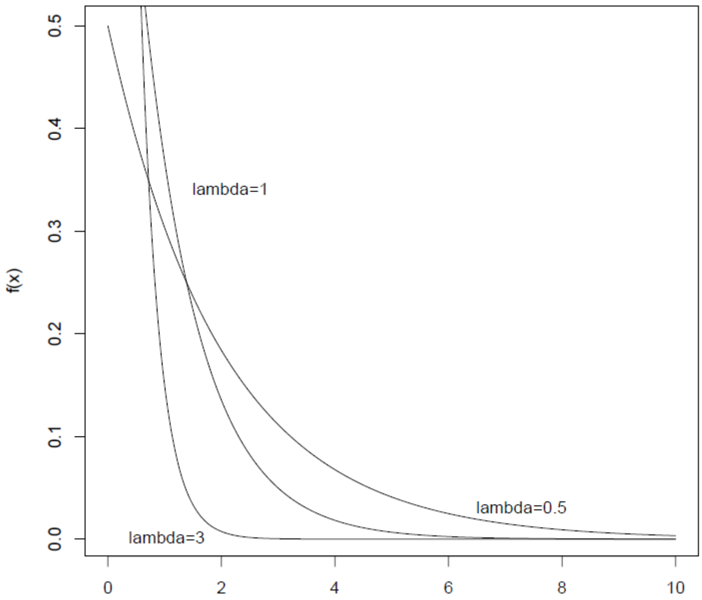




4. **指数分布（*Exponential distribution*）：**
   - **定义：**若随机变量X具有概率密度函数
     $$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}=\lambda e^{-\lambda x}I_{(0,\infty)}(x)$$
     其中$\lambda>0$为常数，则称X服从参数为λ的指数分布。
   - **概率分布函数：**$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}=(1-e^{-\lambda x})I_{(0,\infty)}(x)$
   - **性质：**
     - 无后效性，即无老化，要来描述寿命（如元件等）的分布。

       证明：

       "无老化"就是说在时刻x正常工作的条件下，其失效率总保持为某个常数$\lambda>0$，与x无关，可表示
       $$P(x\leq X\leq x+h|X>x)/h=\lambda\quad(h\rightarrow 0)$$
       证：
       $$\begin{aligned}&\lim_{h\rightarrow 0}\frac{P(x\leq X\leq x+h|X>x)}{h}\\=&\lim_{h\rightarrow 0}\frac{P(x\leq X\leq x+h,X>x)}{P(X>x)h}\\=&\lim_{h\rightarrow 0}\frac{P(x<X\leq x+h)}{P(X>x)h}\\=&\lim_{h\rightarrow 0}\frac{-e^{-\lambda t}|_x^{x+h}}{-e^{-\lambda t}|_x^{\infty}h}\\=&\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x-\lambda h}}{e^{-\lambda x}h}\\=&\lim_{h\rightarrow 0}\frac{1-\frac{1}{e^{xh}}}{h}\\=&\lim_{h\rightarrow 0}\lambda e^{-\lambda h}\\=&\lambda\end{aligned}$$
     - λ为失效率，失效率越高，平均寿命就越小。
   - **图像（密度函数）：**



5. **均匀分布（*Uniform distribution*）：**
   - **定义**：设$a < b$，如果分布$F(x)$具有密度函数
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{其它} \end{cases} = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$
   则该分布为区间$[a, b]$上的均匀分布。
   - **概率分布函数**：$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$
   - **性质**：$\forall R(c,d) \subset R(a,b),\ P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}$

2.4 多维随机变量（随机向量）

1. **随机向量**：设$X = \{X_1, \dots, X_n\}$.如果每个X_i都是一个随机变量，$i = 1, \dots, n$，则称X为n维随机变量或者随机向量。
2. **离散型随机向量的分布**：如果每一个X_i都是一个离散型随机变量，$i = 1, \dots, n$，则称$X = \{X_1, \dots, X_n\}$为一n维离散型随机变量。设X_i的所有可能取值为$\{a_{i1}, ai2, \dots\}, \quad i = 1, \dots, n$，则称
   $$p(j_1, \dots, j_n) = P(X_1 = a_{1j_1}, \dots, X_n = a_{nj_n}), \quad j_1, \dots, j_n = 1, 2, \dots$$
   为n维随机变量X的概率函数，这也是其联合分布。

   其具有下列性质：
   - $p(j_1, \dots, j_n) \ge 0, \quad j_i = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n;$
   - $\sum_{j_1, \dots, j_n} p(j_1, \dots, j_n) = 1.$

   > **注**：对于高维离散型随机变量，一般不使用分布函数

3. **多项式分布**
   - **定义**：设$A_1, A_2, \dots, A_n$是某一试验之下的完备事件群，分别以$p_1, p_2, \dots, p_n$记事件$A_1, A_2, \dots, A_n$的概率，则$p_i \ge 0, \quad p_1 + \dots + p_n = 1$.将试验独立地重复$N$次，以$X_i$记在这$N$次试验中事件$A_i$出现的次数$(i = 1, \dots, n)$，则$X = (X_1, \dots, X_n)$为一个$n$维随机向量。该分布记作$M(N; p_1, \dots, p_n)$.
   - **概率分布函数**：$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \frac{N!}{k_1!k_2!\dots k_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots . p_n^{k_n}$
4. **连续型随机向量的分布**：$X = \{X_1, \dots, X_n\}$为n维连续型随机变量，如果存在$\mathbb{R}^n$上的非负函数$f(x_1, \dots, x_n)$，使得对任意的$-\infty < a_1 \le b_1 < +\infty, \dots, -\infty < a_n \le b_n < +\infty$，有

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \dots, a_n \le X_n \le b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

则称为f为X的概率密度函数。有

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \dots, a_n \le X_n \le b_n) = F(x_1, \dots, x_n)$$

则称为F为X的（联合）分布函数。其中分布函数$F(X_1, \dots, X_n)$具有下述性质：

- $F(x_1, \dots, x_n)$单调非降；
- 对任意的$1 \le j \le n$，有$\lim_{x_j \to -\infty F(x_1, \dots, x_n)} = 0$；
- $\lim_{x_1 \to \infty, \dots, x_n \to \infty} F(x_1, \dots, x_n) = 1$

5. **边缘分布**：因为X的每个分量X_i都是一维随机变量，故它们都有各自的分布F_i $(i = 1, \dots, n)$，这些都是一维分布，称为随机向量X或其分布F的边缘分布。

- **离散型随机向量**

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	行和
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\vdots$	p_{nm}	$p_{\cdot m}$
列和	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{n\cdot}$	1

行和与列和就是边缘分布。即固定某个x_i，即可计算边缘分布，故有

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_j^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j^m p_{ij} = p_{i\cdot}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_Y(y_i) = P(Y = y_i) = \sum_i^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i^m p_{ij} = p_{j\cdot}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- **连续型随机向量**

为求某分量X_i的概率密度函数，只需把$f(x_1, \dots, x_n)$中的x_i固定，然后对$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$在$-\infty$到$\infty$之间做定积分，如

$$(X, Y) \sim f(x, y)$$

$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv$$

$$f_Y(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du$$

> **注**：二维正态分布$N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$的边缘分布密度分别是一维正态分布$N(a, \sigma_1^2)$和$N(b, \sigma_2^2)$。因此联合分布可推边缘分布，而边缘分布不可推联合分布。

2.5 条件分布和随机变量的独立性

1. **离散型随机变量的条件分布**：设(X, Y)为二维离散型随机变量，对于给定的事件$\{Y = y_j\}$，其概率$P(Y = y_j) > 0$，则称

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

为在给定$Y = y_j$的条件下X的条件分布律。类似的，称

$$P(Y = y_i | X = x_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

为在给定$X=x_j$的条件下Y的条件分布律。

2. **连续型随机变量的条件分布**：设(X,Y)为二维连续型随机变量，对于给定条件$Y=y$下的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad f_Y(y)>0.$$

类似的，在$X=x$下的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad f_X(x)>0.$$

> 二维正态分布$\rho=0$时，其联合密度分布等于条件密度分布的乘积。

3. **随机变量的独立性**

称随机变量$X_1,\dots,X_n$相互独立，

- **离散型随机变量**

  则联合分布律等于各自的边缘分布律的乘积，即

  $$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=P(X_1=x_1)\dots P(X_n=x_n)$$

  其中$(x_1,\dots x_n)$为$(X_1,\dots,X_n)$的值域中的任意一点。

- **连续型随机变量**

  则联合密度等于各自的边缘密度的乘积，即

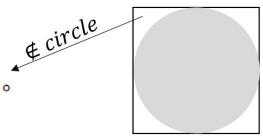
  $$f(x_1,\dots,x_n)=f_1(x_1)\dots f_n(x_n),\quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

- **更具一般地**

  设$X_1,\dots,X_n$为n个随机变量，如果它们的联合分布函数等于各自边缘分布函数的乘积，即

  $$F(X_1,\dots,x_n)=F_1(x_1)\dots F_n(x_n),\quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

  则称随机变量$X_1,\dots,X_n$相互独立。

> **一些重要的结论**
>
> **例 2.6.4.** 如果随机变量$X_1,\cdots,X_n$相互独立，则容易证明其中任何一部分随机变量也相互独立．然而一般来说，仅由某一部分独立却无法推出$X_1,\cdots,X_n$相互独立．如见下例：
>
> **例 2.6.5.** 若ξ,η相互独立,都服从-1和1这两点上的等可能分布，而$\zeta=\xi\eta$。则ζ,ξ,η两两独立但不相互独立。
>
> **例 2.6.6.** 设$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X$与$Y$相互独立的充要条件是$\rho=0$。
>
> **例 2.6.7.** 设(X,Y)服从矩形$D=[a,b]\times[c,d]$上的均匀分布，则X与Y相互独立。
>
> **例 2.6.8.** 设(X,Y)服从单位圆上的均匀分布，则X与Y不独立。
>
> 
>
>
> **例 2.6.9.** 设有n个事件：$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$，对于每个事件A_i，定义：$X_i=I_{A_i}$ (A_i的示性函数), $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则可证明：$A_1\ ,A_2,\ \cdots,\ A_n$ 独立$\Longleftrightarrow X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 独立。

2.6 随机变量的函数的概率分布

最简单的情形，是由一维随机变量X的概率分布去求其一给定函数$Y=g(X)$的分布。较为常见的，是由$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的分布去求$Y=g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的分布。更一般地，由$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的分布去求$(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)$的分布，其中
$Y_i=g_i(X_1,X_2,\ldots,X_n),\quad i=1,2,\ldots,m.$

1. **离散型分布的情形：**设X的分布律为$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\ldots$

   $g:R\to R$，令$Y=g(X)$，则Y的分布律为

   $$P(Y=y_j)=P(g(X)=y_j)=\sum_{x_i:g(x_i)=y_j}P(X=x_i)=\sum_{i:g(x_i)=y_j}p_i$$

   即把$Y=g(X_1,\ldots,X_n)$可以取的不同值找出来，把与某个值相应的全部$(X_1,\ldots,X_n)$值的概率加起来，即得Y取这个值的概率。

2. **连续型分布的情形**

   - **一个变量的情况**

     设X有密度函数$f(x)$.设$Y=g(x)$，g是一个严格单调的函数，即当$x_1<x_2$时，必有$g(x_1)<g(x_2)$或当$x_1>x_2$时，必有$g(x_1)>g(x_2)$.又设g的导数g'存在。由于g的严格单调性，其反函数$X=h(Y)$存在，且h的导数h'也存在。有$g(X)$的密度函数$l(y)$为

     $$l(y)=f(h(y))|h'(y)|.$$

   - **多个变量的情形**

     以两个为例，设(X_1,X_2)的密度函数$f(x_1,x_2)$，Y_1,Y_2都是(X_1,X_2)的函数：

     $$Y_1=g_1(X_1,X_2),\quad Y_2=g_2(X_1,X_2),$$

     要求(Y_1,Y_2)的概率密度函数$l(y_1,y_2)$.假定(X_1,X_2)到(Y_1,Y_2)的一一对应变换有逆变换：

     $$X_1=h_1(Y_1,Y_2),\quad X_2=h_2(Y_1,Y_2)$$

     即雅可比行列式

     $$J(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\partial h_1/\partial y_1 & \partial h_1/\partial y_2\\ \partial h_2/\partial y_1 & \partial h_2/\partial y_2\end{vmatrix}$$

     不为0.在$(Y1,Y2)$的平面上任取一个区域A，变换后到(X_1,X_2)平面的区域B，则有

     $$P((Y_1,Y_2)\in A)=P((X_1,X_2)\in B)=\iint_B f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

     $$P((Y_1,Y_2)\in A)=\iint_A f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))|J(y_1,y_2)|dy_1dy_2$$

   - **随机变量和的密度函数**

     设(X_1,X_2)的联合密度函数为$f(x_1,x_2)$，$Y=X_1+X_2$的密度函数：

     - 一般的，$l(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,y-x_1)dx_1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y-x)dx.$
     - 若X_1,X_2独立，则$l(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(y-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(y-x)f_2(x)dx.$

     > 两个独立的正态变量的和仍服从正态分布，且有关的参数相加，其逆命题也成立。

   - **随机变量商的密度函数** 设(X_1,X_2)的联合密度函数为$f(x_1,x_2)$，$Y=X_1/X_2$的密度函数：

     - 一般的，$l(y)=\int_0^{\infty}x_1f(x_1,x_1y)dx_1.$
     - 若X_1,X_2独立，则$l(y)=\int_0^{\infty}x_1f_1(x_1)f_2(x_1y)dx_1.$

- **统计学三大分布**

  引入两个重要的特殊函数：

  $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\quad(x>0)$ 和 $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\quad(x>0,y>0)$

  > 其中，$\Gamma(1)=1,\quad\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\quad\Gamma(n)=(n-1)!$
  >
  > $B(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

- **卡方分布，记作χ_n^2**

  密度函数：$k_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}2^{n/2})} e^{-x/2} x^{(n-2)/2} I_{(0,\infty)}(x)$

  性质：1. 设X_1, X_2独立，$X_1 \sim \chi_m^2, X_2 \sim \chi_n^2$，则$X_1 + X_2 \sim \chi_{m+n}^2$

  2. 若$X_1, \ldots, X_n$独立，且都服从指数分布，则$X = 2\lambda(X_1 + \ldots + X_n) \sim \chi_{2n}^2$

- **t分布，记作t_n**

  设X_1，X_2独立，$X_1 \sim \chi_n^2, X_2 \sim N(0,1)$，而$Y = X_2/\sqrt{X_1/n}$，则$Y \sim t_n$.

  密度函数：$t_n(y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1 + \frac{y^2}{n})^{(\frac{n+1}{2})}$

  性质：密度函数关于原点对称，其图形与正态分布$N(0,1)$的密度函数的图形相似。

- **F分布，记作F_{mn}**

  设X_1, X_2独立，$X_1 \sim \chi_n^2, X_2 \sim \chi_m^2$，而$Y = m^{-1}X_2/(n^{-1}X_1)$，则$Y \sim F_{mn}$

  密度函数：$f_{mn}(y) = m^{m/2} n^{n/2} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} y^{m/2-1}(my+n)^{-(m+n)/2} \quad (y > 0)$

> **三大分布的几个重要性质**
>
> 1. 设$X_1, \ldots, X_n$独立同分布，有公共的正态分布$N(\mu, \sigma^2)$.记$\bar{X} = (X_1 + \ldots + X_n), S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar(X))^2/(n-1)$.则$(n-1)S^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$.
> 2. 设$X_1, \ldots, X_n$的假定同1，则$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}$
> 3. 设$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$独立，$X_i$各有分布$N(\mu 1, \sigma_1^2)$，$Y_j$各有分布$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则
>
> $$[\sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2/(\sigma_2^2(m-1))]/[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(\sigma_1^2(n-1))] \sim F_{m-1,n-1}$$
>
> 若$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，则
>
> $$\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}[(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)]/[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2]^{1/2} \sim t_{n+m-2}$$

三 随机变量的数字特征

3.1 数学期望（均值）与中位数

1. **数学期望**
   - **定义：**设随机变量X只取有限个可能值$a_1, \ldots, a_m$，其概率分布为$P(X = a_i) = p_i \ (i = 1, \ldots, m)$.则$X$的数学期望记作$E(X)^*$或$E(X)$，定义为$E(X) = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_m p_m$.数学期望也常称为"均值"，即指以概率为权的加权平均。
   - **离散型变量的数学期望：**$E(X) = \sum_{i=1}^\infty a_i p_i$.（当级数绝对收敛，即$\sum_{i=1}^\infty |a_i| p_i < \infty$）
   - **连续型变量的数学期望：**$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) dx$.（当$\int_{-\infty}^\infty |x| f(x) dx < \infty$）
   - **常见分布的数学期望：**
     - **泊松分布：**$E(X) = \lambda$.
     - **二项分布：**$E(X) = np$.
     - **均匀分布：**$E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$.
     - **指数分布：**$E(X) = \lambda^{-1}$.
     - **正态分布：**$E(X) = \mu$.
     - **卡方分布：**$E(X) = n$.

- t**分布**：$E(X)=0 \quad (n>1)$.

- F**分布**：$E(X)=n/(n-2) \quad (n>2)$.
- **性质**：
  - 若干个随机变量之和的期望等于各变量的期望值和，即
$$E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n).$$
  - 若干个*独立*随机变量之积的期望等于各变量的期望之积，即
$$E(X_1X_2...X_n)=E(X_1)E(X_2)...E(X_n).$$
  - 设随机变量X为离散型，有分布$P(X=a_i)=p_i(i=1,2,...)$；或者为连续型，有概率密度函数$f(x)$.则
$$E(g(x))=\sum_i g(a_i)p_i \quad (\text{当}\sum_i |g(a_i)|p_i<\infty\text{时})$$
或
$$E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad (\text{当}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)dx<\infty\text{时})$$
  - 若c为常数，则$E(cX)=cE(X)$.

2. **条件数学期望**
   - **定义**：随机变量Y的条件期望就是它在给定的某种附加条件下的数学期望。$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy$.它反映了随着$X$取值$x$的变化$Y$的平均变化的情况如何。在统计上，常把条件期望$E(Y|x)$作为$x$的函数，称为$Y$对$X$的回归函数。
   - **性质**：
     - $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} E(Y|x)f_X(x)dx$.
     - $E(Y)=E[E(Y|X)]$.
3. **中位数**
   - **定义**：设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$，则满足条件$P(X\le m)=F(m)=1/2$的数m称为X或分布F的中位数。即m这个点把X的分布从概率上一切两半。
   - **性质**：
     - 与期望值相比，中位数受特大值或特小值影响很小，而期望不然。
     - 中位数可能不唯一，且在某些离散型情况下，中位数不能达到一分两半的效果。

3.2 方差与矩

1. **方差与标准差**
   - **定义**：设X为随机变量，分布为F，则$Var(X)=E(X-EX)^2$称为X（或分布F）的方差，其平方根$\sqrt{Var(X)}$（取正值）称为X（或分布F）的标准差。
   - **常见分布的方差**：
     - **泊松分布**：$Var(X)=\lambda$.
     - **二项分布**：$Var(X)=np(1-p)$.
     - **正态分布**：$Var(X)=\sigma^2$.
     - **指数分布**：$Var(X)=1/\lambda^2$.
     - **均匀分布**：$Var(X)=(b-a)^2/12$.
     - **卡方分布**：$Var(X)=2n$.
     - t**分布**：$Var(X)=n/(n-2)$.
     - F**分布**：$Var(X)=2n^2(m+n-2)/[m(n-2)^2(n-4)] \quad (n>4)$.
   - **性质**：
     - $Var(X)=E(X^2)-(EX)^2$.
     - 常数的方差为0，即$Var(c)=0$.

- 若c为常数，则$Var(X+c)=Var(X)$.
- 若c为常数，则$Var(cX)=c^2Var(X)$.
- **独立**随机变量和的方差等于各变量方差和，即 $Var(X_1+...+X_n)=Var(X_1)+...+Var(X_n)$.

2. **矩**
   - **定义**：设X为随机变量，c为常数，k为正整数。则量$E[(X-c)^k]$称为X关于c点的k阶矩。特别地，有两种重要的情况：

     (1) $c=0$.这时$a_k=E(X^k)$称为X的k阶原点矩。

     (2)$c=E(X)$.这时$\mu_k=E[(X-EX)^k]$称为X的k阶中心矩。

     一阶原点矩就是期望，一阶中心距$\mu_1=0$，二阶中心距μ_2就是X的方差$Var(X)$.
   - **两种重要应用**：
     - **偏度系数**：$\beta_1=\mu_3/\mu_2^{3/2}$.衡量概率分布函数$f(x)$是否关于均值对称。如果$\beta>0$，则称分布为正偏或右偏；如果$\beta<0$，则称分布为负偏或左偏；如果$\beta=0$，则对称。（注：$\mu_2^{3/2}$为标准差的三次方，可将$\mu_3$缩放到一次因次）
     - **峰度系数**：$\beta_2=\mu_4/\mu_2^2$.衡量概率分布函数$f(x)$在均值附近的陡峭程度。若X有正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$\beta_2=3$.(注：μ_2^2为标准差的四次方，将μ_4缩放到一次因次。为了迁就正态分布，也常定义μ_4/μ_2^2-3为峰度系数，以使正态分布的峰度系数为0)

> Author：钱小z
>
> Email：qz_gis@163.com
>
> Bio：GISer，Spatiotemporal data mining
>
> GitHub：QianXzhen