概率论与数理统计笔记

什么是统计学？

人生，是从不充分的证据开始，引出完美结论的一种艺术。——Samuel Bulter

如果我们不在同一时期，把理解了的科学知识变为我们日常生活的一部分，科学家降不可能提高他们互相拥有的知识。——J.D.Bernal

与人类有关的事实，可以由数量来表示，并且经过大量的积累重复可以导出一般规律。——英国皇家统计学会

一 事件与概率

1.1 随机试验和随机事件

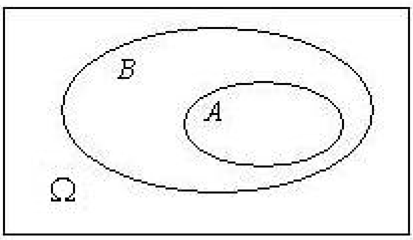
1. **随机现象**：自然界中的客观现象，当人们观测它时，所得结果不能预先确定，而仅仅是多种可能结果之一。
2. **随机试验**：随机现象的实现和对它某个特征的观测。
3. **基本事件**：随机试验中的每个单一结果，犹如分子中的原子，在化学反应中不可再分。

   e.g. 硬币抛3次，有8种结果：正正正、正正反、正反正......这8种可能结果的每一个都是基本事件。
4. **随机事件**：简称事件，在随机试验中我们所关心的可能出现的各种结果，它由一个或若干个基本事件组成。通常用英文大写字母表示或{一种叙述}来表示。
5. **样本空间**：随机试验中所有基本事件所构成的集合，通常用Ω或S表示。

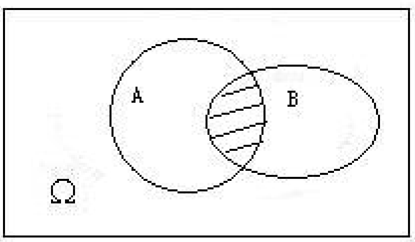
   e.g. 掷一枚骰子，观察出现的点数，则$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
6. **必然事件（Ω）**：在试验中一定会发生的事件。
7. **不可能事件（ϕ）**：在试验中不可能发生的事件。

1.2 事件的运算

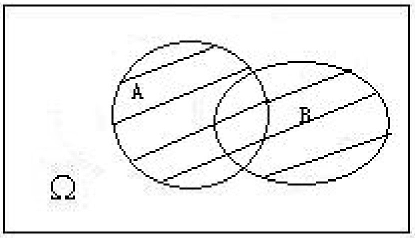
1. **子事件$A\subset B$**：事件A发生蕴含时间B一定发生，则时间A成为事件B的子事件。若$A\subset B$，且$B\subset A$，则称时间A与事件B相等，记为$A=B$.



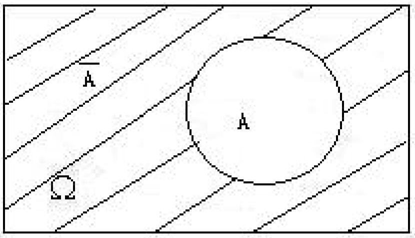
2. **事件的和（$A\cup B$）**：事件A和事件B中至少有一个发生称为事件A和事件B的和。



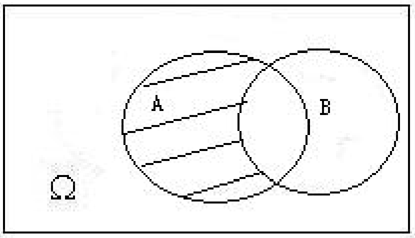
3. **事件的积（$A\cap B$）**：事件A和事件B同时发生称为A和事件B的积。如果$A\cap B=\phi$，则称A和B不相容，即事件A和B不能同时发生。



4. **对立事件A^c（或$\overline{A}$）**：A不发生这一事件称为事件A的对立事件（或余事件）。



5. **事件A和事件B的差（$A-B$）**：事件A发生而事件B不发生这一事件称为事件A和事件B的差，或等价于AB^c.



6. ***De Morgan*对偶法则及其推广**

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

上式可推广到*n*个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

1.3 概率的定义

概率是随机事件发生可能性大小的数字表征，其值在0和1之间，即概率是事件的函数。概率有以下定义：

1.3.1 古典概率

设一个试验有*N*个等可能的结果，而事件E恰包含其中的M个结果，则事件E的概率，记为$P(E)$，定义为

$$P(E)=M/N$$

或

$$P(E) = \#(M)/\#(N),$$

其中，$\#(M)$为事件M中基本事件的个数。

古典概型有**两个条件**：

- 有限性，试验结果只有有限个（记为*n*），
- 等可能性，每个基本时间发生的可能性相同。

> **注：**古典概率可引申出“几何概率”。

1.3.2 概率的统计定义

古典概率的两个条件往往不能满足，但可以将事件的随机试验独立反复做*n*次（*Bernouli*试验），设事件A发生了n_A次，称比值$\frac{n_A}{n}$为事件A发生的频率，当*n*越来越大时，频率会在某个值*p*附近波动，且波动越来越小，这个值*p*就定义为事件A的概率。该学派为频率派。

> **注：**不能写为$lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} = p$，因为$\frac{n_A}{n}$不是*n*的函数。

1.3.3 主观概率

主观概率可以理解为一种心态或倾向性。究其根由，大抵有二：一是根据其经验和知识，二是根据其利害关系。该学派在金融和管理有大量的应用，这一学派成为*Bayes*学派。

1.3.4 概率的公理化定义

对概率运算规定一些简单的基本法则：

1. 设A是随机事件，则$0 \le P(A) \le 1$,
2. 设Ω为必然事件，则$P(\Omega) = 1$,
3. 若事件A和B不相容，则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
   可推广至无穷：$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

> **注：**
>
> 1. 一般情况下，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，
> $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
> 2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
> 3. $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

1.4 古典概率计算

1.4.1 排列组合

- **选排列：**从*n*个不同元素中取*r*个不同取法（$1 \le r \le n$），$P_r^n = n(n-1)\dots(n-r+1)$.
- **重复排列：**从*n*个不同元素中可重复地取*r*个不同取法（$1 \le r \le n$），$P_r^n = n^r$.
- **组合：**同选排列，但不考虑次序，$\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!}$.

> **注：**
>
> 1. 排列英文为*Permutation*，组合英文为*Combination*.
> 2. $0!$为1。当*r*不是非负整数时，记号$r!$没有意义.
> 3. 一些书中将组合写成C_n^r或C_r^n，更通用的是$\binom{n}{r}$.

1.4.2 其他公式

- 组合系数$\binom{n}{r}$又常称为二项式系数

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{r}a^i b^{n-1}$$

- *n*个相异物件分成*k*堆，各堆物件数分为$r_1,\dots,r_k$的方法是

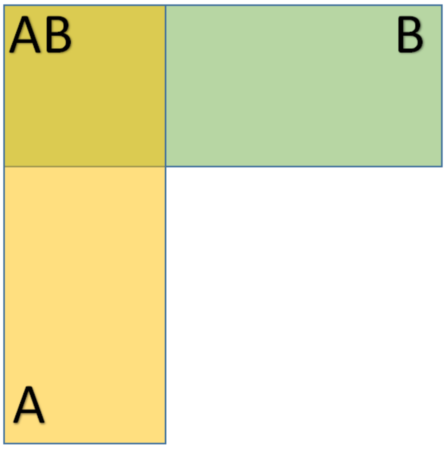
$$n!/(r_1!\dots r_k!).$$

1.5 条件概率

条件概率就是知道了**一定信息**下得到的随机事件的概率。设事件A和B是随机试验Ω中的两个事件，$P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B发生条件下事件A发生的条件概率，可用图形表示：



> **注：**事实上，我们所考虑的概率都是在一定条件下计算的，因为随机试验就是在一定条件下进行的。

1.5.1 条件概率性质

给定A发生，$P(A)>0$：

- $0\le P(B|A)\le 1$
- $0\le P(\Omega|A)=1$
- 若$B_1\cap B_2=\phi_1$，则$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)$，可推广至无穷。

1.5.2 乘法定理

由$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow P(AB)=P(A|B)P(B)$，可推广至

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1\dots A_{n-1})$$

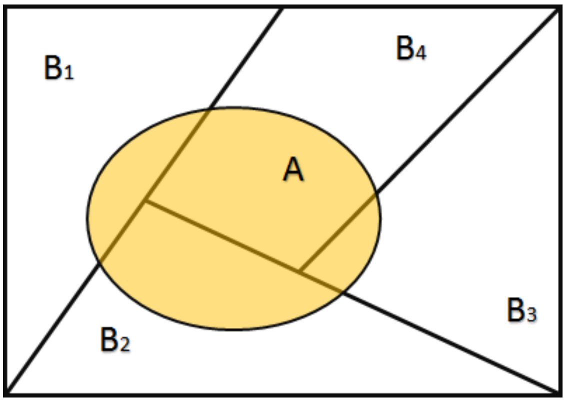
> **注：** 右边看似麻烦，其实容易算，左边看似简单，但是难算。

1.6 全概率

设$B_1,B_2,\dots B_n$是样本空间Ω中的**两两不相容**的一组事件，即$B_iB_j=\phi$，$i\ne j$，且满足$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，则称$B_1,B_2,\dots B_n$是样本空间$\Omega$的一个分割（又称为**完备事件群**，英文为*partition*）。

设$\{B_1,B_2,\ldots B_n\}$是样本空间Ω的一个分割，A为Ω的一个事件，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$



推导：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap\Omega)\\&=P(A\cup\sum_{i=1}^{n}B_i)\\&=P(\sum_{i=1}^{n}AB_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)\end{aligned}$$

> **注：**有时不易直接计算事件A的概率，但是在每个B_i上A的条件概率容易求出

1.7 *Bayes*公式

设$\{B_1,B_2,\ldots B_n\}$是样本空间的一个分割，A为Ω中的一个事件，$P(B_i)>0$，$i=1,2,\ldots,n$，$P(A)>0$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

> **注：**当有因果关系互换时必须用*Bayes*公式。

1.8 事件的独立性

设A，B是随机试验中的两个事件，若满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A和B相互独立。判断事件的独立，应该是**从实际出发**，如果能够判断事件B的发生与否对事件A的发生与否不产生影响，则事件A，B即为独立。

设$\widetilde{A}$表示事件A发生和不发生之一，$\widetilde{B}$表示事件B发生和不发生之一。有独立性的定义可推至$P(\widetilde{A}\widetilde{B})=P(\widetilde{A})P(\widetilde{B})$（一共有四个等式）。可推广至：

$$P(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\ldots\widetilde{A}_n)=P(\widetilde{A}_1)\ldots P(\widetilde{A}_n)$$

上面有2^n个等式。

> **注：**独立（*independent*）和不相容（*exclusive*）是不同的两个概念，前者有公共部分，后者没有公共部分，独立一定相容。

1.9 重要公式与结论

$$(1)\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$(2)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$(3)\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$(4)\ P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

$$(5)\ P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB), P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$$

$$(6)\ P(\overline{A}_1|B) = 1 - P(A_1|B), P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$$
$$P(A_1A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$$

$$(7)\ 若A_1, A_2, \ldots A_n相独立，则P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

二 随机变量及其分布

2.1 随机变量的概念

1. **随机变量（*Random variable*）：**值随机会而定的变量，研究随机试验的一串事件。可按维数分为一维、二维至多维随机变量。按性质可分为**离散型随机变量**以及**连续型随机变量**。
2. **分布（*Distribution*）：**事件之间的联系，用来计算概率。
3. **示性函数（*Indication function*）：**$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & 反之 \end{cases}$，事件$A$有随机变量$I_A$表示出来，$I_A$称为事件$A$的示性函数。

2.2 离散型随机变量及其分布

1. **离散型随机变量：**设X为一随机变量，如果X**只取有限个或可数个值**，则称X为一个（一维）离散型随机变量。
2. **概率函数：**设X为一随机变量，其全部可能值为$\{a_1, a_2, \ldots\}$，则$p_i = P(X = a_i), i = 1, 2, \ldots$称为$X$的概率函数。
3. **概率分布：**离散型随机变量的概率分布可以用分布表来表示：

可能值	a_1	a_2	...	a_i	...
概率	p_1	p_2	...	p_i	...

4. **概率分布函数：**
    - **定义：**设X为一随机变量，则函数

$$F(X) = P(X \leq x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

称为X的分布函数。（**注：这里并未限定X为离散型的，它对任何随机变量都有定义。**）

- **性质：**

   - $F(x)$是单调非降的：当$x_1 < x_2$时，有$F(x_1) \leq F(X_2)$.
   - 当$x \to \infty$时，$F(x) \to 1$；当$x \to -\infty$时，$F(x) \to 0$.
- **离散型随机变量分布函数：**

  对于离散型随机变量，
  $F(X) = P(X \leq x) = \sum_{\{i|a_i \leq x\}} p_i, \quad p_i = P(X = i) = F(i) - F(i-1)$。

5. **二项分布（*Bionomial distribution*）**：
   - **定义：**设某事件A在一次试验中发生的概率为p，先把试验独立地重复n次，以X记A在这n次试验中发生的次数，则X取值$0, 1, \dots, n$，且有

     $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

     称X服从二项分布，记为$X \sim B(n, p)$.
   - **服从二项分布的条件：**1. 各次试验的条件是稳定的，即事件A的概率p在各次试验中保持不变；2. 各次试验的独立性
6. **泊松分布（*Poisson distribution*）：**
   - **定义：**设随机变量X的概率分布为

     $$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$$

     则称X服从参数为λ的*Poisson*分布，并记$X \sim P(\lambda)$.
   - **特点：**
     - 描述稀有事件发生概率
     - 作为二项分布的近似。若$X \sim B(n, p)$，其中n很大，p很小，而$np = \lambda$不太大时（一般$n > 30, np \leq 5$），则X的分布接近泊松分布$P(\lambda)$.

       推导：

       若事件$A \sim B(n, p)$，且n很大，p很小，而$np = \lambda$不太大时，设$\lambda = np$，

       $$\begin{aligned} P(X = i) &= \lim_{n \to \infty} \binom{n}{i} (\frac{\lambda}{n})^i (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-i} \\ &= \lambda^i \lim_{n \to \infty} \frac{\binom{n}{i}}{n^i} \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-i} \\ &= \lambda^i e^{-\lambda} \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{i! n^i} \\ &= \lambda^i e^{-\lambda} \lim_{n \to \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{i-1}{n})}{i!} \\ &= \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

2.3 连续型随机变量及其分布

1. **连续型随机变量：**设X为一随机变量，如果X**不仅有无限个而且有不可数个值**，则称X为一个连续型随机变量。
2. **概率密度函数：**
   - **定义：**设连续型随机变量X有概率分布函数$F(x)$，则$F(x)$的导数$f(x) = F'(x)$称为X的概率密度函数。
   - **性质：**
     - 对于所有的$-\infty < x < +\infty$，有$f(x) \geq 0$；
     - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$；
     - 对于任意的$-\infty < a \leq b < +\infty$，有$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.

- **注：**
  - 对于任意的$-\infty < x < +\infty$，有$P(X=x)=\int_x^x f(u)du=0.$
  - 假设有总共一个单位的质量连续地分布在$a \le x \le b$上，那么$f(x)$表示在点x的质量密度且$\int_c^d f(x)dx$表示在区间$[c,d]$上的全部质量。

3. **概率分布函数**：设X为一连续型随机变量，则

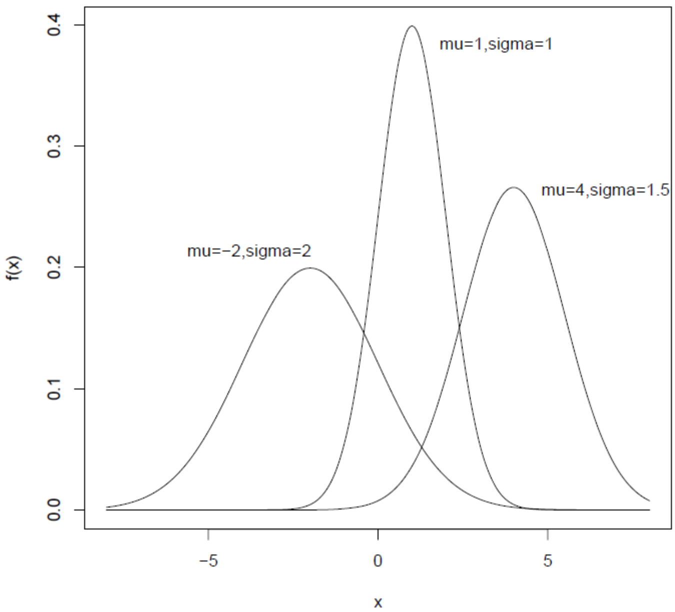
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du, \quad -\infty < x < +\infty$$

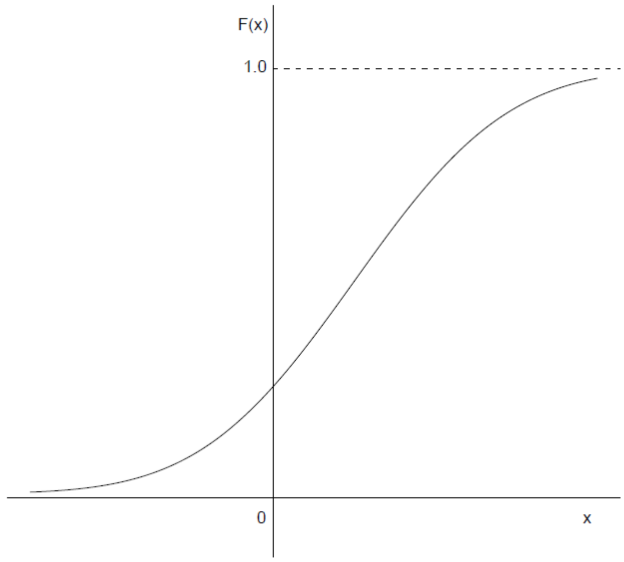
4. **正态分布（*Normal distribution*）：**
   - **定义**：如果一个随机变量具有概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

   其中$-\infty < \mu < +\infty,\ \sigma^2 > 0$，则称$X$为正态随机变量，并记为$X \sim N(\mu,\sigma^2)$.特别地，$\mu=0,\sigma=1$的正态分布成为标准正态分布。用$\Phi(x)$和$\phi(x)$表示标准正态分布$N(0,1)$的分布函数和密度函数。

   - **性质：**
     - 正态分布的密度函数是以$x=\mu$为对称轴的对称函数，μ称为位置参数，密度函数在$x=\mu$处达到最大值，在$(-\infty,\mu)$和$(\mu,+\infty)$内严格单调。
     - σ的大小决定了密度函数的陡峭程度，通常称σ为正态分布的形状参数。
     - 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y=(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$.
     - $\Phi(-k)=1-\Phi(k)$
   - **图像（密度和分布函数图）：**





4. **指数分布（*Exponential distribution*）：**
   - **定义：**若随机变量X具有概率密度函数

     $$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}=\lambda e^{-\lambda x}I_{(0,\infty)}(x)$$

     其中$\lambda>0$为常数，则称X服从参数为λ的指数分布。
   - **概率分布函数：**$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}=(1-e^{-\lambda x})I_{(0,\infty)}(x)$
   - **性质：**
     - 无后效性，即无老化，要来描述寿命（如元件等）的分布。

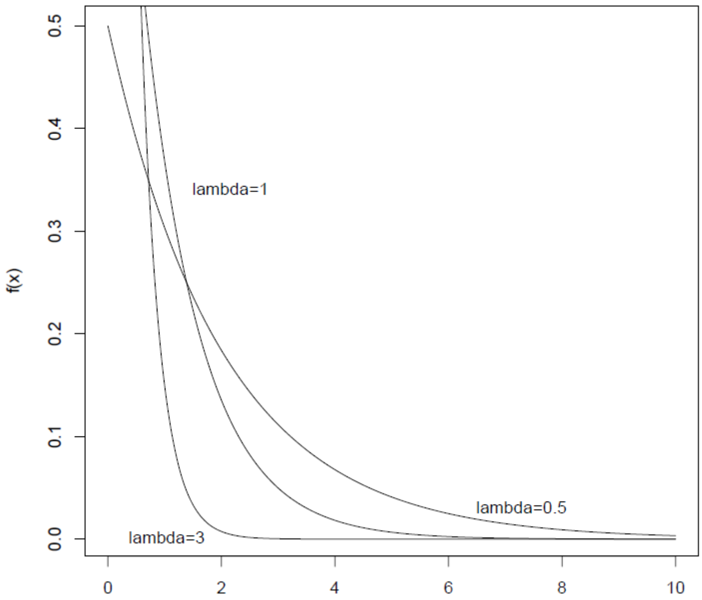
       证明：

       "无老化"就是说在时刻x正常工作的条件下，其失效率总保持为某个常数$\lambda>0$，与x无关，可表示

       $$P(x\le X\le x+h|X>x)/h=\lambda\quad(h\to 0)$$

       证：

       $$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{P(x\le X\le x+h|X>x)}{h}\\=&\lim_{h\to 0}\frac{P(x\le X\le x+h,X>x)}{P(X>x)h}\\=&\lim_{h\to 0}\frac{P(x<X\le x+h)}{P(X>x)h}\\=&\lim_{h\to 0}\frac{-e^{-\lambda t}|_x^{x+h}}{-e^{-\lambda t}|_x^{\infty}h}\\=&\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x-\lambda h}}{e^{-\lambda x}h}\\=&\lim_{h\to 0}\frac{1-\frac{1}{e^{xh}}}{h}\\=&\lim_{h\to 0}\lambda e^{-\lambda h}\\=&\lambda\end{aligned}$$
     - λ为失效率，失效率越高，平均寿命就越小。
   - **图像（密度函数）：**



5. **均匀分布（*Uniform distribution*）：**
   - **定义**：设$a<b$，如果分布$F(x)$具有密度函数
   $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\frac{1}{b-a}I_{(a,b)}(x)$$
   则该分布为区间$[a,b]$上的均匀分布。
   - **概率分布函数**：$F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$
   - **性质**：$\forall R(c,d)\subset R(a,b),\ P(c<X<d)=\frac{d-c}{b-a}$

2.4 多维随机变量（随机向量）

1. **随机向量**：设$X=\{X_1,\dots,X_n\}$.如果每个X_i都是一个随机变量，$i=1,\dots,n$，则称X为n维随机变量或者随机向量。
2. **离散型随机向量的分布**：如果每一个X_i都是一个离散型随机变量，$i=1,\dots,n$，则称$X=\{X_1,\dots,X_n\}$为一n维离散型随机变量。设X_i的所有可能取值为$\{a_{i1},ai2,\dots\},\quad i=1,\dots,n$，则称
   $$p(j_1,\dots,j_n)=P(X_1=a_{1j_1},\dots,X_n=a_{nj_n}),\quad j_1,\dots,j_n=1,2,\dots$$
   为n维随机变量X的概率函数，这也是其联合分布。

   其具有下列性质：
   - $p(j_1,\dots,j_n)\ge 0,\quad j_i=1,2,\dots,\quad i=1,2,\dots,n;$
   - $\sum_{j_1,\dots,j_n}p(j_1,\dots,j_n)=1.$

   > **注**：对于高维离散型随机变量，一般不使用分布函数

3. **多项式分布**
   - **定义**：设$A_1,A_2,\dots,A_n$是某一试验之下的完备事件群，分别以$p_1,p_2,\dots,p_n$记事件$A_1,A_2,\dots,A_n$的概率，则$p_i\ge 0,\quad p_1+\dots+p_n=1$.将试验独立地重复$N$次，以$X_i$记在这$N$次试验中事件$A_i$出现的次数$(i=1,\dots,n)$，则$X=(X_1,\dots,X_n)$为一个$n$维随机向量。该分布记作$M(N;p_1,\dots,p_n)$.
   - **概率分布函数**：$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\dots,X_n=k_n)=\frac{N!}{k_1!k_2!\dots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}$
4. **连续型随机向量的分布**：$X=\{X_1,\dots,X_n\}$为n维连续型随机变量，如果存在$\mathbb{R}^n$上的非负函数$f(x_1,\dots,x_n)$，使得对任意的$-\infty<a_1\le b_1<+\infty,\dots,-\infty<a_n\le b_n<+\infty$，有

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \dots, a_n \le X_n \le b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

则称为f为X的概率密度函数。有

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \dots, a_n \le X_n \le b_n) = F(x_1, \dots, x_n)$$

则称为F为X的（联合）分布函数。其中分布函数$F(X_1, \dots, X_n)$具有下述性质：

- $F(x_1, \dots, x_n)$单调非降；
- 对任意的$1 \le j \le n$，有$\lim_{x_j \to -\infty F(x_1, \dots, x_n)} = 0$；
- $\lim_{x_1 \to \infty, \dots, x_n \to \infty} F(x_1, \dots, x_n) = 1$

5. **边缘分布：**因为X的每个分量X_i都是一维随机变量，故它们都有各自的分布F_i $(i = 1, \dots, n)$，这些都是一维分布，称为随机向量X或其分布F的边缘分布。

   - **离散型随机向量**

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	行和
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\vdots$	p_{nm}	$p_{\cdot m}$
列和	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{n\cdot}$	1

     行和与列和就是边缘分布。即固定某个x_i，即可计算边缘分布，故有

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_j^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j^m p_{ij} = p_{i\cdot}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_Y(y_i) = P(Y = y_i) = \sum_i^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i^m p_{ij} = p_{j\cdot}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

   - **连续型随机向量**

     为求某分量X_i的概率密度函数，只需把$f(x_1, \dots, x_n)$中的x_i固定，然后对$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$在$-\infty$到$\infty$之间做定积分，如

$$(X, Y) \sim f(x, y)$$

$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv$$

$$f_Y(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du$$

> **注：**二维正态分布$N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$的边缘分布密度分别是一维正态分布$N(a, \sigma_1^2)$和$N(b, \sigma_2^2)$。因此联合分布可推边缘分布，而边缘分布不可推联合分布。

2.5 条件分布和随机变量的独立性

1. **离散型随机变量的条件分布：**设(X, Y)为二维离散型随机变量，对于给定的事件$\{Y = y_j\}$，其概率$P(Y = y_j) > 0$，则称

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

   为在给定$Y = y_j$的条件下X的条件分布律。类似的，称

$$P(Y = y_i | X = x_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

为在给定$X=x_j$的条件下Y的条件分布律。

2. **连续型随机变量的条件分布**：设(X,Y)为二维连续型随机变量，对于给定条件$Y=y$下的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad f_Y(y)>0.$$

类似的，在$X=x$下的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad f_X(x)>0.$$

> 二维正态分布$\rho=0$时，其联合密度分布等于条件密度分布的乘积。

3. **随机变量的独立性**

称随机变量$X_1,\dots,X_n$相互独立，

- **离散型随机变量**

  则联合分布律等于各自的边缘分布律的乘积，即

  $$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=P(X_1=x_1)\dots P(X_n=x_n)$$

  其中$(x_1,\dots x_n)$为$(X_1,\dots,X_n)$的值域中的任意一点。

- **连续型随机变量**

  则联合密度等于各自的边缘密度的乘积，即

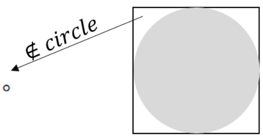
  $$f(x_1,\dots,x_n)=f_1(x_1)\dots f_n(x_n),\quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

- **更具一般地**

  设$X_1,\dots,X_n$为n个随机变量，如果它们的联合分布函数等于各自边缘分布函数的乘积，即

  $$F(X_1,\dots,x_n)=F_1(x_1)\dots F_n(x_n),\quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

  则称随机变量$X_1,\dots,X_n$相互独立。

> **一些重要的结论**
>
> **例 2.6.4.** 如果随机变量$X_1,\cdots,X_n$相互独立，则容易证明其中任何一部分随机变量也相互独立. 然而一般来说，仅由某一部分独立却无法推出$X_1,\cdots,X_n$相互独立. 如见下例:
>
> **例 2.6.5.** 若ξ,η相互独立,都服从-1和1这两点上的等可能分布，而$\zeta=\xi\eta$。则ζ,ξ,η两两独立但不相互独立。
>
> **例 2.6.6.** 设$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X$与$Y$相互独立的充要条件是$\rho=0$。
>
> **例 2.6.7.** 设(X,Y)服从矩形$D=[a,b]\times[c,d]$上的均匀分布，则X与Y相互独立。
>
> **例 2.6.8.** 设(X,Y)服从单位圆上的均匀分布，则X与Y不独立。
>
> 
>
>
> **例 2.6.9.** 设有n个事件：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，对于每个事件A_i，定义：$X_i=I_{A_i}$ (A_i的示性函数), $i=1,2,\cdots,n$，则可证明：$A_1, A_2,\cdots, A_n$ 独立$\Longleftrightarrow X_1, X_2,\cdots, X_n$ 独立。

2.6 随机变量的函数的概率分布

最简单的情形，是由一维随机变量X的概率分布去求其一给定函数$Y=g(X)$的分布。较为常见的，是由$(X_1,X_2,...,X_n)$的分布去求$Y=g(X_1,X_2,...,X_n)$的分布。更一般地，由$(X_1,X_2,...,X_n)$的分布去求$(Y_1,Y_2,...,Y_m)$的分布，其中
$Y_i=g_i(X_1,X_2,...,X_n),\quad i=1,2,...,m.$

1. **离散型分布的情形：**设X的分布律为$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,...$

   $g:R\to R$，令$Y=g(X)$，则Y的分布律为
   $$P(Y=y_j)=P(g(X)=y_j)=\sum_{x_i:g(x_i)=y_j}P(X=x_i)=\sum_{i:g(x_i)=y_j}p_i$$
   即把$Y=g(X_1,...,X_n)$可以取的不同值找出来，把与某个值相应的全部$(X_1,...,X_n)$值的概率加起来，即得Y取这个值的概率。

2. **连续型分布的情形**
   - **一个变量的情况**

     设X有密度函数$f(x)$.设$Y=g(x)$，g是一个严格单调的函数，即当$x_1<x_2$时，必有$g(x_1)<g(x_2)$或当$x_1>x_2$时，必有$g(x_1)>g(x_2)$.又设g的导数g'存在。由于g的严格单调性，其反函数$X=h(Y)$存在，且h的导数h'也存在。有$g(X)$的密度函数$l(y)$为
     $$l(y)=f(h(y))|h'(y)|.$$
   - **多个变量的情形**

     以两个为例，设(X_1,X_2)的密度函数$f(x_1,x_2)$，Y_1,Y_2都是(X_1,X_2)的函数：
     $$Y_1=g_1(X_1,X_2),\quad Y_2=g_2(X_1,X_2),$$
     要求(Y_1,Y_2)的概率密度函数$l(y_1,y_2)$.假定(X_1,X_2)到(Y_1,Y_2)的一一对应变换有逆变换：
     $$X_1=h_1(Y_1,Y_2),\quad X_2=h_2(Y_1,Y_2)$$
     即雅可比行列式
     $$J(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\partial h_1/\partial y_1 & \partial h_1/\partial y_2\\ \partial h_2/\partial y_1 & \partial h_2/\partial y_2\end{vmatrix}$$
     不为0.在$(Y1,Y2)$的平面上任取一个区域A，变换后到(X_1,X_2)平面的区域B，则有
     $$P((Y_1,Y_2)\in A)=P((X_1,X_2)\in B)=\iint_B f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
     $$P((Y_1,Y_2)\in A)=\iint_A f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))|J(y_1,y_2)|dy_1dy_2$$
   - **随机变量和的密度函数**

     设(X_1,X_2)的联合密度函数为$f(x_1,x_2)$，$Y=X_1+X_2$的密度函数：
     - 一般的，$l(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,y-x_1)dx_1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y-x)dx.$
     - 若X_1,X_2独立，则$l(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(y-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(y-x)f_2(x)dx.$

     > 两个独立的正态变量的和仍服从正态分布，且有关的参数相加，其逆命题也成立。
   - **随机变量商的密度函数** 设(X_1,X_2)的联合密度函数为$f(x_1,x_2)$，$Y=X_1/X_2$的密度函数：
     - 一般的，$l(y)=\int_0^{\infty}x_1f(x_1,x_1y)dx_1.$
     - 若X_1,X_2独立，则$l(y)=\int_0^{\infty}x_1f_1(x_1)f_2(x_1y)dx_1.$

- **统计学三大分布**

  引入两个重要的特殊函数：

  $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\quad(x>0)$ 和 $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\quad(x>0,y>0)$

  > 其中，$\Gamma(1)=1,\quad\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\quad\Gamma(n)=(n-1)!$
  >
  > $B(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

- 卡方分布，记作χ_n^2

  密度函数：$k_n(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}2^{n/2})}e^{-x/2}x^{(n-2)/2}I_{(0,\infty)}(x)$

  性质：1. 设X_1,X_2独立，$X_1\sim\chi_m^2,X_2\sim\chi_n^2$，则$X_1+X_2\sim\chi_{m+n}^2$

  2. 若$X_1,...,X_n$独立，且都服从指数分布，则$X=2\lambda(X_1+...+X_n)\sim\chi_{2n}^2$

- t分布，记作t_n

  设X_1，X_2独立，$X_1\sim\chi_n^2,X_2\sim N(0,1)$，而$Y=X_2/\sqrt{X_1/n}$，则$Y\sim t_n$.

  密度函数：$t_n(y)=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+\frac{y^2}{n})^{(\frac{n+1}{2})}$

  性质：密度函数关于原点对称，其图形与正态分布$N(0,1)$的密度函数的图形相似。

- F分布，记作F_{mn}

  设X_1,X_2独立，$X_1\sim\chi_n^2,X_2\sim\chi_m^2$，而$Y=m^{-1}X_2/(n^{-1}X_1)$，则$Y\sim F_{mn}$

  密度函数：$f_{mn}(y)=m^{m/2}n^{n/2}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}y^{m/2-1}(my+n)^{-(m+n)/2}\quad(y>0)$

> 三大分布的几个重要性质
>
> 1. 设$X_1,...,X_n$独立同分布，有公共的正态分布$N(\mu,\sigma^2)$.记$\bar{X}=(X_1+...+X_n),S^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar(X))^2/(n-1)$.则$(n-1)S^2/\sigma^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2\sim\chi_{n-1}^2$.
> 2. 设$X_1,...,X_n$的假定同1，则$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S\sim t_{n-1}$
> 3. 设$X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_m$独立，X_i各有分布$N(\mu1,\sigma_1^2)$，Y_j各有分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则
>
> $$[\sum_{j=1}^m(Y_j-\bar{Y})^2/(\sigma_2^2(m-1))]/[\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2/(\sigma_1^2(n-1))]\sim F_{m-1,n-1}$$
>
> 若$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，则
>
> $$\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}[(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)]/[\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^m(Y_j-\bar{Y})^2]^{1/2}\sim t_{n+m-2}$$

三 随机变量的数字特征

3.1 数学期望（均值）与中位数

1. **数学期望**
   - **定义**：设随机变量X只取有限个可能值$a_1,...,a_m$，其概率分布为$P(X=a_i)=p_i\ (i=1,...,m)$.则$X$的数学期望记作$E(X)^*$或$E(X)$，定义为$E(X)=a_1p_1+a_2p_2+...+a_mp_m$.数学期望也常称为"均值"，即指以概率为权的加权平均。
   - **离散型变量的数学期望**：$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ip_i$.（当级数绝对收敛，即$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|p_i<\infty$）
   - **连续型变量的数学期望**：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$.（当$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx<\infty$）
   - **常见分布的数学期望**：
     - **泊松分布**：$E(X)=\lambda.$
     - **二项分布**：$E(X)=np.$
     - **均匀分布**：$E(X)=\frac{1}{2}(a+b).$
     - **指数分布**：$E(X)=\lambda^{-1}.$
     - **正态分布**：$E(X)=\mu.$
     - **卡方分布**：$E(X)=n.$

        - **t分布**：$E(X)=0 \quad (n>1)$.
    - **F分布**：$E(X)=n/(n-2) \quad (n>2)$.
    - **性质**：
        - 若干个随机变量之和的期望等于各变量的期望值和，即
$$E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n).$$
        - 若干个*独立*随机变量之积的期望等于各变量的期望之积，即
$$E(X_1X_2...X_n)=E(X_1)E(X_2)...E(X_n).$$
        - 设随机变量X为离散型，有分布$P(X=a_i)=p_i(i=1,2,...)$；或者为连续型，有概率密度函数$f(x)$.则
$$E(g(x))=\sum_i g(a_i)p_i \quad (\text{当}\sum_i|g(a_i)|p_i<\infty\text{时})$$
或
$$E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx \quad (\text{当}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)dx<\infty\text{时})$$
        - 若c为常数，则$E(cX)=cE(X)$.

2. **条件数学期望**
    - **定义**：随机变量Y的条件期望就是它在给定的某种附加条件下的数学期望。$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty}yf(y|x)dy$.它反映了随着$X$取值$x$的变化$Y$的平均变化的情况如何。在统计上，常把条件期望$E(Y|x)$作为$x$的函数，称为$Y$对$X$的回归函数。
    - **性质**：
        - $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}E(Y|x)f_X(x)dx$.
        - $E(Y)=E[E(Y|X)]$.
3. **中位数**
    - **定义**：设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$，则满足条件$P(X\le m)=F(m)=1/2$的数m称为X或分布F的中位数。即m这个点把X的分布从概率上一切两半。
    - **性质**：
        - 与期望值相比，中位数受特大值或特小值影响很小，而期望不然。
        - 中位数可能不唯一，且在某些离散型情况下，中位数不能达到一分两半的效果。

3.2 方差与矩

1. **方差与标准差**
    - **定义**：设X为随机变量，分布为F，则$Var(X)=E(X-EX)^2$称为X（或分布F）的方差，其平方根$\sqrt{Var(X)}$（取正值）称为X（或分布F）的标准差。
    - **常见分布的方差**：
        - **泊松分布**：$Var(X)=\lambda$.
        - **二项分布**：$Var(X)=np(1-p)$.
        - **正态分布**：$Var(X)=\sigma^2$.
        - **指数分布**：$Var(X)=1/\lambda^2$.
        - **均匀分布**：$Var(X)=(b-a)^2/12$.
        - **卡方分布**：$Var(X)=2n$.
        - **t分布**：$Var(X)=n/(n-2)$.
        - **F分布**：$Var(X)=2n^2(m+n-2)/[m(n-2)^2(n-4)] \quad (n>4)$.
    - **性质**：
        - $Var(X)=E(X^2)-(EX)^2$.
        - 常数的方差为0，即$Var(c)=0$.

- 若c为常数，则$Var(X+c)=Var(X)$.
- 若c为常数，则$Var(cX)=c^2Var(X)$.
- **独立**随机变量和的方差等于各变量方差和，即$Var(X_1+...+X_n)=Var(X_1)+...+Var(X_n)$.

2. **矩**

- **定义**：设X为随机变量，c为常数，k为正整数。则量$E[(X-c)^k]$称为X关于c点的k阶矩。特别地，有两种重要的情况：

  (1) $c=0$.这时$a_k=E(X^k)$称为X的k阶原点矩。

  (2)$c=E(X)$.这时$\mu_k=E[(X-EX)^k]$称为X的k阶中心矩。

  一阶原点矩就是期望，一阶中心距$\mu_1=0$，二阶中心距μ_2就是X的方差$Var(X)$.

- **两种重要应用：**

  - **偏度系数**：$\beta_1=\mu_3/\mu_2^{3/2}$.衡量概率分布函数$f(x)$是否关于均值对称。如果$\beta>0$，则称分布为正偏或右偏；如果$\beta<0$，则称分布为负偏或左偏；如果$\beta=0$，则对称。（注：$\mu_2^{3/2}$为标准差的三次方，可将$\mu_3$缩放到一次因次）
  - **峰度系数**：$\beta_2=\mu_4/\mu_2^2$.衡量概率分布函数$f(x)$在均值附近的陡峭程度。若X有正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$\beta_2=3$.(注：μ_2^2为标准差的四次方，将μ_4缩放到一次因次。为了迁就正态分布，也常定义μ_4/μ_2^2-3为峰度系数，以使正态分布的峰度系数为0)

3.3协方差与相关系数

两者都反映了随机变量之间的关系。

1. **协方差（*Covariance*）**

- **定义**：称$E[(X-m_1)(Y-m_2)]$为X，Y的协方差，并记为$Cov(X,Y)$.
- **性质**：

  - $Cov(X,Y)$与X,Y的次序无关，即$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$.
  - $Cov(c_1X+c_2,c_3Y+c_4)=c_1c_3Cov(X,Y)$.
  - $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.
  - 若X,Y独立，则$Cov(X,Y)=0$.
  - $[Cov(X,Y)]^2\le\sigma_1^2\sigma_2^2$.等号当且仅当$X,Y$之间有严格线性关系（$Y=a+bX$）时成立。

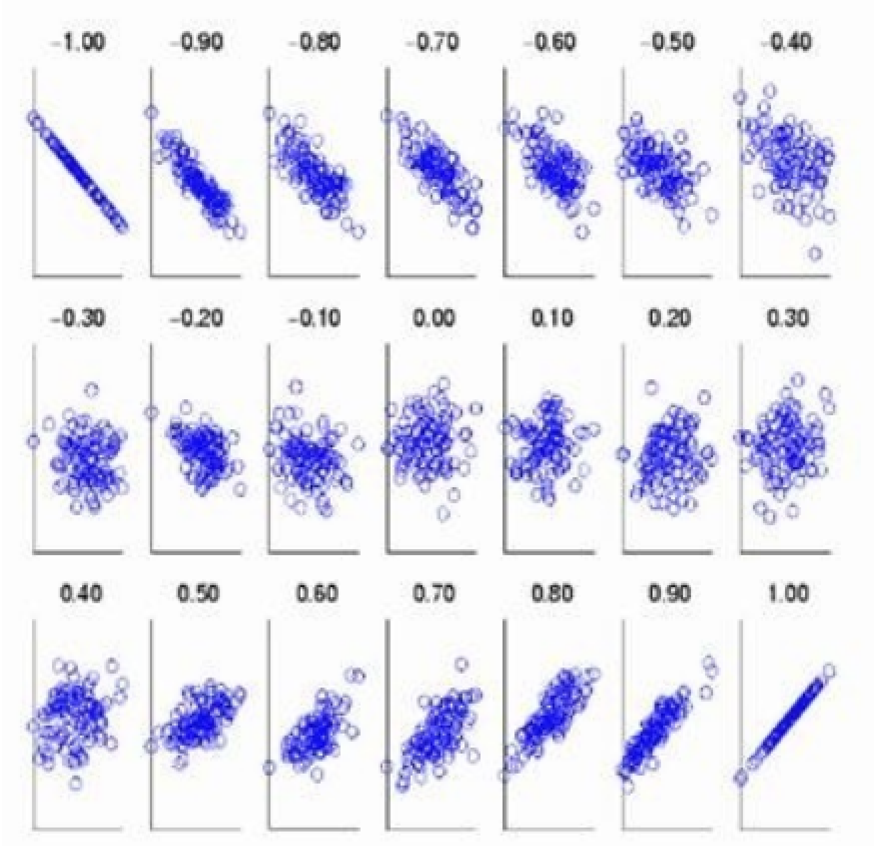
> **注**：协方差的结果受随机变量量纲影响。

2. **相关系数（*Correlation coefficient*）**

- **定义**：称$Cov(X,Y)/(\sigma_1\sigma_2)$为$X,Y$的相关系数，并记为$Corr(X,Y)$.
- **性质**：

  - 若X,Y独立，则$Corr(X,Y)=0$.
  - $-1\le Corr(X,Y)\le 1$，或$|Corr(X,Y)\le 1|$，等号当且仅当X和Y有严格线性关系时达到。当$Corr(X,Y)=0$时，推出X,Y不线性相关。

> **注**：相关系数常称为"**线性相关系数**"，实际上相关系数并不是刻画了X,Y之间**消除量纲后**"一般"关系的程度，而只是"线性关系的程度"。即使X与Y有某种严格的函数关系但非线性关系，$|Corr(X,Y)|$不仅不必为1，还可以为0.



3.4大数定理和中心极限定理

1. **大数定理**

   “大数”的意思，就是指涉及大量数目的观察值X_i，它表明这种定理中指出的现象只有在大量次数的试验和观察之下才能成立。

   - **定义：**设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$是独立同分布的随机变量，记它们的公共均值为$a$.又设它们的方差存在并记为$\sigma^2$.则对任意给定的$\varepsilon > 0$，有$lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - a| \geq \varepsilon) = 0$.（该式表明，当$n$很大时，$\bar{X}_n$接近$a$）

2. **中心极限定理**

   即和的分布收敛于正态分布。

   - **定义：**设$X_1, X_2, \ldots, X_n$为独立同分布的随机变量，$E(X_i) = a, Var(X_i) = \sigma^2 (0 < \sigma^2 < \infty)$.则对任何实数$x$，有$lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}(X_1 + \ldots + X_n - na) \leq x) = \Phi(x)$.（$\Phi(x)$为标准正态分布$N(0,1)$的分布函数）
   - **特例：**设$X_1, X_2, \ldots, X_n$独立同分布，X_i分布是$P(X_i = 1) = p$，$P(X_i = 0) = 1 - p\ (0 < p < 1)$.则对任何实数$x$，有$lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(X_1 + \ldots + X_n - np) \leq x) = \Phi(x)$.

> **注：**如果t_1, t_2是两个正整数，$t_1 < t_2$.则当n相当大时，近似地有
>
> $$P(t_1 \leq X_1 + \ldots + X_n \leq t_2) \approx \Phi(y_2) - \Phi(y_1),$$
>
> 其中
>
> $$y_i = (t_i - np)/sqrtnp(1-p) \quad (i = 1, 2).$$
>
> 若把y_1, y_2修正为
>
> $$y_1 = (t_1 - \frac{1}{2} - np)/\sqrt{np(1-p)},$$
> $$y_2 = (t_2 - \frac{1}{2} - np)/\sqrt{np(1-p)}$$

> 在应用上式，则一般可提高精度。

> Author：钱小z
>
> Email：qz_gis@163.com
>
> Bio：GISer，Spatiotemporal data mining
>
> GitHub：QianXzhen