4．4　向量组的秩

矩阵的秩在讨论向量组的线性组合和线性相关性时，起了十分关键的作用．向量组的秩也是一个很重要的概念，它在向量组的线性相关性问题中同样起到十分重要的作用．

定义 4．7　给定向量组 A，如果存在部分组 $A_0 \subset A$，满足

（1）$A_0 : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

（2）向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关．

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**极大线性无关向量组**（简称**极大无关组**），r 称为向量组 A 的**秩**，记作 R_A．

规定：只含零向量的向量组的秩为 0．

关于定义的几点说明：

（1）一般而言，向量组 A 的极大无关组不唯一．

（2）向量组 A 的任意一个极大无关组 $A_0 : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 A 是等价的．

（3）向量组 A 的任意两个极大无关组是等价的，因而它们含有相同个数的向量，从而向量组的秩是唯一的

（4）若向量组 A 的秩等于 r，则 A 中任意 r 个线性无关的向量都是 A 的极大无关组．

例 4．1　$E : e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 n 维向量空间 R^n 的一个极大无关组，R^n 的秩等于 n．

定理 4．8　矩阵的秩等于其列向量组的秩，也等于其行向量组的秩．

证　设 $A = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\right)$，$R(A) = r$，并设 r 阶子式 $D_r \neq 0$．根据定理 4．5，由 $D_r \neq 0$ 知 D_r 所在的 r 个列向量线性无关；又由 A 中所有 $r+1$ 阶子式全为零，知 A 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关．因此 D_r 所在的 r 个列向量是 A 的列向量组的一个极大无关组，所以列向量组的秩等于 r．

类似可证矩阵 A 的行向量组的秩也等于 $R(A)$．

设向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 构成矩阵 $A = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\right)$，根据定理 4．8，有

$$R_A = R\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\right) = R\left(A\right),$$

因此，$R\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\right)$ 既可理解为矩阵的秩，也可理解成向量组的秩．

例 4．2　设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -8 & 7 & 7 \\ 3 & -7 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

求矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用极大无关组线

性表示.

解 由于

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)=B,$$

而方程 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，即方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4+x_5\alpha_5=0 \text{ 与 } x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4+x_5\beta_5=0$$

同解，因此向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 之间与向量 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 之间有相同的线性关系．而 β_1,β_2,β_4 是 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的一个极大无关组，且

$$\beta_3=-\beta_1-\beta_2,\quad \beta_5=4\beta_1+3\beta_2-3\beta_4.$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，且

$$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2,\quad \alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4.$$

极大无关组有如下的等价定义：

推论 设向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 A 的一个部分组，且满足

（1） A_0 线性无关；

（2） A 中任一向量都可由 A_0 线性表示.

那么 A_0 是 A 的一个极大无关组.

证 任取 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}\in A$，由条件（2）知这 $r+1$ 个向量都可由向量组 A_0 线性表示，从而根据定理 4．6 推论 1，知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}$ 线性相关．因此，A_0 是 A 的一个极大无关组.

定理 4．9 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示，则 $R_A\le R_B$.

证 设向量组 A 和向量组 B 的极大无关组分别是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，显然 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示. 如 $s>t$，由定理 4. 6 的推论 1 知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是极大无关组矛盾．所以 $s\le t$，即 $R_A\le R_B$.

定理 4. 10 设有两个同维数的向量组 A 和向量组 B，向量组 C 由向量组 A 和向量组 B 合并而成，则向量组 B 可由向量组 A 线性表示的充要条件是 $R_A=R_C$.

特别地，向量 β 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充要条件是

$$R\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)=R\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta\right).$$

证 设 $R(A)=r$，并设是 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 A 组的一个极大无关组.

必要性． C 组由 A 组和 B 组合并而成，由于 B 组可由 A 组表示，所以 C 组可由 A 组

表示，由定理4．9，$R_C \le R_A$．显然A组可由C组表示，所以$R_A \le R_C$．因此，$R_A = R_C$．

充分性．任取$\beta \in B$．由于

$$r = R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \le R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta) \le R_C = R_A = r，$$

故 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta) = r$，知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$线性相关．而向量组$A_0 : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关，由定理4．4，知$\beta$可由$A_0$组表示，所以$\beta$可由$A$组表示．由$\beta$的任意性，于是$B$组可由$A$组表示．

推论　设A和B是两个同维数的向量组，向量组C由向量组A和向量组B合并而成，则向量组A与向量组B等价的充分必要条件是$R_A = R_B = R_C$．

例4．3　设n维向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$构成$n \times m$矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$．证明：任一$n$维向量可由向量组$A$线性表示的充要条件是$R(A) = n$．

证　必要性．由于任一n维向量可由向量组A线性表示，故n维单位坐标向量组$e_1, e_2, \cdots, e_n$可由向量组A线性表示．根据定理4．9，有$R(A) \ge R(E) = n$．又$R(A) \le n$，因此$R(A) = n$．

充分性．设β是任一n维向量，由于$n = R(A) \le R(A, \beta) \le n$，故$R(A) = R(A, \beta)$．由定理4．10知，$\beta$可由向量组$A$线性表示．

例4．4　已知向量组$\beta_1 = (0,1,-1)^T$，$\beta_2 = (a,2,1)^T$，$\beta_3 = (b,1,0)^T$与向量组$\alpha_1 = (1,2,-3)^T$，$\alpha_2 = (3,0,1)^T$，$\alpha_3 = (9,6,-7)^T$有相同的秩，且β_3能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，求$a$, b的值．

解　由$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，知$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$．

因为$\beta_1, \beta_2, \beta_3$与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$有相同的秩，故$R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$，从而

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3b - a = 0，$$

解得$a = 3b$．

因为β_3能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，故$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$．由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&-2b+1\\0&0&0&\dfrac{5-b}{3}\end{bmatrix},$$

可得$b=5$，从而$a=15$.

例 4．5 设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为两个 n 维向量组，且 $R(A)=R(B)=r$，则（　　）.

（A）两个向量组等价，即可相互线性表示；

（B）$R(A,B)=r$；

（C）当A可由B线性表示时，B也可由A线性表示；

（D）当$s=t$时，两个向量组等价.

解 若 A 可由 B 线性表示，则 $R(B)=R(B,A)=r$，而 $R(A)=R(B)=r$，故 $R(A)=R(B,A)=R(A,B)=r$，所以B可由A线性表示．故选（C）.