6．3　实对称矩阵的对角化

本节讨论实对称矩阵的对角化问题，将得到一个重要结论：n 阶实对称矩阵一定可以对角化，且相似变换矩阵可以是正交矩阵．下面我们将推导这一结论．

定理 6．4　实对称矩阵的特征值皆为实数．

证　设复数 λ 为实对称阵 A 的特征值，复向量 x 为对应的特征向量，即 $Ax=\lambda x$，$x\neq 0$．等式两边左乘 $\overline{x}^T$，得

$$\overline{x}^T Ax=\lambda\overline{x}^T x .$$

而

$$\overline{x}^T Ax=\overline{x}^T A^T x=(A\overline{x})^T x=(\overline{A}\overline{x})^T x=(\overline{Ax})^T x=(\overline{\lambda x})^T x=(\overline{\lambda}\,\overline{x})^T x=\overline{\lambda}\,\overline{x}^T x ,$$

故

$$(\overline{\lambda}-\lambda)\overline{x}^T x=0 .$$

因为 $x\neq 0$，所以 $\overline{x}^T x\neq 0$，于是 $\overline{\lambda}-\lambda=0$，即 $\overline{\lambda}=\lambda$，故 λ 为实数．

显然，当特征值 λ 为实数时，齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 是实系数方程组，对应 λ 的特征向量是方程组的解，必可取为实向量．

定理 6．5　设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵 A 的两个不同的特征值，p_1,p_2 分别为对应 λ_1,λ_2 的特征向量，则 p_1 与 p_2 正交．

证　等式 $Ap_2=\lambda_2 p_2$ 两边左乘 p_1^T，得

$$p_1^T Ap_2=\lambda_2 p_1^T p_2 .$$

而

$$p_1^T Ap_2=p_1^T A^T p_2=(Ap_1)^T p_2=\lambda_1 p_1^T p_2 ,$$

故

$$\lambda_1 p_1^T p_2-\lambda_2 p_1^T p_2=(\lambda_1-\lambda_2)p_1^T p_2=0 .$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $p_1^T p_2=0$，即 p_1 与 p_2 正交．

我们不加证明地给出以下定理：

定理 6．6　设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交阵 P，使 $P^{-1}AP=P^T AP=\Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵．

定理 6．7　设 A 为 n 阶实对称矩阵，λ 是 A 的 k 重特征值，则矩阵 $\lambda E-A$ 的秩为 $n-k$，从而 A 对应于特征值 λ 的线性无关的特征向量恰好有 k 个．

证　由定理 6．3 与定理 6．6 即得结论．

实对称矩阵对角化的步骤：

（i）解特征方程$\left|\lambda E-A\right|=0$，求出$n$阶实对称矩阵$A$的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

（ii）对每个互异特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，解齐次线性方程组$(\lambda_i E-A)x=0\,(i=1,2,\cdots,s)$，分别求出它们的基础解系，再将各个基础解系正交规范化，最后将正交规范化后的基础解系合并为一个向量组，从而得到A的n个两两正交的单位特征向量$p_1, p_2, \cdots, p_n$.

（iii）令$P=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，则$P$是一个正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

例 3．1　求一个正交阵P，使$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$为对角阵，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

解　由特征方程

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 2-\lambda & -2\\ 0 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1-c_3}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 0\\ 0 & 2-\lambda & -2\\ \lambda-3 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_2-2c_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda & 2(\lambda-2) & 0\\ 0 & 2-\lambda & -2\\ \lambda-3 & -2(\lambda-2) & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ \lambda-3 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0,$$

解得A的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.

对应$\lambda_1=-1$，解齐次线性方程组$(A+E)x=0$，即$\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系

$\xi_1=(2,2,1)^T$，将ξ_1单位化，得$p_1=\dfrac{1}{3}(2,2,1)^T$.

对应$\lambda_2=2$，解齐次线性方程组$(A-2E)x=0$，即$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系

$\xi_2=(-2,1,2)^T$，将ξ_2单位化，得$p_2=\dfrac{1}{3}(-2,1,2)^T$.

对应$\lambda_3=5$，解齐次线性方程组$(A-5E)x=0$，即$\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系$\xi_3=(1,-2,2)^T$，将$\xi_3$单位化，得$p_3=\dfrac{1}{3}(1,-2,2)^T$.

令$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则$P$为正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

例 3．2 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求一个正交阵$P$，使$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$为对角阵.

解 由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda)$，得$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$.

对应$\lambda_1=\lambda_2=0$，解齐次线性方程组$(A-0E)x=0$，即$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系$\xi_1=(-1,1,0)^T$，$\xi_2=(-1,0,1)^T$. 将$\xi_1$，$\xi_2$正交化，取

$\eta_1=\xi_1=(-1,1,0)^T$，

$\eta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=(-1,0,1)^T-\dfrac{1}{2}(-1,1,0)^T=-\dfrac{1}{2}(1,1,-2)^T$.

再将η_1，η_2单位化，得

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T,\quad p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T.$$

对应$\lambda_3=3$，解齐次线性方程组$(A-3E)x=0$，即$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系

$\xi_3=(1,1,1)^T$．将 ξ_3 单位化，得 $p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$．

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，则 P 为正交矩阵，且

$$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 3．3　A 是 3 阶实对称矩阵，A 的特征值为 $-1,0,1$，其中 $\lambda=1$ 和 $\lambda=0$ 所对应的特征向量分别为 $(1,a,1)^T$ 及 $(a,a+1,1)^T$，求 a 的值及矩阵 A．

解　因为 A 是实对称矩阵，故特征向量 $(1,a,1)^T$ 与 $(a,a+1,1)^T$ 正交，即

$$1\times a+a\times(a+1)+1\times 1=a^2+2a+1=(a+1)^2=0,$$

因此 $a=-1$．

设 A 对应于特征值 -1 的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则它与 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1)^T$ 均正交，由此可得下面的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1 \qquad\ +x_3=0, \end{cases}$$

该方程组的通解为 $k(1,2,1)^T$（k 为任意常数），取 $\alpha_3=(1,2,1)^T$．

因为 A 是实对称矩阵，故 A 可对角化．令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$，从而

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$