2．6　初等矩阵

定义 2．8　由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

三种初等变换对应三种初等矩阵.

（1）对调两行或对调两列．把单位矩阵中第i, j两行对调（第i, j两列对调），得初等矩阵，记为$E(i, j)$．例如

$$E_3(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

（2）以数$k\neq 0$乘某行或某列．以数$k\neq 0$乘单位矩阵E的第i行（列），得初等矩阵，记为$E(i(k))$．例如

$$E_3(2(3))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

（3）以数k乘某行（列）加到另一行（列）上．以数k乘单位矩阵E的第j行加到第i行上或以数k乘单位矩阵E的第i列加到第j列上，得初等矩阵，记为$E(ij(k))$．例如

$$E(31(2))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

定理 2．1　设A是一个$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

例如，设$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，则有

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$E_3(1,2)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

再如

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{c_1+2c_3}{\sim}\begin{pmatrix}5&0&1\\5&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix},$$

$$AE_3(31(2))=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}5&0&1\\5&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

初等变换对应初等矩阵，由初等变换可逆，可知初等矩阵可逆，且此初等变换的逆变换也就对应初等矩阵的逆矩阵：由变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身，知 $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$；由变换 $r_i\times k$ 的逆变换为 $r_i\times\dfrac{1}{k}$，知 $E(i(k))^{-1}=E(i(\dfrac{1}{k}))$；由变换 r_i+kr_j 的逆变换为 r_i-kr_j，知 $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$.

定理 2．2　方阵 A 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$ ，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$.

证　先证充分性．设 $A=P_1P_2\cdots P_l$，因为初等矩阵可逆，且有限个可逆矩阵的乘积仍可逆，故 A 可逆.

再证必要性．设 n 阶方阵 A 可逆，且 A 的标准形矩阵为 $F=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{n\times n}$．由于 $A\sim F$，知 A 经有限次初等变换可化为 F，即有初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使

$$F=P_1\cdots P_sAP_{s+1}\cdots P_l.$$

因为 A 可逆，$P_1,P_2,\cdots,P_l$ 都可逆，故标准形矩阵 F 可逆．假设 $F=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}_{n\times n}$ 中的 $r<n$，对任意的 B，FB 下面的 $n-r$ 行必为全为零 ，不可能有 $FB=E$，与 F 可逆矛盾，因此必有 $r=n$，即 $F=E$，从而 $A=P_1P_2\cdots P_l$.

上述证明表明：*可逆矩阵的标准形矩阵是单位矩阵*. 其实可逆矩阵的行最简形矩阵也是单位矩阵，即有

推论 1　方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A\overset{r}{\sim}E$.

证明　因为 A 可逆的充分必要条件是 A 为有限个初等矩阵的乘积，即 $A=P_1P_2\cdots P_l$，亦即

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l E.$$

上式表示E经有限次初等行变换可变为A，即$A \overset{r}{\sim} E$.

推论 2 $m \times n$矩阵A与B等价的充分必要条件是存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使$PAQ = B$.

证明略.

推论 3 对于n阶方阵A及$n \times t$矩阵B，若$(A,\ B) \overset{r}{\sim} (E,\ X)$，则$A$可逆，且$X = A^{-1}B$.

证 由推论 1 知A可逆．由定理 2．1 知，存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_l$，使

$$E = P_1 P_2 \cdots P_l A,$$

因此，$A^{-1} = P_1 P_2 \cdots P_l$，$P_1 P_2 \cdots P_l B = A^{-1}B$，从而$P_1 P_2 \cdots P_l (A, B) = (E, A^{-1}B)$，即

$X = A^{-1}B$.

推论 3 的意义：

（1）取$B = E$时，若$(A,\ E) \overset{r}{\sim} (E,\ X)$，则$A$可逆，且$X = A^{-1}$．我们可以通过这种初等行变换求矩阵的逆.

（2）当A为可逆矩阵时，方程$AX = B$的解为$X = A^{-1}B$，求$AX = B$的解可以对(A, B)进行初等行变换，使之成为$(E, A^{-1}B)$，此时即得$X = A^{-1}B$.

例 6．1 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解 因为

$$(A,\ E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_2 - 2r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_3 \div (-1)}{\overset{\substack{r_3 - r_2 \\ r_2 \div 3}}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_1+r_2}{\overset{\substack{r_2+\frac{2}{3}r_3 \\ r_1-r_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 6．2　设 A、B 满足 $AB = A + 2B$，其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 B.

解　由 $AB = A + 2B$，得 $(A-2E)B = A$.

$$(A-2E,\ A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{r_2 \div (-1)}{\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3+r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-r_3}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

可见 $A-2E$ 可逆，且

$$B = (A-2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 6．3　设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

求线性方程组 $Ax = b_1$ 和 $Ax = b_2$ 的解.

解 设 $Ax_1=b_1$， $Ax_2=b_2$．记 $X=(x_1,x_2)$， $B=(b_1,b_2)$，则两个线性方程组可合成一个矩阵方程 $AX=B$．为求 X，把 (A,B) 化成行最简形：

$$(A,\ B)=\begin{pmatrix}3&-1&4&1&-1\\0&2&1&2&0\\1&-1&-2&3&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\ r_3-3r_1}}{\underset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&-2&3&5\\0&2&1&2&0\\0&0&9&-10&-16\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2\div 2\\ r_3\div 9}}{\underset{r_1+r_2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&4&5\\0&1&\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1&-\frac{10}{9}&-\frac{16}{9}\end{pmatrix}\overset{r_1+\frac{3}{2}r_3}{\underset{r_2-\frac{1}{2}r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{3}&\frac{7}{3}\\0&1&0&\frac{14}{9}&\frac{8}{9}\\0&0&1&-\frac{10}{9}&-\frac{16}{9}\end{pmatrix},$$

可见 A 是可逆的，且

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&\frac{7}{3}\\\frac{14}{9}&\frac{8}{9}\\-\frac{10}{9}&-\frac{16}{9}\end{pmatrix},$$

即线性方程组 $Ax=b_1$ 和 $Ax=b_2$ 都有唯一解，依次为

$$x_1=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\\frac{14}{9}\\-\frac{10}{9}\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\\frac{8}{9}\\-\frac{16}{9}\end{pmatrix}.$$

例 6．4 如何求解矩阵方程 $XA=B$？其中 A 可逆？

解 因为 $XA=B\Leftrightarrow A^TX^T=B^T$，故可先求 X^T，再求 X．具体做法是对 (A^T,B^T) 进行初等行变换，使之成为行最简形 $(E,(A^T)^{-1}B^T)$，则 $X^T=\left(A^T\right)^{-1}B^T$，于是 $X=BA^{-1}$．

应用实例（矩阵在图形学上的应用）

平面图形由一个封闭曲线围成的区域或封闭曲线围成的区域构成．如字母 L，由 a ，b，c，d，e，f 的连线构成（图 2-1），我们将这六个点的坐标记录下来，便可由此生成这个字母．将六个点的坐标按矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&4&4&1&1&0\\0&0&1&1&6&6\end{bmatrix}$$

方式记录下来，第i个列向量就是第i个点的坐标．数乘矩阵kA，所对应的图形相当于把图形放大k倍．用矩阵$P=\begin{bmatrix}1&0.25\\0&1\end{bmatrix}$左乘$A$，得

$$PA=\begin{bmatrix}0&4&4.25&1.25&2.5&1.5\\0&0&1&1&6&6\end{bmatrix},$$

所对应的字形变成斜体．

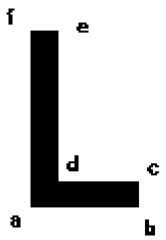

图 2-1