第 6 章　特征值与特征向量

6．1　矩阵的特征值与特征向量

特征值与特征向量刻画了方阵的一些本质特征，在几何学、力学、常微分方程动力系统、管理工程及经济应用等方面都有着广泛的应用，如振动问题和稳定性问题、最大值最小值问题，常常可以归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题. 数学中诸如方阵的对角化及解微分方程组的问题，也都要用到特征值的理论.

定义 6．1　设 A 是 n 阶矩阵，如果存在数 λ 和 n 维非零向量 x，使关系式

$$Ax=\lambda x$$

成立，那么称数 λ 为方阵 A 的**特征值**，称非零向量 x 为方阵 A 的对应于特征值 λ 的**特征向量**（λ 可以是复数，A 的元素和 x 的分量也可以是复数）.

例 1. 1　已知 $\xi=(1,1,-1)^T$ 为矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求参数 a，b 以及 ξ 所对应的特征值.

解　设 λ 是特征向量 ξ 所对应的特征值，则 $(A-\lambda E)\xi=0$，即

$$\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&a-\lambda&3\\-1&b&-2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-\lambda-1\\2+a-\lambda\\1+b+\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解之得 $\lambda=-1$，$a=-3$，$b=0$.

下面讨论特征值与特征向量的求法.

设 x_0 是 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量，即 $Ax_0=\lambda_0x_0$，将关系式 $Ax_0=\lambda_0x_0$ 写成

$$(A-\lambda_0E)x_0=0 \text{ 或 } (\lambda_0E-A)x_0=0,$$

由此可见 x_0 是齐次线性方程组 $(A-\lambda_0E)x=0$ 或 $(\lambda_0E-A)x=0$ 的非零解，从而 $|A-\lambda_0E|=0$ 或 $|\lambda_0E-A|=0$，即 λ_0 是方程 $|A-\lambda E|=0$ 或 $|\lambda E-A|=0$ 的根.

$|A-\lambda E|=0$ 或 $|\lambda E-A|=0$ 是以 λ 为未知数的一元 n 次方程，称为方阵 A 的**特征方程**，其左端 $|A-\lambda E|$ 或 $|\lambda E-A|$ 是 λ 的 n 次多项式，记作 $f(\lambda)$，称为方阵 A 的**特征多项式**.

上面的分析告诉我们：若 x_0 是 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量，则 λ_0 是特征方程

$|A-\lambda E|=0$或$|\lambda E-A|=0$的根，x_0是齐次线性方程组$(A-\lambda_0 E)x=0$或$(\lambda_0 E-A)x=0$的非零解.

反过来，若λ_0是特征方程$|A-\lambda E|=0$或$|\lambda E-A|=0$的根，即$|A-\lambda_0 E|=0$或$|\lambda_0 E-A|=0$，则齐次线性方程组$(A-\lambda_0 E)x=0$或$(\lambda_0 E-A)x=0$有非零解，设非零解为x_0，即$(A-\lambda_0 E)x_0=0$或$(\lambda_0 E-A)x_0=0$，改写其形式得$Ax_0=\lambda_0 x_0$，故λ_0是A的特征值，x_0是A对应于特征值λ_0的特征向量.

综上讨论，可得出如下结论：

（1）λ_0是方阵A的特征值$\Leftrightarrow$ λ_0是特征方程$|A-\lambda E|=0$或$|\lambda E-A|=0$的根；

（2）x_0是方阵A对应于特征值λ_0的特征向量$\Leftrightarrow$ x_0是齐次线性方程组$(A-\lambda_0 E)x=0$或$(\lambda_0 E-A)x=0$的非零解.

依据这个结论，可得到求特征值和相应特征向量的方法.

（1）特征值的求法　解特征方程$|A-\lambda E|=0$或$|\lambda E-A|=0$，求出其全部根，则这些根即是矩阵A全部的特征值．n阶方阵A在复数域内有n个特征值（重根的个数按重数计算）.

（2）特征向量的求法

设λ_0是矩阵A的一个特征值，解齐次线性方程组$(A-\lambda_0 E)x=0$或$(\lambda_0 E-A)x=0$，设其基础解系为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，则A对应于特征值λ_0的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s,$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为零.

例 1．2　求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解　A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3),$$

解得A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$.

对应于$\lambda_1=1$，解齐次线性方程组$(A-E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得基础解系为$p_1=(-1,1)^T$，所以A对应于特征值$\lambda_1=1$的全部特征向量为$k_1p_1=k_1(-1,1)^T$，

其中k_1为任意非零常数.

对应于$\lambda_2=3$，解齐次线性方程组$(A-3E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为$p_2=(1,1)^T$，所以A对应于特征值$\lambda_2=3$的全部特征向量为$k_2 p_2=k_2(1,1)^T$，其中k_2为任意非零常数.

例 1．3 求目标函数

$$f(x,y)=2x^2+2xy+2y^2$$

在约束条件条件$x^2+y^2=1$下的最值.

解 用拉格朗日乘数法．设$L=2x^2+2xy+2y^2+\lambda(1-x^2-y^2)$，令

$$L_x=4x+2y-2\lambda x=0，\ L_y=2x+4y-2\lambda y=0，$$

即

$$2x+y=\lambda x，\ x+2y=\lambda y.$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

问题转化为求矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

由例 1．1，A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，相应的全部特征向量分别为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}与\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

代入约束条件条件$x^2+y^2=1$，得

$$k_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},k_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$是可能的最值点．比较各点的目标函数值即可求得最大值为

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3,$$

最小值为

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1.$$

例 1．4　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解　矩阵 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda),$$

解得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=1$ 时，解齐次线性方程组 $(A-E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=(0,-1,1)^T$，所以 $k_1p_1=k_1(0,-1,1)^T$（$k_1\neq 0$）是 A 对应于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=2$ 时，解齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_2=(1,0,0)^T$，所以 $k_2p_2=k_2(1,0,0)^T$（$k_2\neq 0$）是 A 对应于 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_3=5$ 时，解齐次线性方程组 $(A-5E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_3=(0,1,1)^T$，所以 $k_3p_3=k_3(0,1,1)^T$（$k_3\neq 0$）是 A 对应于 $\lambda_3=5$ 的全部特征向量.

例 1．5　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量.

解　矩阵A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

解得A的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=-1$时，解齐次线性方程组$(A+E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

得基础解系 $p_1=(1,0,1)^T$，所以A对应于$\lambda_1=-1$的全部特征向量为$k_1p_1=k_1(1,0,1)^T$（$k_1\neq 0$）.

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解齐次线性方程组$(A-2E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

得基础解系 $p_2=(1,4,0)^T$，$p_3=(1,0,4)^T$，所以A对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为$k_2p_2+k_3p_3=k_2(1,4,0)^T+k_3(1,0,4)^T$（$k_2,k_3$不全为零）.

例 1．6　求矩阵$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$的特征值与特征向量.

解　矩阵A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & 1\\ -2 & -\lambda & -1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2-\lambda & 0\\ -2 & -\lambda & -1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)^2,$$

解得A的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=0$时，解齐次线性方程组$(A-0E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

得基础解系 $p_1=(-1,1,2)^T$，所以A对应于$\lambda_1=0$的全部特征向量为$k_1p_1=k_1(-1,1,2)^T$（$k_1\neq 0$）.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$，即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

得基础解系 $p_2=(-1,1,0)^T$，所以 A 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k_2p_2=k_2(-1,1,0)^T$（$k_2\neq 0$）.

从以上例中我们可看出，当特征值是单根时，只可求得一个线性无关的特征向量；当特征值是重根时，例如例 1．4 中二重根特征值 2 对应两个线性无关的特征向量，而例 1．5 中二重根特征值 2 只对应一个线性无关的特征向量.

下面讨论特征值与特征向量的性质.

（1）特征值的性质

性质 1 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的 n 个特征根，则

（i）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$（称 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 为 A 的迹，记为 $tr(A)$）；

（ii）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

证 因为 $|A-\lambda E|=(-1)^n\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+a$，由多项式的分解定理，有

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda),$$

比较 λ^{n-1} 的系数，得

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.$$

又 $|A|=|A-0E|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，定理得证.

由此可知，矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的所有特征值都不为零.

性质 2 A 与 A^T 有相同的特征值.

证 因为 $|A^T-\lambda E|=|A^T-(\lambda E)^T|=|(A-\lambda E)^T|=|A-\lambda E|$，即 A 与 A^T 有相同的特征多项式，所以 A 与 A^T 有相同的特征值.

性质 3 设 λ 是可逆矩阵 A 的特征值，则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

证 因为 A 是可逆矩阵，故 $\lambda\neq 0$. 设 x 是 A 对应于 λ 的特征向量，即 $Ax=\lambda x$，两边左乘 A^{-1}，再乘 $\dfrac{1}{\lambda}$，得 $A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda}x$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

性质 4 设λ是n阶矩阵A的一个非零特征值，则$\dfrac{|A|}{\lambda}$是A^*的一个特征值.

证 设x是A对应于λ的特征向量，即$Ax=\lambda x$，两边左乘A^*，并利用关系式$A^*A=|A|E$，得

$$|A|x=\lambda A^* x\,.$$

两边乘以$\dfrac{1}{\lambda}$，得

$$A^* x=\frac{|A|}{\lambda}x\,,$$

所以$\dfrac{|A|}{\lambda}$是A^*的一个特征值.

性质 5 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$n$阶方阵$A$的$n$个特征根，则矩阵多项式

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E\ （m\geq 1为整数）$$

的n个特征值为

$$f(\lambda_i)=a_m\lambda_i^m+a_{m-1}\lambda_i^{m-1}+\cdots+a_1\lambda_i+a_0\ （i=1,2,\cdots,n）.$$

证 设x是A对应于特征值λ_i的特征向量，即$Ax=\lambda_i x$，则

$$\begin{aligned}f(A)x&=a_mA^m x+a_{m-1}A^{m-1}x+\cdots+a_1Ax+a_0Ex\\&=a_m\lambda_i^m x+a_{m-1}\lambda_i^{m-1}x+\cdots+a_1\lambda_i x+a_0x\\&=(a_m\lambda_i^m+a_{m-1}\lambda_i^{m-1}+\cdots+a_1\lambda_i+a_0)x\\&=f(\lambda_i)x,\end{aligned}$$

所以$f(\lambda_i)$是$f(A)$的特征值.

（2）特征向量的性质

性质 1 A的互不相等的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$所对应的特征向量$p_1,p_2,\cdots,p_m$线性无关.

证 设$k_1p_1+k_2p_2+\cdots+k_mp_m=0$，两边左乘$A$，得

$$\lambda_1k_1p_1+\lambda_2k_2p_2+\cdots+\lambda_mk_mp_m=0,$$

两边左乘A，得

$$\lambda_1^2 k_1 p_1 + \lambda_2^2 k_2 p_2 + \cdots + \lambda_m^2 k_m p_m = 0,$$

如此反复，直至得到等式

$$\lambda_1^{m-1} k_1 p_1 + \lambda_2^{m-1} k_2 p_2 + \cdots + \lambda_m^{m-1} k_m p_m = 0.$$

将上面 m 个等式写成矩阵形式

$$(k_1 p_1, k_2 p_2, \cdots, k_m p_m)\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix} = (0, 0, \cdots, 0).$$

因为 $V(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \neq 0$，所以矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix}$ 可逆. 上式两边右乘 B^{-1}，得

$$(k_1 p_1, k_2 p_2, \cdots, k_m p_m) = (0, 0, \cdots, 0),$$

即

$$k_i p_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m).$$

因为特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 均为非零向量，故 $k_i = 0$（$i = 1, 2, \cdots, m$），所以 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

性质 2 A 的对应于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是 A 对应于这个特征值的特征向量.

证 设 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 均为 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量，对于 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 的任意非零线性组合 $k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + k_m p_m \ (\neq 0)$，有

$$\begin{aligned} A(k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + k_m p_m) &= k_1 A p_1 + k_2 A p_2 + \cdots + k_m A p_m \\ &= k_1 \lambda_0 p_1 + k_2 \lambda_0 p_2 + \cdots + k_m \lambda_0 p_m \\ &= \lambda_0 (k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + k_m p_m), \end{aligned}$$

所以 $k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + k_m p_m \ (\neq 0)$ 是 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量.

性质 3　若 A 可逆，则 A 对应于特征值 λ 的所有特征向量就是 A^{-1} 对应于特征值 λ^{-1} 的全部特征向量.

证　见特征值性质 3 证明.

性质 4　若 A 可逆，则 A 对应于特征值 λ 的所有特征向量就是 A^* 对应于特征值 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 的全部特征向量.

证　见特征值性质 4 证明.

性质 5　A 对应于特征值 λ 的所有特征向量就是矩阵多项式

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

对应于特征值 $f(\lambda)$ 的全部特征向量.

证　见特征值性质 5 证明.

例 1．7　设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $2,4,\cdots,2n$，求 $|A-3E|$.

解　记 $\varphi(\lambda)=\lambda-3$，则 $\varphi(A)=A-3E$，根据特征值性质 5，$\varphi(A)=A-3E$ 的特征值分别为

$$2-3,4-3,\cdots,2n-3.$$

由特征值性质 1，得

$$|A-3E|=(2n-3)(2n-5)\cdots(4-3)(2-3)=-(2n-3)!!.$$

例 1．8　如果 λ 是正交矩阵 A 的特征值，则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 也是 A 的特征值.

证　因为 A 为正交矩阵，即 $A^{-1}=A^T$，由特征值性质 3 知，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^T 的特征值，而 A 与 A^T 有相同的特征值，故 $\dfrac{1}{\lambda}$ 也是 A 的特征值.

例 1．9　设三阶矩阵 A 的三个特征值为 $-1,0,1$，所对应的特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix}a\\a+3\\a+2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}a-2\\-1\\a+1\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2a\\-1\end{pmatrix}$，且 $\begin{vmatrix}a&-5&8\\0&a+1&8\\0&3a+3&25\end{vmatrix}=0$，求 a 的值.

解　由 $\begin{vmatrix}a&-5&8\\0&a+1&8\\0&3a+3&25\end{vmatrix}=0$，得 $a(a+1)=0$，所以 $a=-1$ 或 $a=0$.

当 $a=-1$ 时，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$，显然 $\xi_1+\xi_3=0$，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性相关．而 ξ_1,ξ_2,ξ_3 分别属于 A 的三个不同的特征值，应线性无关，因此 $a\neq-1$．

当 $a=0$ 时，$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，因行列式 $|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=-1\neq0$，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，故 $a=0$．