3．3　行列式的计算

一个 n 阶行列式全部展开后，共有 $n!$ 项，当 $n=15$ 时，就有一亿亿项之多，而在实际应用中，几百阶几千阶的行列式计算是常见的，所以按定义计算行列式，在实际中几乎没有可行性.

在实际应用中，行列式的计算是利用行列式的性质，将行列式简化为三角行列式，然后将对角元相乘而得到行列式的值，或者是按 0 元较多的行展开，化为低阶行列式计算．行列式的计算方法总结如下：

（1）　用对角线法则计算（只适合于二、三阶行列式）

（2）　化三角形法，如上、下三角形，对角形等

（3）　定义法，适合于零元素较多的行列式的计算

（4）　利用性质化简计算

（5）　数学归纳法

（6）　利用递推公式

（7）　利用范德蒙行列式等已知结果

（8）　利用加边法转化为高一阶但更易化简的行列式计算

当然，这些方法不是独立的，要学会综合运用上述方法来计算行列式的值.

方法一　化三角形法

例 3．1　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解　$D=2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $(r_2-3r_1，\ r_3+3r_1，\ r_4-r_1)$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}\ (r_3+4r_2)=2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}\ (r_4-\frac{1}{2}r_3)$$

$$=2\begin{vmatrix}1 & -4 & 3 & 4\\ 0 & 3 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\times1\times3\times(-6)\times1=-36\,.$$

例 3．2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}6 & 1 & 1 & 1\\ 6 & 3 & 1 & 1\\ 6 & 1 & 3 & 1\\ 6 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\times8=48\,.$

例 3．3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解 $D=n!\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n}\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$ （从第 i 列提出公因子 i，i=2，3，…n）

$$=n!\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=-n!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

方法二 利用行列式性质计算

例 3．4 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1}\\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}$.

解 $D_n = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b_n \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$

$= a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_n$

例 3．5 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix}$.

解 $D = b_4 \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = b_4 \begin{vmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_4 - a_4b_1 \\ 0 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & a_2b_4 - a_4b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3b_4 - a_4b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$

$= -a_1b_4 \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_4 - a_4b_1 \\ 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & a_2b_4 - a_4b_2 \\ 0 & 0 & a_3b_4 - a_4b_3 \end{vmatrix} = -a_1b_4 \prod_{i=1}^{3} (a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i)$.

方法三 数学归纳法

例 3．6 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}$，证明：$D = \det(A)\det(B)$.

证 对 A 的阶数 k 用数学归纳法证明.

当 $k=1$ 时，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \det(A)\det(B).$$

设对 $k-1$ 阶矩阵成立，当 A 是 k 阶矩阵时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{m=1}^{k} a_{1m}(-1)^{1+m} D_{1m}$$

$$=\sum_{m=1}^{k} a_{1m}(-1)^{1+m}\det\begin{bmatrix} S_{1m} & O \\ C_m & B \end{bmatrix}$$

（S_{1m} 是矩阵 A 关于 a_{1m} 的 $k-1$ 阶余子矩阵，C_m 是矩阵 C 去掉第 m 列后得到的矩阵）

$$=\sum_{m=1}^{k} a_{1m}(-1)^{1+m}\det(S_{1m})\det(B) \quad \text{（归纳法假设）}$$

$$=\det(B)\sum_{m=1}^{k} a_{1m}(-1)^{1+m}\det(S_{1m})$$

$$=\det(A)\det(B).$$

类似地，有：设 A 为 n 阶方阵，B 为 m 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|,\quad \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|,\quad \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|.$$

由例 3．6 可以证明如下定理：

定理 3．1 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$，则

$$\det(AB)=\det(A)\det(B).$$

证 构造 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

由例 3．6 知，$D=\det(A)\det(B)$．在 D 中以 b_{1j} 乘第 1 列，b_{2j} 乘第 2 列，$\cdots$，b_{nj}

乘第n列，都加到第$n+j$列上（$j=1,2,\cdots,n$），得

$$D=\begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix}.$$

再对D作初等行变换$r_i \leftrightarrow r_{n+i}$（$i=1,2,\cdots,n$），得

$$D=(-1)^n\begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix}.$$

于是

$$D=(-1)^n|-E||AB|=(-1)^n(-1)^n|AB|=|AB|.$$

因此 $$\det(AB)=\det(A)\det(B).$$

例 3.7 设A,B为3阶方阵，$|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$______.

解 $|A+B^{-1}|=|A(A^{-1}+B)B^{-1}|=|A||A^{-1}+B||B^{-1}|=3\times 2\times\dfrac{1}{2}=3$. 故填$3$.

方法四 递推法

例 3．8 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$.

解 $D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n$.

由此递推得

$$D_n=a_n+xD_{n-1}=a_n+x(a_{n-1}+xD_{n-2})=a_n+a_{n-1}x+x^2D_{n-2}=\cdots$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+x^{n-1}D_1=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}.$$

例 3．9 计算n阶**范德蒙行列式**

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a_2-a_1&\cdots&a_n-a_1\\0&a_2^2-a_1a_2&\cdots&a_n^2-a_1a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2}&\cdots&a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix}\text{（}r_n-a_1r_{n-1},r_{n-1}-a_1r_{n-2},\cdots,r_2-a_1r_1\text{）}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2-a_1&a_3-a_1&\cdots&a_n-a_1\\a_2^2-a_1a_2&a_3^2-a_1a_3&\cdots&a_n^2-a_1a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2}&a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix}\text{（按第一列展开）}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_2^{n-2}&a_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\end{vmatrix}\text{（提出公因子）}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)D_{n-2}$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

由此可知，范德蒙行列式$V(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0\Leftrightarrow a_1,a_2,\cdots,a_n$中至少有两个相等.

方法五 加边法

例 3．10 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}a_1&x&x&\cdots&x\\x&a_2&x&\cdots&x\\x&x&a_3&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x&x&x&\cdots&a_n\end{vmatrix}$，其中$x\ne a_i,i=1,2,3,\cdots,n$.

解 $D_n=\begin{vmatrix}1 & x & x & x & \cdots & x\\ 0 & a_1 & x & x & \cdots & x\\ 0 & x & a_2 & x & \cdots & x\\ 0 & x & x & a_3 & \cdots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x & x & x & \cdots & a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x & x & x & \cdots & x\\ -1 & a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2-x & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 0 & a_3-x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x}{a_i-x} & x & x & x & \cdots & x\\ 0 & a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2-x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_3-x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x\end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i-x}\right)\prod_{i=1}^{n}(a_i-x).$$

最后来讨论有关余子式与代数余子式的问题.

例 3．11 已知$D_4=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ c & b & d & a\\ d & b & c & a\\ a & b & d & c\end{vmatrix}$，则 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$______，

$M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}=$______，其中$M_{ij}$与$A_{ij}$分别为余子式与代数余子式.

解 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=\begin{vmatrix}a & b & c & 1\\ c & b & d & 1\\ d & b & c & 1\\ a & b & d & 1\end{vmatrix}=0$，

$$M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}=-A_{14}+A_{24}-A_{34}+A_{44}=\begin{vmatrix}a & b & c & -1\\ c & b & d & 1\\ d & b & c & -1\\ a & b & d & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a-d & 0 & 0 & 0\\ c & b & d & 1\\ d & b & c & -1\\ a & b & d & 1\end{vmatrix}=(a-d)\begin{vmatrix}b & d & 1\\ b & c & -1\\ b & d & 1\end{vmatrix}=0,$$

故填0， 0.