线性代数练习题（5）详细解答

1．填空题

（1）β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 无解．对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ 施行初等行变换：

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & a & -5 \\ 2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $a = -3$ 时，方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 无解．故填 -3．

（2）因为 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，由定理 4．6 知，$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性相关．故填“相关”．

（3）因为 $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，故 $R(B) \le R\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 1$；又 $B \ne O$，故 $R(B) \ge 1$，所以 $R(B) = 1$．故填 1．

2．选择题

（1）因为 $|A| = 0$，所以 $R(A) < n$，故 A 的行（列）向量组线性相关，从而 A 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合．故选（C）；

（2）由定理 4．3 的推论知，选项（B）正确．故选（B）．

3．解： $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

从 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 中取子式 $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -10 \ne 0$，故 $R(A) = 3$，D_3 是 A 的一

个最高阶非零子式.

4．解：因为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，所以$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.

5．证明：令$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_r + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}_r = \mathbf{0}$，则

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + \cdots + k_r)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 0, \\ \quad\ k_2 + \cdots + k_r = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \qquad\qquad\quad k_r = 0, \end{cases}$$

解之得$k_1 = k_2 = \cdots k_r = 0$，因此$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$线性无关.

6．证明：充分性．因为$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，不妨设

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r,\quad \boldsymbol{\beta} = \mu_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \mu_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \mu_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

两式相减，得

$$(\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r)\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，所以$\lambda_i - \mu_i = 0, i = 1, 2, \cdots, r$，即$\lambda_i = \mu_i, i = 1, 2, \cdots, r$，从而$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$唯一地线性表示.

必要性．设$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$唯一线性表示为$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r$，若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则存在一组不全为零的数$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r$，使得

$$\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \mu_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \mu_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0},$$

两式相加，得

$$\boldsymbol{\beta} = (\lambda_1 + \mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (\lambda_r + \mu_r)\boldsymbol{\alpha}_r,$$

因为$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r$不全为零，所以至少存在一个$i$，使得$\lambda_i \neq \lambda_i + \mu_i$，这与$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$唯一线性表示矛盾，因此$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关.