4．5　向量空间

前面把n维向量的全体所构成的集合R^n称为n维向量空间．本节介绍向量空间的一般概念．

定义 4．8　设V为n维向量的集合，若V非空，且对于加法及数乘两种运算封闭，即：$\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall \lambda \in R$，有$\alpha + \beta \in V$，$\lambda \alpha \in V$，则称$V$为**向量空间**．

定义 4．9　设有向量空间V_1及V_2，若$V_1 \subset V_2$，就称V_1是V_2的**子空间**．

例 5．1　R^n是一个向量空间．

例 5．2　单个零向量构成一个向量空间，称之为**零向量空间**．

例 5．3　集合$V = \left\{ x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0 \right)^T \middle| x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in R \right\}$是一个向量空间．它是$R^n$的一个子空间．

例 5．4　集合$V = \left\{ x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 2 \right)^T \middle| x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in R \right\}$不是一个向量空间．

定义 4．10　设V为向量空间，如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in V$满足

（1）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；

（2）V中任一向量都可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示．

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为向量空间$V$的一个**基**，称$r$为向量空间$V$的**维数**，记为$\dim V = r$，并称$V$为$r$维向量空间．

关于定义的几点说明：

（1）若向量空间V没有基，则V的维数为 0．0 维向量空间只含一个零向量．

（2）向量空间V的基往往不唯一，不同的基是等价的，因而向量空间的维数是唯一的．

（3）若向量空间V的维数等于r，则V中任意r个线性无关的向量构成V的一个基．

（4）若$V_1 \subset V_2$，则$\dim V_1 \le \dim V_2$．

例 5．5　设有n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，集合

$$V = \left\{ x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m \middle| \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R \right\}$$

是一个向量空间．$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的任一个极大无关组都是$V$的一个基．向量空间$V$称为由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$所生成的向量空间，记为$L\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \right)$或$span\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \right)$．

例 5．6　设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$与向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$等价，记

$$V_1 = \left\{ x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m \middle| \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R \right\},$$

$$V_2 = \left\{ x = \mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2 + \cdots + \mu_s \beta_s \middle| \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s \in R \right\},$$

则$V_1 = V_2$．

容易得出如下结论：

（1）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基，则

$$V=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in R\}=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r).$$

（2）若向量空间$V\subset R^n$，则V的维数不会超过n，并且当V的维数为n时，$V=R^n$.

例 5．7 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&7&9\\2&4&5\\2&6&8\end{pmatrix}$，求由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$所生成的向量空间的一个基和维数，并将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中的非基向量用这个基线性表示.

解 由于

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&7&9\\2&4&5\\2&6&8\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&3/2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以α_1,α_2是这个向量空间的一个基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$所生成的向量空间的维数是 2，且有

$$\alpha_3=-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{3}{2}\alpha_2.$$

定义 4．11 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量空间$V$的一个基，则$V$中任一个向量$\alpha$都可由这个基唯一线性表示，设表示式为$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$，则称向量$(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$为$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下的坐标.

同一个向量在不同基下的坐标是不相同的. 下面研究同一个向量在不同基下的坐标之间的关系.

在向量空间V中取定一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，再取一个新基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，设

$$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1r}\alpha_r,\\ \beta_2=a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2r}\alpha_r,\\ \qquad\cdots\cdots\\ \beta_r=a_{r1}\alpha_1+a_{r2}\alpha_2+\cdots+a_{rr}\alpha_r.\end{cases},$$

把上述关系式写成矩阵形式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{r1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{r2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1r}&a_{2r}&\cdots&a_{rr}\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P,$$

其中 $P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$. 称矩阵 P 为从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的过渡矩阵，称 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)P$ 为**基变换公式**.

过渡矩阵的一个基本性质：过渡矩阵是可逆的.（板书证明）

设向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 下的坐标分别为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$ 与 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_r)^T$，则

$$y=P^{-1}x,$$

其中 P 为从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的过渡矩阵．这就是从旧坐标到新坐标的**坐标变换公式**.

（板书坐标变换公式的推导过程）

例 5．8　设三维向量空间 V 的两个基分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3，且

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1-\alpha_2, \\ \beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3, \\ \beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3. \end{cases}$$

若向量 $\xi=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3$，求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵，并求 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

解　基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

由坐标变换公式，得 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$