

## 概率论与数理统计练习题 (10)

### 区间估计、假设检验

姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_

#### 1. 填空题

(1) 某产品指标  $X \sim N(\mu, 1)$ , 从中随机抽取容量为 16 的一个样本, 计算得样本均值为  $\bar{X} = 2$ , 则总体均值  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间为\_\_\_\_\_.

(2) 某市随机对 1000 名成年人进行调查, 得知有 600 人喜欢上网, 则以 95% 的置信水平确定该市成年人喜欢上网的比率  $p$  的置信区间为\_\_\_\_\_.

(3) 从已知标准差  $\sigma = 5.2$  的正态总体中抽取容量为 16 的样本, 算得样本均值  $\bar{x} = 27.56$ , 在显著水平  $\alpha = 0.05$  之下检验假设  $H_0: \mu = 26$ , 检验结果是\_\_\_\_\_.

(4) 在  $\chi^2$  检验时, 用统计量  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ , 若  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  时, 用\_\_\_\_\_检验, 它的拒绝域为\_\_\_\_\_; 若  $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$  时, 用\_\_\_\_\_检验, 它的拒绝域为\_\_\_\_\_.

#### 2. 选择题

(1) 若总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2$  已知, 则对于确定的样本容量, 总体均值  $\mu$  的置信区间长度  $L$  与置信度  $1-\alpha$  的关系是 ( ).

- (A) 当  $1-\alpha$  缩小时,  $L$  缩短;      (B) 当  $1-\alpha$  缩小时,  $L$  增大;  
(C) 当  $1-\alpha$  缩小时,  $L$  不变;      (D) 以上说法均错.

(2) 设正态总体期望  $\mu$  的置信区间长度  $L = \frac{2S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$ , 则其置信度为 ( ).

- (A)  $1-\alpha$ ;      (B)  $\alpha$ ;      (C)  $1-\frac{\alpha}{2}$ ;      (D)  $1-2\alpha$ .

(3) 假设检验中, 显著性水平  $\alpha$  表示 ( ).

- (A)  $H_0$  为假, 但接受  $H_0$  的假设的概率;      (B)  $H_0$  为真, 但拒绝  $H_0$  的假设的概率;  
(C)  $H_0$  为假, 且拒绝  $H_0$  的假设的概率;      (D) 可信度.

#### 3. 计算题

(1) 岩石密度的测量结果  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，现抽取 12 个样品，测得

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 32.1, \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 89.92. \text{ 当 } \mu \text{ 未知时, 求方差 } \sigma^2 \text{ 的置信区间 } (\alpha = 0.1).$$

(2) 若总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  与  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  相互独立，已知样本数据

$n_1 = 80, \bar{x} = 200, s_1 = 80$ ;  $n_2 = 100, \bar{y} = 100, s_2 = 100$ . 求取  $\alpha = 0.01$  时,  $\mu_1 - \mu_2$  的置信区间.

(3) 设某次考试学生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩

$\bar{x}$  为 66.5 分，标准差  $s$  为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

(4) 某项考试要求成绩的标准差为 12，现从考试成绩中任意抽取 15 份，计算样本标准差

为 16，设成绩服从正态分布，问此次考试的标准差是否不合要求 ( $\alpha = 0.05$ )？

## 概率论与数理统计练习题（10）详细解答

### 1. 填空题

$$(1) \left( \bar{x} - \frac{1}{\sqrt{16}} u_{0.025}, \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{16}} u_{0.025} \right) = (1.51, 2.49).$$

$$(2) \text{ 设 } X = \begin{cases} 1, & \text{某人喜欢上网,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}, X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 是取自 } X \text{ 的样本, 则}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \stackrel{\text{近似地}}{\sim} N(0, 1),$$

故

$$P \left\{ \left| \frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right| < u_{\alpha/2} \right\} \approx 1 - \alpha,$$

即

$$P \left\{ \bar{X} - \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} < p < \bar{X} + \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right\} \approx 1 - \alpha,$$

而  $p$  的矩估计值为  $\hat{p} = 0.6$ , 故  $p$  的置信度为 95% 的置信区间约为

$$(\bar{x} \pm \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}) = (0.5696, 0.6304).$$

$$(3) \text{ 检验统计量 } U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \text{ 的观测值为 } u = \frac{27.56 - 26}{5.2 / \sqrt{16}} = 1.2 < u_{0.025} = 1.96, \text{ 故接受 } H_0.$$

$$(4) \text{ 双边假设: } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1); \text{ 左边假设:}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1).$$

### 2. 选择题

$$(1) \text{ 置信区间的长度为 } L = 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \text{ 当 } 1-\alpha \text{ 缩小时, } \alpha \text{ 增大, } u_{\alpha/2} \text{ 随之缩小, 置信区}$$

间的长度  $L$  缩短. 故选 (A).

(2) 总体均值  $\mu$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

其长度为  $L = \frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$ , 故当置信区间的长度为  $L = \frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$  时, 置信度为  $1-2\alpha$ . 故选 (D).

(3) 显著性水平  $\alpha$  表示犯第一类错误的概率, 即“当原假设  $H_0$  为真时, 拒绝  $H_0$  的概率”. 故选 (B).

### 3. 计算题

(1) 解:  $\bar{X} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} X_i \sim N(\mu, \sigma^2/12)$ ,  $\bar{x} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{32.1}{12} = 2.675$ ,

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = 89.92 - 12 \times 2.675^2 = 4.0525.$$

查表得  $\chi_{0.95}^2(11) = 4.575$ ,  $\chi_{0.05}^2(11) = 19.675$ , 于是  $\sigma^2$  的置信区间为

$$\left( \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right) = (0.206, 0.886).$$

(2) 解: 因为  $\bar{x} = 200$ ,  $\bar{y} = 100$ ,  $t_{0.005}(178) = 2.575$ ,

$$s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{79 \times 80^2 + 99 \times 100^2}{178} = 91.66^2,$$

所以  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 99% 的置信区间

$$\left( \bar{x} - \bar{y} \pm t_{0.005}(n_1 + n_2 - 2) s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) = (100 \pm 35.4) = (64.6, 135.4).$$

(3) 解: 检验假设为  $H_0: \mu = 70$ ,  $H_1: \mu \neq 70$ .

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{66.5 - 70}{15/6} = -1.4, \quad t_{0.025}(35) = 2.0301,$$

因为  $|t| < t_{0.025}(35)$ , 故接受  $H_0$ , 即认为全体考生的平均成绩为 70 分.

(4) 解: 检验假设为  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 12^2$ ,  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ .

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{14 \times 16^2}{12^2} = 24.8889, \chi_{0.025}^2(14) = 26.119, \chi_{0.975}^2(14) = 5.629,$$

因为  $\chi_{0.975}^2(14) < \chi^2 < \chi_{0.025}^2(14)$ ，所以接受  $H_0$ ，即认为此次考试的标准差符合要求。