3．2　行列式的性质

性质 3．1　行列式的某一行中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\det(A)$$

证　用数学归纳法．当$n=1$时，性质显然成立．设定理对所有$n-1$阶行列式成立，考虑n阶行列式，如果是第一行元素都乘以k，则

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} ka_{1j}(-1)^{1+j}B_{1j} = k\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} = k\det(A)$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如果是第i行$(2 \le i \le n)$元素都乘以k，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}B_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}kM_{1j}$$

$$= k\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} = k\det(A),$$

式中$n-1$阶行列式M_{1j}的第$i-1$行的元素乘以k就是B_{1j}．由归纳法假设，$B_{1j} = kM_{1j}$．

推论 1　行列式中某一行所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面．

推论 2　行列式中某一行所有元素都为 0，则行列式等于 0．

把 0 作为公因子提到行列式符号外面，则行列式必为 0．

说明：（1）行列式提公因子与矩阵提公因子的区别；（2）$\det(kA)=k^n\det(A)$.

性质 3.2　若行列式的某一行的元素都是两个数之和. 例如第i行的元素都是两数之和，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　用数学归纳法. 当$n=1$时，性质显然成立. 设性质对所有$n-1$阶行列式成立，考虑n阶行列式，如果$i=1$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}+b_{1j})(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{ij}+\sum_{j=1}^{n} b_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如果是$2\le i\le n$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}(M'_{1j}+M''_{1j})$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M'_{1j}+\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M''_{1j}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

式中$n-1$阶行列式M'_{1j}与M''_{1j}分别是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} 与 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中元素a_{1j}的余子式．由归纳法假设，$M_{1j}=M'_{1j}+M''_{1j}$．

性质 3．3 互换行列式的两行，行列式变号．

证明略．

性质 3．4 如果行列式有两行完全相同，则此行列式等于零．

证 将 n 阶矩阵 A 的相同的两行互换后记为 B，显然 $A=B$，而 $\det(A)=-\det(B)=-\det(A)$，所以$\det(A)=0$．

性质 3．5 行列式中如果有两行元素成比例，则行列式等于零．

证 $$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 3．6 把行列式的某一行的各元素乘以同一数然后加到另一行对应的元素上去，行列式不变．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

后一行列式有两行相等，故为零.

性质 3．7 行列式可以按第一列展开，即 $\det(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}$.

证明略.

性质 3．8 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等.

证 当 $n=2$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，故性质成立.

设性质对 $n-1$ 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式

$$\det(A^T)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}^{T} = \sum_{j=1}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} = \det(A).$$

由性质 3．8 可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 3．9 行列式可以按第 i 行（列）展开，即

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

证 将 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的第 i 行通过逐行对换移到第 1 行，则

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{1+j}M_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}\ .$$

性质 3．10　当 $i \neq j$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}(-1)^{i+k}M_{ik}=0$.

证　因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{jk})(-1)^{i+k}M_{ik}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}+\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(-1)^{i+k}M_{ik}\ ,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(-1)^{i+k}M_{ik}=0\,.$$

总结性质 3．9 和性质 3．10，有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}\det(A) & \text{当} i=j \\ 0 & \text{当} i\neq j\end{cases},\quad \text{或}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}\det(A) & \text{当} i=j \\ 0 & \text{当} i\neq j\end{cases}.$$

根据行列式的性质，我们可以对行列式做一些变换而不改变行列式的值或只改变行列式的符号.

（1）将行列式的第 i 行（列）与第 j 行（列）互换，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$（$c_i \leftrightarrow c_j$）；

（2）将行列式的第 i 行（列）乘以非零数 k，记为 $r_i \times k$（$c_i \times k$）；

（3）将行列式的第 j 行（列）乘以数 k 加于第 i 行（列），记为 $r_i + kr_j$（$c_i + kc_j$）；

例 2．1 计算上三角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解 $D = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.