2019-2020-1 高等数学上
期末复习题

1、计算下列极限.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$　　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^2\ln(1+x)}$　　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$　　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$　　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$　　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\csc x}{4x}-\frac{\cos^3 x}{4x\sin x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-\ln e\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^2\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1+x^2)-1}{3x^2(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1+x^2\cos x}{3x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^2}\ln\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\cos x-1)}{x^2}} = e^{-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{3+\cos x-1}{3}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{3}(\cos x-1)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x-\sin x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$$

$$3 \leq \sqrt[n]{1+2^n+3^n} \leq 3\sqrt[n]{3}$$

夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n} = 3$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}} = e^{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+x^2)\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)+1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right) = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\csc x}{4x}-\frac{\cos^3 x}{4x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\csc x\cdot\sin x-\cos^3 x}{4x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{+3\cos^2 x\sin x}{8x} = \frac{3}{8}$$

2、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1.$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 不存在，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

3、求出函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的所有可去间断点.

解：$x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 都是间断点

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-x^2)}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-x^2)}{\pi x}=\dfrac{1}{\pi}$ 可去

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(1-x)(1+x)}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{2}{\pi}$ 可去.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{2}{\pi}$ 可去

4、已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=4$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{1-\cos x}}{x\ln 2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\cdot(1-\cos x)\cdot\ln 2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\ln 2}$

$=\dfrac{2}{\ln 2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=4$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=2\ln 2$

5、求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$

$$\frac{1}{n+1}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right]< S_n < \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right]=\int_0^1 \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^1$$

$$=1-\cos 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right]=1-\cos 1$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]=1-\cos 1$

6、已知$f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，

（1）求a的值，

（2）若当$x\to 0$时，$f(x)-a$与x^k是同阶无穷小，求常数k的值.

解：(1) $a=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)x-\sin x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x-\sin x}{x^2}\right)=1 \qquad x(1+x)-\sin x(1+x)$$

(2) $f(x)-1=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}-1$

$$=\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x\sin x}=\frac{(1+x)(x-\sin x)}{x\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(x-\sin x)}{x^{2+k}} \qquad k=1.$$

7、证明：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明：$x_n^{(1)} = \dfrac{1}{2n\pi}$ $\qquad x_n^{(2)} = \dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

$n\to\infty$, $\quad x_n^{(1)}\to 0$, $\quad x_n^{(2)}\to 0$

$$\sin\frac{1}{x_n^{(1)}} = \sin 2n\pi = 0 \to 0$$

$$\sin\frac{1}{x_n^{(2)}} = \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) \to 1$$

由归结原理. 知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

8、已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，求 $f(0)$.

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}[xf(x)]^2}{x^2\cdot f(x)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x) = 2 = f(0)$$

9、已知曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)$.

解：$f'(x) = nx^{n-1}$ $\qquad f'(1)=n$

$y-1 = n(x-1)$

$y=0$, $\qquad x-1 = -\frac{1}{n}$

$\xi_n = 1-\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

10、（1）设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，求 $f'(100)$.

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，求 $f'(0)$

(1) $f'(100)=\lim\limits_{x\to 100}\dfrac{f(x)-f(100)}{x-100}$

$=\lim\limits_{x\to 100}\dfrac{(x-1)\cdots(x-100)}{x-100}=99\times 98\times\cdots 1=99!$

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$

$=(1-2)(1-3)\cdots(1-n)$

$=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

11、设 $x=g(y)$ 是 $f(x)=\ln x+\arctan x$ 的反函数，求 $g'(\frac{\pi}{4})$.

$x=1,\quad y=\frac{\pi}{4}$

$g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}}$

$g'(\frac{\pi}{4})=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

12、求函数 $f(x)=|x^3+x^2-2x|\arctan x$ 的不可导点.

$f(x)=|x(x-1)(x+2)|\arctan x$

不可导点为 $x=1$，$x=-2$ 两点

$x=0$ 为可导点

13、求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}(3-x)^4\sqrt[3]{x\ln(1+x)}$ 的导数.

$\ln y=\frac{1}{2}(\ln(x-1)-\ln(x+2))+4\ln(3-x)+\frac{1}{3}(\ln x+\ln\ln(1+x))$

$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)-\frac{4}{3-x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(x+1)}\cdot\frac{1}{1+x}\right)$

$y'=y\cdot[\ \cdots\cdots\ ]$

14、已知 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$，求 $y''(0)$。

$$e^y \cdot y' + 6(y + xy') + 2x = 0 \qquad x=0,\ y=0$$

代入 $\Rightarrow$ $y'(0) = 0$

$$e^y (y')^2 + e^y \cdot y'' + 6(2y' + xy'') + 2 = 0$$

把 $x=0$, $y=0$, $y'(0)=0$ 代入

$$y''(0) = -2$$

15、（1）设 $\begin{cases} x = a(t - \cos t), \\ y = b\sin t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.（2）设 $\begin{cases} x = \int_0^t \dfrac{1}{1+u^2} du, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$ $\quad t=0,\ x=0,\ y=0$

(1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{a(1+\sin t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{b\cos t}{a(1+\sin t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{-\sin t(1+\sin t) - \cos t \cdot \cos t}{(1+\sin t)^2} \cdot \frac{1}{a(1+\sin t)}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{-\sin t - 1}{(1+\sin t)^2} \cdot \frac{1}{a(1+\sin t)}$$

$$= \frac{b}{a^2} \frac{-1}{(1+\sin t)^2}$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(1+t^2)}{\frac{1}{1+t^2}} = (1+t^2)\ln(1+t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left[(1+t^2)\ln(1+t^2)\right] \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \left[2t\ln(1+t^2) + 2t\right] \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$= (1+t^2) \cdot 2t\left(1 + \ln(1+t^2)\right)$$

16、设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t), \end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的坐标.

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2} = \frac{1}{2(1+t)^2}$

$x=3$，$t=1$，$y=\ln 2$.　　$(3, \ln 2)$

$y'\big|_{x=3} = \frac{1}{8}$

法线　$y-\ln 2 = -8(x-3)$

$y=0$，　$x-3 = \frac{\ln 2}{8}$　　$x = 3+\frac{\ln 2}{8}$.

即法线与 x 轴交点坐标为 $\left(3+\frac{\ln 2}{8}, 0\right)$

17、设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3, \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

$t=0$，$x=3$，$y=1$.

$x_t'\big|_{t=0}=2$，$y_t'\big|_{t=0}=e$

解：$e^y \sin t - y + 1 = 0$

$e^y \cdot y_t' \sin t + e^y \cdot \cos t - y_t' = 0$

$y_t' = \frac{e^y \cos t}{1-e^y \sin t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y \cos t}{(1-e^y \sin t)\cdot(6t+2)}$　　$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{e}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^y \cos t}{(1-e^y \sin t)(6t+2)}\right)\cdot\frac{1}{6t+2}$

$= \frac{[e^y \cdot y_t' \cos t + e^y \cdot(-\sin t)](1-e^y \sin t)(6t+2) - e^y \cos t\,[(1-e^y \sin t)(6t+2)]'}{(1-e^y \sin t)^2(6t+2)^3}$

$t=0$，$x=3$，$y=1$，$y_t'=e$ 代入

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{2e^2 - e\left[6(1-e^y \sin t) + (6t+2)\cdot(-e^y y_t' \sin t - e^y \cos t)\right]}{8}\right|_{t=0}$

$= \frac{2e^2 - e(6-2e)}{8} = \frac{4e^2-6e}{8} = \frac{2e^2-3e}{4}$

18、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 证明：

（1）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可微；（2）$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不可微.

解：(1) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x}=0$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，必可微.

(2) $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ 不存在.

即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，一定不可微.

19、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

（2）方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

证明：(1) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 由极限局部保号性. $\exists\ \delta>0$. $(0,\delta)$ 内 $f(x)<0$.

不妨设 $x_1\in(0,\delta)$，$f(x_1)<0$

$f(x)$ 在 $[x_1,1]\subset[0,1]$ 上连续，$f(1)>0$，$f(x_1)<0$

由零点定理. $\exists\ c\in(x_1,1)$. $f(c)=0$.

(2) 令 $F(x)=f(x)\cdot f'(x)$

由 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$

$f(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续，$(0,c)$ 内可导 $f(0)=f(c)=0$

由零点定理. $\exists\ b\in(0,c)$. $f'(b)=0$.

对 $F(x)=f(x)\cdot f'(x)$，　$F(0)=F(b)=F(c)=0$.

在 $[0,b]$ 和 $[b,c]$ 上分别由罗尔中值定理

$$F'(\xi_1)=0 \quad \xi_1\in(0,b)$$

$$F'(\xi_2)=0,\quad \xi_2\in(b,c)$$

结论成立.

20、已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（2）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

证明：(1) 令 $F(x)=f(x)+x-1$. 在 $[0,1]$ 上连续

$$F(0)=f(0)-1=-1<0$$

$$F(1)=f(1)+1-1=1>0$$

由零点定理，$\exists\ \xi\in(0,1)$ $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 在 $[0,\xi]$，$[\xi,1]$ 上分别由拉格朗日中值定理

$$\frac{f(0)-f(\xi)}{0-\xi}=f'(\eta), \qquad \frac{f(\xi)-f(1)}{\xi-1}=f'(\zeta)$$

$$\frac{1-\xi}{\xi}=f'(\eta), \qquad \frac{1-\xi-1}{\xi-1}=\frac{\xi}{\xi-1}=f'(\zeta)$$

$$\Rightarrow\quad f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1. \qquad \eta\in(0,\xi)\subset(0,1),\ \zeta\in(\xi,1)\subset(0,1)$$

21、证明：（1）可导的奇函数其导数为偶函数；可导的偶函数其导数为奇函数.

（2）连续的奇函数其原函数是偶函数，连续的偶函数其原函数不一定是奇函数.

证：(1) $f(-x)=f(x)$　　$(f(-x))'=f'(x)$

$$-f'(-x)=f'(x)\ \Rightarrow\ f'(-x)=-f'(x)$$

即 $f'(x)$ 为奇函数

可导偶函数其导数为奇函数同理可证.

(2) $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt \overset{u=-t}{=\!=\!=} -\int_0^x f(-u)du=\int_0^x f(u)du$$

$$= \int_0^x f(t)\,dt = F(x)$$

22、求下列函数的单调区间、极值、凹凸区间及拐点

（1） $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$ （2） $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$

解：(1) $x\in R$

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+2) \Rightarrow$ 驻点 $x=3,\ x=-2.$

$f''(x)=12x-12. \Rightarrow x=1$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
y'	>0	<0	<0	>0
y''	<0	<0	>0	>0
y	↗	↘	↘	↗

单调增区间 $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$ 凹区间 $(1,+\infty)$

单调减区间 $(-2,3)$ 凸区间 $(-\infty,1)$

极大值 $f(-2)=3$, 极小值 $f(3)=-47$

拐点 $(1,-15)$

（2） $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$

解： $x\in R$

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

驻点 $x=-1$, 不可导点 $x=0$

$$f''(x)=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{x-2}{x^{\frac{5}{3}}}$$

$f''(x)=0,\ x=2$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
y'	<0	>0	>0	>0
y''	>0	>0	<0	>0
y	↘	↗	↗	↗

单调增区间 $(-1,+\infty)$, 单调减区间 $(-\infty,-1)$

凹区间 $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$

凸区间 $(0,2)$

极小值 $f(-1)=(-1)^{\frac{4}{3}}+4(-1)^{\frac{1}{3}}=-3$.

拐点 $(0,0)$, $(2,6\sqrt[3]{2})$

23、设 $\sin x+1$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.　　$\int f(x)dx=\sin x+1+C$

解: $\int\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)\,d(\arcsin x)$

$=\sin(\arcsin x)+C$

$=x+C$

24、求下列不定积分

$$\int\frac{f'(\ln x)}{x\sqrt{f(\ln x)}}dx=\int\frac{f'(\ln x)}{\sqrt{f(\ln x)}}d\ln x=\int\frac{1}{\sqrt{f(\ln x)}}df(\ln x)$$

$$=2\sqrt{f(\ln x)}+C$$

$$\int x^x(1+\ln x)dx=\int e^{x\ln x}(1+\ln x)dx=\int e^{x\ln x}d(x\ln x)$$

$$=e^{x\ln x}+C=x^x+C$$

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx=-\int\frac{2\cos x}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\cos^2 x)^2}}d\cos x$$

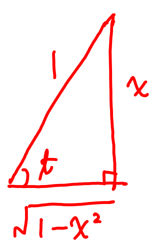
$$=-\int\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\cos^2 x)^2}}d\cos^2 x=-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx\overset{x=\sin t}{=\!=}\int t\cos^2 t\,dt=\int t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int(t+t\cos 2t)dt$$

$$=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}\int t\,d\sin 2t=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t\sin 2t-\frac{1}{4}\int\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{1}{8}\cos 2t+C$$

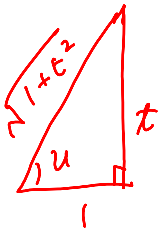


$$= \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x + \frac{1}{8}(1-2x^2) + C$$

$$= \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1+(x^4)^2)^2}\,dx^4 \overset{x^4=t}{=\!=} \frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt$$

$$\overset{t=\tan u}{=\!=} \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec^4 u}\sec^2 u\,du = \frac{1}{4}\int \cos^2 u\,du$$



$$= \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2u}{2}du = \frac{1}{16}\left(u + \frac{1}{2}\sin u\right) + C$$

$$= \frac{1}{16}\left(\arctan(x^4) + \frac{x^4}{1+x^8}\right) + C$$

$$\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{1}dx$$

$$= \int \left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\,d(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

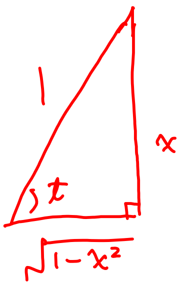
$$\int\frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}dx = \int\left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1}\right)de^x$$

$$= \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + C$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C$$

$$\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{x}{1+x}\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=\!=} \int \frac{\sin t}{1+\sin t}\cdot\cos^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{\sin t}{1+\cancel{\sin t}}(1-\sin t)(1+\cancel{\sin t})dt$$



$$= \int(\sin t - \sin^2 t)\,dt = -\cos t - \int\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$= -\cos t - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\tan t} \int \frac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t+1)\sec t}\,dt$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{2\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t+1}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,d\sin t$$

$$= \arctan(\sin t) + c$$

$$\int \frac{1}{x(x^6+4)}dx = \int \frac{x^5}{x^6(x^6+4)}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x^6(x^6+4)}\,dx^6$$

$$= \frac{1}{24}\int \left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^6+4}\right)dx^6$$

$$= \frac{1}{24}\ln\left(\frac{x^6}{x^6+4}\right) + c$$

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x+\cos x}dx \qquad \cos x = A(2\sin x+\cos x) + B(2\cos x - \sin x)$$

$$\begin{cases} 2A - B = 0 \\ A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{2}{5}$$

$$= \int \left[\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,\frac{2\cos x - \sin x}{2\sin x + \cos x}\right]dx$$

$$= \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\ln|2\sin x + \cos x| + c$$

$$\frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{e^x}$$

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \arctan e^x\, d\,e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+e^{2x})e^x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\arctan e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{2}\int\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{e^x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\arctan e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{2}\arctan e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + c$$

25、设$\int xf(x)dx = \arcsin x + C$，求$\int \frac{1}{f(x)}dx$.

解: $x f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$$

$$\int\frac{1}{f(x)}dx=\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

26、设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极小值，在 $x=-2$ 处有极大值 4，又知

$f'(x)=3x^2+3x+a$，a 为常数，求 $f(x)$.

解: $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+3x+a)dx$

$$=x^3+\frac{3}{2}x^2+ax+C$$

$f'(1)=0.\quad 3+3+a=0\quad a=-6$

$f(-2)=4\quad 4=-8+6-2a+c$

$c=6-12=-6.$

即 $a=-6$, $c=-6$.

27、(1) 设 $f(x)=\int_x^{x^2}\sin t^2 dt$，求 $f'(x)$.

(2) 设 $\int_0^x \sin(x-t)^2 dt$，求 $f'(x)$.

解: (1) $f'(x)=\sin(x^4)\cdot 2x-\sin(x^2)$

(2) $\int_0^x \sin(x-t)^2dt \xlongequal{x-t=u} -\int_x^0 \sin(u^2)\,du=\int_0^x\sin(u^2)du$

$f'(x)=\sin(x^2)$

28、设 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx=5, f(\pi)=2$, 求 $f(0)$

解: $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx+\int_0^{\pi}\sin x\,d f'(x)$

$$=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx+\cancel{f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi}}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx-\int_0^{\pi}\cos x\,d f(x)$$

$$= \int_0^{\pi} \cancel{f(x)\sin x\,dx} - \cos x \cdot f(x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cancel{f(x)\,d\cos x}$$

$$= -\left[-f(\pi) - f(0)\right] = f(\pi) + f(0) = 5$$

$$f(\pi) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 3.$$

29、计算下列定积分

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin\theta - \sin^3\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin\theta}\,|\cos\theta|\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{-2}^{3} |x^2 - 2x - 3|\,dx = \int_{-2}^{3} |(x-3)(x+1)|\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^2-2x+3)\,dx + \int_{-1}^{3} (3+2x-x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{-1} + 3 + 12 + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 - \left(\frac{-8}{3} - 4\right) + 3 + 12 + 8 - \frac{27}{3} - 1 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{7}{3} + 3 + 22 - \frac{26}{3} = 25 - \frac{19}{3} = \frac{56}{3}$$

$$\int_{-1}^{2} \min\{1, x^2\}\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx + \int_1^2 1\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 + 1 = \frac{5}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$$

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^2} (1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,d(\ln x + 1) = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{e^2} = \frac{2}{3}\left[3^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1)$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx \xrightarrow[x=\ln(t^2+1)]{t=\sqrt{e^x-1}} \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2 - 2\arctan t\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx = \int_0^{2\pi} x^2 d\sin x = x^2\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x\cdot 2x dx$$

$$= 2\int_0^{2\pi} x\, d\cos x = 2x\cos x\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\cos x\, dx$$

$$= 4\pi - 2\sin x\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi$$

$$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx \xlongequal[x=t^2]{t=\sqrt{x}} \int_0^{\pi} t\cos t\cdot 2t\,dt = 2\int_0^{\pi} t^2 d\sin t$$

$$= 2t^2\sin t\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\sin t\cdot 2t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\pi} t\, d\cos t = 4t\cos t\Big|_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi}\cos t\,dt$$

$$= -4\pi - 4\sin t\Big|_0^{\pi}$$

$$= -4\pi.$$

$$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} dx = 2$$

30、设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ \ln(1+x), & x\ge 0\end{cases}$，计算 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解：$\int_1^3 f(x-2)dx \xlongequal{t=x-2} \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{0}(1+x^2)dx + \int_0^1 \ln(1+x)dx$

$$= 1 + \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0} + x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$= \frac{4}{3} + \ln 2 - 1 + \ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + 2\ln 2$$

31、已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = ax^2$，

（1）求 $f(x)$；（2）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1，求 a 的值.

解：$\int_0^x tf(x-t)dt \xlongequal{u=x-t} -\int_x^0 (x-u)f(u)du = \int_0^x (x-t)f(t)dt$

$$= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$

则 $\int_0^x f(t)dt + x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt = ax^2$

两边对 x 求导

$$f(x) + \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 2ax$$

即 $f(x) + \int_0^x f(t)dt = 2ax$

再对 x 求导

$f'(x) + f(x) = 2a$. 令 $y = f(x)$

$y' + y = 2a$.

$$y = e^{-\int dx}\left(\int 2a e^{\int dx} dx + c\right)$$

$= e^{-x}(2ae^x + c) = ce^{-x} + 2a$ 又 $f(0)=0$

$\Rightarrow c = -2a$.

$f(x) = 2a(1-e^{-x})$

(2) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2a(1-e^{-x})dx = 2a\left(1 + e^{-x}\Big|_0^1\right) =$

$= 2a(1+e^{-1}-1) = \frac{2a}{e} = 1 \Rightarrow a = \frac{e}{2}$.

32、$f(x)$在$[0,+\infty)$可导，$f(0)=0$，且其反函数为$g(x)$，若$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2 e^x$，求$f(x)$.

解: $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$

两边同时求导.

$$g[f(x)]\cdot f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

即 $xf'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

$f'(x) = (2+x)e^x$

$f(x) = \int (2+x)e^x dx = 2e^x + \int x\, de^x$

$= 2e^x + xe^x - e^x + c = (x+1)e^x + c$

$f(0)=0 \Rightarrow c = -1$.

$\Rightarrow f(x) = (x+1)e^x - 1$

33、计算积分$\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} f(x-2)\,\mathrm{d}x$，其中$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, & x<0\\ xe^{-x^2}, & x\ge 0\end{cases}$.

解：$\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} f(x-2)dx \xlongequal{x-2=t} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} f(t)\,dt$

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\ln(1+x)}{1+x}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

$= \frac{1}{2}\ln^2(1+x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{0}^{+\infty}$

$= -\frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

34、求函数$F(x)=\int_0^x \frac{3t}{t^2-t+1}dt$在区间[0,1]上的最小值.

解：$F'(x)=\frac{3x}{x^2-x+1}$　　$F'(x)=0$，$x=0$.

$x>0$. $F'(x)>0$　$F(x)\nearrow$

最小值为$F(0)=0$

最大值为$F(1)=\int_0^1 \frac{3t}{t^2-t+1}dt$

$=\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2t-1+1}{t^2-t+1}dt$

$=\frac{3}{2}\ln(t^2-t+1)\Big|_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\Big|_0^1$

$=\sqrt{3}\left[\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3})\right]$　　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$

35、已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$，求常数$a$的值.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{-2a}}\right]^{\frac{-2ax}{x+a}}=e^{-2a}$

$\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx=-2\int_a^{+\infty}x^2\,de^{-2x}$

$=-2x^2e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}\cdot 2x\,dx$

$=2a^2e^{-2a}-2\int_a^{+\infty}x\,de^{-2x}$

$=2a^2e^{-2a}-2xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx$

$$= 2a^2e^{-2a} + 2ae^{-2a} - e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}$$

$$= (2a^2+2a+1)e^{-2a}$$

则 $\quad 2a^2+2a+1=1 \qquad 2a^2+2a=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$ 或 $a=-1$

36、求曲线 $y=x^3-x^2$ 与 x 轴所围成图形的面积，并计算该图形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积.

解: $\quad y=0, \quad x=0, \quad x=1.$

① $S=\int_0^1 (x^2-x^3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=\frac{1}{12}$

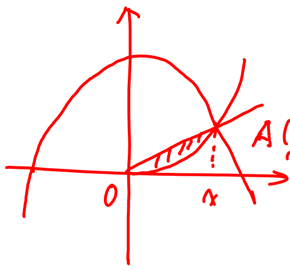
② $V=\int_0^1 \pi(x^2-x^3)^2dx$

$=\pi\int_0^1 (x^4-2x^5+x^6)dx$

$=\pi\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)$

$=\frac{\pi}{105}$

37、设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A． 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形．问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？



$$k=\frac{\frac{a}{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}$$

解: $\begin{cases} y=ax^2 \\ y=1-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{a+1}} \\ y=\frac{a}{a+1} \end{cases}$

OA 直线方程 $\qquad y=\frac{a}{\sqrt{a+1}}x$

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{a+1}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\pi\cdot(ax^2)^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{(a+1)^{\frac{5}{2}}}-\pi a^2\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}$$

$$=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{(a+1)^{\frac{5}{2}}}-\frac{\pi a^2}{5}\cdot\frac{1}{(a+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{2\pi}{15}\frac{a^2}{(a+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$V'(a)=\frac{2\pi}{15}\frac{2a(a+1)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(a+1)^{\frac{3}{2}}}{(a+1)^5}=\frac{2}{15}\pi\cdot\frac{2a(a+1)-\frac{5}{2}a^2}{(a+1)^{\frac{7}{2}}}$$

$$=\frac{2}{15}\pi\cdot\frac{2a^2-\frac{5}{2}a^2+2a}{(a+1)^{\frac{7}{2}}}=\frac{2}{15}\pi\cdot\frac{-\frac{1}{2}a(a-4)}{(a+1)^{\frac{7}{2}}}$$

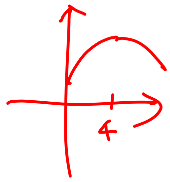
$V'(a)=0 \qquad a=0$ (舍) $\qquad a=4$

$a>4, \quad V'(a)<0.$

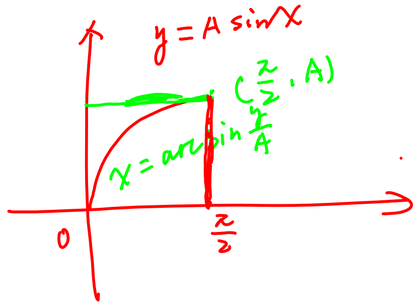
$a<4, \quad V'(a)>0,$

$a=4$ 为唯一极大值点

即为最大值点.



38、设 A>0，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0,x=\frac{\pi}{2}$ 所形成的平面区域，V_1,V_2 分别表示 D 绕 X 轴与绕 Y 轴旋转所成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值．



解: $V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cdot(A\sin x)^2dx$

$=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{\pi}{2}A^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2A^2}{4}$

$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi x\cdot A\sin x\,dx$

$=-2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d\cos x$

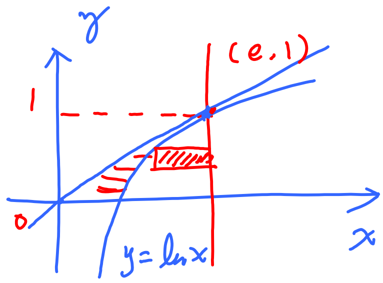
$=-2\pi A\,x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$=2\pi A$

$V_1=V_2 \Rightarrow \frac{\pi^2A^2}{4}=2\pi A \qquad A=\frac{8}{\pi}.$

39、过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D．（1）求 D 的面积．

（2）求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V．



解:(1) 切点 $(x_0,\ln x_0)$.

切线 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

过 $(0,0)$ 点 $\Rightarrow x_0=e$. 定点 $(e,1)$

切线 $y=\frac{x}{e}$

$S=\int_0^1(e^y-ey)dy=e^y\Big|_0^1-\frac{e}{2}y^2\Big|_0^1=e-1-\frac{e}{2}=\frac{e}{2}-1=\frac{e-2}{2}$

(2) $V=\frac{1}{3}\pi e^2-\int_0^1 \pi\cdot(e-e^y)^2\,dy$

$=\frac{\pi}{3}e^2-\pi\int_0^1(e^2-2e^{y+1}+e^{2y})\,dy$

$=\frac{\pi}{3}e^2-\pi e^2+2\pi e^{y+1}\Big|_0^1-\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1$

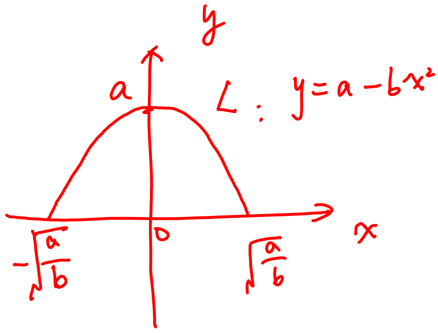
$=\frac{\pi}{3}e^2-\pi e^2+2\pi e^2-2\pi e-\frac{\pi}{2}e^2+\frac{\pi}{2}$

$=\frac{5}{6}\pi e^2-2\pi e+\frac{\pi}{2}$

40、设有抛物线 $L: y=a-bx^2\ (a>0,b>0)$，试确定常数 a，b 的值，使得下列两个条件同时成立：

（1）L 与直线 $y=-x+1$ 相切；

（2）L 与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积最大。



解： 由条件(1)得

$$\begin{cases} y=a-bx^2 \\ y=-x+1 \\ -2bx=-1 \end{cases} \Rightarrow a+\frac{1}{4b}=1$$

$V_y(a)=\int_0^a \pi\frac{a-y}{b}\,dy=\frac{\pi a^2}{2b}=2\pi(a^2-a^3)$

$V_y'(a)=2\pi(2a-3a^2)=0$

$a=0$（舍），$a=\frac{2}{3}$.　$V_y''(\frac{2}{3})<0$.　$b=\frac{3}{4}$ 时体积最大