2017-2018 学年第一学期考试试题

课程名称 《 线性代数 》 任课教师签名 ________

出题教师签名 题库出题 审题教师签名 ________

考试方式 （闭）卷 适用专业 工科本科 40 学时

考试时间 （ 120 ）分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷人								

一、选择题（本题满分 16 分．共 4 个小题，每小题 4 分．在每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题中括号内）

1．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，则（ ）．

（A）存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$；（B）存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QB}$；

（C）存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BQ}$；（D）以上结论都不对．

2．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则必有（ ）．

（A）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；（B）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（C）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$；（D）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$．

3．设有两个 n 维向量组(I)：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 和(II)：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{a}_m$，其中 $m>r\geq 1$，则下列结论正确的是（ ）．

（A）向量组（I）线性相关时，向量组（II）线性相关；

（B）向量组（I）线性无关时，向量组（II）线性无关；

（C）向量组（II）线性相关时，向量组（I）线性相关；

（D）以上结论都不对．

4．若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一行元素之和为 10，则 $\boldsymbol{A}$ 一定有一个特征值为（ ）．

（A）0；（B）0.1；（C）10；（D）-10．

二、填空题（本题满分 16 分．共 4 个小题，每小题 4 分．）

1．设 $\boldsymbol{A}=(3,1,2),\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{ABC}=$________．

2．设 $\boldsymbol{A}^*$ 是三阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*=$___$\boldsymbol{A}$．

3．若 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $6,8,11$，则 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|=$__________．

4．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times 3$ 的矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=1$，若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 满足 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(1,2,3)^T$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(6,-1,1)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1=(5,1,0)^T$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为________________________________．

三、计算题(本题满分 30 分．共 5 个小题，每小题 6 分．)

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$．

2．计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1+a&1&1\\1&1+b&1\\1&1&1+c\end{vmatrix}(abc\neq 0)$．

3．验证 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一个基，并求 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ 在该基下的坐标．

4．设线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$没有非零解，问$\lambda, \mu$应满足什么条件？

5．设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$相似，求$x, y$的值.

四、解答题（本题满分 8 分.）

已知$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 1 & 9 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & -7 & 8 \end{pmatrix}$，求$R(\boldsymbol{A})$及$\boldsymbol{A}$的列向量组的一个极大无关组，并将其余列向量用该极大无关组线性表示.

五、解答题（本题满分 8 分.）

求方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$的基础解系及通解.

六、解答题（本题满分 10 分.）

求一个正交变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$化为标准形.

七、证明题（本题满分 12 分．共 2 个小题，每小题 6 分.）

1．设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，若对任何n维列向量$\boldsymbol{b}$，方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$都有解，则$R(\boldsymbol{A}) = n$.

2．设λ是实正交矩阵$\boldsymbol{A}$的一个实特征值，试证：$\lambda^2 = 1$.