2．2　矩阵的运算

1．矩阵的线性运算

（1）矩阵的加法

定义 2．2　设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则矩阵 A 与 B 的**和**记为 $A+B$，规定为 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$，即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

例如，设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，　则

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+1 & 5+3 & 7+2 \\ 2+2 & 0+1 & 4+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

显然，两个矩阵只有当它们是同型矩阵时才能相加.

矩阵加法的运算规律（设 A,B,C 都是 $m\times n$ 矩阵）:

（1）**交换律**　$A+B=B+A$；

（2）**结合律**　$(A+B)+C=A+(B+C)$.

设矩阵 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，称 $-A$ 为矩阵 A 的**负矩阵**．显然有

$$A+(-A)=O.$$

由此规定矩阵的**减法**为

$$A-B=A+(-B).$$

（2）数与矩阵相乘

定义 2．3　数 λ 与矩阵 A 的乘积，记为 λA 或 $A\lambda$，规定为 $\lambda A=(\lambda a_{ij})$，即

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

例如，设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，　则

$$3A=3\begin{pmatrix}3&5&7&2\\2&0&4&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times3&3\times5&3\times7&3\times2\\3\times2&3\times0&3\times4&3\times3\\3\times0&3\times1&3\times2&3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&15&21&6\\6&0&12&9\\0&3&6&9\end{pmatrix}.$$

数乘矩阵的运算规律：（设 A 、 B 都是 $m\times n$ 矩阵， λ 、 μ 是数）：

（1）**结合律** $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ ；

（2）**分配律** $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$，$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

矩阵的加法运算与数乘运算统称为矩阵的**线性运算**.

例 2．1 设 $A=\begin{pmatrix}3&5&7&2\\2&0&4&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&1&5&7\\0&6&4&8\end{pmatrix}$，求 $3A-2B$.

解 $3A-2B=3\begin{pmatrix}3&5&7&2\\2&0&4&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&1&5&7\\0&6&4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&15&21&6\\6&0&12&9\\0&3&6&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&4&0\\4&2&10&14\\0&12&8&16\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}9-2&15-6&21-4&6-0\\6-4&0-2&12-10&9-14\\0-0&3-2&6-8&9-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9&17&6\\2&-2&2&-5\\0&1&-2&-7\end{pmatrix}.$$

例 2．2 已知 $A=\begin{pmatrix}3&5&7&2\\2&0&4&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&1&5&7\\0&6&4&8\end{pmatrix}$，且 $A+2X=B$，求 X .

解 $X=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&-2&-5&-2\\0&1&1&4\\0&5&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-5/2&-1\\0&1/2&1/2&2\\0&5/2&1&5/2\end{pmatrix}.$

2．矩阵的乘法

定义 2．4 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵， $B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，则矩阵 A 与矩阵 B 的**乘积**记为 AB，规定为 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

定义 2．4 表明：乘积 $AB=C$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 就是 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列元素对应乘积之和.

值得注意的是，只有当左边的矩阵的列数等于右边的矩阵的行数时，两个矩阵相乘才有意义.

例 2．3 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&2&4\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&1&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$，求 AB.

解　$AB=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&1&0\\3&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&5&1\\8&1&13\end{pmatrix}$.

例 2．4　设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，　求 AB 及 BA.

解　$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$.

例 2．5　设 $A=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&-8\\-3&6\end{pmatrix}$，求 AB 及 BA.

解　$AB=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-8\\-3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}4&-8\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-36&-48\\27&36\end{pmatrix}$.

例 2．6　设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}$，求 AB 及 BA.

解　$AB=BA=\begin{pmatrix}\lambda_1k_1&&&\\&\lambda_2k_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_nk_n\end{pmatrix}$.

可以看出，矩阵的乘法一般不满足交换律，所以左乘一个矩阵和右乘同一个矩阵是有区别的，如果两个 n 阶方阵 A 与 B 相乘，　有 $AB=BA$，则称矩阵 A 与矩阵 B **可交换**．两个非零矩阵相乘，可能是零矩阵，所以不能从 $AB=O$，推出 $A=O$ 或 $B=O$．不能从 $A(X-Y)=O$，推出 $X=Y$.

矩阵乘法的运算规律（设下列矩阵都可以进行有关运算）：

（1）**结合律**　$(AB)C=A(BC)$；　$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$（$\lambda$ 为数）；

（2）**分配律**　$(A+B)C=AC+BC$，$C(A+B)=CA+CB$.

容易验证：$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$，简写成 $EA=AE=A$.

对于数量矩阵 λE，由 $(\lambda E)A=\lambda A, A(\lambda E)=\lambda A$，可知数量矩阵 λE 与矩阵 A 的乘积等于数 λ 与矩阵 A 的乘积，并且当 A 为 n 阶方阵时，有

$$(\lambda E_n)A_n=\lambda A_n=A_n(\lambda E_n),$$

这表明数量矩阵 λE 与任何同阶方阵都是可交换的.

有了矩阵的乘法，就可以定义矩阵的**幂**．设 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^0 = E, A^1 = A, A^2 = A^1A^1, \cdots, A^{k+1} = A^kA^1,$$

其中 k 为非负整数．显然只有方阵的幂才有意义．

矩阵幂的运算规律：$A^{k+l} = A^kA^l$，$\left(A^k\right)^l = A^{kl}$（$k$，$l$ 为非负整数）.

值得注意的是，对于 n 阶方阵 A、B，一般地，$(AB)^k \neq A^kB^k$，只有当 A 与 B 可交换时，才有 $(AB)^k = A^kB^k$．

类似的，当 A 与 B 可交换时，有

（1）$\left(A+B\right)^2 = A^2 + 2AB + B^2$，$\left(A-B\right)^2 = A^2 - 2AB + B^2$；

（2）$A^2 - B^2 = \left(A+B\right)\left(A-B\right)$ 或 $A^2 - B^2 = \left(A-B\right)\left(A+B\right)$；

（3）$A^3 + B^3 = \left(A+B\right)\left(A^2 - AB + B^2\right)$，$A^3 - B^3 = \left(A-B\right)\left(A^2 + AB + B^2\right)$；

（4）$\left(A+B\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k$．

设 $f\left(x\right) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 是关于 x 的 m 次多项式，A 为 n 阶矩阵，则

$$f\left(A\right) = a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0E$$

也是一个 n 阶矩阵，称之为关于**矩阵 A 的 m 次多项式**.

3．矩阵的转置

定义 2．5 矩阵 A 的行与列互换所得到的矩阵，叫做 A 的**转置矩阵**，记作 A^T．

例如，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 6 & -1 & 21 \end{pmatrix}$ 的转置矩阵为 $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & -1 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$.

矩阵的转置有如下运算规律：

（1） $(A^T)^T = A$；

（2） $(A+B)^T = A^T + B^T$ ；

（3） $(\lambda A)^T = \lambda A^T$（$\lambda$ 为数）;

（4） $(AB)^T = B^TA^T$ ．

证明　仅证明规律（4）．设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$， $B=(b_{ij})_{s\times n}$，记

$$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}\ ,\ B^TA^T=D=(d_{ij})_{n\times m}\ .$$

$(AB)^T$ 的第 i 行第 j 列的元素就是 AB 的第 j 行第 i 列的元素：

$$c_{ji}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{js}b_{si}\,,$$

而 B^TA^T 的第 i 行第 j 列的元素是 B^T 的第 i 行 $(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{si})$ 与 A^T 第 j 列 $(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{js})^T$ 的乘积，所以

$$d_{ji}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{si}a_{js}\,.$$

因此

$$d_{ij}=c_{ji}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)\,,$$

即 $(AB)^T=B^TA^T$.

例 2．7　已知 $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&5\\-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\6&3\end{pmatrix}$，求 $(AB)^T$.

解法 1　因为

$$AB=\begin{pmatrix}2&0\\1&5\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\31&16\\5&2\end{pmatrix},$$

所以

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}2&31&5\\2&16&2\end{pmatrix}.$$

解法 2

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1&6\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&31&5\\2&16&2\end{pmatrix}.$$

例 2．8　设 $AA^T=O$，证明 $A=O$.

证明　设

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\,,\ \ B=A^T=(b_{ij})_{m\times n}\,,\ \ AA^T=C=(c_{ij})\,,$$

其中$b_{ij}=a_{ji}$，所以

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ik}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0\,(i=1,2,\cdots,n).$$

从而

$$a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0\ \ (i=1,2,\cdots,n),$$

即$A=O$.

对称矩阵　设A为n阶方阵，如果满足$A^T=A$，即$a_{ij}=a_{ji}$（$i,j=1,2,\cdots,n$），则称A为**对称矩阵**，简称**对称阵**.

对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

对称矩阵的性质

（1）若A,B为同阶对称矩阵，λ为常数，则$A\pm B,\lambda A$也是对称矩阵；

（2）若A,B为同阶对称矩阵，则AB为对称矩阵的充要条件是$AB=BA$.

反称矩阵　设A为n阶方阵，如果满足$A^T=-A$，即$a_{ij}=-a_{ji}$（$i,j=1,2,\cdots,n$），则称A为**反对称矩阵**，简称**反对称阵**.

反对称矩阵主对角线上的元必为0.

例2．9　设$X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$满足$X^TX=1$，$E$为$n$阶单位阵，$H=E-2XX^T$，证明$H$为对称阵，且$HH^T=E$.

4．共轭矩阵

矩阵A的元a_{ij}为复数时，则称矩阵A为复矩阵．当$A=(a_{ij})$为复矩阵时，用$\bar{a}_{ij}$表示a_{ij}的共轭复数，记$\overline{A}=(\bar{a}_{ij})$，称$\overline{A}$为$A$的**共轭矩阵**.

共轭矩阵满足的运算规律（设A、B为复矩阵，λ为复数，且运算都是有意义的）：

（1）$\overline{\overline{A}}=A$；

（2）$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$；

（3）$\overline{\lambda A}=\bar{\lambda}\,\overline{A}$；

（4）$\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

矩阵运算的应用

（1）**线性变换的矩阵形式**

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$（一般形式）

这种从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的变换称为**线性变换**.

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$，则线性变换可表示为

$$y = Ax,$$

称之为线性变换的**矩阵形式**，称 A 为线性变换的**系数矩阵**.

（2）**线性方程组的矩阵形式**

一般形式 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，则线性方程组可表示为

$$Ax = b,$$

称之为线性方程组的**矩阵形式**，称 A 为线性方程组的**系数矩阵**，称 x 为**未知数向量**，称 b 为**常数项向量**.

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$，…，$\alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，则线性方程组可表示为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

称之为线性方程组的**向量形式**.