2016-2017 学年第一学期考试试题（A）卷

课程名称 《 线性代数 》 任课教师签名 ________

出题教师签名 题库出题 审题教师签名 ________

考试方式 （闭）卷 适用专业 工科本科 40 学时

考试时间 （ 120 ）分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷人								

一、选择题（本题满分 16 分．共 4 个小题，每小题 4 分．在每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题中括号内）

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（ ）．

（A）$\boldsymbol{APQ}=\boldsymbol{B}$； （B）$\boldsymbol{AQP}=\boldsymbol{B}$； （C）$\boldsymbol{PQA}=\boldsymbol{B}$； （D）$\boldsymbol{QPA}=\boldsymbol{B}$．

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则（ ）．

（A）$\boldsymbol{A}$ 中必有两行（列）的对应元素成比例；
（B）$\boldsymbol{A}$ 中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合；
（C）$\boldsymbol{A}$ 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合；
（D）$\boldsymbol{A}$ 中至少有一行（列）向量为零向量．

3．非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中，未知量个数为 n，方程个数为 m，$R(\boldsymbol{A})=r$，则（ ）．

（A）$r=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解； （B）$r=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；
（C）$m=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解； （D）$r<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解．

4．若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则（ ）．

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角矩阵；（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值与特征向量；
（C）$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$； （D）对于任意的常数 t，$\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-t\boldsymbol{E}$ 相似。

二、填空题（本题满分 16 分．共 4 个小题，每小题 4 分．）

1．设 $\boldsymbol{A}=(2,3,1),\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{ABC}=$________．

2．设 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 是 $D=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{4j} 的代数余子式，则

$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$________．

3．设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3$，则 $|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}|=$__________．

4．设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1,\boldsymbol{b}=(1,0,0)^T$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解是______________．

三、计算题(本题满分 30 分．共 5 个小题，每小题 6 分．)

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{X}$．

2．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$．

3．验证$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$是$R^3$的一个基，并求$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}$在该基下的坐标.

4．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&t\end{pmatrix}$，若存在三阶非零矩阵$\boldsymbol{B}$，满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求$t$.

5．设0是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&x\end{pmatrix}$的特征值，求$x$与$\boldsymbol{A}$的非零特征值.

四、解答题（本题满分8分.）

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-2&0&-4\\4&4&16&7&14\\3&-7&-8&-3&0\\2&5&14&6&10\end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组的一个极大无关组，并把其余列向量用这个极大无关组线性表示.

五、解答题（本题满分8分.）

求方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+4x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-x_5=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4+x_5=0\end{cases}$的基础解系及通解.

六、解答题（本题满分10分.）

求一个正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将三元二次型

$$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$$

化为标准形.

七、证明题（本题满分12分．共2个小题，每小题6分.）

1．试证：若$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，且$\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|=-1$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

2．设n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，试证：$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=n$.