

一、填空题

1、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1-3x)}{\sin^2 2x} = \underline{\hspace{2cm}}$

2、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$

3、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+3n+1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

4、若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 点可导, 且 $f'(1) = -2$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x) - f(\cos 2x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

5、 $y = (x^4 + 1) \arctan x^2$, 则导数 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$

6、函数 $y = f(x)$ 以及 $y = g(x)$ 都具有连续的导数, 若 $x_0 = g(t_0)$; $y_0 = f(x_0)$, 对于

复合函数 $y = f(g(t))$ 有 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = 3$, 而 $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=y_0} = 2$, 则在对应点 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = \underline{\hspace{2cm}}$

7、函数 $y = f(x)$ 在点 $x=1$ 连续但不可导则下列在 $x=1$ 处可导的函数是

A. $(x+1)f(x)$ B. $x^2 f(x)$ C. $f(x^2)$ D. $(x^2-1)f(x)$

8、单侧极限 $A = f(x_0^+)$ 与单侧导数 $B = f'_+(x_0)$ 的概念为

A. $A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), B = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$

B. $A = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x), B = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

C. $A = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x), B = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + |\Delta x|) - f(x_0)}{\Delta x}$

D. $A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + |\Delta x|), B = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + |\Delta x|) - f(x_0)}{|\Delta x|}$

9、设函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处满足 $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) < 0$, 则

A. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

B. $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

C. $(x_0, f(x_0))$ 是否是曲线 $y = f(x)$ 的拐点与 $f'(x_0)$ 是否等于零有关

D. 不能确定 $(x_0, f(x_0))$ 是否是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 且与 $f'(x_0)$ 是否等于零无关

10、函数 $f(x) = e^{2x^2+1} + \sin x + \frac{x \ln(1 + \arctan^6 x)}{\sqrt{2+x^2}}$ 在 $x=0$ 点的微分为_____

A. $df(0) = dx$ B. $df(0) = 2dx$ C. $df(0) = 3dx$ D. $df(0) = (e+1)dx$

二、计算题

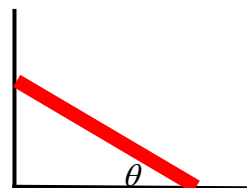
1、试计算出函数 $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{2x}}}$ 在 $x=0$ 的左右极限，并说明 $x=0$ 是那种类型的间断点。

2、计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{1-x} - e) \arctan x}{(\sqrt{1-2x} - 1) \ln(1-2x) + x^{10}}$ 。

3、试求由 $\begin{cases} x = te^t \\ y = (t^2 + 1)e^t \end{cases}$ 所确定函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

4、函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-4x)}{x} & x > 0, \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，试求常数 a, b 。

三、长度为 13 米的梯子一端靠在墙上，接触地面的一端开始滑动，当底端离开墙面 12 米时滑动速率为 5 米/秒。试求此时 (1) 顶端向下的滑动速率；(2) 由墙面、地面以及梯子所围成三角形面积的变化率；(3) 梯子与地面夹角 θ 的变化率。



四、求函数 $f(x) = (x+1) \ln(1+x)$ 的 n 阶导数，并求出在 $x_0 = 1$ 点该函数 3 阶带拉格朗日余项的泰勒公式。

五、求曲线 $\ln(2x+y) + xy + 2x = 0$ 在 $x=0$ 所对应点的切线方程，并求由该方程所确定的

函数 $y = y(x)$ 在该点的二阶导数 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 。

六、设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数， $f(a) < 0, f(b) > 0; f'(x) > 0, f''(x) > 0$ 。如果

记 $b = x_1$ ，过点 $(x_1, y_1) = (x_1, f(x_1))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线，切线在 x 轴上的截距为 x_2 ，

同理过点 $(x_2, y_2) = (x_2, f(x_2))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线，切线在 x 轴上的截距为 x_3 ，

如此递推，如果过点 $(x_n, y_n) = (x_n, f(x_n))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线，切线在 x 轴上的

截距为 x_{n+1} ，则 (1) 写出数列 x_n 的递推表达式；(2) 证明数列 x_n 收敛与曲线 $y = f(x)$

与 x 轴的交点的横坐标 x_0 ，即有 $f(x_0) = 0$ 。