15级《线性代数》（工科、40学时）A卷标准答案及评分标准

一、选择题（本题满分16分．共4个小题，每小题4分．在每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题中括号内）

1．C。---4分

2．C。---4分

3．A。---4分

4．D。---4分

二、填空题（本题满分16分．共4个小题，每小题4分.）

1． -1。---4分

2．6。---4分

3．100。---4分

4． $\boldsymbol{x}=(1,0,0)^T$。 ---4分

三、计算题(本题满分30分．共5个小题，每小题6分．)

1．解　由已知方程变形为$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，利用初等行变换把$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$化成行最简形：

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-2&-2&2&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix},$$ ---4分

由此得：$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$。---6分

2．解　$D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\-x&-x&0&0\\0&x&y&0\\0&0&-y&-y\end{vmatrix}$ ------------------3分

$=(1+x)\begin{vmatrix}-x&0&0\\x&y&0\\0&-y&-y\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&0\\0&-y&-y\end{vmatrix}=xy^2(1+x)-xy^2=x^2y^2$． -------------6分

3．解　由于

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\-1&1&1&0\\0&3&2&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&3&4&5\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}3&0&1&5\\0&3&4&5\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{pmatrix},$$ ---4 分

故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 R^3 的一个基，$\boldsymbol{a}$ 在该基下的坐标为 $(2,3,-1)$ 。 -------------6 分

4．解 由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故 $\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&t\end{vmatrix}=0$，---------------------------3 分

即 $-6t+6+4-9+t-16=-5t-15=0$，解得 $t=-3$ 。 -----------------------6 分

5．解 由 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，知 $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&x\end{vmatrix}=0$，解得 $x=1$ 。 --------------------3 分

故 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&2-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=0,\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$ 。

所以 $x=1$，$\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 $\lambda=2$ 。 --6 分

四、解答题（本题满分 8 分.）

解 因为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&-2&0&-4\\4&4&16&7&14\\3&-7&-8&-3&0\\2&5&14&6&10\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0&8\\0&1&2&0&6\\0&0&0&1&-6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$ --------5 分

所以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ 的一个极大无关组，

且 $\boldsymbol{a}_3=2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5=8\boldsymbol{a}_1+6\boldsymbol{a}_2-6\boldsymbol{a}_4$ 。---8 分

五、解答题（本题满分 8 分.）

解 因为

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&4\\3&2&1&1&-1\\5&4&3&3&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-3\\0&1&2&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$ -----------------------------4 分

所以基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix},$

通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+c_3\boldsymbol{\xi}_3$，$c_1,c_2,c_3$ 为任意常数。---------------------------8 分

六、解答题（本题满分 10 分.）

解　因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}，\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=(1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda),\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$$ ，--------2 分

对应于 $\lambda_1=1$，由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；

对应于 $\lambda_2=2$，由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ；

对应于 $\lambda_3=5$，由 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. ------------------------8 分

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，有 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$. ---10 分

七、证明题（本题满分 12 分．共 2 个小题，每小题 6 分.）

1．证　因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}^T+\boldsymbol{A}^T)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^T$ ，

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^T$ ，---3 分

两边取行列式，有 $(A-1)\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=0$，于是 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=0$. -------------------6 分

2．证　由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=O$，

故 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\le n$ 。---3 分

另一方面，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，故 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\ge R(\boldsymbol{E})=n$，

而 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=R(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，所以 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=n$ 。　--------------6 分