

## Problem A. 盘他!

**题意:** 有一个字符串  $s_1$  无限首位相接, 问另一个字符串  $s_2$  出现不重叠的  $k$  次时所需要的长度

**思路:** KMP 处理出满足从  $s_1$  串的第  $start$  个字符开始的长度为  $length(s_2)$  的子串与  $s_2$  相同的所有  $start$  ( $0 \leq start \leq length(s_1) - 1$ ), 如果找到 0 个则输出 -1。预处理比  $i$  大的最小的  $start$  记为  $next\_start[i]$ , 找到  $s_2$  在  $s_1$  中第一次出现的位置, 为  $next\_start[0]$ ,  $s_2$  串长度为  $length(s_2)$ , 第一次  $s_2$  用掉了  $s_1[0] \sim s_1[next\_start[0] + length(s_2) - 1]$ , 下一个位置为  $x$  则  $s_1$  中第二次出现  $s_2$  的位置为  $next\_start[x \% length(s_1)]$ , 由于  $k$  很大, 需要找循环节, 如果  $s_1$  多次从位置  $y$  开始则两次从  $y$  开始之间的过程是循环进行的, 省略掉循环过程即可

**时间复杂度:**  $O(length(s_1) + length(s_2))$

## Problem B. 数字分布

**题意:** 构造一个不递减序列  $a_i$  满足  $j < i$  且  $a_i \bmod a_j = 0$  的对数为  $m$ ,  $a_i \leq 2 \cdot n$

**思路:** 先尽可能地将序列的前若干项设置为 1, 如果第  $i$  位为 1 则对于任意  $j > i$  均有  $a_i \bmod a_j = 0$ , 共有  $n - i$  个。其余位置令任意  $a_i \neq a_j$  有  $a_i \bmod a_j \neq 0$ , 则对于任意  $a_i \neq 1$  有  $n + 1 \leq a_i \leq 2 \cdot n$  即可满足要求。其余的用若干组连续的相同数字得到, 连续  $k$  个相同的数字共组成  $k \times (k - 1) / 2$  对  $a_i \bmod a_j = 0$

## Problem C. 桌球

**题意:** 求击白球角度使红球向洞口方向运动

**思路:** 先求白球与红球撞击时的位置, 此时白球球心、红球球心、洞口圆心三点共线, 用相似三角形求得白球圆心位置。接下来判断白球能否运动到碰撞位置, 如果红球碰撞后的运动方向和白球碰撞前的运动方向夹角小于  $90$  度则可以, 如果大于  $90$  度则不可以。击白球方向就是从白球初始位置到与红球碰撞位置的方向

## Problem D. 旅游

**题意:** 在一个序列中重复  $y$  次去往比  $a[x]$  大的第一个位置

**思路:** 先预处理出比  $a[i]$  大的第一个位置为  $b[i]$ , 可以倒着处理, 如果  $a[i + 1] > a[i]$  则  $b[i] = i + 1$ , 否则查找比  $a[i + 1]$  大的下一个位置  $b[i + 1]$ , 如果  $a[b[i + 1]] > a[i]$  则找到, 否则继续查找  $b[b[i + 1]]$  直到  $a[?] > a[i]$  或者不存在一个满足要求的位置。接下来倍增处理, 记从  $i$  开始重复  $2, 4, 8, 16 \dots$  次该操作后的位置, 查询时将  $y$  分成若干个 2 的幂即可

时间复杂度:  $O(n \cdot \log n)$

## Problem E. 随便置换

**题意:** 构造排列  $p$  使执行  $m$  次  $a=a \times p$  后任意  $i$  满足  $a_i=i$

**思路:**  $pos$  位置的数字在  $m$  次操作后到达  $a[pos]$  位置, 找到所有关联的环  $pos, a[pos], a[a[pos]], a[a[a[pos]]], \dots$ , 如果环的长度与  $m$  互质则能找到对应的转移方法, 否则找不到转移方法

如样例 5 3 6 2 7 1 4, 每个数移动 2 次, 则移动过程为:

1: 6  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  1

2: 4  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  2

3: 2  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  3

4: 7  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  4

5: 1  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  5

6: 3  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  6

7: 5  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  7

转移  $1 \sim m-1$  次后的位置是未知的, 但已知起始位置和结束位置

把一个环内的转移过程连接起来 (样例只包括一个环, 如果有多个单独处理即可):

6  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  1  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  5  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  7  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  4  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  2  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  ?  $\rightarrow$  6

1 第 1 次在 6, 第 3 次在 5, 第 5 次在 7, 第 7 次在 4, 第 9 次在 4, 第 11 次在 2, 第 13 次在 3, 第 15 次在 6, 这个环的长度为 7, 则第 2 次的位置应与第 9 次相同, 第 4 次的位置应与第 11 次相同, 第 6 次与第 13 次相同, 则可以确定环内位置转移过程为 6  $\rightarrow$  4  $\rightarrow$  1  $\rightarrow$  2  $\rightarrow$  5  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  7  $\rightarrow$  6

可以确定  $p$  的各元素为

$p[4]=6$

$p[1]=4$

$p[2]=1$

$p[5]=2$

$p[3]=5$

$p[7]=3$

$p[6]=7$

$p$  为 4 1 5 6 2 7 3

模拟此过程即可

时间复杂度:  $O(n)$

## Problem F. 移动棋子

**题意：**有  $k$  个棋子在  $n \times m$  的棋盘上，每次将所有棋子统一沿，给出起始位置和最终位置，问需要多少次操作

**思路：**横纵坐标分开处理，按初位置排序，末位置应不递减；如果初位置相同，末位置应该相同；如果两点初末距离不等，一定是移动到边上过，这种点一定在靠边的几个，不可能靠边的距离没变，不靠边的变了；最多移动三次（每次距离不一定是 1），情况较多，分情况讨论即可

## Problem G. 选根

**题意：**深度为  $d$  的结点  $i$  贡献的价值是  $d \times w_i$ ，求每个点作为根结点时树的总价值

**思路：**深搜预处理出以 1 号节点为根节点时每一个结点的深度  $deep[i]$  和以 1 号节点为根节点， $i$  号结点为子树根节点时的子树的权值和  $sum[i]$ 。首先很容易得到以 1 为根节点树的

的价值  $ans[1] = \sum_{i=1}^n w[i] \cdot deep[i]$ ，那么以 1 的子节点  $j$  为根节点的树的价值

$ans[j] = ans[1] + sum[1] - 2 \cdot sum[j]$ ，以此类推，以  $i$  的子节点  $j$  为根节点的树的价值  $ans[j] = ans[i] + sum[1] - 2 \cdot sum[j]$ 。所以以  $1 \sim n$  为根节点的树的价值只需再深搜一次就可以得出。

**时间复杂度：** $O(n)$

## Problem H. 排序

**题意：**改变序列  $\{a_i\}$  中元素顺序使  $g(x)$  最小

**思路：** $g(n) = \sum_{i=1}^n i \times (n-i+1) \times b_i \times a_i$ ， $\{b_i\}$  顺序不可变，以  $i \times (n-i+1) \times b_i$  的大小将

$\{a_i\}$  排序即可

## Problem I. 支付

**题意：**构造一些物品的价值使能组成  $1 \sim n$  之间的任意价值，使物品最少的情况下总价值最小

**思路：**构造的序列必须满足，任意物品的价值 不大于 所有价值更小物品的价值和加 1，那么就可以构造一个 2 的幂序列  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$   $2^0 \sim 2^m$  可以组成  $1 \sim 2^{m+1}-1$  之间的所有价值，再添加一个  $n - (2^{m+1}-1)$  即可组成  $1 \sim n$  之间的任意价值

## Problem J. 球衣

**题意：**求出球赛双方穿着的球衣以避免颜色冲突

**思路：**%X 读入 16 进制整数，按要求枚举即可

## Problem K. 关键结点

**题意：**判断无向有权图中每个点是否在 1 到 n 的最短路径上

**思路：**Dijkstra 算法求以 1 和 n 为起始点的最短路径长度记为  $d1[i]$  和  $dn[i]$  如果有边  $u-v$  长度为  $w$  且  $d1[u]+w+dn[v]=d1[n]$  则这条边是最短路径上的边，将所有满足条件的边建图，不在图中的点一定不在最短路径上。新建图上的割点在所有最短路径上，非割点在部分最短路径上，可以使用 tarjan 算法，由于图比较特殊，还有很多其他方法

**时间复杂度：** $O(n^2)$

## Problem L. 城市排水

**题意：**求凹凸不平的方块城市中每个位置的积水深度

**思路：**排水井处的积水深度永远是 0，从深度最低的排水井开始搜索，将周围四格的水面高度（水面的绝对高度）更新为  $\max(\text{中间位置水面高度}, \text{陆地高度})$ ，而周围四点水面高度也已经确定，可以向外扩散更新。为了避免重复更新某些点造成时间复杂度过大，需要使每个点至多更新一次。每次在已经确定水面高度的点中选择最低的向外扩散，可以保证周围点的水面高度一次被更新到最终值。将所有排水井推进按照深度从小到大排序的优先队列中，类似广度优先搜索即可

**时间复杂度：** $O(n^2 \cdot \log n^2)$

## Problem M. 再来异或

**题意：**求树中所有结点两两组合的函数值的异或和

**思路：**由两个相等的数的异或值为 0 易得， $f(i, j) = f(\text{root}, i) \oplus f(\text{root}, j)$ ， $\Rightarrow$

$$\bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=i}^n f(i, j) = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=i}^n (f(\text{root}, i) \oplus f(\text{root}, j)) = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^{(n-i+1)+i} (f(\text{root}, i)) = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^{n+1} (f(\text{root}, i))$$

$\Rightarrow$ 当  $n$  为奇数时，每个  $f(\text{root}, i)$  出现了偶数次，结果为 0，否则每个  $f(\text{root}, i)$  出现了奇数次，结果为所有点到根结点的函数值的异或和。

因此，只需 dfs 求出所有点到根结点的函数值，对  $n$  进行奇偶判断后计算即可

另外由于每条边权值参与异或运算的次数是，边两端连接的结点个数之积，可将所有此值为奇数的边权值异或得到

**时间复杂度：**  $O(n)$