概率论与数理统计练习题（5）

随机变量的独立性、随机变量函数的分布

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，其密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1,\\ 0, \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0.\end{cases}$$

则 X 与 Y 的联合密度函数 $f(x,y)=$______________.

（2）设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $Y=2X$ 的密度函数

为________________.

（3）设 $X_1\sim N(1,2), X_2\sim N(0,3), X_3\sim N(2,1)$，且 X_1, X_2, X_3 相互独立，则

$P\{0\le 2X_1+3X_2-X_3\le 6\}=$______.

2．选择题

（1）设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, x^2+y^2\le 1,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$ 则 X 与 Y（　　）.

（A）独立同分布；（B）独立不同分布；（C）不独立同分布；（D）不独立也不同分布.

（2）设 X 与 Y 相互独立且同分布

$$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$$

则下列各式中成立的是（　　）.

（A）$P\{X=Y\}=\dfrac{1}{2}$；　　（B）$P\{X=Y\}=1$；

（C）$P\{X+Y=0\}=\dfrac{1}{4}$；　　（D）$P\{X-Y=0\}=\dfrac{1}{4}$.

（3）设随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(z), F_Y(z)$，则

$Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为（　　）.

（A）$\max\{F_X(z), F_Y(z)\}$；　　（B）$\dfrac{1}{2}(F_X(z)+F_Y(z))$；

（C）$F_X(z)F_Y(z)$；　　　　　　　　（D）以上结论都不对.

3．设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$，求 $Y=\sin\dfrac{\pi X}{2}$ 的分布律.

4．一电子仪器由两部件构成，以 X 和 Y 分别表示两部件的寿命（单位：千小时），已知 X 和 Y 的联合分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}-\mathrm{e}^{-0.5y}+\mathrm{e}^{-0.5(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（1）问 X 和 Y 是否相互独立？（2）求两部件的寿命均超过 100 小时的概率.

5．设随机变量 X 与 Y 相互独立，其密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的分布函数.

概率论与数理统计练习题（5）详细解答

1．填空题

（1）因为 X 与 Y 相互独立，故 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（2）$Y=2X$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X\le y\}=P\left\{X\le \frac{y}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{y}{2}}\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x,$$

所以 $Y=2X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi\left(1+y^2/4\right)}=\frac{2}{\pi\left(4+y^2\right)}.$$

（3）因为 X_1，X_2，X_3 相互独立，且均服从正态分布，故 $Z=2X_1+3X_2-X_3\sim N(0,36)$，所以

$$P\{0\le 2X_1+3X_2-X_3\le 6\}=P\{0\le Z\le 6\}=\Phi\left(\frac{6-0}{6}\right)-\Phi\left(\frac{0-0}{6}\right)$$

$$=\Phi(1)-\Phi(0)=0.8413-0.5=0.3413.$$

2．选择题

2. 选择题

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

显然 X 与 Y 同分布，但 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X，Y 不独立，故选(C).

(2) $P\{X=Y\}=P\{X=Y=1 \text{ 或 } X=Y=-1\}=P\{X=Y=1\}+P\{X=Y=-1\}$

$=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}+P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

故选(A).

(3) $F_{max}(z)=P\{\max(X,Y)\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$=P\{X\le z\}\cdot P\{Y\le z\}=F_X(z)\cdot F_Y(z)$，故选(C).

3. $Y=\begin{cases}-1, & 当\ X=4k-1\ 时, \\ 0, & 当\ X=2k\ 时, \quad k=1,2,\cdots \\ 1, & 当\ X=4k-3\ 时.\end{cases}$

$$P\{Y=-1\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=4k-1\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4k-1}}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{2}{15},$$

$$P\{Y=0\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=2k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Y=1\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=4k-3\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4k-3}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15},$$

故 $Y=\sin\frac{\pi X}{2}$ 的分布律为

Y	-1	0	1
P	$2/15$	$1/3$	$8/15$

4. (1) $F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x\ge 0; \\ 0, & x<0.\end{cases}$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y\ge 0; \\ 0, & y<0.\end{cases}$

因为 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立.

(2) $P(X>0.1,Y>0.1)=P(X>0.1)\cdot P(Y>0.1)$

$=[1-P(X\le 0.1)][1-P(Y\le 0.1)]=[1-F_X(0.1)][1-F_Y(0.1)]$

$=[1-(1-e^{-0.05})][1-(1-e^{-0.05})]=e^{-0.1}$

5．由于 X 与 Y 相互独立，所以 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0; \\ 0, & 其他.\end{cases}.$$

从而$Z=2X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{2X+Y\le z\}=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & z<0, \\ \int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & 0\le z\le 2, \\ \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & z>2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-z}+z-1\right), & 0\le z\le 2, \\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2}-1\right)\mathrm{e}^{-z}, & z>2.\end{cases}$$