2．5　矩阵的初等变换

在第 1 章中，我们介绍了矩阵的初等行变换，下面给出矩阵的初等行变换和矩阵的初等列变换的完整定义.

定义 2．7　下面三种变换称为矩阵的**初等行（列）变换**：

（i）对调两行（列）（对调 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，对调 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$）；

（ii）以数 $k \neq 0$ 乘某一行（列）中的所有元素（第 i 行乘 k 记作 $r_i \times k$，第 i 列乘 k 记作 $c_i \times k$）；

（iii）把某一行（列）所有元素的 k 倍加到另一行（列）对应元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作 $r_i + kr_j$，第 j 列的 k 倍加到第 i 列上记作 $c_i + kc_j$）.

易见，三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换：变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身；变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times (\frac{1}{k})$（或记作 $r_i \div k$）；变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$（或记作 $r_i - kr_j$）.

若矩阵 A 经有限次初等行变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B **行等价**，记作 $A \overset{r}{\sim} B$；若矩阵 A 经有限次初等列变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B **列等价**，记作 $A \overset{c}{\sim} B$；若矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B **等价**，记作 $A \sim B$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

（i）反身性　$A \sim A$；

（ii）对称性　若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

（iii）传递性　若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$.

由等价关系我们可以将矩阵分类，我们将具有等价关系的矩阵作为一类，<u>具有行等价关系的矩阵所对应的线性方程组有相同的解</u>.

例 5．1　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ 3x_1 + 9x_2 - 36x_3 = -33. \end{cases}$$

解 $B=\begin{pmatrix}1&2&-7&-4\\2&1&1&13\\3&9&-36&-33\end{pmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-7&-4\\0&-3&15&21\\0&3&-15&-21\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\underset{r_2\div(-3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-7&-4\\0&1&-5&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_1$

$$\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&10\\0&1&-5&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_2.$$

B_2 对应方程组

$$\begin{cases}x_1=-3x_3+10,\\x_2=\ \ 5x_3-7,\\x_3=\ \ \ \ x_3.\end{cases}$$

取 x_3 为自由未知数，并令 $x_3=c$，即得通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\-7\\0\end{pmatrix},$$

其中 c 为任意常数.

形如 B_1 的矩阵称为**行阶梯形矩阵**，形如 B_2 的矩阵称为**行最简形矩阵，**其特点是：非零行的第一个非零元为 1，且其所在列的其它元素都为 0．求解线性方程组，就是将其对应的矩阵通过初等行变换化为行最简形矩阵．对行最简形矩阵再施行初等列变换，可变成一种形状更简单的矩阵，称为**标准形**．例如

$$B_2=\begin{pmatrix}1&0&3&10\\0&1&-5&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{c_3-3c_1+5c_2}{\underset{c_4-10c_1+7c_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=F.$$

矩阵 F 称为矩阵 B 的标准形.

定理 任意一个 $m\times n$ 矩阵 A 经过有限次初等变换，总可以化为如下标准形

$$\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\\O_{(m-r)\times r}&O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix},$$

其中为 E_r 为 r 阶单位阵，$r=R(A)$.