4．3　向量组的线性相关性

定义 4．6　给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

则称向量组 A 是**线性相关的**，否则称为**线性无关**.

向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow\alpha=0$；向量 α 线性无关 $\Leftrightarrow\alpha\neq 0$.

几何意义：两个 2 维向量 α_1，α_2 线性相关是指两个平面向量 α_1，α_2 共线；两个 3 维向量 α_1，α_2 线性相关是指两个空间向量 α_1，α_2 共线；三个 3 维向量 α_1，α_2，α_3 线性相关是指三个空间向量 α_1，α_2，α_3 共面.

向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)$，向量组 A 线性相关，等价于齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

即 $Ax=0$ 有非零解．换言之，向量组 A 线性无关，等价于齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

即 $Ax=0$ 只有零解.

例 3．1　n 维单位坐标向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关.

证　设有数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使 $x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n=0$，即

$$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T=0,$$

故 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，所以 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关.

例 3．2　含有零向量的向量组线性相关.

证　设向量组为 $0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，则有不全为零的数 $1,0,0,\cdots,0$，使

$$1\cdot 0+0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\cdots+0\cdot\alpha_m=0,$$

所以向量组 $0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

例 3．3　设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，证明：向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

证　由于 $\beta_1+\beta_3=\beta_2+\beta_4$，所以向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

例 3．4　设 n 维向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，P 为 n 阶可逆矩阵，证明：$P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_m$ 也线性无关.

证　用反证法．如若不然，假设 $P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_m$ 线性相关，则齐次线性方程组

$$x_1P\alpha_1+x_2P\alpha_2+\cdots+x_mP\alpha_m=0$$

有非零解．上式两边左乘P^{-1}，可得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

也有非零解，于是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关， 这与题设相矛盾．因此$P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_m$线性无关．

下面给出线性相关和线性无关的一些重要结论．

定理 4.2 向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m\geq 2)$线性相关的充要条件是在向量组$A$中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示．

证 必要性．设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则有不全为 0 的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$（不妨设$k_1\neq 0$），使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

从而

$$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\alpha_m,$$

即α_1可由$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示．

充分性．设向量组A中有某个向量可由其余$m-1$个向量线性表示，不妨设α_m可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，即有数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1}$，使

$$\alpha_m=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1},$$

于是

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}+(-1)\alpha_m=0.$$

因为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1},-1$这$m$个数不全为 0，所以向量组$A$线性相关．

定理 4．3 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$也线性相关．换言之，若向量组$B$线性无关，则向量组$A$也线性无关．

证 由于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，所以存在不全为零的$r$个数$k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0,$$

从而

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}=0.$$

因为$k_1,k_2,\cdots,k_r,0$这$r+1$个数不全为零，因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$线性相关．

推论 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_{r+s}$ $(s\geq 1)$也线性相关．换言之，若向量组B线性无关，则向量组A也线性无关．

定理 4．4 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，而向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相

关，则向量β必可由向量组A唯一线性表示.

证　由于向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关，所以存在不全为零的$r+1$个数$k_1,k_2,\cdots,k_r,k$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k\beta=0.$$

如果$k=0$，则$k_1,k_2,\cdots,k_r$必不全为零，且

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0,$$

这与向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关矛盾，所以$k\neq 0$. 于是

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\alpha_r,$$

即向量β可由向量组A线性表示.

设有$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$，$\beta=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_r\alpha_r$. 两式相减，得

$$(\lambda_1-\mu_1)\alpha_1+(\lambda_2-\mu_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_r-\mu_r)\alpha_r=0.$$

由$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，得$\lambda_i-\mu_i=0\ (i=1,2,\cdots,r)$，即$\lambda_i=\mu_i\ (i=1,2,\cdots,r)$.

所以，向量β可由向量组A唯一线性表示.

定理 4．5　向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关$\Leftrightarrow R(A)<r$. 换言之，向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关$\Leftrightarrow R(A)=r$，其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

证　必要性. 设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则存在不全为零的$r$个数$k_1,k_2,\cdots,k_r$（不妨设$k_r\neq 0$），使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0,$$

即

$$\alpha_r=-\frac{k_1}{k_r}\alpha_1-\frac{k_2}{k_r}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{r-1}}{k_r}\alpha_{r-1}.$$

对矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$施行初等列变换$c_r+\frac{k_1}{k_r}c_1+\frac{k_2}{k_r}c_2+\cdots+\frac{k_{r-1}}{k_r}c_{r-1}$，可将$A$的第$r$列变成$0$，即$A\overset{c}{\sim}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},0)$，所以$R(A)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1})<r$.

充分性. 设$R(A)=s<r$，可用列初等变换将A化为列阶梯形矩阵，即存在可逆矩阵Q，使得$AQ=$（$C_{n\times s}$，0）. 任取Q的第$j\,(s<j\leq r)$列元素$q_{1j},q_{2j},\cdots,q_{rj}$，因为$Q$可逆，故$q_{1j},q_{2j},\cdots,q_{rj}$不全为零，且

$$q_{1j}\alpha_1+q_{2j}\alpha_2+\cdots+q_{rj}\alpha_r=0.$$

所以向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

定理 4．6 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，则向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$也线性相关.

证 向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，设

$$B=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\right)=\left(k_{11}\alpha_1+k_{12}\alpha_2+\cdots+k_{1r}\alpha_r,\cdots,k_{r1}\alpha_1+k_{r2}\alpha_2+\cdots+k_{rr}\alpha_r\right),$$

即

$$B=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)\begin{bmatrix}k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{r1}\\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{r2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_{1r} & k_{2r} & \cdots & k_{rr}\end{bmatrix}=AK.$$

因为矩阵A的列向量组线性相关，所以$R(A)<r$．由矩阵的秩的性质（7）知，

$$R\left(B\right)\le R\left(A\right)<r,$$

故B的列向量组$b_1,b_2,\cdots,b_r$线性相关.

推论 1 若向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\cdots,\beta_{r+s}$（$s\ge1$）可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，则向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\cdots,\beta_{r+s}$线性相关.

证 显然，向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\cdots,\beta_{r+s}$可由向量组$A':\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,0,\cdots,0$（$s$个零向量）线性表示，而向量组$A'$线性相关，由定理 4．6，$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\cdots,\beta_{r+s}$线性相关.

推论 2 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，且向量组$A$线性无关，则$s\le t$.

证 用反证法. 假设$s>t$，因为向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，由推论 1 知向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，这与向量组$A$线性无关矛盾，所以$s\le t$.

推论 3 $n+1$个n维向量一定线性相关.

证 $n+1$个n维向量组A一定可由n维单位坐标向量组

$$e_1=(1,0,\cdots,0)^T,e_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

线性表示，由推论 1 立得结论.

定理4．7 若向量组 $A:\alpha_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$ 线性无关，则向量组

$A':\alpha_1'=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\\a_{m+11}\end{bmatrix},\alpha_2'=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\\a_{m+12}\end{bmatrix},\cdots,\alpha_n'=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\\a_{m+1n}\end{bmatrix}$ 也线性无关．换言之，若向量组 A' 线性相关，则向量组 A 也线性相关．

利用线性方程组理论证明．

例3．5 若 $\alpha_1=(2,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,1,a,a)^T,\alpha_3=(3,2,1,a)^T,\alpha_4=(4,3,2,1)^T$ 线性相关，且 $a\neq1$，则 $a=$__________．

解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关当且仅当 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$，即 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}$，而 $a\neq1$，所以 $a=\frac{1}{2}$．故填 $\frac{1}{2}$．

例3．6 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关．

证 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$．

因为 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，故矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ 可逆，从而

$$R(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,$$

所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关．

例3．7 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则（　　）．

（A）A 中必有两行（列）的对应元素成比例；

（B）A 中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合；

（C）A 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合；

（D）A 中至少有一行（列）向量为零向量．

解 因为 $|A|=0$，故 A 的行（列）向量组线性相关，由向量组线性相关的充要条件知

结论“A中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合”正确．故选（C）.

例 3．8　若向量组α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，则（　　）.

（A）α必可由β,γ,δ线性表示；　　　　（B）β必不可由α,γ,δ线性表示；

（C）δ必可由α,β,γ线性表示；　　　　（D）δ必不可由α,β,γ线性表示.

解　由于向量组α,β,γ线性无关，故向量组α,β线性无关，而α,β,δ线性相关，于是δ必可由α,β线性表示，所以δ必可由α,β,γ线性表示．故选（C）.

例 3．9　设$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$均为 3 维列向量，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\beta_1,\beta_2$线性无关，证明：存在非零向量$\xi$，使得$\xi$既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，又可由$\beta_1,\beta_2$线性表示.

证　四个三维向量$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$必线性相关，故存在不全为零的数$k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0,$$

即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2,$$

因为$k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2$不全为零，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\beta_1,\beta_2$线性无关，故

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2\neq 0.$$

令$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2\neq 0$，则非零向量$\xi$既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，又可由$\beta_1,\beta_2$线性表示.