3．5　克拉默法则

含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (3—1)$$

由它的系数组成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 元线性方程组的**系数行列式**.

克拉默法则　如果线性方程组（3—1）的系数行列式不等于零， 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么，方程组（3—1）有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 D_j（ $j = 1, 2, \cdots, n$ ）是把系数行列式 D 中第 j 列的元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 对应地换为方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　将方程组（3—1）写成矩阵形式 $Ax = b$. 因为

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 A 可逆，故

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}A^*b=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}b_iA_{i1}\\\sum_{i=1}^{n}b_iA_{i2}\\\vdots\\\sum_{i=1}^{n}b_iA_{in}\end{bmatrix}.$$

所以$x_j=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}}{|A|}$，（$j=1,2,\cdots,n$）．而$\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}$是行列式

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

按第j列展开的表达式，故

$$x_j=\frac{\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}}{|A|}=\frac{D_j}{D}=\frac{D_i}{D}\quad（j=1,2,\cdots,n）.$$

如果方程组有两个解x,y，即$Ax=b,Ay=b$，则$x=A^{-1}b=y$，所以方程的解是唯一的.

由克拉默法则我们很容易得到如下定理：

定理 3．3 如果线性方程组（3—1）的系数行列式$D\neq 0$，则方程组（3—1）一定有解，且解是唯一的．换言之， 如果线性方程组（3—1）无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

线性方程组（3—1）右端的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$不全为零时，线性方程组（3—1）叫做**非齐次线性方程组**；当$b_1,b_2,\cdots,b_n$全为零时，线性方程组（3—1）叫做**齐次线性方程组**.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{3—2}$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$一定是它的解，这个解叫做齐次线性方程组（3—2）的**零解**．如果一组不全为零的数是方程组（3—2）的解，则它叫做齐次线性方程组（3—2）的非零解．齐次线性方程组（3—2）一定有零解，但不一定有非零解．

定理 3．4　如果齐次线性方程组（3—2）的系数行列式$D\neq 0$，则齐次线性方程组（3—2）只有零解；换言之，如果齐次线性方程组（3—2）有非零解，则它的系数行列式必为零．

事实上，齐次线性方程组（3—2）只有零解$\Leftrightarrow$系数行列式$D\neq 0$；换言之，齐次线性方程组（3—2）有非零解$\Leftrightarrow$系数行列式$D=0$.

例 5．1　用克拉默法则解下列方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}.$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-284,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}=-426,\quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=142,$$

所以　$x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$，　$x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$，　$x_3=\dfrac{D_3}{D}=3$，　$x_4=\dfrac{D_4}{D}=-1$.

用克拉默法则求解线性方程组有很大的局限性：第一，方程组的系数矩阵必须是方阵；

第二，方程组的系数矩阵的行列式必须不等于零．而很多线性方程组是不满足这两个条件的．对于未知量多于 4 个的方程组来说，即使能满足这两个条件，用克拉默法则求解的计算量相当大，在实际应用中是不可行的．

例 5．2　平面上不共线的三点可确定一个圆，设一个圆通过三点（1，0），（0，1），（2，1），求圆的方程．

解　设圆的方程为 $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$，把这三个点的坐标代入圆方程，得线性方程组

$$\begin{cases} 1+0-2a-0+c=0 \\ 0+1-0-2b+c=0 \\ 4+1-4a-2b+c=0 \end{cases},$$

化简方程组，得

$$\begin{cases} 2a-c=1 \\ 2b-c=1 \\ 4a+2b-c=5 \end{cases}.$$

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}=8,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}=8,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}=8,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=8,$$

因此，得唯一解

$$a=\frac{D_1}{D}=1,\quad b=\frac{D_2}{D}=1,\quad c=\frac{D_3}{D}=1 .$$

故圆的方程为

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0.$$

将其化为标准形，得

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1.$$

例 5．3　问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

解　系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\2 & 3-\lambda & 1\\1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 2(3-\lambda)\\2 & 3-\lambda & 1\\1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(3-\lambda).$$

当$\lambda=0$或2或3时，$D=0$，此时该齐次线性方程组有非零解.

例 5．4　证明$n-1$次多项式方程

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}=0$$

至多有$n-1$个互异的根.

证　用反证法．设$f(x)$有n个互异的根$x_1,x_2,\cdots,x_n$，将这n个根带入多项式方程，得

$$\begin{cases}a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}=0\\a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_{n-1}x_2^{n-1}=0\\\qquad\qquad\cdots\cdots\\a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_{n-1}x_n^{n-1}=0\end{cases}.$$

该方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

是范德蒙行列式的转置行列式，且$x_1,x_2,\cdots,x_n$互不相等，故$D\neq0$．由定理 3．4 知，方程组只有零解，即

$$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0,$$

所以$f(x)\equiv0$，这与$f(x)$为$n-1$次多项式矛盾.