6．5　正定矩阵

一、惯性定理

二次型的标准形显然不是唯一的，只是标准形中所含项数是确定的（即是二次形的秩），不仅如此，在限定变换为实变换时，标准形中正系数的个数是不变的（从而负系数的个数也不变），也就是有：

定理 6．9　设有二次型 $f(x)=x^TAx$，它的秩为 r，有两个可逆线性变换

$$x=Cy \text{ 及 } x=Pz$$

使

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2\text{（}k_{1-r}\neq 0\text{）}$$

及

$$f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2\text{（}\lambda_{1-r}\neq 0\text{）}$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数相等.

定理 6．9 称为**惯性定理**，证明请学生参考有关文献.

二次型的标准形中正系数的个数称为二次型的**正惯性指数**，负系数的个数称为**负惯性指数**．若二次型 f 的正惯性指数为 p，秩为 r，则 f 的规范形便可确定为

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

课堂提问：实二次型 $f(x)=x^TAx$ 的正、负惯性指数与二次型的矩阵 A 的正、负特征值的个数有什么关系？

例 5．1　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为________.

解　f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4),$$

知 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=0$．故 f 的正惯性指数为 2．故填 2.

例 5．2　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则（　　）.

（A）$a>1$；　　（B）$a<-2$；　　（C）$-2<a<1$；　　（D）$a=1$ 或 $a=-2$.

解　f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2,$$

知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a-1$，$\lambda_3=a+2$．而 f 的正、负惯性指数分别为 1，2，故 $a-1<0$，$a+2>0$，即 $-2<a<1$．故选（C）.

科学技术上用得较多的二次型是正惯性指数为 n 或负惯性指数为 n 的 n 元二次型.

二、正定矩阵（正定二次型）

定义 6．5　n 元实二次型 $f(x)=x^TAx$ 称为**正定二次型**，当且仅当对任意非零向量 $x\in R^n$，都有 $f(x)=x^TAx>0$．若对于任意 $x\in R^n$，都有 $f(x)=x^TAx\geq 0$，且至少存在一个非零向量 $x_0\in R^n$，使 $f(x_0)=x_0^TAx_0=0$，则称二次型 $f(x)$ 是**半正定二次型**．若对于任意非零向量 $x\in R^n$，都有 $f(x)=x^TAx<0$，则称二次型 $f(x)$ 是**负定二次型**；若对于任意 $x\in R^n$，都有 $f(x)=x^TAx\leq 0$，且至少存在一个非零向量 $x_0\in R^n$，使 $f(x_0)=x_0^TAx_0=0$，则称二次型 $f(x)$ 是**半负定二次型**．若既存在 $x_1\in R^n$，使 $f(x_1)>0$，又存在 $x_2\in R^n$，使 $f(x_2)<0$，则称 $f(x)$ 是**不定二次型**.

定义 6．6　n 阶实对称阵 A 被称为是正定、负定、半正定、半负定或不定，当且仅当它相应的二次型 x^TAx 是正定、负定、半正定、半负定或不定．实对称阵 A 正定、负定、半正定、半负定分别简记为 $A>0$，$A<0$，$A\geq 0$，$A\leq 0$.

课堂提问：正定与负定，半正定与半负定有什么关系？

对于具有标准形式的二次型 $f=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$，则有：

（1）若 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 全部为正数，则 f 正定；

（2）若 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 全部为负值，则 f 负定；

（3）若 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 全部大于等于零，且至少有一个等于零，则 f 半正定；

（4）若 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 全部小于等于零，且至少有一个等于零，则 f 半负定；

（5）若 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 既有取负值的，又有取正值的，则 f 是不定的.

例 5．3 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，$B = \lambda E + A^T A$，试证：当 $\lambda > 0$ 时，B 为正定矩阵.

证明 因为 $B^T = (\lambda E + A^T A)^T = \lambda E + A^T A = B$，所以当 λ 为实数时，B 是 n 阶实对称矩阵.

因为 $\forall x \neq 0$，恒有 $x^T x > 0$，$(Ax)^T (Ax) \geq 0$，所以 $\forall x \neq 0$，当 $\lambda > 0$ 时，

$$x^T B x = x^T (\lambda E + A^T A) x = \lambda x^T x + x^T A^T A x = \lambda x^T x + (Ax)^T (Ax) > 0 .$$

故当 $\lambda > 0$ 时，B 为正定矩阵.

定理 6．10 n 元实二次型 $f(x) = x^T A x$ 是正定二次型的充要条件是它的标准形中 n 个系数全为正，即它的正惯性指数 $p = n$.

证 设可逆线性变换 $x = Cy$，使

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 .$$

先证充分性．$\forall x \neq 0$，必有 $y = C^{-1} x \neq 0$．若 $y = 0$，则 $x = Cy = 0$．若 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 全部为正数，则

$$f(x) = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 > 0 ,$$

即 $f(x)$ 是正定二次型.

再证必要性. 取 $y_0 = (1, 0, \cdots, 0)^T$，则 $x_0 = C y_0 \neq 0$. 若 $x_0 = 0$，则 $y_0 = C^{-1} x_0 = 0$，这与 $y_0 = (1, 0, \cdots, 0)^T$ 矛盾．若 $f(x) = x^T A x$ 是正定二次型，则

$$f(x_0) = k_1 \times 1^2 + k_2 \times 0^2 + \cdots + k_n \times 0^2 = k_1 > 0 .$$

同理可证 $k_2 > 0, k_3 > 0, \cdots, k_n > 0$.

推论 n 元实二次型 $f(x) = x^T A x$ 是正定二次型的充要条件是二次型的矩阵 A 的 n 个特征值全为正数.

类似地可证明下述结论：

（1）n 元实二次型 $f(x) = x^T A x$ 负定 $\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $= n$ 或 A 的 n 个特征值全为负数.

（2）n 元实二次型 $f(x) = x^T A x$ 半正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = R(A) < n$ 或 A 的 n 个特征值全大于

等于零，且至少有一个为零.

（3）n元实二次型 $f(x)=x^T Ax$ 半负定$\Leftrightarrow$负惯性指数$q=R(A)<n$或A的n个特征值全小于等于零，且至少有一个为零.

（4）n元实二次型 $f(x)=x^T Ax$ 不定$\Leftrightarrow$ $p,q\neq 0$或A的n个特征值中既有正又有负.

例 5．4 设A为n阶正定矩阵，E为n阶单位矩阵．证明$|A+E|>1$.

证明 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则$A+E$的特征值为$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$. 因为$A$为正定矩阵，所以$A$的所有特征值全大于零：$\lambda_i>0\,(i=1,2,\cdots,n)$，因此$A+E$的所有特征值都大于1：$\lambda_i+1>1\,(i=1,2,\cdots,n)$，所以$|A+E|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>1$.

定义 6．7 设n阶矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}$称为$A$的$k$阶**顺序主子式**.

定理 6．11 实对称阵A为正定矩阵的充分必要条件是A的各阶顺序主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\ \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

实对称阵A为负定矩阵的充分必要条件是奇数阶顺序主子式全为负，而偶数阶顺序主子式全为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}>0\,(r=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为**霍尔维茨定理**.

证明参见相关文献.

例 5．5 判别二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$是否正定.

解 f 的矩阵$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 6\end{pmatrix}$的各阶顺序主子式：

$$D_1 = 5 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

所以二次型 f 是正定的.

例 5．6 设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + \dfrac{1}{2}x_2^2 + a(2x_3^2 - x_2x_3)$，问 a 为何值时 f 正定？

解 f 正定 $\Leftrightarrow$ 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -a/2 \\ 0 & -a/2 & 2a \end{pmatrix}$ 的各阶顺序主子式满足：

$$D_1 = 2 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -a/2 \\ 0 & -a/2 & 2a \end{vmatrix} = 2\left(a - \frac{a^2}{4}\right) > 0,$$

即 $0 < a < 4$.

总结判定实二次型或实对称阵是否正定的方法：

（1） 定义法，若 $\forall x \neq 0 \in R^n$，有 $f(x) = x^T Ax > 0$，则 f 正定（或 A 正定）；

（2）用可逆线性变换化二次型 f 为标准形，当正惯性指数 $p = n$ 时 f 正定（或 A 正定）；

（3）求二次型 f 的矩阵 A 的全部特征根，当所有特征值全大于 0 时 f 正定（或 A 正定）；

（4）计算二次型 f 的矩阵 A 的各阶顺序主子式，当它们全大于 0 时 f 正定（或 A 正定）.