4．2　n维向量

定义 4．3　n个有次序的数$a_1,a_2,\cdots,a_n$所组成的数组称为**n维向量**，记为

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\text{ 或 }\alpha^T=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\ ,$$

其中$a_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$称为向量$\alpha$或$\alpha^T$的第$i$个分量.

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量.

向量$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$称为**列向量**，向量$\alpha^T=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$称为**行向量**．列向量用黑体小写字母$a,b,\alpha,\beta$等表示，行向量则用$a^T,b^T,\alpha^T,\beta^T$等表示．如无特别声明，向量都当作列向量.

n维向量可以看作矩阵，按矩阵的运算规则进行运算.

n维实向量的全体所组成的集合

$$R^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$$

叫做**n维向量空间**.

n维实向量的集合

$$\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\middle|\,a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,\ x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$$

叫做n维向量空间R^n中的**$n-1$维超平面**.

若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫做**向量组**.

矩阵的列向量组和行向量组都是只含有限个向量的向量组；反之，一个含有限个向量的向量组总可以构成一个矩阵，例如，n个m维列向量所组成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$构成一个$m\times n$矩阵

$$A_{m\times n}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right).$$

m个n维行向量所组成的向量组$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$构成一个$m\times n$矩阵

$$B_{m\times n}=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_m^T\end{pmatrix}.$$

综上所述，含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

定义 4．4　给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，称表达式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

为向量组 A 的一个**线性组合**，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为**组合系数**.

给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量 β，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m,$$

则称向量 β 可由向量组 A **线性表示**.

向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解.

例 2．1　向量组

$$e_1=(1,0,\cdots,0)^T,e_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

称为 n **维单位坐标向量组**．对任一 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，有

$$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n\ .$$

例 2．2　设

$$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,1,-1)^T,\alpha_3=(2,-2,-4)^T,\beta=(1,-2,-3)^T,$$

证明：向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并求出表示式.

证　由于

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-5&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1/3\\0&1&0&-2/3\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

所以向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示式为

$$\beta=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2+\alpha_3\ .$$

定义 4．5　设有两个向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 及 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$，若 B 组中的每个向量都可由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 可由向量组 A 线性表示．若向量组 A 与向量组 B 可相互线性表示，则称这两个向量组**等价**.

向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 存在一个 $m\times l$ 矩阵 P，使 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)P$.