线性代数练习题（4）详细解答

1．填空题

（1）$\left|3A^{-1}-2A^{*}\right|=\left|3A^{-1}-2\cdot 2A^{-1}\right|=\left|-A^{-1}\right|=(-1)^{3}\left|A^{-1}\right|=-\dfrac{1}{|A|}=-\dfrac{1}{2}$．故填$-\dfrac{1}{2}$．

（2）$(A^{*})^{*}=\left|A^{*}\right|(A^{*})^{-1}=\left|\,|A|A^{-1}\right|\left(|A|A^{-1}\right)^{-1}=|A|^{n}\left|A^{-1}\right|\left|A\right|^{-1}A$

$=|A|^{n}|A|^{-1}|A|^{-1}A=|A|^{n-2}A$．故填$|A|^{n-2}$．

（3）$\begin{vmatrix} A_3-2A_1 \\ 3A_2 \\ A_1 \end{vmatrix}\overset{r_1+2r_3}{=}\begin{vmatrix} A_3 \\ 3A_2 \\ A_1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_1 \end{vmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{=}-3\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}=-3|A|=6$．故填$6$．

（4）方程组有唯一解$\Leftrightarrow$系数行列式不等于零．方程组$\begin{cases} 2x+3(k+1)y=8 \\ (k+2)y+z=3(k+1) \\ 4kx+z=7 \end{cases}$的系数行列式为$D=\begin{vmatrix} 2 & 3(k+1) & 0 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 4k & 0 & 1 \end{vmatrix}=2(2k+1)(3k+2)$，所以当$k\neq-\dfrac{1}{2}$且$k\neq-\dfrac{2}{3}$时，方程组有唯一解．故填$k\neq-\dfrac{1}{2}$且$k\neq-\dfrac{2}{3}$．

（5）齐次线性方程组有非零解$\Leftrightarrow$系数行列式等于零．方程组$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+by+z=0 \\ x+2by+z=0 \end{cases}$的系数行列式为$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}=-b(a-1)$，所以当$a=1$或$b=0$时，方程组有非零解．故填$a=1$或$b=0$．

2．解：由于$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=3$，

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}=3,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&-1\\2&0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=3,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}=0,$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&1&-\frac{2}{3}\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

3．解：由于 $D=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&0&1\end{vmatrix}=3$，

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&0&1\end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\2&3&1\end{vmatrix}=1,\quad D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&3\end{vmatrix}=5,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{3},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{5}{3},$$

即

$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{3},\\x_2=\frac{1}{3},\\x_3=\frac{5}{3}.\end{cases}$$

4．证明：设三直线 $ax+by+c=0$，$bx+cy+a=0$，$cx+ay+b=0$ 交于一点 (x_0,y_0)，

则 $\begin{cases}ax+by+cz=0\\bx+cy+az=0\\cx+ay+bz=0\end{cases}$ 有非零解 $(x_0,y_0,1)$，故

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$-\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0,$$

由于三条直线不同，故 a,b,c 不全相等，所以 $a+b+c=0$.