线性代数练习题（6）详细解答

1．判断题

（1）×；若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则存在（而不是任意）一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$．

（2）×；例如两个零向量组成的向量组线性相关，而其秩为 0．

（3） √；若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$构成向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组，故向量组的秩为$s$；反之，若向量组的秩为$s$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$构成极大无关组，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

（4）√．设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是n维向量空间V的一个基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$是$V$中任意$n+1$个向量，因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$能由基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性表示，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$线性相关（“多”能由“少”线性表示，则“多”线性相关）.

2．填空题

（1）因为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&3&4&4\\1&-1&2&-3\\3&2&6&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为 2．故填 2 ；

（2）因为四阶矩阵A的秩为 2，所以A的所有三阶子式（即A中元素的余子式）均为零，从而A中所有元素的代数余子式均为零，即$A^*=O$，故$R(A^*)=0$．故填0 ．

3． **解**：设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，对$A$施行初等行变换

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$R(A)=4$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是一个最大无关组，且$\alpha_5=-\alpha_1+\alpha_3$.

4．证明：由 $AB=O$，知 $R(A)+R(B)\le r$．而 $R(B)=r$，故 $R(A)\le 0$．显然 $R(A)\ge 0$，所以 $R(A)=0$，于是 $A=O$．

5．解：由于 $(a_1,a_2,a_3,a)=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\-1&1&1&0\\0&3&2&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$，故 a_1,a_2,a_3 线性无关，所以 a_1,a_2,a_3 是 R^3 的一个基，a 在该基下的坐标为 $(2,3,-1)^T$．

6．解：取 $\beta_1=\alpha_1=(1,-1,0)^T$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\frac{1}{2}(1,1,2)^T,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\frac{1}{3}(-1,-1,1)^T,$$

再取 $e_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$，$e_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$，$e_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)^T$，则 e_1,e_2,e_3 即为所求．