17 级《线性代数》（工科本科 40 学时）标准答案及评分标准

一、选择题（本题满分 16 分．共 4 个小题，每小题 4 分．在每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题中括号内．）

1． D； **2．** C； **3．** B； **4．** A．

二、填空题（本题满分 16 分．共 4 个小题，每小题 4 分．）

1． 22； **2．** n； **3．** 0； **4．** 3．

三、计算题(本题满分 30 分．共 5 个小题，每小题 6 分．)

1． 解：$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix}$

（4 分）$\Rightarrow \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$（6 分）．

2． 解：$D=(x+3a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-a&0&0\\0&0&x-a&0\\0&0&0&x-a\end{vmatrix}$（4 分）$=(x+3a)(x-a)^3$（6 分）．

3． 解：$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$（4 分）$\Rightarrow \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 R^3 的一个基，且 $\boldsymbol{a}$ 在该基下的坐标为 $(0,0,-1)$，即 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}_3$（6 分）．

4． 解：设对应于 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量 $\boldsymbol{a}$ 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$

故 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$（4 分），解得 $\begin{cases}k=-2,\\ \lambda=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=1,\\ \lambda=4\end{cases}$（6 分）．

5． 解：由 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\0&0&t+3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$（4 分）知，$\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow t=-3$（6 分）．

四、解答题（本题满分 8 分．）

解：由 $\boldsymbol{A}\triangleq(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$（5 分）知，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$ 是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$

的一个极大无关组，且 $\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ （8 分）.

五、解答题（本题满分 8 分.）

解：由 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&1&-1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&0&2&2\\0&2&2&1&0&-1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1&1&1\\0&1&1&0&-1&-2&-1\\0&0&0&1&2&3&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ （5 分），得通解：

$$\boldsymbol{x}=c_1(1,-1,1,0,0,0)^T+c_2(1,1,0,-2,1,0)^T+c_3(-1,2,0,-3,0,1)^T+(1,-1,0,2,0,0)^T，$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数（8 分）.

六、解答题（本题满分 10 分.）解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$ （1 分），$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$,

$\lambda_1=9,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$（4 分），对于 $\lambda_1=9$ 时，由 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$.

对于 $\lambda_2=-1$ 时，由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得 $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$. 对于 $\lambda_3=0$ 时，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

解得 $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$（8 分）. 取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$

为一个所求的正交变换，且有 $f(x_1,x_2,x_3)=9y_1^2-y_2^2$ （10 分）.

七、证明题（本题满分 12 分．共 2 个小题，其中第 1 小题 8 分，第 2 小题 4 分.）

1．证 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，知 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le r$ （3 分）. 而 $R(\boldsymbol{B})=r$，故 $R(\boldsymbol{A})\le 0$ （6 分）. 显然 $R(\boldsymbol{A})\ge 0$，所以 $R(\boldsymbol{A})=0$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ （8 分）.

2．证 用反证法. 反设 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)=\lambda\boldsymbol{p}_1+\lambda\boldsymbol{p}_2$ （2 分），又 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)=\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2\boldsymbol{p}_2$，故 $(\lambda_1-\lambda)\boldsymbol{p}_1+(\lambda_2-\lambda)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}$，由 $\lambda_1\ne\lambda_2$，知 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 线性无关，有 $\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2$. 矛盾. 所以 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量（4 分）.