概率论与数理统计练习题（9）

点估计、评价估计量的标准

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设总体 X 在 $[a,1]$ 上服从均匀分布，a 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，则 a 的最大似然估计量为________________.

（2）设 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则有 $E(\hat{\sigma}^2) =$ __________ .

2．选择题

（1）设总体 X 的分布密度为 $\varphi(x,\alpha) = \begin{cases} (\alpha+1)x^{\alpha}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，其中 $\alpha > -1$ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则参数 α 的矩估计为（　　）.

（A）$\overline{X}$；　（B）$2\overline{X}$；　（C）$\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$；　（D）$\frac{1}{\overline{X}}$.

（2）设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是参数 θ 的最大似然估计，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\hat{\theta}$ 必定是似然方程的解；　（B）$\hat{\theta}$ 是唯一的；

（C）$\hat{\theta}$ 存在时不一定唯一；　（D）A 和 B 同时成立.

（3）设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n > 1)$ 为来自 X 的一个样本，若 $\hat{\sigma}^2 = c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的一个无偏估计量，则 $c =$（　　）.

（A）$\frac{1}{n}$；　（B）$\frac{1}{n-1}$；　（C）$\frac{1}{2(n-1)}$；　（D）$\frac{1}{2n}$.

3．计算题

（1）设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 θ（0<θ<1）为未知参数．已知取得了样本 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$．试求 θ 的矩估计值．

（2）设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta, \\ 0, & x\le\theta, \end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数．又 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值．

（3）设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， X_1, X_2, X_3 为总体的一个样本，试证明：

$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3$，$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$ 都是 μ 的无偏估计量，并分析哪一个最好．

（4）证明在样本的一切线性组合中，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是总体期望值 μ 的无偏估计中有效的估计量．

概率论与数理统计练习题（9）详细解答

1．填空题

（1）

$$\hat{a} = \min(X_1, \cdots, X_n)$$

（2）

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}S^2 \qquad E(S^2) = \sigma^2 \qquad E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 .$$

2．选择题

（1）

$$EX = \int_0^1 x \cdot (\alpha+1)x^{\alpha}\,dx = \frac{\alpha+1}{\alpha+2} = \bar{x} \Rightarrow \alpha = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$$ 故选 C

（2）

A 有反例：$X \sim U(a,b)$ 中 a,b 的极大似然估计不是似然方程的解.

B 有反例：X 的 $f(x) = \begin{cases} 1, & \theta-\frac{1}{2} \le x \le \theta+\frac{1}{2} \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 中 θ 的极大似然估计可介于 $x_{(n)}-\frac{1}{2}$ 与 $x_{(1)}+\frac{1}{2}$ 之间的任何值，其中 $x_{(1)} = \min(x_1, \cdots, x_n)$，

$x_{(n)} = \max(x_1, \cdots, x_n)$.

故选 C.

（3）

由 $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ 可得：

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= c\sum_{i=1}^{n-1}\left[E(X_{i+1}^2) - 2EX_{i+1}\cdot EX_i + E(X_i^2)\right] \\ &= c\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sigma^2+\mu^2 - 2\mu^2 + \sigma^2+\mu^2\right) \\ &= 2c(n-1)\sigma^2 = \sigma^2 \Rightarrow c = \frac{1}{2(n-1)} \end{aligned}$$ 故选（C）

3．计算题

（1）解：

$EX = 1\times\theta^2 + 2\times 2\theta(1-\theta) + 3(1-\theta)^2 = 3-2\theta = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{3-\bar{X}}{2}$

$\bar{x} = \frac{1+2+1}{3} = \frac{4}{3}$ 故$\hat{\theta}$的矩估计值为$\frac{5}{6}$.

（2）**解**：

$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} 2e^{-2(x_i-\theta)} = 2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2n\theta}$

$\ln L(x,\theta) = n\ln 2 - 2n\bar{x} + 2n\theta$

$\frac{d}{d\theta}\ln L(x,\theta) = 2n \neq 0$ 关于θ无解.

为求使$L(x,\theta)$达到最大值的θ. 取$\theta = \min(x_1,\cdots,x_n)$即可.

故θ的极大似然估计值为$\min(x_1,\cdots,x_n)$.

（3）**解**：

$E\hat{\mu}_1 = \frac{1}{5}EX_1 + \frac{3}{10}EX_2 + \frac{1}{2}EX_3 = (\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2})\mu = \mu$

同理可得 $E\hat{\mu}_2 = \mu$. $E\hat{\mu}_3 = \mu$. 故$\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$都是$\mu$的无偏估计量.

$D\hat{\mu}_1 = [(\frac{1}{5})^2+(\frac{3}{10})^2+(\frac{1}{2})^2]\sigma^2 = 0.38\sigma^2$ $D\hat{\mu}_2 = 0.347\sigma^2$, $D\hat{\mu}_3 = 0.3889\sigma^2$.

$D\hat{\mu}_2 < D\hat{\mu}_1 < D\hat{\mu}_3$ 故$\hat{\mu}_2$是三个无偏估计量中最有效的估计量.

（4）**解**：易证当且仅当$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$时，$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} k_i X_i$是总体均值$\mu$的无偏估计．由于

$$D\hat{\mu} = D(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2,$$

故要证$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$是总体均值$\mu$的线性无偏估计中最有效的估计量，即要证$n$元函数$\sum_{i=1}^{n} k_i^2$在条件$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$下的条件最小值点为$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = \frac{1}{n}$.

引入拉格朗日函数

$$L(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2) - \lambda(k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 1),$$

令

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial k_1} = 2k_1 - \lambda = 0; \\
\dfrac{\partial L}{\partial k_2} = 2k_2 - \lambda = 0; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\
\dfrac{\partial L}{\partial k_n} = 2k_n - \lambda = 0.
\end{cases}
$$

解之并利用$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$，得$k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n = \dfrac{1}{n}$. 所以当$k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n = \dfrac{1}{n}$时，

$D\hat{\mu}$取得条件最小值，即μ的最有效的线性无偏估计为$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.