16 级《线性代数》（工科本科 40 学时）标准答案及评分标准

一、选择题（本题满分 16 分．共 4 个小题，每小题 4 分．在每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题中括号内）

1． B ； **2．** D； **3．** A； **4．** C．

二、填空题（本题满分 16 分．共 4 个小题，每小题 4 分．）

1． 3； **2．** 2； **3．** 18； **4．** $c_1(1,-2,1)^T+c_2(5,-3,-2)^T+(0,2,1)^T$，其中 c_1,c_2 为任意常数．

三、计算题(本题满分 30 分．共 5 个小题，每小题 6 分．)

1． 解：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-1&0\\0&1&-1&0&-1&-1\\0&0&0&-2&-2&-2\end{pmatrix}$

（4 分），$R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})<R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$，原矩阵方程无解（6 分）.

2． 解：$D=abc\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a}&\frac{1}{b}&\frac{1}{c}\\\frac{1}{a}&1+\frac{1}{b}&\frac{1}{c}\\\frac{1}{a}&\frac{1}{b}&1+\frac{1}{c}\end{vmatrix}=abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$（4 分）

$=abc+ab+bc+ca$（6 分）.

3． 解：$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$（4 分）$\Rightarrow\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 R^3 的一个基，且 $\boldsymbol{a}$ 在该基下的坐标为 $(1,1,-1)$，即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$（6 分）.

4． 解：$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=(1-\lambda)\mu\neq0$（4 分）$\Rightarrow\lambda\neq1,\mu\neq0$（6 分）.

5． 解：$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\\2+x=1+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-4y+8=0,\\x-y+1=0\end{cases}$（4 分）$\Rightarrow\begin{cases}x=4,\\y=5\end{cases}$（6 分）.

四、解答题（本题满分 8 分．）

解：$\boldsymbol{A}\triangleq(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0&29\\0&1&1&0&16\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$（5 分），$\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=3,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，且 $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5=29\boldsymbol{a}_1+16\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_4$（8 分）.

五、解答题（本题满分 8 分.）

解：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （5 分），

基础解系：$\xi_1 = (1,-2,1,0,0)^T, \xi_2 = (1,-2,0,1,0)^T, \xi_1 = (3,-4,0,0,1)^T$ ，

通解：$\boldsymbol{x} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$，其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数（8 分）.

六、解答题（本题满分 10 分.） 解：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ （1 分），

$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4), \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ （4 分），

对应于 $\lambda_1 = -2$，由 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$；

对应于 $\lambda_2 = 1$，由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ；

对应于 $\lambda_3 = 4$，由 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ （8 分）.

取 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 为一个所求的正交变换，且有

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 \text{（10 分）.}$$

七、证明题（本题满分 12 分．共 2 个小题，每小题 6 分.）

1．证 设 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，由已知条件可知，$\boldsymbol{E}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 线性表示（3 分），

故 $n = R(\boldsymbol{E}) \le R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = R(\boldsymbol{A}) \le n \Rightarrow R(\boldsymbol{A}) = n$ （6 分）.

2．证 设 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \ne \boldsymbol{0}, \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p} = \|\boldsymbol{p}\|^2 > 0$ （2 分），

而 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ ，故 $\lambda^2\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p} = (\lambda\boldsymbol{p})^T(\lambda\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p}$ ，即

$(\lambda^2 - 1)\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p} = 0$，从而 $\lambda^2 - 1 = 0$，即 $\lambda^2 = 1$ （6 分）.