质点运动学

$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2I$

一、选择题：

1．一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r} = at^2\vec{i} + bt^2\vec{j}$（其中a、b为常量），则该质点作［ B ］

(A) 匀速直线运动．　　(B) 变速直线运动．

(C) 抛物线运动．　　(D)一般曲线运动．

解：质点的运动由其加速度和速度状况决定。

$\vec{v} = 2at\vec{i} + 2bt\vec{j}$ 且 $\vec{v_0} = 0$　$\vec{a} = 2a\vec{i} + 2b\vec{j}$ 恒定

$x = at^2$

$y = bt^2$

$y = \dfrac{b}{a}x$　轨迹是直线

2．一质点在平面上作一般曲线运动，其瞬时速度为 $\vec{v}$，瞬时速率为v，某一段时间内的平均速度为 $\bar{\vec{v}}$，平均速率为 $\bar{v}$，它们之间的关系必定有 [D]

(A) $|\vec{v}| = v$， $|\bar{\vec{v}}| = \bar{v}$

(B) $|\vec{v}| \neq v$， $|\bar{\vec{v}}| = \bar{v}$

(C) $|\vec{v}| \neq v$， $|\bar{\vec{v}}| \neq \bar{v}$

(D) $|\vec{v}| = v$， $|\bar{\vec{v}}| \neq \bar{v}$

解：根据瞬时速度与瞬时速率的关系（$|d\vec{r}| = ds$ ） 所以

$\boxed{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt}}$ 但 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ 所以 $\boxed{\left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| \neq \dfrac{\Delta s}{\Delta t}}$

$\frac{dv}{dt}$

3．质点作半径为R的变速圆周运动时的加速度大小为 （v表示任一时刻质点的速率） [D]

(A) $\frac{dv}{dt}$ (B) $\frac{v^2}{R}$

(C) $\frac{dv}{dt}+\frac{v^2}{R}$ (D) $\left[\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2\right]^{1/2}$

解： 因变速圆周运动的加速度有切向加速度和法向加速度，故

$$\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}$$

$$\therefore a=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$$

4．某物体的运动规律为 $dv/dt=-kv^2$，式中的k为大于零的常数。当t=0时，初速为v_0，则速度v与时间t的函数关系是 [C]

(A) $v=kt+v_0$ (B) $v=-kt+v_0$

(C) $\frac{1}{v}=\mathrm{kt}+\frac{1}{v_0}$ (D) $\frac{1}{v}=-\mathrm{kt}+\frac{1}{v_0}$

解： 据 $dv/dt=-kv^2$， $-\frac{dv}{v^2}=kdt,$

两边积分 $\int_{v_0}^{v}-\frac{dv}{v^2}=\int_0^t kdt$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}=kt}$$

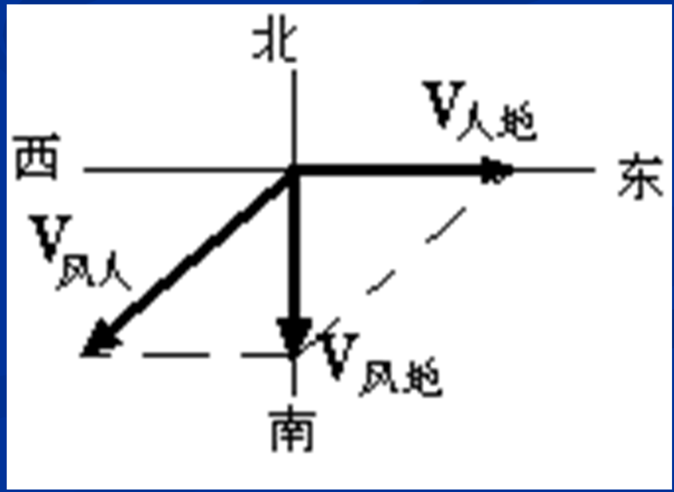
5．某人骑自行车以速率v向正东方行驶，遇到由北向南刮的风（设风速大小也为v），则他感到风是从

[A]

（A）东北方向吹来。（B）东南方向吹来。

（C）西北方向吹来。（D）西南方向吹来。

$$\vec{v}_{风地}=\vec{v}_{风人}+\vec{v}_{人地}$$



二. 填空题：

1．一物体悬挂在弹簧上，在竖直方向上振动，其振动方程为 $y = A\sin\omega t$，其中A、ω 均为常量，则

(1) 物体的速度与时间的函数关系式为________________；

(2) 物体的速度与坐标的函数关系式为________________。

解：

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

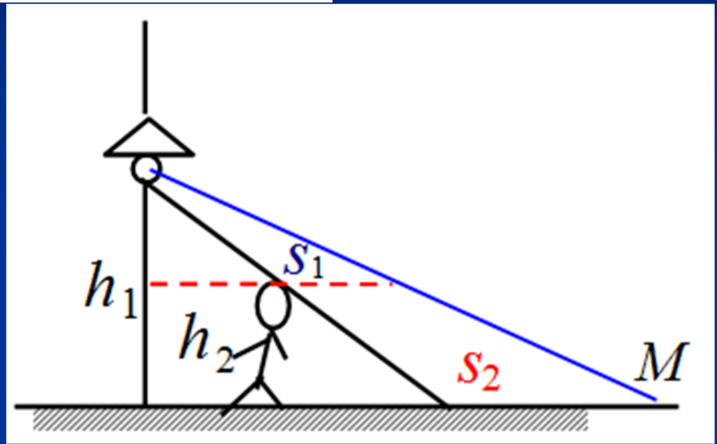
又 $y = A\sin\omega t$

消去t，得到v和y的关系

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + y^2 = A^2$$

$$\therefore v(y) = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}$$

2．灯距地面高度为h_1，一个人身高为h_2，在灯下以匀速率v沿水平直线行走，如图所示。则他的头顶在地上的影子M点沿地面移动的速度 ________________。



解：设人走的距离为s_1，影子移动的距离为s_2，利用相似三角形

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{h_1-h_2}{h_1}$$

$$\therefore s_2=\frac{h_1}{h_1-h_2}s_1$$

$$v_M=\frac{ds_2}{dt}=\frac{h_1}{h_1-h_2}\frac{ds_1}{dt}=\frac{h_1}{h_1-h_2}v$$

3．试说明质点作何种运动时，将出现下述各种情况（ $v \neq 0$ ）：

（1） $a_t \neq 0, a_n \neq 0;$ 　　<u>变速率曲线运动</u>

（2） $a_t \neq 0, a_n = 0;$ 　　<u>变速率直线运动</u>

a$_t$，**a**$_n$ 分别表示切向加速度和法向加速度。

4． 已知质点运动方程为 $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + (2t+3)\vec{j}$，则该质点的轨道方程为____________，**t=2s**时 $\vec{a} =$______________，加速度大小**a=**______________。

解:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4t^2 \\ y &= 2t+3 \end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{消去t}} \text{或} \quad \begin{aligned} x &= (y-3)^2 \\ y &= \sqrt{x}+3 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[4t^2\vec{i} + (2t+3)\vec{j}] = 8t\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[8t\vec{i} + 2\vec{j}] = 8\vec{i}$$

当**t=2s**时， $\vec{a} = 8\vec{i}\,(SI)$

$$a = 8m/s^2$$

5．一质点以60^0仰角作斜上抛运动，忽略空气阻力。若质点运动轨道最高点处的曲率半径为10m，则抛出时初速度的大小为v_0=__________。（重力加速度g按$10m.s^{-2}$计）

解：斜上抛运动轨道最高处

$$a_n = g = \frac{v^2}{\rho}$$

又因

$$v = v_0 \cos 60^0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\rho}{\cos^2 60^0}} = 20m/s$$

6．质点沿半径为 的圆周运动，运动学方程为 $\theta = 3 + 2t^2$（SI），则 时刻质点的法向加速度大小为________；角加速度 为 ________。

解：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4t$$

$$a_n = \omega^2 R = (4t)^2 R = 16Rt^2 \text{（SI）}$$

$$\beta = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 4\ rad/s^2$$

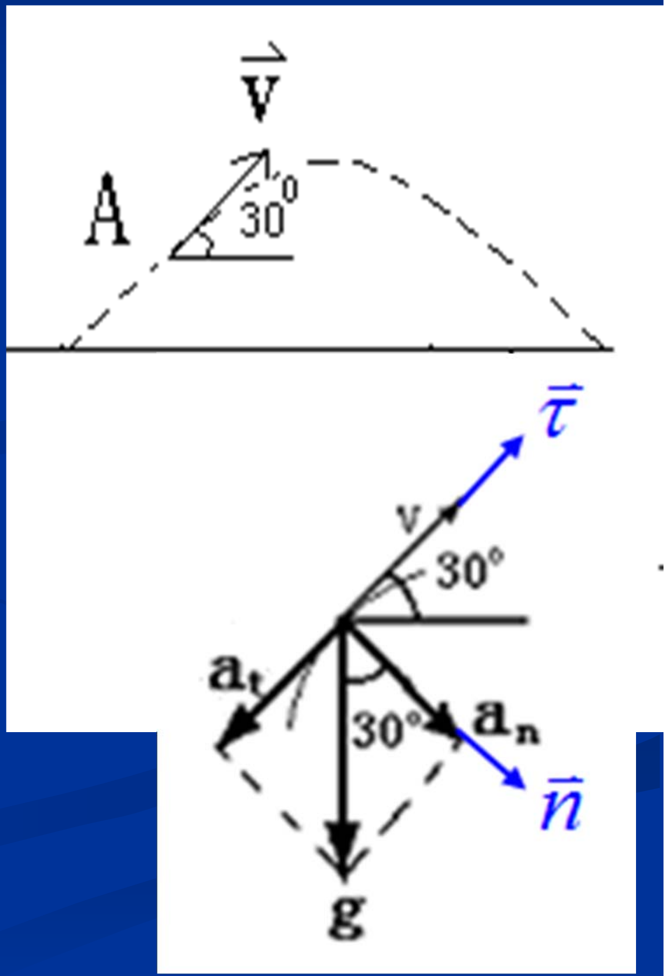
7．一物体作如图所示的斜抛运动，测得在轨道A点处速度 的大小为，其方向与水平方向夹角成30^0。则物体在A点的切向加速度 =_____，轨道的曲率半径ρ= ________。

解： $\vec{a}=\vec{g}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}$

$$a_\tau=\vec{g}\cdot\vec{\tau}=g\cos 120^0=-\frac{g}{2}$$

$$a_n=\vec{g}\cdot\vec{n}=g\cos 30^0$$

$$\rho=\frac{v^2}{g\cos 30^0}=\frac{v^2}{\sqrt{3}g/2}=\frac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$$



注意：at与v反向，at取负值

（上升过程减速）

三、计算题

1. 一质点沿X轴运动，其加速度a与位置坐标x的关系为 $a = 4x + 2$ (SI) 如果质点在原点处的速度为 $v_0 = 2m/s$ 试求其在任意位置处的速度。（标量式）

解：由于a是位置x而非t的函数，要求的也是v与x的函数故此题要做变量转换

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = 4x + 2$$

$$v^2 = 4(x^2 + x + 1)$$

$$\int_2^v v dv = \int_0^x (4x + 2) dx$$

质点沿x轴运动, x>0, a>0, 故v>0

$$\frac{1}{2}(v^2 - 2^2) = 2x^2 + 2x$$

$$\therefore v = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$$

在直线运动中，各物理量与公式用标量式！

2. 质点在xy平面上运动，运动学方程为 $x=3t+5, y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$

（1）以t为变量，写出质点位矢的表达式；

（2）求t=1s和t=2s的位矢，并求这一秒内的位移；

（3）求速度表达式和t=4s的速度；

（4）求加速度表达式和t=4s的加速度。

解：(1) $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}=(3t+5)\vec{i}+(\frac{1}{2}t^2+3t-4)\vec{j}$

(2) $\vec{r}_1=8\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

$\vec{r}_2=11\vec{i}+4\vec{j}$

$\therefore \Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=3\vec{i}+4.5\vec{j}$

(3) $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=3\vec{i}+(t+3)\vec{j}$ $\quad\therefore \vec{v}_4=3\vec{i}+7\vec{j}$

(4) $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{j}$ $\quad\therefore \vec{a}_4=\vec{j}$

3. 一质点沿半径为R的圆周运动，质点所经过的弧长S与时间t的关系为 $S = bt + \frac{1}{2}ct^2$，其中 b、 c 是大于零的常量，求从 t ＝ 0 开始到达切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间.

解：$v = \dfrac{ds}{dt} = b + ct$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = c$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b+ct)^2}{R}$$

当 $a_\tau = a_n$ 时

$$\frac{(b+ct)^2}{R} = c$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{Rc} - b}{c}$$

在自然坐标中，各物理量与公式用标量式！

4．已知质点运动方程为

$$\vec{r}=\left(5+2t-\tfrac{1}{2}t^{2}\right)\vec{i}+\left(4t+\tfrac{1}{3}t^{3}\right)\vec{j}$$ （SI）

当t=2s时，$\vec{a}=$ ________________。

解：$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}[(5+2t-\frac{t^{2}}{2})\vec{i}+(4t+\frac{t^{3}}{3})\vec{j}]=(2-t)\vec{i}+(4+t^{2})\vec{j}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}[(2-t)\vec{i}+(4+t^{2})\vec{j}]=-\vec{i}+2t\ \vec{j}$$

当t=2s时，$$\vec{a}=-\vec{i}+4\vec{j}(SI)$$

2. 质点在oxy平面上运动，运动学方程为

$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$ 。式中 a， b， ω 为正的常量.

试求：（1）质点运动的轨道方程；

（2）质点的速度和加速度；

（3）证明加速度方向指向坐标原点.

解:(1)消去时间t得到轨道方程

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= b\sin\omega t \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

(2) $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega a\sin\omega t\ \vec{i} + \omega b\cos\omega t\ \vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 a\cos\omega t\ \vec{i} - \omega^2 b\sin\omega t\ \vec{j}$$

(3) $$\vec{a} = -\omega^2(a\cos\omega t\ \vec{i} + b\sin\omega t\ \vec{j}) = -\omega^2\vec{r}$$ $\vec{a}$ 与 $\vec{r}$ 反向

因为 $\vec{r}$ 由坐标原点指向质点位置，所以 $\vec{a}$ 指向坐标原点.