分章测试题（3）详细解答

1．（1）9；　（2）$k \neq 9$；　（3）2；　（4）2．

2．（1）(B)；（2）(B)；（3）(D)．

3．解：正交化：$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

单位化：$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$．

4．证明：由于$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，

所以$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$是$R^4$中的一组基，且$x_1 = 6, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 4$．

5．解：由于$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 4 & 6 & 0 & 14 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组，

且$\boldsymbol{\alpha}_4 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$．

6．证明：若$R(A) = n$，则A可逆，且$|A| \neq 0$，由$AA^* = |A|E$，知$A^* = |A|A^{-1}$，所

以 A^* 可逆，于是 $R(A^*)=n$.

若 $R(A)=n-1$,则 A 至少存在一个代数余子式 $A_{ij}\neq 0$,因此 $R(A^*)\geq 1$. 另一方面，由 $R(A)=n-1$,知 $|A|=0$,故 $AA^*=|A|E=O$,从而 $R(A)+R(A^*)\leq n$,故 $R(A^*)\leq 1$ ，于是 $R(A^*)=1$.

若 $R(A)\leq n-2$ ，则 A 的所有代数余子式 $A_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 全为零，故 $A^*=O$ ，

所以 $R(A^*)=0$.

综上所述，有 $R(A^*)=\begin{cases} n, 当 R(A)=n, \\ 1, 当 R(A)=n-1, \\ 0, 当 R(A)\leq n-2. \end{cases}$