概率论与数理统计练习题（4）

二维随机变量、边缘分布与条件分布

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\arctan y+\frac{\pi}{2}\right),-\infty<x,y<+\infty,$$

则关于X和Y的边缘分布函数$F_X(x)=$__________，$F_Y(y)=$__________.

（2）设随机变量(X,Y)在区域D上服从均匀分布，其中D是由x轴，y轴及直线

$y=2x+1$所围成的三角形区域，则$P\left\{X<-\frac{1}{8},Y<\frac{1}{2}\right\}=$______.

（3）设随机变量Y服从参数$\lambda=1$的指数分布，随机变量$X_k=\begin{cases}0, Y\le k;\\1, Y>k.\end{cases}(k=1,2)$，则

$P\{X_1=1,X_2=0\}=$______.

2．选择题

（1）设随机变量$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}(i=1,2)$，且满足$P\{X_1X_2=0\}=1$，则

$P\{X_1=X_2\}=$（　　）.

（A）0；　　（B）$1/4$；　　（C）$1/2$；　　（D）1.

（2）设X表示随机地在 1~4 的 4 个整数中取出的一个整数，Y表示在 1~X中随机地取出的一个整数，则$P\{X=3,Y=1\}=$（　　）.

（A）0；　　（B）$1/4$；　　（C）$1/8$；　　（D）$1/12$.

（3）设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8\pi}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2<4;\\0, & x^2+y^2\ge 4.\end{cases}$

则(X,Y)落在圆域$x^2+y^2\le 1$内的概率为（　　）.

（A）$1/2$；　（B）$1/4$；　（C）$1/8$；　（D）$1/12$.

3．已知 X 服从参数 $p=0.6$ 的（0-1）分布，在 $X=0$ 及 $X=1$ 下关于 Y 的条件分布律分别为

Y	**1**	**2**	**3**
$P\{Y\mid X=0\}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Y	**1**	**2**	**3**
$P\{Y\mid X=1\}$	$1/2$	$1/6$	$1/3$

求 (X,Y) 的分布律.

4．设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-3x-4y}, & x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$（1）求常数 k；（2）求 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$；（2）求 $P\{0<X<1, 0<Y<2\}$.

5．已知平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=\mathrm{e}^2$ 围成，(X,Y) 在 D 上服从均匀分布．求（1）(X,Y) 的联合密度函数；（2）X 和 Y 的边缘密度函数.

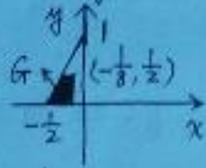
概率论与数理统计练习题（4）详细解答

1. 填空题

(1) $F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right),\ -\infty<x<+\infty$;

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan y+\frac{\pi}{2}\right),\ -\infty<y<+\infty$.

(2) $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}4, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$



$P\left\{X<-\frac{1}{8},Y<\frac{1}{2}\right\}=\iint_G 4\,dxdy=4\iint_G dxdy=4\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{-\frac{1}{8}}dx=\frac{1}{2}$.

(3) $P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{1<Y\le 2\}=\int_1^2 e^{-x}dx=e^{-1}-e^{-2}$.

2. 选择题

(1) 设 (X_1,X_2) 的联合分布律为

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}

$P\{X_1X_2=0\}=P\{X_1=0\text{或}X_2=0\}=P\{X_1=0\}+P\{X_2=0\}-P\{X_1=X_2=0\}$

$=p_{21}+p_{22}+p_{23}+p_{12}+p_{22}+p_{32}-p_{22}=p_{21}+p_{22}+p_{23}+p_{12}+p_{32}=1$

又 $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}p_{ij}=1$，故 $p_{11}=p_{13}=p_{31}=p_{33}=0$.

因 $P\{X_2=-1\}=p_{11}+p_{21}+p_{31}=\frac{1}{4}$，故 $p_{21}=\frac{1}{4}$，

因 $P\{X_2=1\}=p_{13}+p_{23}+p_{33}=\frac{1}{4}$，故 $p_{23}=\frac{1}{4}$，

因 $P\{X_1=0\}=p_{21}+p_{22}+p_{23}=\frac{1}{2}$，故 $p_{22}=0$.

所以 $P\{X_1=X_2\}=p_{11}+p_{22}+p_{33}=0$，故选 (A).

(2) $P\{X=3, Y=1\} = P\{X=3\}\cdot P\{Y=1 \mid X=3\} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.
故选(D).

(3) $P\{(X,Y)\in$ 圆域 $x^2+y^2\le 1\} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{3}{8\pi}(2-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$

$= \frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2-r)\,r\,dr = \frac{1}{2}$, 故选(A).

3. 设(X, Y)的分布律为

X\Y	1	2	3
0	p_{11}	p_{12}	p_{13}
1	p_{21}	p_{22}	p_{23}

$p_{11} = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}\cdot P\{Y=1 \mid X=0\} = 0.4\times\frac{1}{4} = 0.1$,

$p_{12} = P\{X=0, Y=2\} = P\{X=0\}\cdot P\{Y=2 \mid X=0\} = 0.4\times\frac{1}{2} = 0.2$,

$p_{13} = P\{X=0, Y=3\} = P\{X=0\}\cdot P\{Y=3 \mid X=0\} = 0.4\times\frac{1}{4} = 0.1$,

$p_{21} = P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}\cdot P\{Y=1 \mid X=1\} = 0.6\times\frac{1}{2} = 0.3$,

$p_{22} = P\{X=1, Y=2\} = P\{X=1\}\cdot P\{Y=2 \mid X=1\} = 0.6\times\frac{1}{6} = 0.1$,

$p_{23} = P\{X=1, Y=3\} = P\{X=1\}\cdot P\{Y=3 \mid X=1\} = 0.6\times\frac{1}{3} = 0.2$.

故(X, Y)的分布律为

X\Y	1	2	3
0	0.1	0.2	0.1
1	0.3	0.1	0.2

4. (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$, 得 $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} k e^{-3x-4y}\,dy = 1$,
解得 $k=12$.

(2) 当 $x<0$ 或 $y<0$ 时, $F(x,y)=0$.

当 $x\ge 0, y\ge 0$ 时, $F(x,y) = \int_0^x dx \int_0^y 12 e^{-3x-4y}\,dy$
$= (1-e^{-3x})(1-e^{-4y})$.

综上得 $F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x\ge 0, y\ge 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(3) $P\{0<X<1, 0<Y<2\} = F(1,2) = (1-e^{-3})(1-e^{-8})$.

5. (1) 区域D的面积 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2$，故(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

(2) 当 $x<1$ 或 $x>e^2$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$.

当 $1\le x\le e^2$ 时，$f_X(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}$.

综上得X的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1\le x\le e^2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $y<0$ 或 $y>1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=0$，

当 $0\le y\le e^{-2}$ 时，$f_Y(y)=\int_1^{e^2}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}(e^2-1)$，

当 $e^{-2}<y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_1^{\frac{1}{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{1-y}{2y}$.

综上得Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(e^2-1), & 0\le y\le e^{-2};\\ \frac{1-y}{2y}, & e^{-2}<y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$