分章测试题（5）详细解答

1．（1）(A)；（2）(B)；（3）(B)；（4）(D)；（5）(C).

2．（1）$-3<a<1$；　（2）0；　（3）$m>0$且$m^2-(m-1)(n+2)>0$；　（4）$0,1$；（5）0；　（6）1,1；　（7）-3.

3．解：（1）由A与B相似，知$\begin{cases}5+a=4+b,\\ |A-bE|=0.\end{cases}$将$b-a=1$代入$|A-bE|$中，有

$$|A-bE|=\begin{vmatrix}1-b & -1 & 1\\ 2 & 4-b & -2\\ -3 & -3 & a-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1-b\\ -2 & 4-b & 2\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=(2-b)(b-6)\text{，故}\begin{cases}a=1,\\ b=2,\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=5,\\ b=6.\end{cases}$$

若$a=1,b=2$，则$|A-\lambda E|=\lambda(\lambda-2)(4-\lambda)$，$A$的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=4$，而$B$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，$A$与$B$不相似，所以$\begin{cases}a=5,\\ b=6.\end{cases}$

（2）对应于$\lambda_1=\lambda_2=2$，由$(A-2E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，

对应于$\lambda_3=6$，由$(A-6E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$.

取$P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$，则有$P^{-1}AP=B$.

4．解：令$\varphi(x)=x^2+x-2$，则$\varphi(-1)=-2,\varphi(1)=0,\varphi(2)=4$，

故A^2+A-2E的特征值为$-2,0,4$，从而$|A^2+A-2E|=0$.

5．解：将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$正交化，单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

由于A的属于$\lambda_3=-1$的特征向量是$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^T\\ \boldsymbol{\xi}_2^T\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解，

因此可得 A 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

取 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}=\Lambda$，

所以 $A=P\Lambda P^T=E+P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6．解：取 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}=\Lambda$.

记 $\varphi(x)=x^3+x^2-4x+2$．于是

（1）$A^k=P\Lambda^kP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&1-2^k&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$；

（2）$\varphi(2)=6,\varphi(1)=0,\varphi(0)=2$，$|A^3+A^2-4A+2E|=6\times0\times2=0$；

（3）$A^3+A^2-4A+2E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&2\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}$.