6．4　二次型

对于平面上的二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2=1,$$

我们可以选择适当的坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

消去交叉项，把方程化为标准形

$$mx'^2+ny'^2=1.$$

由于坐标旋转变换不改变图形的形状，从变换后的方程很容易判别曲线的类型．

一、二次型及其矩阵表示

定义 6．3　含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式（二次齐次函数）

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots + b_{nn}x_n^2 \end{aligned} \qquad (6—1)$$

称为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**二次型**，简称 n **元二次型**，其中 b_{ij} 称为乘积项 x_ix_j 的**系数**．当式（6—1）的全部系数均为实数时，称之为**实二次型**；当式（6—1）的系数允许有复数时，称之为**复二次型**（本书只讨论实二次型）．

若记 $a_{ii}=b_{ii}$，$a_{ij}=a_{ji}=\frac{1}{2}b_{ij}$（$i \neq j$）（$i, j=1, 2, \cdots, n$），则

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & + a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ = & (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (6—2)$$

若记$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则（6—2）式可记为

$$f(x)=x^T Ax . \qquad (6—3)$$

式（6—2）和式（6—3）称为二次型的**矩阵表示**．在$a_{ij}=a_{ji}$的规定下，显然A为实对称阵，且A与二次型是一一对应的．因此，实对称阵A称为**二次型的矩阵**，A的秩称为**二次型的秩**.

例 4．1　求二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+\frac{1}{2}x_3^2-3x_1x_2+6x_1x_3$的矩阵表示.

解　二次型有 3 个变量，所以对应三阶对称阵，a_{ii}为x_i^2的系数，$a_{ij}=a_{ji}$为x_ix_j系数的一半，由此可得二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$，则二次型的矩阵表示为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

或

$$f(x)=x^T Ax .$$

例 4．2　已知二次型$f=5x_1{}^2+5x_2{}^2+cx_3{}^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2，求常数$c$.

解　因为二次型的秩即为其矩阵的秩，而f的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$，所以$R(A)=2$，

因此$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{vmatrix}=0$，解得$c=3$.

二、化二次型为标准形

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆（满秩）线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

即 $x = Cy$，其中

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

使经此线性变换后二次型只含平方项

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2 .$$

这种只含平方项的二次型称为二次型的**标准形**（或**法式**）.

如果标准形中的系数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 只在 1，–1，0 三个数中取值，也就是

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 ,$$

这种标准形称为二次型的**规范形**.

可逆的线性变换 $x = Cy$ 在几何学上称为仿射变换. 对平面图形来说，相当于实行了旋转、压缩、反射三种变换，图形的类型不会改变，但大小、方向可能会改变，大圆会变成小圆，或变成椭圆.

二次型 $f(x) = x^T Ax$ 在线性变换 $x = Cy$ 下，有

$$f(x) = x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T (C^T AC)y .$$

定义 6．4 设 A 和 B 是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 C，使 $B = C^T AC$，则称矩阵 A 与 B **合同**.

合同是矩阵之间的一种关系，它具有反身性、对称性与传递性.（学生自行证明）

显然，若 A 为对称阵，则 $B = C^T AC$ 也为对称阵，且 $R(B) = R(A)$. 事实上，

$$B^T = (C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T AC = B,$$

即 B 为对称阵. 又因为 C 可逆，从而 C^T 也可逆，由矩阵秩的性质即知 $R(B) = R(A)$.

由此可知，经可逆（满秩）变换 $x = Cy$ 后，二次型 f 的矩阵由 A 变为与 A 合同的矩阵 $C^T AC$，且二次型的秩不变.

要使二次型 f 经可逆线性变换 $x = Cy$ 变成标准形，这就是要使

$$y^T (C^T AC)y = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使C^TAC成为对角阵. 因此，我们的主要问题就转化为：对于对称阵A，寻求可逆矩阵C，使C^TAC为对角阵.

由定理6．6知，任给实对称矩阵A，总存在正交阵P，使$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$，其中Λ是以A的n个特征值为对角元的对角矩阵．把此结论应用于二次型，即有

定理6．8 对于任意实二次型$f(x)=x^TAx$，总存在正交变换$x=Py$，使f化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$的矩阵$A$的特征值.

在三维空间中，正交变换仅对图形实行了旋转和反射变换，它保持两点的距离不变，从而不改变图形的形状和大小.

例4．3 求一个正交变换$x=Py$，把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

化为标准形.

解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)^3 ,$$

解得A的特征值为$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$.

对于$\lambda_1=-3$，解齐次线性方程组$(A+3E)x=0$，得基础解系$\xi_1=(1,-1,-1,1)^T$．将ξ_1单位化得$p_1=\dfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T$.

对于$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$，解齐次线性方程组$(A-E)x=0$，得基础解系

$$\xi_2=(1,1,0,0)^T,\ \xi_3=(1,0,1,0)^T,\ \xi_4=(-1,0,0,1)^T.$$

将ξ_2,ξ_3,ξ_4正交化，得

$$\eta_2=(1,1,0,0)^T,\quad \eta_3=\frac{1}{2}(1,-1,2,0)^T,\quad \eta_4=\frac{1}{3}(-1,1,1,3)^T.$$

将η_2,η_3,η_4单位化，得

$$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T,\quad p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0)^T,\quad p_4=\frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,1,1,3)^T.$$

令$P=(p_1,p_2,p_3,p_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则经正交变换$x=Py$，$f$化为标准形

$$f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

如果要把二次型f化为规范形，只需再令

$$\begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}z_1,\\ y_2=z_2,\\ y_3=z_3,\\ y_4=z_4,\end{cases}$$

即得f的规范形

$$f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2.$$

说明：规范形也是一种标准形，由本例可见二次型的标准形并不唯一，它与所做变换有关，但规范形是唯一的.

课堂提问：二次型化为标准形后，标准形中非零系数的平方项有多少项？

例 4．4 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$经正交变换$x=Py$可化为标准形$f=6y_1^2$，则$a=$______.

解 因为二次型x^TAx经正交变换化为标准形时，标准形中平方项的系数就是二次型矩阵A的特征值，所以$6,0,0$是A的特征值．由特征值的性质$t_r(A)=a+a+a=6+0+0\Rightarrow a=2$．故填$2$.

例 4．5 化二次曲线$x^2-4xy-2y^2+4x+4y=1$为标准形，并指出它的形状.

解　先用正交变换将二次型 $x^2-4xy-2y^2$ 标准化.

二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$.

解特征方程 $\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$，得特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$，相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. 将它们单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$. 所求正交变换为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}.$$

二次椭圆曲线化为：$2x_1^2-3y_1^2+\frac{4}{\sqrt{5}}(2x_1+y_1)+\frac{4}{\sqrt{5}}(-x_1+2y_1)=1$.

配方得：$-2(x_1+\frac{1}{\sqrt{5}})^2+3(y_1-\frac{2}{\sqrt{5}})^2=1$.

所以曲线为一双曲线.

例 4．6 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$ 在 $x^Tx=1$ 的条件下的最大值，其中 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$.

解　由例 4．2 知，二次型 f 经正交变换 $x=Py$ 化为标准形

$$f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

因为在正交变换 $x=Py$ 下，

$$y^Ty=(P^{-1}x)^T(P^{-1}x)=(P^Tx)^T(P^Tx)=x^T(PP^T)x=x^Tx,$$

所以，当 $x^Tx=1$时，$y^Ty=1$．此时，

$$f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2\le y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=1,$$

即当 $x^Tx=1$时，f 的最大值为1.

用正交变换化二次型成标准形，具有保持几何形状不变的优点．如果不限于用正交变换，那么还可以有多种方法（对应有多个可逆的线性变换）把二次型化成标准形．这里只介绍矩阵合同变换法与拉格朗日配方法.

1．矩阵合同变换法（选讲）

2．拉格朗日配方法

下面举例说明用拉格朗日配方法化二次型为标准形.

例 4．7 化二次型

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

成标准形，并求所用的变换矩阵.

解 $f=\left[x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2\right]-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.$$

令$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\ y_2=x_2+2x_3,\\ y_3=x_3,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_3,\\ x_2=y_2-2y_3,\\ x_3=y_3,\end{cases}$，则经此线性变换二次型 f 化成标准形

$$f=y_1^2+y_2^2.$$

变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$