概率论与数理统计练习题（10）

区间估计、假设检验

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）某产品指标 $X \sim N\left(\mu, 1\right)$，从中随机抽取容量为 16 的一个样本，计算得样本均值为 $\overline{X}=2$，则总体均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间为____________________.

（2）某市随机对 1000 名成年人进行调查，得知有 600 人喜欢上网，则以 95%的置信水平确定该市成年人喜欢上网的比率 p 的置信区间为______________________.

（3）从已知标准差 $\sigma=5.2$ 的正态总体中抽取容量为 16 的样本，算得样本均值 $\overline{x}=27.56$，在显著水平 $\alpha=0.05$ 之下检验假设 $H_0: \mu=26$，检验结果是_________ .

（4）在 χ^2 检验时，用统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，若 $H_0: \sigma^2=\sigma_0{}^2$ 时，用_____检验，它的拒绝域为________________________；若 $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0{}^2$ 时，用_____检验，它的拒绝域为________________________.

2．选择题

（1）若总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 已知，则对于确定的样本容量，总体均值 μ 的置信区间长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是（　　　）.

（A）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 缩短；　　　（B）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 增大；

（C）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 不变；　　　（D）以上说法均错.

（2）设正态总体期望 μ 的置信区间长度 $L=\dfrac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$，则其置信度为（　　　）.

（A）$1-\alpha$；　　（B）α；　　（C）$1-\dfrac{\alpha}{2}$；　　（D）$1-2\alpha$.

（3）假设检验中，显著性水平 α 表示（　　　）.

（A）H_0 为假，但接受 H_0 的假设的概率；　（B）H_0 为真，但拒绝 H_0 的假设的概率；

（C）H_0 为假，且拒绝 H_0 的假设的概率；　（D）可信度.

3．计算题

（1）岩石密度的测量结果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现抽取 12 个样品，测得 $\sum_{i=1}^{12} x_i = 32.1, \sum_{i=1}^{12} x_i^{\,2} = 89.92$. 当 μ 未知时，求方差 σ^2 的置信区间（$\alpha = 0.1$）.

（2）若总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\,2})$ 与 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\,2})$ 相互独立，已知样本数据 $n_1 = 80, \overline{x} = 200, s_1 = 80$；$n_2 = 100, \overline{y} = 100, s_2 = 100$. 求取 $\alpha = 0.01$ 时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间.

（3）设某次考试学生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩 $\overline{x}$ 为 66.5 分，标准差 s 为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

（4）某项考试要求成绩的标准差为 12，现从考试成绩中任意抽取 15 份，计算样本标准差为 16，设成绩服从正态分布，问此次考试的标准差是否不合要求 $(\alpha = 0.05)$？

概率论与数理统计练习题（10）详细解答

1．填空题

（1）$\left(\bar{x}-\frac{1}{\sqrt{16}}u_{0.025}\,,\,\bar{x}+\frac{1}{\sqrt{16}}u_{0.025}\right)=(1.51\,,\,2.49)$.

（2）设 $X=\begin{cases}1, & \text{某人喜欢上网},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$，$X_1\,,X_2\,,\cdots,X_n$ 是取自 X 的样本，则

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\overset{\text{近似地}}{\sim}N(0,1)\,,$$

故

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right|<u_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha\,,$$

即

$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}<p<\bar{X}+\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha\,,$$

而 p 的矩估计值为 $\hat{p}=0.6$，故 p 的置信度为 95%的置信区间约为

$$(\bar{x}\pm\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2})=(0.5696,\,0.6304)\,.$$

（3）检验统计量$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$的观测值为$u=\frac{27.56-26}{5.2/\sqrt{16}}=1.2<u_{0.025}=1.96$，故接受 H_0.

（4）双边假设；$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$；左边假设；$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$.

2．选择题

（1）置信区间的长度为$L=2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$，当$1-\alpha$缩小时，$\alpha$增大，$u_{\alpha/2}$随之缩小，置信区间的长度$L$缩短．故选（A）.

（2）总体均值μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

其长度为$L=\dfrac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$，故当置信区间的长度为$L=\dfrac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$时，置信度为$1-2\alpha$．故选（D）.

（3）显著性水平α表示犯第一类错误的概率，即“当原假设H_0为真时，拒绝H_0的概率”. 故选（B）.

3．计算题

（1）**解**：$\overline{X}=\dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}X_i\sim N(\mu,\sigma^2/12)$，$\overline{x}=\dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}x_i=\dfrac{32.1}{12}=2.675$，

$$(n-1)s^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2=89.92-12\times 2.675^2=4.0525.$$

查表得$\chi^2_{0.95}(14)=4.575,\ \chi^2_{0.05}(14)=19.675$，于是$\sigma^2$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(0.206,0.886).$$

（2）**解**：因为$\overline{x}=200,\ \overline{y}=100,\ t_{0.005}(178)=2.575$，

$$s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{79\times 80^2+99\times 100^2}{178}=91.66^2,$$

所以$\mu_1-\mu_2$的置信度为99%的置信区间

$$\left(\overline{x}-\overline{y}\pm t_{0.005}(n_1+n_2-2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=(100\pm 35.4)=(64.6,135.4).$$

（3）**解**：检验假设为$H_0:\mu=70$，$H_1:\mu\neq 70$.

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{66.5-70}{15/6}=-1.4,\quad t_{0.025}(35)=2.0301,$$

因为$|t|<t_{0.025}(35)$，故接受H_0，即认为全体考生的平均成绩为 70 分.

（4）**解**：检验假设为$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=12^2$，$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{14\times 16^2}{12^2} = 24.8889,\ \chi^2_{0.025}(14) = 26.119,\ \chi^2_{0.975}(14) = 5.629,$$

因为$\chi^2_{0.975}(14) < \chi^2 < \chi^2_{0.025}(14)$，所以接受$H_0$，即认为此次考试的标准差符合要求.