第 5 章　线性方程组

5．1　线性方程组的可解性

m 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \cdots\ +a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \cdots\ +a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \cdots\ +a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{5-1}$$

可以用矩阵 $Ax=b$ 表示，其中

$$A=(a_{ij}),\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\ b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T.$$

矩阵 $B=(A,b)$ 称为线性方程组的**增广矩阵**.

当 $b=0$ 时，方程组

$$Ax=0 \tag{5-2}$$

称为**齐次线性方程组**.

当 $b\neq 0$ 时，方程组（5-1）称为**非齐次线性方程组**.

线性方程组（5-1）与相应的增广矩阵 $B=(A,b)$ 一一对应，所以，我们可以通过增广矩阵 $B=(A,b)$ 来研究线性方程组（5-1）.

在前面章节中介绍了通过高斯消元法和克拉默法则求解线性方程组，下面我们将进一步讨论，在什么样的情况下，方程组的解是适定的、不定的或超定的．方程组如有解，其表达形式是怎样的.

我们可将方程组的系数矩阵写成列向量形式：$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则方程组 $Ax=b$ 可写成

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b.$$

由此可见，方程组有解等价于向量 b 可由向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示．下面，我们将约定，A 即表示方程的系数矩阵，又表示向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

定理 5．1　对于 n 元线性方程组 $Ax=b$，有

（1）有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,b)$；

（2）方程有唯一解$\Leftrightarrow R(A)=R(A,b)=n$；

（3）无解$\Leftrightarrow R(A)<R(A,b)$；

（4）有无穷多个解$\Leftrightarrow R(A)=R(A,b)<n$.

证　（1）方程组$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b$有解$\Leftrightarrow$向量$b$可由向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性表示$\Leftrightarrow R(A)=R(A,b)$．最后一个等价性是由定理4．10得到.

（2）必要性：若方程组有唯一解$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^T$，即向量$b$可由向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$唯一线性表示，表示式为

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n=b,$$

则由结论（1）知$R(A)=R(A,b)$，且向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关．如果向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性相关，则存在不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n=0,$$

两式相加，得

$$(\lambda_1+k_1)a_1+(\lambda_2+k_2)a_2+\cdots+(\lambda_n+k_n)a_n=b,$$

故$(\lambda_1+k_1,\lambda_2+k_2,\cdots,\lambda_n+k_n)^T$也是方程组的解，而

$$(\lambda_1+k_1,\lambda_2+k_2,\cdots,\lambda_n+k_n)^T\neq(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^T,$$

这与方程组有唯一解$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^T$矛盾．所以向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，故$R(A)=R(A,b)=n$.

充分性：若$R(A)=R(A,b)=n$，则向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，而向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$线性相关．由定理4．4，向量b可由向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$唯一线性表示，故方程组有唯一解.

（3）因为$R(A)\le R(A,b)$，所以（3）是（1）的逆否命题.

（4）若方程组有两个不同的解x,y，则对任意常数k，容易证明$x+k(x-y)$都是方程组的解，所以方程组的解如不唯一，就有无穷多个解．由（1）、（2）知（4）成立.

将定理5．1应用于齐次线性方程组，得

定理5．2 对于n元齐次线性方程组$Ax=0$，有

（1）只有零解$\Leftrightarrow R(A)=n$；

（2）有非零解$\Leftrightarrow R(A)<n$.

例1．1 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=2, \\ x_1+x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2+bx_3=4, \end{cases}$$

问a,b取何值时，此方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？并在有无穷多个解时求其通解.

解 对增广矩阵$B=(A,b)$施行初等行变换变为行阶梯形矩阵，有

$$B=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & b & 4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & b-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

（1）当$a\neq 1, b\neq 2$时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解；

（2）当$b=2$时，$R(A)=2$，$R(B)=3$，方程组无解；

（3）当$a=1$时，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & b-2 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-b \end{pmatrix}$$

当$b\neq 3$时，$R(A)=2$，$R(B)=3$，方程组无解；

当$b=3$时，$R(A)=R(B)=2<3$，方程组有无穷多个解．由于

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-b \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可得通解为 $$x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$（k为任意常数).

综上所述，可得

（1）当$a \neq 1, b \neq 2$时，方程组有唯一解；

（2）当$a = 1, b \neq 3$或$b = 2$时，方程组无解；

（3）当$a = 1, b = 3$时，方程组有无穷多个解，其通解为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{（}k\text{为任意常数）.}$$