线性代数练习题（9）详细解答

1．填空题

（1）二次型的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；对该矩阵施行初等行变换得，$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，故二次型的秩为$3$.

（2）二次型的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

（3）A正定$\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式都大于零，即$D_1 = \left|1\right| = 1 > 0$，$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k-1 > 0$，

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{vmatrix} = k^2(k-1) > 0$，解得$k > 1$.

（4）二次型的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，故二次型的秩为$3$；此二次型为标准形，其中正系数平方项共 2 项，负系数平方项 1 项，故正惯性指数为 2，负惯性指数为 1.

2．解：$\left| A - \lambda E \right| = -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4) \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

对应于$\lambda_1 = -2$，由$(A+2E)x = 0$得$p_1 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$；

对应于$\lambda_2 = 1$，由$(A-E)x = 0$得$p_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$；

对应于$\lambda_3 = 4$，由$(A-4E)x = 0$得$p_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

取 $P=(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

3．解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，其特征多项式为

$$\left|A-\lambda E\right|=(1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)\ ,$$

解得 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对应于 $\lambda_1=1$，由 $(A-E)x=0$ 得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；

对应于 $\lambda_2=2$，由 $(A-2E)x=0$ 得 $p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ；

对应于 $\lambda_3=5$，由 $(A-5E)x=0$ 得 $p_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

取 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，经正交变换 $x=Py$，二次型化为标准形

$$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2\,.$$

4．解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{pmatrix}$，其各阶顺序主子式

$$D_1=\left|-2\right|=-2<0\,,\quad D_2=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-6\end{vmatrix}=11>0\,,\quad D_3=\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{vmatrix}=-38<0\,,$$

故 f 为负定的.

5．证明：因为 A 为 n 阶实对称阵，所以存在 n 阶正交阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

从而，$\Lambda^2=P^{-1}A^2P=P^{-1}OP=O$，故 $\lambda_i^2=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，于是 $\lambda_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，因此 $\Lambda=O$，所以 $A=P\Lambda P^{-1}=O$.

6. 证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$，因为 A 正定，故 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，所以 A^{-1} 的特征值 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1}\cdots,\lambda_n^{-1}$ 均大于零．又 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，故 A^{-1} 为实对称矩阵．综上分析得， A^{-1} 为正定矩阵，即 $g=x^TA^{-1}x$ 是正定二次型．