机械振动

一、选择题：

1．一质点作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$，当时间t= T/4（T为周期）时，质点的加速度为 [B]

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$

(C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega^2$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega^2$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} - A\omega^2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore a = -A\omega^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -A\omega^2\cos\frac{3\pi}{4} = A\omega^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2．一质点沿x轴作简谐振动， $x = 4\times10^{-2}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ 振动方程为 (SI)。从t=0时刻起，到质点位置在x= -2cm处，且向X轴正方向运动的最短时间间隔 [C]

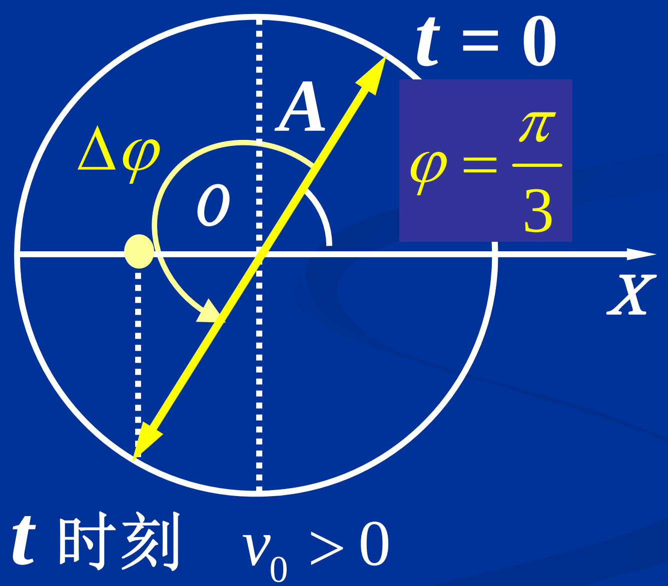
(A) 1/8s

(B) 1/4s

(C) 1/2s

(D) 1/3s

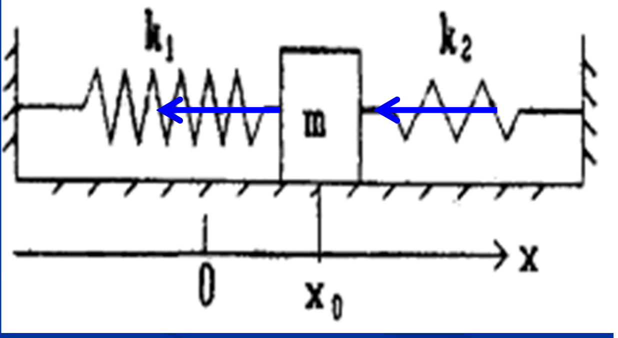
解：画出旋转式量



$$\because \Delta\varphi = \omega\Delta t = \pi \qquad \therefore \Delta t = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}s$$

[A]

3．如图所示，一质量为m的滑块，两边分别与倔强系数为k_1和k_2的轻弹簧连接，两弹簧的另外两端分别固定在墙上。滑块m可在光滑的水平面上滑动，O点为系统平衡位置。将滑块*m*向右移动到x_0，自静止释放，并从释放时开始计时。取坐标如图所示，则其振动方程为



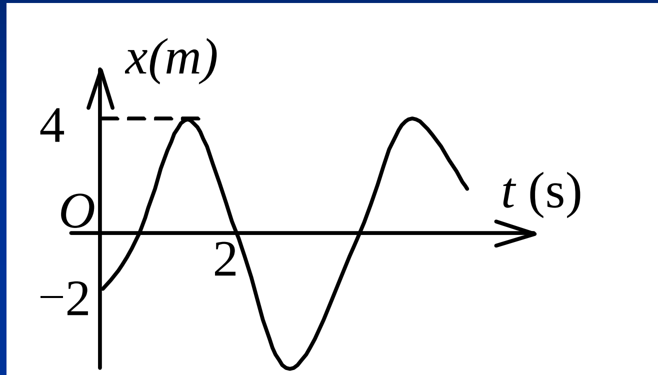
解：当m向右移动x时，两弹簧的弹力方向相同，可等效为一根劲度系数为k的弹簧

$$f = f_1 + f_2 = k_1 x + k_2 x = kx \qquad \therefore k = k_1 + k_2$$

又 $x = x_0 = A$ $\quad \therefore \phi = 0$ $\quad \therefore x = x_0 \cos\left[\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}t\right]$

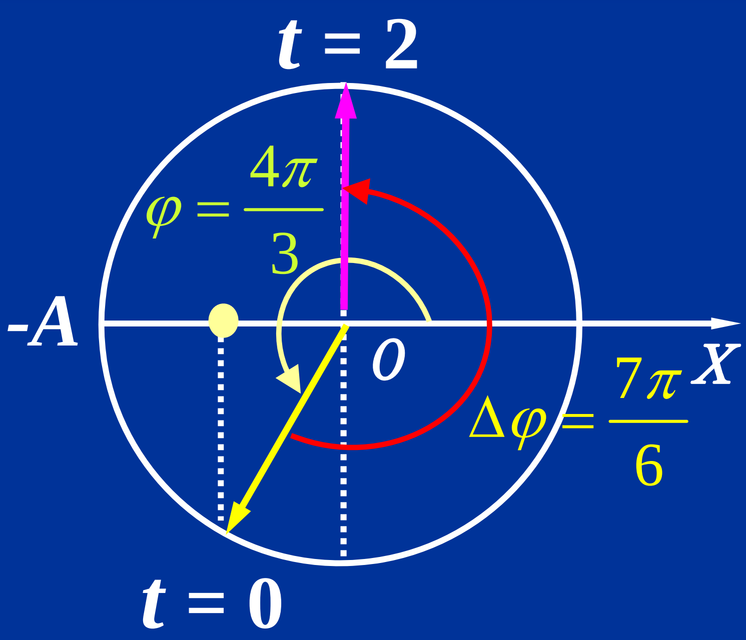
二、填空题：

1、一质点作简谐振动。其振动曲线如图所示。根据此图，它的周期T=_____，用余弦函数描述时初相φ =_____。



方法1：旋转矢量法

解：已知 $x_0 = -A/2,\ v_0 > 0$



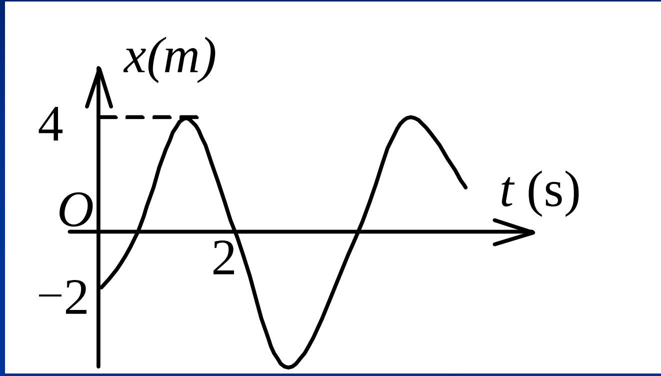
$$\therefore \varphi = \frac{4\pi}{3}(\text{或}-\frac{2\pi}{3})$$

从图中可知，2S内旋转的角度为

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\omega = \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \omega = \frac{7\pi}{12}, T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{24}{7}s$$

1、一质点作简谐振动。其振动曲线如图所示。根据此图，它的周期 T =____，用余弦函数描述时初相φ =____。



方法2：代数法

解：根据初始条件

$$x_0 = A\cos\varphi = -\frac{A}{2} \qquad \therefore \varphi = \frac{4\pi}{3}(-\frac{2\pi}{3})$$

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi > 0$$

再由t=2S时 $x_2 = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(2\omega + \varphi) = 0$

$$v_2 = -\omega A\sin(2\omega + \varphi) < 0$$

可得 $2\omega + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 则 $\omega = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{1}{2}[\frac{\pi}{2} - (-\frac{2\pi}{3})] = \frac{7\pi}{12}$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{24}{7}s$$

2、一物体悬挂在弹簧下方作简谐振动，当这物块的位移等于振幅的一半时，其动能是总能量的___3/4___。（设平衡位置处势能为零）当这物块在平衡位置时，弹簧的长度比原长长 Δl，这一振动系统的周期为______。

解：从势能角度出发考虑

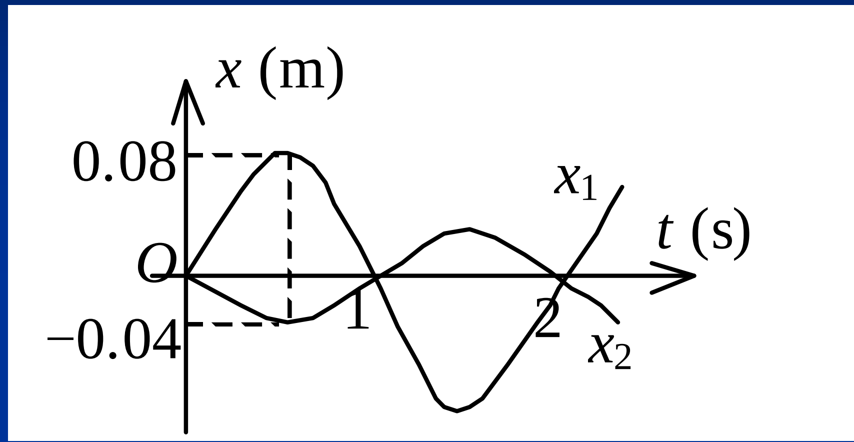
$$E_p = \frac{1}{2}K\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{E}{4}$$

$$\therefore E_K = E - E_p = \frac{3}{4}E$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/\Delta l}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$$

3、图中所示为两个简谐振动的振动曲线．若以余弦函数表示这两个振动的合成结果，则合振动的方程为

$x = x_1 + x_2 =$ ________ (SI)

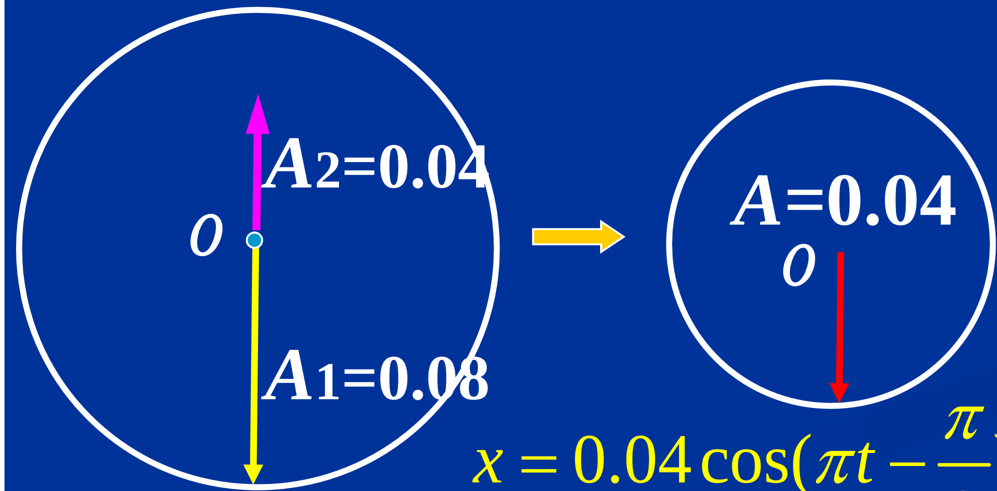


由振动曲线易得

$$x_1 = 0.08\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})$$

$$x_2 = 0.04\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

解法1：旋转式量合成



$$x = 0.04\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})$$

解法2：利用三角函数变换

$$x = x_1 + x_2$$

$$= 0.08\sin\pi t - 0.04\sin\pi t$$

$$= 0.04\sin\pi t$$

$$= 0.04\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})$$

$k = 250N/m$

4、一弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k = 250N/m$ ，当物体以初动能0.2J振动时，振幅为_____米；当动能和势能相等时，位移为____米。

解：初动能即为总能量

$$E_0 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\boxed{\therefore A = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} = 0.04m}$$

当Ek=Ep时，即Ep=E/2

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2$$

$$\boxed{x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A = \pm\frac{\sqrt{2}}{50} = \pm 0.028m}$$

5．（略，x，v，a均不变）

6．一质点在x轴上做简谐振动，已知t=0时，

$x_0 = -0.01m, v_0 = 0.03m \cdot s^{-1}, \omega = \sqrt{3} rad \cdot s^{-1}$

则质点的简谐振动方程为 ________。

解：

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} = \sqrt{0.01^2 + (\frac{0.03}{\sqrt{3}})^2} = 0.02m \leftarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

机械能守恒

t=0时， $x_0 = -\frac{A}{2}, v_0 > 0$　　由旋转式量： $\varphi = \frac{4}{3}\pi$

$$\therefore \quad x = 0.02\cos(\sqrt{3}t + \frac{4}{3}\pi)$$

1、一轻弹簧在60N的拉力下伸长30cm。现把质量为4kg的物体悬挂在该弹簧的下端并使之静止，再把物体向下拉10cm，然后由静止释放并开始计时。选X轴向下，求 (1) 物体的振动方程；(2) 在平衡位置上方5cm时弹簧的拉力。(3) 物体从第一次越过平衡位置时刻起到它运动到上方5cm处所需要最短时间。

解：(1) $k=\dfrac{F}{x}=\dfrac{60}{0.3}=200N/m$　　$\therefore \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=5\sqrt{2}\approx 7.07/s$

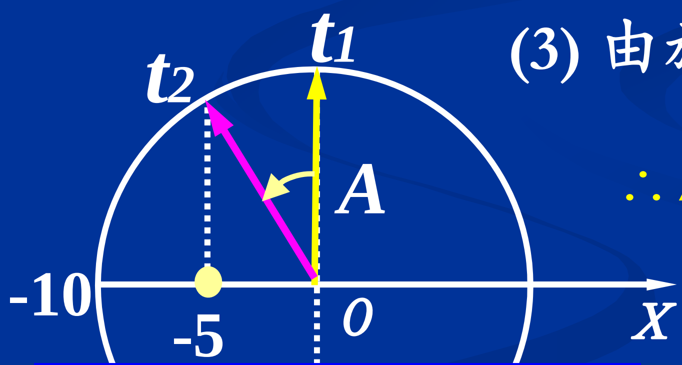
由题意：$A=0.1m$　下方最大位置时开始计时，则 $\varphi=0$

$$\therefore x=0.1\cos 5\sqrt{2}t$$

(2) 平衡位置弹簧的伸长为

$$x_0=\frac{mg}{k}=\frac{4\times 9.8}{200}=0.196m$$

$$f=k\Delta x=k(x_0-0.05)=29.2N$$



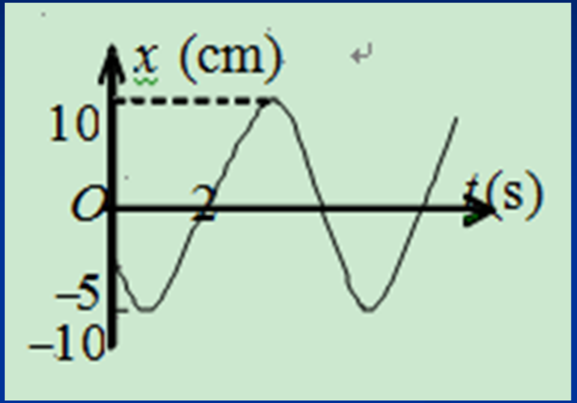
$$t_1\rightarrow t_2:\Delta\varphi=\omega\Delta t=\frac{\pi}{6}$$

(3) 由旋转矢量

$$\therefore \Delta t=\frac{\pi}{6\omega}=\frac{T}{12}=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}s$$

或：$mg-f=ma=m(-\omega^2x)$　$\therefore f=m(g+\omega^2x)=29.2N$ 方向向上

2.已知某简谐振动的振动曲线如图所示，位移的单位为厘米，时间单位为秒。求此简谐振动的振动方程。



解：参考填空题第1题

$$x = 0.1\cos(\frac{5\pi}{12}t + \frac{2\pi}{3})\ (SI)$$