概率论与数理统计练习题（1）
随机试验　样本空间　随机事件　概率的定义　古典概型

姓名______________学号________________班级______________

1．填空题

（1）生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数，样本空间为____________________.

（2）设 A,B,C 为 3 个事件，则它们都不发生的事件可表示为_________.

（3）设 A,B,C 为 3 个事件，则其中不多于 2 个发生的事件可表示为_________.

（4）设 A,B,C 为 3 个事件，则其中至少有 2 个发生的事件可表示为_________.

（5）设 $P(A)=\dfrac{1}{3},P(B)=\dfrac{1}{4},P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=$_________.

（6）某大型商场销售某种型号的电视机 1000 台，其中有 20 台次品，已售出 400 台．从剩下的电视机中，任取一台是正品的概率为_______.

（7）电话号码由 0，1，2，⋯，9 中的 5 个数字排列而成，则出现 5 个数字全都不相同的电话号码的概率为_________.

（8）设有 10 件产品，其中有 4 件次品，依次从中不放回地抽取一件产品，直到将次品取完为止．则抽取次数为 7 的概率为_________.

（9）在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码，则最大号码为 5 的概率是__________.

（10）将 *C*，*C*，*E*，*E*，*I*，*N*，*S* 七个字母随机地排成一行，则恰好排成英文单词 *SCIENCE* 的概率为___________.

2．选择题

（1）设 A,B 是任意 2 个事件，则 $P(A-B)=$（　　　）.

（A）$P(A)-P(B)$；　　（B）$P(A)-P(B)+P(AB)$；

（C）$P(A)-P(AB)$；　　（D）$P(A)+P(\overline{B})-P(AB)$.

（2）设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则（　　　）.

（A）$P(C)\le P(A)+P(B)-1$；　　（B）$P(C)\ge P(A)+P(B)-1$；

（C）$P(C)=P(AB)$；　　（D）$P(C)=P(A\cup B)$.

（3）从 5 双不同型号的鞋中任取 4 只，则至少有 2 只鞋配成 1 双的概率为（　　　）.

（A）$\dfrac{13}{21}$；　（B）$\dfrac{12}{21}$；　（C）$\dfrac{8}{21}$；　（D）$\dfrac{1}{21}$.

3. 设 A,B,C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

4．设 A,B 是两事件，且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$．问：

（1）在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？

（2）在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

5．某工厂有 10 个车间，每个车间选出 2 名代表出席职工代表会议，又从这 20 名代表中任选出 10 人组成工会委员会．求：

（1）第二车间在工会委员会中有代表的概率；

（2）每个车间在工会委员会中都有代表的概率.

概率论与数理统计练习题（2）
条件概率　独立性

姓名______________学号________________班级______________

1．填空题

（1）n个产品中有m件次品，从中任取 2 件，已知其中有一件为次品，则另一件也为次品的概率是________.

（2）从有 10 个次品的 100 个零件中不返回地依次取三个，则第 3 个才是合格品的概率是____.

（3）某射手射靶 4 次，各次命中率为 0.6，　则 4 次中恰好有 2 次命中的概率为______.

（4）一架轰炸机袭击 1 号目标，击中的概率为 0.8，另一架轰炸机袭击 2 号目标，击中的概率为 0.5，则至少击中一个目标的概率是_________.

（5）4 个人独立地猜一谜语，他们能够猜破的概率都是$\frac{1}{4}$，则此谜语被猜破的概率是__________.

（6）设两两相互独立的三事件A,B,C满足条件：$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2},\ ABC=\phi$，且已知$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则$P(A)=$_________.

2．选择题

（1）袋中共有 5 个球，其中 3 个新球，2 个旧球，每次取 1 个，无放回地取 2 次，则第二次取到新球的概率是（　　　）.

（A）$\frac{3}{5}$；　　（B）$\frac{3}{4}$；　　（C）$\frac{1}{2}$；　　（D）$\frac{3}{10}$.

（2）设$P(AB)=0$，则（　　　）.

（A）A和B不相容；　　（B）A和B独立；

（C）$P(A)=0$或$P(B)=0$；　　（D）$P(A-B)=P(A)$.

（3）设A、B是两个随机事件，且$0<P(A)<1,P(B)>0,P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有（　　　）.

（A）$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$；　　（B）$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$；

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$；（D）$P(AB)\neq P(A)P(B)$.

3．甲、乙、丙 3 台机床加工同一种零件，零件由各台机床加工的百分比依次是 50%，30%，20%．各机床加工的优质品率依次是 80%，85%，90%，将加工的零件放在一起，从中任取 1 个，求取得优质品的概率．

4．将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去，接收站收到时，信息 A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01．信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2∶1．若接收站收到的信息是 A，问原发信息是 A 的概率是多少？

5．甲、乙、丙三人同时对飞机射击，三人击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7．飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落．求飞机被击落的概率．

分章自测试题（1）

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）从$0,1,\cdots,9$ 这 10 个数字中随机抽取 1 个数字，则取到奇数的概率是________.

（2）在电话号码簿中任取 1 个电话号码，设后面 4 个数中的每一个数都是等可能地取自$0,1,\cdots,9$，则后面 4 个数全不相同的概率是________.

（3）设事件A与B互不相容，且$P(A)=p, P(B)=q$，则$P(\overline{AB})=$________，$P(\overline{A}\cup B)=$________.

（4）甲、乙 2 个实验员各自独立地做一实验，且知甲、乙实验成功的概率分别为 0.6，0.8，
则实验成功的概率________.

（5）假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中随机取出一种，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为_________.

（6）设工厂 A 和工厂 B 生产的产品的次品率分别为 1%和 2%，现从由 A 和 B 厂的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，则所取产品为次品的概率_______；若所取产品为次品，则该次品属 A 厂生产的概率是_________.

（7）设有 10 件产品，其中有 4 件次品，依次从中不放回地抽取一件产品，直到将次品取完为止．则抽取次数为 7 的概率为_________.

2．选择题

（1）已知$0<P(B)<1$，且$P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是（　　）.

（A）$P(A_1\cup A_2|\overline{B})=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$；（B）$P(B(A_1\cup A_2))=P(A_1B)+P(A_2B)$；

（C）$P(A_1\cup A_2)=P(A_1|B)+P(A_1|B)$；（D）$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$.

（2）设A, B, C是两两独立且不能同时发生的随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=x$，则x的最大值为（　　）.

（A）$\frac{1}{2}$；　　（B）1；　　（C）$\frac{1}{3}$；　　（D）$\frac{1}{4}$.

（3）设 A, B 为两事件，且 $P(AB)=0$，则（　　）.

（A）A 与 B 互斥；　　（B）AB 为不可能事件；

（C）AB 未必是不可能事件；　　（D）$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

3. 调查某城市居民的消费水平时，发现该城市家庭中有 15% 已购买空调，12% 已购买电脑，20% 已购买 VCD 机，其中有 6% 的家庭已购买空调和电脑，10% 已购买空调和 VCD 机，5% 已购买电脑和 VCD 机，三种电器都已购买的有 2% ．求下列事件的概率：（1）只够买空调的；（2）只购买一种电器产品的；（3）至少购买一种电器的；（4）至多购买两种电器的；（5）三种电器都未购买的；（6）只购买电脑和空调的.

4. 从区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求下列事件的概率：（1）两数之和小于 $\frac{6}{5}$；（2）两数之积小于 $\frac{1}{4}$；（3）以上两条件同时满足.

5. 对同一目标进行三次独立射击，第一、二、三次射击的命中概率分别为 0.4，0.5，0.7，试求：（1）在这三次射击中，恰好有一次击中目标的概率；（2）至少有一次命中目标的概率.

概率论与数理统计练习题（3）
离散型随机变量、连续型随机变量

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 Poisson 分布，已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则 $\lambda=$______.

（2）若随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\le x<1,\\ 0.8, & 1\le x<3,\\ 1, & 3\le x<+\infty.\end{cases}$，

则 X 的分布律为________________________________.

（3）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0, 其它,\end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X\le\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$__________.

（4）若随机变量 Y 在 $(1,6)$ 上均匀分布，则方程 $x^2+Yx+1=0$ 有实根的概率是______.

2．选择题

（1）下面是某个随机变量的概率分布律的为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0.5 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0.7 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\frac{1}{3}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2 & \cdots & \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n & \cdots\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots\\ \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & \cdots & (\frac{1}{2})^n & \cdots\end{pmatrix}$.

（2）设 $f(x)=\sin x$，要使 $f(x)$ 为某随机变量 X 的概率密度，则 X 的可能取值的区间为（　　）.

（A）$[\pi,\frac{3}{2}\pi]$；　（B）$[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$；　（C）$[0,\pi]$；　（D）$[0,\frac{\pi}{2}]$.

（3）设随机变量 X 的概率密度函数是 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$，则其分布函数是（　　）.

（A） $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1, & x\geq 0;\end{cases}$ （B） $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0;\end{cases}$

（C） $F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x<0,\\ 1, & x\geq 0;\end{cases}$ （D） $F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}/2, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}/2, & 0\leq x<1,\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$

3．一汽车沿街行驶，需通过 3 个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿不依赖于其他信号灯，而且红绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口数，求 X 的分布律．

4．设随机变量 $X\sim N(108,9)$，求：（1） $P\{101.1<X<117.6\}$；（2）常数 a，使 $P\{X<a\}=0.90$；（3）常数 a，使 $P\{|X-a|>a\}=0.01$．

5．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}k\sin x, & 0\leq x\leq\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求：（1）常数 k；（2） X 的分布函数；（3） $P\{0<X<\frac{\pi}{2}\}$．

概率论与数理统计练习题（4）
二维随机变量、边缘分布与条件分布

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\arctan y+\frac{\pi}{2}\right),-\infty<x,y<+\infty$$

则关于 X 和 Y 的边缘分布函数 $F_X(x)=$____________，$F_Y(y)=$____________.

（2）设随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，其中 D 是由 x 轴，y 轴及直线 $y=2x+1$ 所围成的三角形区域，则 $P\left\{X<-\frac{1}{8},Y<\frac{1}{2}\right\}=$_______.

（3）设随机变量 Y 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量 $X_k=\begin{cases}0, Y\le k;\\1, Y>k.\end{cases}(k=1,2)$，则 $P\{X_1=1,X_2=0\}=$______.

2．选择题

（1）设随机变量 $X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}(i=1,2)$，且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}=$（　　）.

（A）0；　　（B）$1/4$；　　（C）$1/2$；　　（D）1.

（2）设 X 表示随机地在 1~4 的 4 个整数中取出的一个整数，Y 表示在 1~ X 中随机地取出的一个整数，则 $P\{X=3,Y=1\}=$（　　）.

（A）0；　　（B）$1/4$；　　（C）$1/8$；　　（D）$1/12$.

（3）设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8\pi}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2<4;\\0, & x^2+y^2\ge 4.\end{cases}$

则 (X,Y) 落在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 内的概率为（　　）.

（A）$1/2$；　　（B）$1/4$；　　（C）$1/8$；　　（D）$1/12$.

3．已知 X 服从参数 $p=0.6$ 的（0-1）分布，在 $X=0$ 及 $X=1$ 下关于 Y 的条件分布律分别为

Y	**1**	**2**	**3**
$P\{Y\mid X=0\}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Y	**1**	**2**	**3**
$P\{Y\mid X=1\}$	$1/2$	$1/6$	$1/3$

求 (X,Y) 的分布律.

4．设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-3x-4y}, & x\ge 0,\ y\ge 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$（1）求常数 k；（2）求 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$；（2）求 $P\{0<X<1, 0<Y<2\}$.

5．已知平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=\mathrm{e}^2$ 围成，(X,Y) 在 D 上服从均匀分布．求（1）(X,Y) 的联合密度函数；（2）X 和 Y 的边缘密度函数.

概率论与数理统计练习题（5）
随机变量的独立性、随机变量函数的分布

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，其密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1,\\ 0, 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0.\end{cases}$$

则 X 与 Y 的联合密度函数 $f(x,y)=$__________________.

（2）设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $Y=2X$ 的密度函数

为__________________.

（3）设 $X_1\sim N(1,2), X_2\sim N(0,3), X_3\sim N(2,1)$，且 X_1, X_2, X_3 相互独立，则 $P\{0\le 2X_1+3X_2-X_3\le 6\}=$______.

2．选择题

（1）设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, x^2+y^2\le 1,\\ 0, 其他.\end{cases}$ 则 X 与 Y（　　　）.

（A）独立同分布；（B）独立不同分布；（C）不独立同分布；（D）不独立也不同分布.

（2）设 X 与 Y 相互独立且同分布

$$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$$

则下列各式中成立的是（　　　）.

（A）$P\{X=Y\}=\dfrac{1}{2}$；　　（B）$P\{X=Y\}=1$；

（C）$P\{X+Y=0\}=\dfrac{1}{4}$；　　（D）$P\{X-Y=0\}=\dfrac{1}{4}$.

（3）设随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(z), F_Y(z)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为（　　　）.

（A）$\max\{F_X(z), F_Y(z)\}$；　　（B）$\dfrac{1}{2}(F_X(z)+F_Y(z))$；

（C）$F_X(z)F_Y(z)$；　　（D）以上结论都不对.

3．设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$，求 $Y=\sin\dfrac{\pi X}{2}$ 的分布律.

4．一电子仪器由两部件构成，以 X 和 Y 分别表示两部件的寿命（单位：千小时），已知 X 和 Y 的联合分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}-\mathrm{e}^{-0.5y}+\mathrm{e}^{-0.5(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（1）问 X 和 Y 是否相互独立？（2）求两部件的寿命均超过 100 小时的概率.

5．设随机变量 X 与 Y 相互独立，其密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}.$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的分布函数.

分章自测试题（2）

姓名______________学号______________班级______________

1．填空题

（1）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax^b, 0<x<1, \\ 0, 其他 \end{cases}$ $(a>0,b>0)$，且

$P\{X>\dfrac{1}{2}\}=0.75$，则 $a=$_______，$b=$_______ .

(2)若 $P\{X<x_2\}=1-\beta, P\{X>x_1\}=1-\alpha, x_1<x_2$，则 $P\{x_1\le X<x_2\}=$__________.

（3）设 $X\sim b(2,p)$，$Y\sim b(3,p)$，若 $P\{X\ge 1\}=\dfrac{5}{9}$，则 $P\{Y\ge 1\}=$__________.

（4）已知随机变量 X 的分布律为

k	1	2	3
p_k	0.2	0.3	0.5

则其分布函数为__________________________.

（5）若 X 在[0,2]上服从均匀分布，则 $Y=X^3$ 的概率密度为_________________.

（6）设二维随机向量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 6x, 0\le x\le y\le 1, \\ 0, 其他, \end{cases}$ 则 X 的边缘

密度为_______________，Y 的边缘密度为_____________，$P\{X+Y\le 1\}=$_______.

（7）设随机变量 $X\sim N(10,0.02^2)$，已知 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt, \Phi(2.5)=0.9938$，

则 X 落在区间（9.95,10.05）内的概率为__________.

（8）设随机变量 X 服从 $N(2,\sigma^2)$ 分布，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}$=________.

（9）已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} A+Be^{-2x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$

则 $A=$_________，$B=$__________.

2．选择题

（1）设 X 是一个离散型随机变量，则下列哪些可作为 X 的分布律（　　　）.

（A）p, p^2（p 为任意实数）；　　　　（B）0.1,0.2,0.3,0.5；

（C）$\{\frac{2^n}{n!}:n=1,2,\cdots\}$；　　（D）$\{\frac{2^n}{n!}\mathrm{e}^{-2}:n=0,1,2,\cdots\}$.

（2）设随机变量 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$，为使 $P\{X=k\}$ 最大，则 $k=$（　　）.

（A）λ为整数时，$k=\lambda$或$\lambda+1$；　　（B）λ为整数时，$k=\lambda$或$\lambda-1$；

（C）λ为非整数时，$k=[\lambda]+1$；　　（D）λ为非整数时，$k=[\lambda]-1$.

（3）下列函数中，可以是连续型随机变量密度函数的是（　　）.

（A）$f(x)=\begin{cases}\sin x,\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi,\\0,其他;\end{cases}$　　（B）$g(x)=\begin{cases}-\sin x,\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi,\\0,其他;\end{cases}$

（C）$\varphi(x)=\begin{cases}\cos x,\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi,\\0,其他;\end{cases}$　　（D）$h(x)=\begin{cases}1-\cos x,\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi,\\0,其他.\end{cases}$

（4）设连续型随机变量 X 的密度函数和分布函数分别为 f（x）和 F（x），则下列选项正确的是（　　）.

（A）$0\le f(x)\le 1$；　　（B）$P\{X=x\}<F(x)$；

（C）$P\{X\le x\}=F(x)$；　　（D）$P\{X=x\}=f(x)$.

（5）设 $F_1(x),F_2(x)$ 分别为两随机变量的分布函数，若 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 为某一随机变量的分布函数，则下列结论可能成立的是（　　）.

（A）$a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$；　　（B）$a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$；

（C）$a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$；　　（D）$a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$.

（6）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间上的均匀分布，则服从相应区间或区域上均匀分布的是（　　）.

（A）X^2；　　（B）$X-Y$；　　（C）$X+Y$；　　（D）（X,Y）.

（7）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N\left(a_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(a_2,\sigma_2^2\right)$，则 $Z=X+Y$ 服从正态分布，且有（　　）.

（A）$Z\sim N\left(a_1,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$；　　（B）$Z\sim N\left(a_1+a_2,\sigma_1\sigma_2\right)$；

（C）$Z\sim N\left(a_1+a_2,\sigma_1^2\sigma_2^2\right)$；　　（D）$Z\sim N\left(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$.

设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$和 $N(1,1)$，则（　　）.

（A）$P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$；　　（B）$P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$；

（C）$P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$；　　（D）$P\{X-Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$.

3．将一颗骰子抛掷两次，以 X_1 表示两次所得点数之和，以 X_2 表示两次中得到的小的点数，试分别求 X_1、X_2 的分布律.

4．设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$，求（1）$P\{X=\text{偶数}\}$；（2）$P\{X\ge 5\}$；（3）$P\{X\text{为3的倍数}\}$.

5．设随机变量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1/4	0	0	1/16
2	1/16	1/4	0	1/4
3	0	1/16	1/16	0

试求（1）$P\{1/2<X<3/2,0<Y<4\}$；（2）$P\{1\le X\le 2,3\le Y\le 4\}$.

6．随机变量 X 服从标准正态分布，试求$Y=2X^2+1$的概率密度.

7．设随机变量 X 的分布函数为$F(x)=A+B\arctan x$，$-\infty<x<+\infty$．试求（1）系数 A,B；（2）随机变量 X 落在区间（0，1）的概率；（3）X 的概率密度函数；（4）求$Y=\mathrm{e}^X$的概率密度.

8. 设(α,β)的联合密度为$f(x,y)=\dfrac{c}{(1+x^2)(1+y^2)}$，求（1）系数$c$；（2）$(\alpha,\beta)$落在以$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$为顶点的正方形内的概率；（3）问$\alpha$、$\beta$是否独立？

概率论与数理统计练习题（6）
数学期望、方差

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设随机变量 X 的期望 EX 存在，且 $EX=a, E(X^2)=b, c$ 为一常数，则 $D(cX)=$________.

（2）设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则 $EX=$_______，$DX=$_______.

（3）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, 0\le x\le 1, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$，且 $a>0, DX=\dfrac{1}{18}$，则

$a=$_____，$b=$_____，$EX=$______.

（4）设 X 和 Y 独立，且 $EX=EY=0$，$DX=DY=1$，则 $E[(X+2Y)^2]=$_______.

（5）设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式有 $P\{|X-\mu|<2\sigma\}\ge$_______.

（6）设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} a\sin x+b, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$ 且

$EX=\dfrac{\pi+4}{8}$，则 $a=$_____，$b=$ _______.

2．选择题

（1）若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$EX=3$，$DX=1$，则 $P\{-1\le X\le 1\}=$（　　）.

（A）$2\Phi(1)-1$；　（B）$\Phi(4)-\Phi(2)$；　（C）$\Phi(-4)-\Phi(-2)$；　（D）$\Phi(2)-\Phi(4)$.

（2）设随机变量 $X\sim b(n, p)$，且 $EX=2.4$，$DX=1.44$，则 n, p 的值为（　　）.

（A）$n=4, p=0.6$；（B）$n=6, p=0.4$；（C）$n=8, p=0.3$；（D）$n=24, p=0.1$.

（3）设随机变量 X 服从指数分布，且 $DX=0.25$，则 X 的概率密度为 $f(x)=$（　　）.

（A）$\begin{cases} 2e^{-2x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$（B）$\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$（C）$\begin{cases} 4e^{-4x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$（D）$\begin{cases} \dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$

（4）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, \ x<0, \\ x^3, 0\le x\le 1,, \\ 1, \ x>1. \end{cases}$ 则 $EX=$（　　）.

（A）$\int_0^{+\infty} x^4 \mathrm{d}x$；（B）$\int_0^{+\infty} 3x^3 \mathrm{d}x$；（C）$\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x \mathrm{d}x$；　（D）$\int_0^1 3x^3 \mathrm{d}x$.

3．对某目标进行射击，直到击中为止，如果每次命中率为 p，求射击次数 X 的数学期望和方差.

4．一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

工厂规定，出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换，若工厂售出一台设备盈利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元．试求厂方出售一台设备净盈利的数学期望.

概率论与数理统计练习题（7）
协方差、相关系数、大数定律与中心极限定理

姓名____________学号____________班级____________

1．选择题

（1）若存在常数 $a,b(a\neq 0)$ 使得 $P\{Y=aX+b\}=1$，则 ρ_{XY} 为（　　　）.

（A）1；　　（B）-1；　　（C）$\dfrac{a}{|a|}$；　　（D）不确定.

（2）将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面和反面朝上的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　　）.

（A）1；　　（B）-1；　　（C）0.5；　　（D）0.

（3）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立且与 X 同分布，X 服从参数为 2 的指数分布，则当 $n\to\infty$ 时，$Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于（　　　）.

（A）$\dfrac{1}{2}$；　　（B）2；　　（C）4；　　（D）8.

（4）设 $\{X_n\}$ 相互独立，$X_n\sim U(-n,n)\ (n=1,2,\cdots)$，则对 $\{X_n\}$（　　　）.

（A）可使用切比雪夫大数定理；　　（B）可使用马尔柯夫大数定理；

（C）可使用辛钦大数定理；　　（D）不可使用切比雪夫大数定理.

2．填空题

（1）设 $DX=4,\ DY=9,\ \rho_{xy}=0.5$，则 $D(2X-3Y)=$______.

（2）设 X,Y 的相关系数为 0.5，$Z=aX+b(a<0)$，则 Y,Z 的相关系数为______.

（3）设 $\{X_k\}$ 相互独立同分布，$E(X_k)=\mu,D(X_k)=\sigma^2\ (k=1,2,\cdots)$，则根据中心极限定理，当 n 充分大时，$P\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k<n\mu\right\}\approx$______.

3. 在一零件商店中，其结帐柜台替各顾客服务的时间（以分计）是相互独立的随机变量，均值为 1.5，方差为 1，求对 100 位顾客的总服务时间不多余 2 小时的概率.

4．某种难度很大的心脏手术成功率为 0.9，对 100 个病人进行这种手术，以 X 记手术成功的人数，求 $P\{84 \le X \le 95\}$.

5．为了确定事件 A 发生的概率 $p(0 < p < 1)$ ，进行 10000 次重复独立试验，试分别用切比雪夫不等式和中心极限定理估计：用事件 A 在 10000 次试验中发生的频率作为概率 p 的近似值，误差小于 0.01 的概率.

6．某单位设置一台电话总机，共有 200 个分机，设每个分机有 5%的时间要使用外线通话，各个分机使用外线与否是相互独立的，该单位需要多少外线才能保证每个分机要用外线时可供使用的概率不小于 0.9?

分章自测试题（3）

姓名______________学号______________班级______________

1．填空题

（1）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}ax+b, 0\le x\le 1\\ 0,其他\end{cases}$，且$DX=\dfrac{1}{18}$, 则 a=______，

b=______，F（3x）=________________，$D(\dfrac{1}{\sqrt{2}}X)=$______，D（3X+1）=______.

（2）设 X 的分布列为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

则 EX=______，$EX^2=$______，$E(3X^2+5)=$______，$D(3X^2+5)=$______，$D(-2X^2-3)=$______.

（3）设 X,Y 独立，$EX=EY=0, DX=DY=1$，则 $E(3X+2Y)^2=$______.

（4）设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为独立同分布随机变量，$EX_i=1, DX_i=2.4\ (i=1,2,\cdots,100)$，则 $P\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\ge 90\}=$______.

（5）设 $EX=\mu, DX=\sigma^2$，则由车贝晓夫不等式有 $P\{|X-\mu|\ge 3\sigma\}\le$______.

（6）在天平上重复称量一重量为 a 的物品，假定各次称量是独立的，且服从 $N(a,0.2^2)$，$\bar{X}_n$ 为 n 次称量的算术平均值，为使 $P\{|\bar{X}_n-a|<0.1\}\ge 0.95$，则 n 不小于自然数______.

2．选择题

（1）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立且与 X 同分布，X 服从参数为 2 的指数分布，则当 $n\to\infty$ 时，$Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于（　　　）.

（A）$\dfrac{1}{2}$；　　（B）2 ；　　（C）$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$；　　（D）3.

（2）设 $X_1,X_2,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，若（　　　）时，则 $\{X_n\}$ 服从切贝雪夫大数定理.

（A）$P\{X_i=k\}=\dfrac{1}{k!\mathrm{e}}(k=0,1,2,\cdots)$；（B）$P\{X_i=k\}=\dfrac{1}{k(k+1)}(k=0,1,2,\cdots)$；

（C）X_i 的密度 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$；　（D）$X_i$ 的密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{x^3}, x\ge 1,\\ 0,\ \ x<1.\end{cases}$ $i=1,2,\cdots$.

（3）设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 相互独立，$EX_i=1,DX_i=1\,(i=1,2,\cdots 9)$，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，有（　　）.

（A）$P\{|\sum\limits_{i=1}^{9}X_i-1|<\varepsilon\}\ge 1-\varepsilon^{-2}$；　（B）$P\{|\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}X_i-1|<\varepsilon\}\ge 1-\varepsilon^{-2}$；

（C）$P\{|\sum\limits_{i=1}^{9}X_i-9|<\varepsilon\}\ge 1-\varepsilon^{-2}$；　（D）$P\{|\sum\limits_{i=1}^{9}X_i-9|<\varepsilon\}\ge 1-9\varepsilon^{-2}$.

3．已知 X 与 Y 的相关系数为 ρ，$DX=DY=4$，求 $X_1=aX+bY$ 与 $X_2=cX+dY$ 的相关系数.

4．设 X，Y 都是标准化随机变量，$\rho_{xy}=\dfrac{1}{2}$，令 $Z_1=aX,Z_2=bX+cY$，试确定 a，b，c 的值，使 $D(Z_1)=D(Z_2)=1$，且 Z_1 与 Z_2 不相关.

5．设 X 与 Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, 0<x,y\le 1,\\ \quad 0, \qquad\quad 其他.\end{cases}$，求 X 与 Y 的协方差阵及相关系数.

6．保险公司多年统计表明，在索赔户中，被盗赔户占 20%，X 为在随机抽查 100 索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

（1）写出 X 的分布；

（2）利用中心极限定理求被盗索赔户不少于 14 户不多于 30 户的概率近似值.

7．某电站供应一万户用电，用电高峰时每户用电概率为 0.90，利用中心极限定理计算：

（1）同时用电户数在 9030 户以上的概率；

（2）若每户用电 200W，问电站至少具有多大的发电量，才能以 95%以上的概率保证供电.

概率论与数理统计练习题（8）
样本及其分布

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从__________.

（2）设 X_1, X_2, X_3, X_4 为总体 $N(0, 2^2)$ 的样本，$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$，则当 $a=$______，$b=$______时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为______.

（3）设 $X \sim F(n,n)$，且 $P\{X>\alpha\}=0.05$，则 $P\{X>\frac{1}{\alpha}\}=$______.

2．选择题

（1）设 $X \sim N(1, 2^2)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的样本，则（　　）.

（A）$\frac{\overline{X}-1}{2} \sim N(0,1)$；　（B）$\frac{\overline{X}-1}{4} \sim N(0,1)$；

（C）$\frac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$；　（D）$\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$.

（2）设随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布，则随机变量 T^2 服从（　　）.

（A）$\chi^2(n)$；　（B）$\chi^2(n-1)$；　（C）$F(n,1)$；　（D）$F(1,n)$.

（3）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本， $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 EA_2, DA_2 分别为（　　）.

（A）$\sigma^2, 2\sigma^4$；　（B）$\sigma^2, 3\sigma^4$；　（C）$\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n}$；　（D）$\sigma^2, \frac{4\sigma^4}{n}$.

（4）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，$X \sim \chi^2(n)$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $E\overline{X}, D\overline{X}$ 分别为（　　）.

（A）$n, 2n$；　（B）$1, 2n$；　（C）$n, 2$；　（D）$\frac{1}{n}, n$.

3. 设总体 $X \sim N(60,15^2)$，从总体中抽取一个容量为100的样本，求样本均值与总体均值之差的绝对值大于3的概率.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，S^2 为其样本方差，且 $P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 1.5\} \ge 1-\alpha$. 若样本容量$n$满足$\chi_\alpha^2(n-1) \ge 38.9$，求$n$的最小值.

5. 设$X_1, X_2, \cdots, X_9$为总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，令$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \cdots + X_6)$，$Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$，$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$，$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$，证明：$Z \sim t(2)$.

分章自测试题（4）

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $X \sim \pi\left(\lambda\right)$ 的一个样本，则 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从____________.

（2）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $X \sim B(1, p)$ 的样本，则 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从____________.

（3）设 $X_1, X_2, \cdots, X_{13}$ 为总体 $N(0,2^2)$ 的一个样本，则 $P\{\sum_{i=1}^{13} X_i^2 < 64\}=$__________.

（4）设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 为总体 $N(\mu,4^2)$ 的一个样本，则 $P\{|\bar{X}-\mu|<1\}=$__________.

（5）设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为总体 $N(\mu,4^2)$ 的一个样本，且 $P\{S^2>a\}=0.1$，则 $a=$_____.

（6）若 $X \sim t(10)$，已知 $P\{X^2 \le \lambda\}=0.05$，则 $\lambda=$_______.

2．选择题

（1）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ 的一个样本，$\bar{X}, S^2$ 分别是样本均值与样本方差，则服从 $t(n-1)$ 的是（　　）.

（A）$\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S}$；　（B）$\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S^2}$；　（C）$\frac{n\bar{X}}{S}$；　（D）$\frac{n\bar{X}}{S^2}$.

（2）设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为总体 $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ 的样本，$Y^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i^2$，则（　　）.

（A）$X^2 \sim \chi^2(1)$；（B）$Y^2 \sim \chi^2(10)$；（C）$\frac{X}{Y} \sim t(10)$；（D）$\frac{X^2}{Y^2} \sim F(10,1)$.

（3）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个样本，$\bar{X}, S^2$ 分别是样本均值与样本方差，则服从 $\chi^2(n)$ 的是（　　）.

（A）$\frac{\bar{X}^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$；　（B）$\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$；

（C）$\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$；　（D）$\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$.

（4）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，$\bar{X}, S^2$ 分别是样本均值与样本

方差，则（　　）.

（A）$\dfrac{\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$；　　（B）$\dfrac{(n-1)\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$；

（C）$\dfrac{n\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$；　　（D）$\dfrac{(n+1)\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$.

（5）设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 的两个相互独立的样本，统计量 $Y = \dfrac{2(X_1+\cdots+X_m)}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_n^2}} \sim t(n)$，则 $\dfrac{m}{n}=$（　　）.

（A）1；　　（B）$\dfrac{1}{2}$；　　（C）$\dfrac{1}{3}$；　　（D）$\dfrac{1}{4}$.

（6）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，$\bar{X}$ 是样本均值，记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\ S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\ S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2},\ S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}$$

服从 $t(n-1)$ 的统计量是（　　）.

（A）$t = \dfrac{\bar{X}}{S_1/\sqrt{n-1}}$；（B）$t = \dfrac{\bar{X}}{S_2/\sqrt{n-1}}$；（C）$t = \dfrac{\bar{X}}{S_3/\sqrt{n}}$；（D）$t = \dfrac{\bar{X}}{S_4/\sqrt{n}}$.

（7）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为总体 $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ 的两个相互独立的样本，

样本均值与样本方差分别是 $\overline{X}, S_X^2, \overline{Y}, S_Y^2$，则（　　）.

（A）$\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(0,\sigma^2\right)$　　（B）$S_X^2+S_Y^2 \sim \chi^2\left(2n-2\right)$

（C）$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}} \sim t\left(2n-2\right)$　　（D）$\dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F\left(n-1,n-1\right)$

（8）设 $X \sim F\left(n,n\right), p_1 = P\{X \ge 1\}, p_2 = P\{X \le 1\}$，则（　　）.

（A）$p_1 < p_2$　（B）$p_1 = p_2$　（C）$p_1 > p_2$　（D）p_1, p_2 与 n 有关，无法比较

（9）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ 的一个样本，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值与样本方差，且 $S_k^2 = \dfrac{n}{k}\overline{X}^2 + \dfrac{1}{k}S^2, \left(k=1,2,3,4\right)$，则（　　）.

（A）$ES_1^2=\sigma^2$　　（B）$ES_2^2=\sigma^2$　　（C）$ES_3^2=\sigma^2$　　（D）$ES_4^2=\sigma^2$

（10）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的两个相互独立的样本，样本方差分别是 $S_X^2, S_Y^2, T=\left(n-1\right)\left(S_X^2+S_Y^2\right)$，则 $DT=$（　　）.

（A）$2n\sigma^4$　　（B）$2\left(n-1\right)\sigma^4$　　（C）$4n\sigma^4$　　（D）$4\left(n-1\right)\sigma^4$

3．X 为产品中某种化学成分的百分比含量，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的样本，且 X 的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\left(\theta+1\right)x^{\theta}, 0\le x\le 1, \theta\ge 0, \theta$ 未知， 试求：

（1）$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度函数；

（2）$\sum_{i=1}^{n}X_i, \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^4, \sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)$ 中哪些为统计量？

（3）求 $E\overline{X}, D\overline{X}, E\left(S^2\right)$.

4．从一正态总体中抽取容量为 10 的样本，假定有 2%的样本均值与总体均值之差的绝对值在 4 以上，求总体的标准差.

5．设总体 $X\sim N\left(\mu,4^2\right)$， $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为 X 的样本，S^2 为其样本方差，且 $P\{S^2>a\}=0.1$，求 a 的值.

6．设总体 $X\sim N\left(0,2^2\right)$， $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为 X 的样本，求常数 a,b,c,d，使

$Q=aX_1^2+b\left(X_2+X_3\right)^2+c\left(X_4+X_5+X_6\right)^2+d\left(X_7+X_8+X_9+X_{10}\right)^2$ 服从分布

$\chi^2\left(m\right)$，并求自由度 m.

7．设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的样本，求统计量

$$Y=\left(\frac{n}{5}-1\right)\sum_{i=1}^{5}X_i^2\Big/\sum_{i=6}^{n}X_i^2, n>5$$

所服从的分布.

8．求总体 $X\sim N\left(20,3\right)$ 的容量分别为 10,15 的两个独立随机样本平均值差的绝对值大

于 0.3 的概率.

9．从正态总体 $X \sim N\left(\mu, 0.5^2\right)$ 中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$.

（1）已知 $\mu = 0$ ，求 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 4\}$ ；　（2）μ 未知，求 $P\{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 \geq 2.85\}$.

概率论与数理统计练习题（9）
点估计、评价估计量的标准

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设总体 X 在 $[a,1]$ 上服从均匀分布，a 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，则 a 的最大似然估计量为________________.

（2）设 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则有 $E(\hat{\sigma}^2) =$__________.

2．选择题

（1）设总体 X 的分布密度为 $\varphi(x,\alpha) = \begin{cases} (\alpha+1)x^{\alpha}, 0 < x < 1, \\ 0, \quad \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\alpha > -1$ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则参数 α 的矩估计为（　　）.

（A）$\overline{X}$　　（B）$2\overline{X}$　　（C）$\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$　　（D）$\frac{1}{\overline{X}}$

（2）设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是参数 θ 的最大似然估计，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\hat{\theta}$ 必定是似然方程的解　　（B）$\hat{\theta}$ 是唯一的

（C）$\hat{\theta}$ 存在时不一定唯一　　（D）A 和 B 同时成立

（3）设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n > 1)$ 为来自 X 的一个样本，若 $\hat{\sigma}^2 = c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的一个无偏估计量，则 $c =$（　　）.

（A）$\frac{1}{n}$　　（B）$\frac{1}{n-1}$　　（C）$\frac{1}{2(n-1)}$　　（D）$\frac{1}{2n}$

3．计算题

（1）设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中θ（0<θ<1）为未知参数．已知取得了样本$x_1=1, x_2=2, x_3=1$．试求θ的矩估计值．

（2）设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta, \\ 0, & x\le\theta, \end{cases}$ 其中$\theta>0$为未知参数．又$x_1, x_2, \cdots, x_n$是 X 的一组样本观测值，求参数θ的最大似然估计值．

（3）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， X_1, X_2, X_3 为总体的一个样本，试证明：

$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3$，$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$ 都是 μ 的无偏估计量，并分析哪一个最好．

（4）证明在样本的一切线性组合中，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是总体期望值 μ 的无偏估计中有效的估计量．

概率论与数理统计练习题（10）
区间估计、假设检验

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）某产品指标 $X \sim N\left(\mu,1\right)$，从中随机抽取容量为 16 的一个样本，计算得样本均值为 $\overline{X}=2$，则总体均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间为____________________.

（2）某市随机对 1000 名成年人进行调查，得知有 600 人喜欢上网，则以 95%的置信水平确定该市成年人喜欢上网的比率 p 的置信区间为______________________.

（3）从已知标准差 $\sigma=5.2$ 的正态总体中抽取容量为 16 的样本，算得样本均值 $\overline{x}=27.56$，在显著水平 $\alpha=0.05$ 之下检验假设 $H_0:\mu=26$，检验结果是____________________.

（4）在 χ^2 检验时，用统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，若 $H_0:\sigma^2=\sigma_0{}^2$ 时，用____________检验，它的拒绝域为________________________；若 $H_0:\sigma^2\ge\sigma_0{}^2$ 时，用____________检验，它的拒绝域为________________________.

2．选择题

（1）若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，则对于确定的样本容量，总体均值 μ 的置信区间长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是（　　　）.

（A）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 缩短；　　（B）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 增大；

（C）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 不变；　　（D）以上说法均错.

（2）设正态总体期望 μ 的置信区间长度 $L=\dfrac{2S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$，则其置信度为（　　　）.

（A）$1-\alpha$；　　（B）α；　　（C）$1-\dfrac{\alpha}{2}$；　　（D）$1-2\alpha$.

（3）假设检验中，显著性水平 α 表示（　　　）.

（A）H_0 为假，但接受 H_0 的假设的概率；（B）H_0 为真，但拒绝 H_0 的假设的概率；

（C）H_0 为假，且拒绝 H_0 的假设的概率；（D）可信度.

3．计算题

（1）岩石密度的测量结果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现抽取 12 个样品，测得 $\sum_{i=1}^{12} x_i = 32.1, \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 89.92$．当 μ 未知时，求方差 σ^2 的置信区间（$\alpha = 0.1$）.

（2）若总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立，已知样本数据 $n_1 = 80, \overline{x} = 200, s_1 = 80$；$n_2 = 100, \overline{y} = 100, s_2 = 100$．求取 $\alpha = 0.01$ 时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间.

（3）设某次考试学生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩 $\overline{x}$ 为 66.5 分，标准差 s 为 15 分．问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

（4）某项考试要求成绩的标准差为 12，现从考试成绩中任意抽取 15 份，计算样本标准差为 16，设成绩服从正态分布，问此次考试的标准差是否不合要求 $(\alpha = 0.05)$？

分章自测试题（5）

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, x\geq\theta,\\ 0, \quad x<\theta,\end{cases}$ 则 θ 的矩估计量为____________.

（2）设 $DX=1$，来自总体 X 的容量为 100 的样本的均值为 5，则 EX 的置信度近似于 0.95 的置信区间为________________.

（3）$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ,σ^2 未知，$\bar{X}$ 为样本均值，$Y^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则假设检验 $H_0:\mu=0$ 的 T 检验使用的统计量 T＝___________.

2．选择题

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，$DX=\sigma^2$；$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值与样本方差，则（　　）.

（A）S 是 σ 的无偏估计；

（B）S 是 σ 的最大似然估计；

（C）S 是 σ 的相合估计；

（D）S 与 $\bar{X}$ 相互独立.

3．设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x(\theta-x)}{\theta^3}, 0<x<\theta,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$ 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

4．X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, x>0,\\ 0, \qquad x\leq 0,\end{cases}$ $\theta>0$，求 θ 的矩估计和最大似然估计.

5．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，$EX=\mu, DX=\sigma^2$．证明：

（1）$Y=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$ 是 μ 的无偏估计，其中 $c_i\geq 0, 1\leq i\leq n; \sum_{i=1}^{n}c_i=1$；

（2）$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 不是 σ^2 的无偏估计.

6．设 X_1, X_2 是来自总体 $N(\mu,1)$ 的样本，证明统计量

$$\hat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2 \ ,\quad \hat{\mu}_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2 \ ,\quad \hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$$

均是 μ 的无偏估计，并指出其中哪一个方差最大.

7．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（$n\geq 2$）为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，试选择常数 c，使

$W=c\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2$ 为σ^2的无偏估计.

8．已知灯泡使用时数$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，测得 10 个灯泡的平均使用时数$\bar{x}=1500$小时，$s=20$（样本的标准差），求μ和σ的 95%的置信区间.

9．为检验一种杂交作物的两种处理方案，在同一地方随机的选择 8 块地方，在各测验地可按两种方案处理作物，这 8 块地方的单位面积产品是（单位：kg）

一号方案产量：86　87　56　93　84　93　75　79

二号方案产量：80　79　58　91　77　82　74　66

假设两种作物的产量都服从正态分布，分别为$N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$，σ^2未知，求$\mu_1-\mu_2$的 95%的置信区间.

10．设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$为总体$N(\mu,1)$的样本，在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设

$$H_0:\mu=0,\ H_1:\mu\neq 0,$$

取拒绝域为$R=\{|\bar{X}|>c\}$.

（1）求 c；

（2）若已知$\bar{x}=1$，根据此样本是否可推断$\mu=0\ (\alpha=0.05)$ ；

（3）若以$R=\{|\bar{X}|>1.15\}$作为该检验$H_0:\mu=0$的拒绝域，试求检验的显著性水平α .

11．报载：某大城市为了确定养猫灭鼠的效果进行调查：

养猫户：$n_1=119$有老鼠活动的有 15 户.

无猫户：$n_2=418$有老鼠华东的有 58 户.

问：养猫与不养猫对大城市家庭灭鼠有无显著差异（$\alpha=0.05$）.

综合自测试题(一)

一、 选择题

1．以A表示事件“甲产品畅销，乙产品滞销”，则其对立事件$\overline{A}$为（　　）.

（A）“甲产品滞销，乙产品畅销” ；　　（B）“甲、乙产品均畅销” ；

（C）“甲产品滞销或乙产品畅销” ；　　（D）“甲产品滞销”.

2．一份考卷上有5道题，每题给出4个可供选择的答案，其中只有1个答案是正确的, 设X表示考生答对的题数，则某考生全凭猜测答对题数的概率分布为（　　）.

（A）$X \sim B\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$；　　（B）$X \sim B\left(5,\ \frac{3}{4}\right)$；

（C）$X \sim B\left(4,\ \frac{1}{4}\right)$；　　（D）$X \sim B\left(4,\ \frac{3}{4}\right)$.

3．设随机事件X, Y相互独立,且$X \sim B(16, 0.5), Y \sim P(9)$, 则$D(X-2Y+1)=$ (　　).

（A）-14 ；　（B）13 ；　（C）40；　（D）41.

4．设随机事件A在第i次独立试验中发生的概率为$p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$，m表示事件A在n次试验中发生的次数，则对任意$\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\right|<\varepsilon\right\}=$（　　）.

（A）1；　（B）0 ；　（C）$\frac{1}{2}$ ；　（D）不确定.

5．设$X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n\geq 2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本，$\bar{X}$为样本均值, S^2为样本方差，则（　　）.

（A）$n\bar{X} \sim N(0,1)$；　　（B）$nS^2 \sim \chi^2(n)$；

（C）$\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$；　　（D）$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

6. 设总体 X 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n\ge 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{X_n}{n}$，则（　　）.

（A） $ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$；　　（B） $ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$；

（C） $ET_1<ET_2,DT_1>DT_2$；　　（D） $ET_1<ET_2,DT_1<DT_2$.

二、　填空题

1．设 A，B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，若 A，B 互不相容，则 $P(B)=$______ .

2．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} b, & x<-1 \\ a, & -1\le x<1 \\ \dfrac{2}{3}-a, & 1\le x<2 \\ a+b, & x\ge 2 \end{cases}$，且 $P\{X=2\}$，则

$a=$______ ，$b=$______ .

3．已知 $EX=-1, DX=3$，则 $E(3X^2-2)=$______.

4． 设 X 与 Y 是两个独立的随机变量，且 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$. 则随机变量 X 与 Y 的联合概率密度为

______.

5．设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______________.

三、（计算题） 有 3 门大炮向同一目标轰炸，每门一发炮弹，已知它们命中的概率分别为 0.3、0.4 和 0.5，目标中弹一发、二发和三发而被摧毁的概率分别为 0.2、0.5 和

0.8．问（1）目标被摧毁的概率．（2）已知目标被摧毁，求目标中弹 2 发的概率．

四、(计算题) 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda=2$ 的指数分布, 令 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$. 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 与概率密度 $f_Y(y)$.

五、(计算题) 设随机变量的 (X,Y) 分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	α	β

且已知 $EY=1$, 试求(1) α，β; (2) $E(XY)$; (3) EX .

六、(计算题) 一保险公司有 10000 个汽车投保人，每个投保人索赔金额的数学期望为 280 美元，标准差为 800 美元，求索赔金额超过 2700000 美元的概率.

七、(计算题) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta, \\ 0, & x\le\theta.\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是未知参数．从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

（1）求总体 X 的分布函数 $F(x)$；（2）求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；（3）如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

综合自测试题(二)

一、 选择题

1．对于任意两个事件 A 和 B，与 $A\bigcup B\subset B$ 不等价的是（　　）.

（A）$A\subset B$；　　（B）$\overline{B}\subset\overline{A}$ ；　　（C）$A\overline{B}=\varnothing$；　　（D）$\overline{A}B=\varnothing$.

2．设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布. $X\sim N(\mu,4^2)$, $Y\sim N(\mu,5^2)$. 记

$p_1=P\left\{X\le\mu-4\right\}$, $p_2=P\left\{Y\ge\mu+5\right\}$, 则有（　　）.

（A）对任何实数 μ, 都有 $p_1=p_2$；

（B）对任何实数 μ, 都有 $p_1<p_2$；

（C）只对个别实数 μ, 才有 $p_1=p_2$；

（D）对任何实数 μ, 都有 $p_1>p_2$.

3．已知随机变量 X 的分布律为

X	-2	1	x
P	$\frac{1}{4}$	p	$\frac{1}{4}$

且 $EX=1$, 则常数 x =（　　）.

（A） 2;　　（B） 4;　　（C） 6;　　（D） 8.

4．设 $\left\{X_n\right\}$ 为独立同分布序列，且 $X_n\ (n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 λ 的指数分布，则（　　）.

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$；（B）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$；

（C）$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\le x\right\}=\Phi(x)$；（D）$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-\lambda}{n\lambda}\le x\right\}=\Phi(x)$.

5．设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\theta$的最大似然估计，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\hat{\theta}$必定是似然方程的解；　　（B）$\hat{\theta}$是唯一的；

（C）$\hat{\theta}$存在时不一定惟一；　　（D）A 和 B 同时成立.

6．设总体$X\sim B(m,\theta)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的简单随机样本，则$E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=$（　　）.

（A）$(m-1)n\theta(1-\theta)$；　　（B）$m(n-1)\theta(1-\theta)$；

（C）$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$；　　（D）$mn\theta(1-\theta)$.

二、填空题

1．设A，B为两个随机事件，且$P(A)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，若A，B相互独立，则$P(B)=$ ______ .

2．已知在当5重伯努利试验中，事件A成功的次数不服从退化分布，且X满足$P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则$P\{X=4\}=$________ .

3．设X_1,X_2,Y均为随机变量，已知$Cov(X_1,Y)=-1, Cov(X_2,Y)=3,$

则$Cov(X_1+2X_2,Y)=$______.

4．随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，则随机变量$Y=2X+1$的概率密度为______________ .

5．设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的简单随机样本，

$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$．则当 $a =$_______，$b =$_______时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为________.

三、(**计算题**) 某工厂对某一车床的经验数据分析表明：当车床调整良好时，产品合格率为 89%，而当车床存在问题时，产品合格率为 55%，而车床每次开动时调整良好的概率为 95%．现在车床再次开动，检测生产出的第一件产品为合格品，问车床调整良好的概率是多少．

四、(计算题) 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x < 0, \\ B, & 0 \le x < 1, \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x \ge 1. \end{cases}$$

求(1) A, B 的值；(2) X 的密度函数的值；(3) $P\left\{X > \dfrac{1}{3}\right\}$.

五、(计算题) 已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = -\dfrac{1}{2}$，设 $Z = \dfrac{X}{3} + \dfrac{Y}{2}$，求:

(1) EZ 和 DZ；(2)．ρ_{XZ}．

六、(计算题) 设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，共同分布为

$$P\left\{X_n = \frac{2^k}{k^2}\right\} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \cdots.$$

问 $\{X_n\}$ 是否服从大数定律？.

七、(计算题) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \dfrac{1}{2}\theta e^{-\theta|x|}$，其中 $\theta\ (\theta > 0)$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

综合自测试题(三)

一、选择题

1．$(A\bigcup B)-B=$（　　）.

（A）A；　　（B）B；　　（C）$A\bigcup B$；　　（D）$A-B$.

2．设随机变量X的分布函数为$F(x)$，在下列概率中可表示为

$F(a)-F(a-0)$的是（　　）.

（A）$P\{X\le a\}$；　（B）$P\{X>a\}$；　（C）$P\{X\ge a\}$；　（D）$P\{X=a\}$.

3．设二维随机变量(X,Y)的分布律为，

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0

则(X,Y)的协方差$Cov(X,Y)=$（　　）.

（A）$-\frac{1}{9}$；　　（B）0；　　（C）$\frac{1}{9}$；　　（D）$\frac{1}{3}$.

4．设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，由独立同分布中心极限定理，当n充分大时，S_n近似服从正态分布，只要$X_1, X_2, \cdots, X_n$满足条件（　　）.

（A）有相同数学期望；　　（B）有相同方差；

（C）服从同一指数分布；　　（D）服从同一离散分布.

5．设随机变量X和Y都服从标准正态分布，则（　　）.

（A）$X+Y$服从正态分布；　　（B）X^2+Y^2服从χ^2分布；

（C）X^2和Y^2都服从χ^2分布；　　（D）X^2/Y^2服从F分布.

6．设一批零件的长度服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ均未知，现从中随机抽取16个零件，测得样本均值$\bar{x}=20$（cm），样本标准差$s=1$（cm），则μ的置信度为0.90

的置信区间是（　　）.

（A）$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$；　　（B）$(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$；

（C）$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$；　　（D）$(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

二、填空题

1．设事件 A，B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，那么 A，B 至少有一个不发生的概率为 ______ .

2．袋中有黑、白球各一个，每次从袋中任取一球，取出的球不放回，但需放入一个白球，则第 4 次取到白球的概率为_____.

3．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} e^{-(x-a)}, & x>x_0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，则 $x_0=$____ .

4．设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 $EX^2=$______.

5．设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本．若 $c\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则 $c=$_____.

三、**(计算题)** 试确定常数 a,b,c,d 的值, 使函数

$$F(x)=\begin{cases} a, & x<1, \\ bx\ln x+cx+d, & 1\le x\le e, \\ d, & x>e \end{cases}$$

为一连续型随机变量的分布函数.

四、(计算题) 设 X 和 Y 两个随机变量相互独立,且都服从均值为 0,方差为 $\dfrac{1}{2}$ 的正态分布.求随机变量 $\left|X-Y\right|$ 的方差.

五、(计算题) 有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3 米，现从这批木柱中随机地取 100 根，求其中至少有 30 根短于 3 米的概率.

六、(计算题) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\ (0<\theta<\dfrac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值 3，1，3，0，3，1，2，3，求 θ 的矩估计和最大似然估计值.

七、(计算题) 某批产品的重量服从正态分布，从中随机抽取 36 袋，测得平均重量为 66.5g，标准差为 15g，问在显著性水平 0.05 下，是否可认为这批产品的重量为 70g?

综合自测试题(四)

一、选择题

1．随机事件A，B满足$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$和$P(A\bigcup B)=1$，则有（　　）.

（A）$A\bigcup B=\Omega$；　　　　（B）$AB=\varnothing$；

（C）$P(\overline{A}\bigcup\overline{B})=1$；　　　　（D）$P(A-B)=0$.

2．设随机变量X与Y相互独立, 其概率分布为$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline p & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$，$\begin{array}{c|cc} Y & 0 & 1 \\ \hline p & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$.

则下列式子正确的是（　　）.

（A）$X=Y$；　（B）$P\{X=Y\}=\frac{5}{9}$；　（C）$P\{X=Y\}=1$；　（D）$P\{X=Y\}=0$.

3．设X是一随机变量，$EX=\mu, DX=\sigma^2$（$\mu,\sigma>0$常数），则对任意常数c，必有（　　）.

（A）$E(X-c)^2=EX^2-c^2$；　　（B）$E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$；

（C）$E(X-c)^2<E(X-\mu)^2$；　　（D）$E(X-c)^2\geq E(X-\mu)^2$.

4．设X,Y相互独立, 且都服从区间$N(0,1)$和$N(1,1)$上的正态分布, 则服有（　）.

（A）$P(X+Y\leq 0)=\frac{1}{2}$；　　（B）$P(X+Y\leq 1)=\frac{1}{2}$；

（C）$P(X-Y\leq 0)=\frac{1}{2}$；　　（D）$P(X-Y\leq 1)=\frac{1}{2}$.

5．设随机变量X和Y独立同分布，记$U=X-Y,V=X+Y$，则随机变量U与V必然（　　）.

（A）不独立；　（B）独立；　（C）相关系数不为 0；　（D）相关系数为 0 .

6．若X_1,X_2,X_3是来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，则统计量$S=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$

服从的分布为（　　　）.

（A）$F(1,1)$；　　（B）$F(2,1)$；　　　（C）$t(1)$；　　　（D）$t(2)$.

二、 填空题

1．某人给四位亲友各写一封信，然后随机地分别装入4个信封，且每个信封装有一封信，则所有都装对了的概率为______ .

2．若随机变量 X 服从 $X\sim N(2,\sigma^2)$ 且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$______ .

3．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{4}{x^2}, & x\ge 2\\ 0, & x<2\end{cases}$，则 X 的数学期望 $EX=$ ______.

4．设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.6，若 $Z=X+8$，则 Y 与 Z 的相关系数为______.

5．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 σ^2．则样本容量 n ______时方能保证 μ 的 95% 的置信区间的长度不大于 l.

三、**(计算题)** 某种电子元件使用 6 万小时没有坏的概率是 3/4，使用 10 万小时没有坏的概率是 1/2. 现有一个这种元件，已经使用了 6 万小时没有坏，试问它能使用到 10 万小时的概率.

四、**(计算题)** 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 求常数 a，使得 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$；(2) 求常数 b，使得 $P\{X>b\}=0.05$.

五、**(计算题)** 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$f(x,y)=\begin{cases}ye^{-(x+y)}, & x,y>0\\ 0, & else\end{cases}$，判断 X,Y 是否不相关，是否独立.

六、(计算题) 军事演习中对目标进行 100 次独立轰炸，每次命中目标的炮弹数为一个随机变量，期望为 2，方差为 1.69，则在 100 次轰炸中有 180 颗到 220 颗命中目标的概率大约为多少.

七、(计算题) 设随机变变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$． 记 $Z=X-Y$．

（1）求 Z 的概率密度 $f_Z(z;\sigma^2)$；（2）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；（3）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

综合自测试题(五)

一、选择题

1．设 A，B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，于是若 A 发生 B 发生，则 $P(B)=$（　　）.

（A）0.5；　　（B）0.6；　　（C）0.7；　　（D）0.8.

2．当常数 b 为（　　）时，B 是 $p_k=\dfrac{b}{k(k+1)}\quad(k=1,2,\cdots)$ 为离散型随机变量的概率分布.

（A）2；　　（B）$\dfrac{1}{2}$；　　（C）1；　　（D）3.

3．设随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则概率 $P\{X<0.5,Y<0.6\}=$（　　）.

（A）0.5；　　（B）0.3；　　（C）$\dfrac{7}{8}$；　　（D）0.4.

4．设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　　）.

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$；　　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$；

（C）$P\{Y=-2X+1\}=1$；　　（D）$P\{Y=2X+1\}=1$.

5．设 EX,EY,DX,DY 及 $Cov(X,Y)$ 均存在，则 $D(X-Y)=$（　　）.

（A）$DX+DY$；　　（B）$DX-DY$；

（C）$DX+DY-2Cov(X,Y)$；　　（D）$DX-DY+2Cov(X,Y)$.

6．设随机变量 $X\sim t(n)\ (n>1),Y=\dfrac{1}{X^2}$，则（　　）.

（A）$Y\sim\chi^2(n)$；（B）$Y\sim\chi^2(n-1)$；（C）$Y\sim F(n,1)$；（D）$Y\sim F(1,n)$.

三、　填空题

1．一个盒中有 4 个黄球，5 个白球，现按一次取 3 个这种方式从中任取 3 个球，则取

出的球中有 2 个黄球，1 个白球的概率为 ______ .

2．设随机变量 X，Y 服从 $X \sim B(2,p)$，$Y \sim B(3,p)$，且 $P\{Y \geq 1\} = \dfrac{5}{9}$．试计算 $P\{Y \geq 1\} =$ ______ .

3．设随机变量 $X \sim B(10,0.5), Y \sim N(2,10)$，又 $E(XY) = 14$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} =$ ______ .

4．设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，且都服从参数为 λ 的泊松分布，令 $Y = \dfrac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$，则 $EY^2 =$ ______.

5．设随机序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，且 $EX_n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i < n\right\} =$ ______ .

6．测量铝的比重 16 次，得 $\bar{x} = 2.7051, s = 0.0289$，已知测量值服从正态分布，则铝的比重 ρ 的 95%的置信区间为____________.

三、**(计算题)** 某粮种公司的稻种存放在甲、乙、丙三个仓库，储存数量分别占总量的 40%、35%、25%，而这三个仓库储存的稻种的发芽率分别为 0.95、0.92、0.90. 现在将这三个仓库的稻种混合在一起，求其发芽率.

四、**(计算题)** 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \dfrac{1}{4}, P(B|A) = \dfrac{1}{3}, P(A|B) = \dfrac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A\text{发生} \\ 0, & A\text{不发生} \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & B\text{发生} \\ 0, & B\text{不发生} \end{cases}.$$

(1) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布; (2) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布.

五、**(计算题)** 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & else \end{cases}$, 已知 $EX = \dfrac{3}{5}$, 求 a,b 以及 DX .

六、**(计算题)** 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的．设每箱平均重 50

千克，标准差为 5 千克．若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，为了保障不超载的概率大于 0.9772，每辆汽车最多可以装几箱？

七、(计算题) 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的．设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$．该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \cdots, n)$，利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计 σ．（1）求 Z_1 的概率密度；（2）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；（3）求 σ 的最大似然估计量．

综合自测试题(六)

一、 选择题

1．设A，B和C是任意三事件，则下列选项中正确的是（　　）.

（A）若$A+C=B+C$，则$A=B$；　　（B）若$A-C=B-C$则$A=B$；

（C）若$AC=BC$，则$A=B$；　　（D）若$AB=\varnothing$且$\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，则$\overline{A}=B$.

2．设随机变量X的分布函数为$F(x)$，在下列概率中可表示为$1-F(a-0)$的是（　　）.

（A）$P\{X\le a\}$；　（B）$P\{X>a\}$；　（C）$P\{X\ge a\}$；　（D）$P\{X=a\}$.

3．n双不同尺码的鞋，从中任取$2r(n>r)$只，所取鞋恰好配成r双鞋的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{1}{C_n^r}$；　（B）$\dfrac{1}{C_{2n}^{2r}}$；　（C）$\dfrac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$；　（D）$\dfrac{1}{C_{2n}^r}$.

4．设随机变量$X\sim B(10,0.5),Y\sim N(2,10)$，又$E(XY)=14$，则$X$与$Y$的相关系数$\rho_{XY}=$（　　）.

（A）-0.8；　（B）-0.16；　（C）0.16；　（D）0.8.

5．总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots X_n(n>1)$为来自$X$的一个样本，$\hat{\sigma}^2=c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$是$\sigma^2$的一个无偏估计量，则$c=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{n}$；　（B）$\dfrac{1}{n-1}$；　（C）$\dfrac{1}{2(n-1)}$；　（D）$\dfrac{1}{2n}$.

6．设随机变量$X\sim t(n),Y\sim F(1,n)$，给定$\alpha\ (0<\alpha<0.5)$，常数c满足$P\{X>c\}=\alpha$，则$P\{Y>c^2\}=$（　　）.

（A）α；　（B）$1-\alpha$；　（C）2α；　（D）$1-2\alpha$.

二、填空题

1．设一个系统由 100 个互相独立起作用的部件组成，每个部件损坏的概率为 0.1，必须有 85 个以上的部件工作才能使整个系统正常工作，则整个系统正常工作的概率为______.

2．已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，那么 $P(B\mid A\cup\overline{B})$ 是______ .

3．对某种电子装置的输出测量了 5 次, 得到观察值 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5.

设它们是相互独立的变量, 且都服从同一分布 $F(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z^2/8}, & z\geq 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$. 试求

$\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}>4$ 的概率______ .

4．设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则令 $P\left\{X>\sqrt{DX}\right\}=$______.

5．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$, 则 $\lambda=$_____.

三、(计算题) 某电子设备厂生产所用的一种元件由三家厂商提供，一号厂商提供的元件份额为 15%，其元件次品率为 2%；二号厂商提供的元件份额为 80%，其元件次品率为 1%；三号厂商提供的元件份额为 5%，其元件次品率为 3%. 现在这三家厂商的元件产品在仓库是混装的，假设是均匀混合的且产品五标识。问：（1）随机取一件，求它是次品的概率。（2）已知取的一件产品是次品，求它分别来自这三家厂商的概率，分析此次品出自何厂的概率最大.

四、(计算题) 设随机变量 X,Y 相互独立, 且 X 的概率分布为

$P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 求 $P\{Y\leq EY\}$; (2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

五、(计算题) 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2,机器发生故障时全天停止

工作,若一周 5 个工作日里无故障,可获利润 10 万元;发生一次故障仍可获利润 5 万元;发生二次故障所获利润 0 元;发生三次及三次以上故障就要亏损 2 万元.求一周内利润期望是多少?

六、(**计算题**) 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), 0<x<\theta, \\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D\hat{\theta}$.

七、(**计算题**) 某高校的某专业针对某门课进行评估，已知该课成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从中随机抽取 8 个学生的该课程成绩如下：

88　63　90　85　75　80　92　76

已知 $\mu=80$，是否可以认为总体方差 σ^2 不小于 64？ $\sigma=0.05$.

综合自测试题(一)答案

一、选择题

1．C　2．A　3．C　4．A　5．D　6．D

二、填空题

1． 0.3　2． $a=\frac{1}{6}$ ，$b=\frac{5}{6}$　3． 10

4． $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1\text{且}\, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　5． $(8.2, 10.8)$

三、解：令事件 $A_i(i=1,2,3)$ 表示“目标中弹 i 发”，事件 B 表示“目标被摧毁”，则有

$$P(A_1)=0.3(1-0.4)(1-0.5)+0.4(1-0.3)(1-0.5)+0.5(1-0.3)(1-0.4)=0.44,$$

$$P(A_2)=0.3\times0.4(1-0.5)+0.3(1-0.4)0.5+(1-0.3)\times0.4\times0.5=0.29,$$

$$P(A_3)=0.3\times0.4\times0.5=0.06$$

所以，（1）目标被摧毁的概率为：

$$\begin{aligned}P(B)&=0.2P(A_1)+0.5P(A_2)+0.8P(A_3)\\&=0.2\times0.44+0.5\times0.29+0.8\times0.06=0.281\ .\end{aligned}$$

（2）已知目标被摧毁，目标中弹 2 发的概率为所求概率为：

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.5\times0.29}{0.281}=0.516.$$

四、解： X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\le y\}=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}.$$

当 $y\ge1$ 时, $F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge1-y\}=1.$

当 $y<1$ 时, $F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge1-y\}=P\left\{X\le-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right\}$

$$=F_X\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right).$$

故

$$F_Y(y)=\begin{cases}F_X\left(-\dfrac{1}{2}\ln(1-y)\right), & y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & -\dfrac{1}{2}\ln(1-y)\le 0, y\le 1\\ 1-\mathrm{e}^{-\ln(1-y)}, & -\dfrac{1}{2}\ln(1-y)>0, y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1.\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

五、解：(1)因为$\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1,$独立同分布，所以$\alpha+\beta=0.4$,又$EY=1$,即

$(\alpha+0.2)\times 1+(\beta+0.1)\times 2=1$，所以$\alpha=\beta=0.2$.

(2) $E(XY)=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i y_j p_{ij}=1\times 0.2+2\times 0.2=0.6$.

(3) $EX=\sum\limits_i x_i p_{i\cdot}=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i p_{ij}=1\times 0.6=0.6$.

六、解：记第i人的索赔金额为X_i $(i=1,2,\cdots,10000)$，由独立同分布中心极限定

理知$\sum\limits_{i=1}^{10000}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(280\times 10000,800^2\times 10000)$，故

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10000}X_i>2700000\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{10000}X_i\le 2700000\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{10000}X_i-280\times 10000}{\sqrt{800^2\times 10000}}\le\frac{2700000-280\times 10000}{\sqrt{800^2\times 10000}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(-1.25)=\Phi(1.25)=0.8944\ .$$

七、解：（1）当 $x\le\theta$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=0$.

当 $x>\theta$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t;\theta)\mathrm{d}t=\int_{\theta}^{x} 2\mathrm{e}^{-2(t-\theta)}\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{2\theta}\int_{\theta}^{x}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2t}$

$$=\mathrm{e}^{2\theta}(\mathrm{e}^{-2\theta}-\mathrm{e}^{-2x})=1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}.$$

故 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\le\theta.\end{cases}$

（2）$F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\hat{\theta}\le x\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le x\}$

$$=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x\}$$

$$=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}=1-[1-F(x)]^n$$

即 $F_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\le\theta.\end{cases}$

（3）$f_{\hat{\theta}}(x)=F'_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta;\\ 0, & x\le\theta.\end{cases}$

$$E\hat{\theta}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=2n\int_{\theta}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=2n(x-\theta)}{=}\int_0^{+\infty}(\theta+\frac{t}{2n})\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta+\frac{1}{2n},$$

因为 $E\hat{\theta}=\theta+\dfrac{1}{2n}\ne\theta$，所以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

综合自测试题(二)答案

一、　选择题

1．D　　2．A　　3．B　　4．A　　5．C　　6．B

二、填空题

1． $P(B)=0.5$　　2． $P\{X=4\}=\mathrm{C}_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}$

3．5　　4． $f_Y(y)=\begin{cases} f\left(\frac{y-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{2}}, & y\geq 1 \\ 0, & y<1 \end{cases}$　　5． $\frac{1}{20},\frac{1}{100},2$

三、解：令事件 A 表示“产品合格”，事件 B 表示“车床调整良好”。已知：$P(B)=0.95$，$P(\overline{B})=0.05$，条件概率有：$P(A|B)=0.98, P(A|\overline{B})=0.55$。所求概率为条件概率 $P(B|A)$，根据贝叶斯公式：

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$
$$=\frac{0.98\times 0.95}{0.98\times 0.95+0.55\times 0.05}=0.97.$$

四、解：(1) 由于 X 是连续型随机变量, 故 $F(x)$ 是连续函数, 所以故在分段点 $x=0$ 和 $x=1$ 处 $F(x)$ 连续 ，有

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}A\mathrm{e}^x=A,\qquad \lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}B=B,$$

可知 $A=B$. 由

$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^-}B=B,\qquad \lim_{x\to 1^+}F(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(1-A\mathrm{e}^{-(x-1)}\right)=1-A,$$

可知 $B=1-A$. 故有 $A=B=\frac{1}{2}$, 于是

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^x, & x<0, \\ \frac{1}{2}, & 0\leq x<1, \\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-1)}, & x\geq 1. \end{cases}$$

(2) $$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 0, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

(3) $P\left\{X>\frac{1}{3}\right\}=\int_{1/3}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1/3}^{1}0\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-(x-1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

五、解：(1) $EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}$;

$$\begin{aligned}DZ&=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Cov(X,Y)\\&=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=3\end{aligned};$$

(2) $Cov(X,Z)=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=\frac{1}{3}\times 3^2+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=0$,

所以 $\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DZ}}=0$.

六、解：因为$\{X_n\}$独立同分布，且 $EX_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$（该级数收敛）存在，

故由辛钦大数定律知$\{X_n\}$服从大数定律.

七、解： $\mu_1=0,\mu_2=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\theta e^{-\theta x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\theta^2}$ ，解得

$\theta=\sqrt{\frac{2}{\mu_2}}$，用 $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 代替 μ_2，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}$.

综合自测试题(三)答案

一、选择题

1．D　2．D　3．A　4．C　5．C　6．C

二、填空题

1．$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(AB)=0.9$　2．$\frac{15}{16}$　3．$x_0=a$　4．18.4　5．$c=\frac{2}{5n}$.

三、解：因为连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是连续函数, 故在分段点 $x=1$ 和 $x=\mathrm{e}$ 处连续．所以 $F(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=a$, 即 $c+d=a$.

又 $F(\mathrm{e})=\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^+}F(x)=d$, 即 $b\mathrm{e}+c\mathrm{e}+d=d$.

又 $F(x)$ 必须满足 $0=F(-\infty)=\lim\limits_{x\to -\infty}F(x)=a, 1=F(+\infty)=\lim\limits_{x\to +\infty}F(x)=d$,

即 $a=0, d=1$. 解方程组 $\begin{cases} c+1=0 \\ b+c=0 \end{cases}$, 得到 $a=0, b=1, c=-1, d=1$.

四、解：令 $Z=X-Y$, 则 $X\sim N(0,\dfrac{1}{2}), Y\sim N(0,\dfrac{1}{2})$,且 X,Y 相互独立,故 $Z\sim(0,1)$.

因为 $D(|X-Y|)=D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=E(Z^2)-[E(|Z|)]^2$,而

$E(Z^2)=DZ+(EZ)^2=1$,

$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$, 故 $D|X-Y|=1-\dfrac{2}{\pi}$.

五、解：以 X 记抽取的 100 根木柱中长度短于 3 米的根数，则 $X\sim B(100\,,0.2)$ ，由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理知 $X\overset{\text{近似}}{\sim}N(100\times0.2\,,100\times0.2\times0.8)$ ，故

$$P\{X\geq 30\}=1-P\{X<30\}=1-P\left\{\frac{X-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}<\frac{30-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\right\}$$

$\approx 1-\Phi(2.5)=0.0062$.

六、解：（1） $\mu_1=EX=3-4\theta$ ，即 $3-4\theta=\mu_1$ ，解得 $\theta=\dfrac{3-\mu_1}{4}$ ，用 $A_1=\overline{x}=2$ 代替 μ_1 ，得 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{x}}{4}=0.25$.

（2） $L=\theta^2\bullet[2\theta(1-\theta)]^2\bullet\theta^2\bullet(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$,

$\ln L=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$,

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=0$ ，即 $\dfrac{6}{\theta}-\dfrac{2}{1-\theta}-\dfrac{8}{1-2\theta}=0$ ，整理得 $12\theta^2-14\theta+3=0$ ，

解之，得θ的最大似然估计值$\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.

七、

解1.(1).假设：H_0：$\mu=\mu_0=70$，H_1：$\mu\neq\mu_0=70$

(2).检验统计量：$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

(3).拒绝域：$|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-70}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$

(4).计算并决策：$|t|=\left|\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}\right|=1.4<2.0301$，接受$H_0$，

即可以认为这批产品的重量为$70g$.

综合自测试题(四)答案

一、选择题

1．C　2．B　3．D　4．B　5．D　6．C

二、 **填空题**

1．1/24　2．$P\{X<0\}=1-0.8=0.2$　3．4　4．0.6　5．$n\geq 15.37\dfrac{\sigma^2}{l^2}$

三、解：令事件$A=\{$使用6万小时没有坏$\}$，事件$B=\{$使用10万小时没有坏$\}$，那么由题意可知：$P(A)=\dfrac{3}{4},P(B)=\dfrac{1}{2}$，所求概率为条件概率$P(B|A)$.

显然有$A\subset B,AB=B$，所以$P(AB)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，因此

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}.$$

四、解：(1) 由于X是连续型随机变量, 因此有$P\{X=a\}=0$, 从而

$P\{X>a\}+P\{X<a\}=1$. 由于$P\{X>a\}=P\{X<a\}$, 于是有$P\{X<a\}=\dfrac{1}{2}$. 而

$P\{X<a\}=\int_0^a 4x^3\mathrm{d}x=a^4$, 所以$a^4=\dfrac{1}{2}$, $a=\sqrt[4]{0.5}$.

(2) 由于 $P\{X>b\}=0.05$，而 $P\{X>b\}=\int_b^1 4x^3\mathrm{d}x=1-b^4$，所以 $1-b^4=0.05$，

故 $b=\sqrt[4]{0.95}$.

五、解：(1) 已知 (X,Y) 联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases} ye^{-(x+y)}, & x,y>0 \\ 0, & else \end{cases}$,所以

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}xye^{-(x+y)}dx=1;$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}y^2e^{-(x+y)}dy=2;$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}x^2ye^{-(x+y)}dx=2;$$

$$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}y^3e^{-(x+y)}dy=6;$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=2-1=1,\ DY=EY^2-(EY)^2=6-4=2.$$

因为 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy=2;$

所以 $Cov(X,Y)=E(XY)-(EX)\cdot(EY)=0$,即得 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=0;$

故 X,Y 不相关.

(2) 应用边缘概率密度与联合概率密度的关系,则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases};\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases};$$

所以 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,因此 X,Y 相互独立.

六、解：设第 i 次轰炸中命中目标的炮弹数为 X_i，$i=1,2,\cdots,100$，由独立同分布中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{100}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(2\times100,1.69\times100)$，故

$$P\left\{180 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 220\right\} = P\left\{\frac{180-200}{13} \le \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 200}{13} \le \frac{220-200}{13}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{20}{13}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{13}\right) = 2\Phi\left(\frac{20}{13}\right) - 1 \approx 0.8764 .$$

七、解：（1）由题设，知 $Z \sim N(\mu, 3\sigma^2)$，故 $f_Z(z;\sigma^2) = \dfrac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$.

（2）由（1），知似然函数为 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \sigma) = \dfrac{1}{(\sqrt{6\pi})^n \sigma^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$ ，

对数似然函数为 $\ln L = \ln \dfrac{1}{(\sqrt{6\pi})^n} - \dfrac{n}{2} \ln \sigma^2 - \dfrac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ ，

令 $\dfrac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d}\sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{6\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 0$，解得 σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ ，

所以 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$.

（3）由（2），知 $E\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} EZ_i^2 = \dfrac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} 3\sigma^2 = \sigma^2$，即 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

综合自测试题(五)答案

一、选择题

1．C　　2．C　　3．B　　4．D　　5．C　　6．C

二、填空题

1．5/14　　2． $P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1-p)^3 = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{19}{27}$

3． $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \dfrac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0.8$　　4． $\dfrac{\lambda}{3} + \lambda^2$.

5．1　　6． $(2.6897, 2.7205)$

三、解：令事件 $A_1 = \{$稻种储存在甲仓库$\}$，事件 $A_2 = \{$稻种储存在乙仓库$\}$，

事件 $A_3=\{$稻种储存在丙仓库$\}$，事件 $B=\{$稻种发芽$\}$．由题意可知：事件 A_1,A_2,A_3 构成一个完备事件组，且都有正的概率：

$$P(A_1)=0.4，\ P(A_2)=0.35，\ P(A_3)=0.25.$$

又已知条件概率：$P(B|A_1)=0.95$，$P(B|A_2)=0.92$，$P(B|A_3)=0.9$，由全概率公式可知，稻种的发芽率为：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(BA_1+BA_2+BA_3)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)\\&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=0.4\times0.95+0.35\times0.92+0.25\times0.9\\&=0.927.\end{aligned}$$

四、解：(1) 由于 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{12}, P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(B|A)}=\dfrac{1}{6}$, 所以

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$\begin{aligned}P\{X=0,Y=0\}&=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

故 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y 错误！未指定书签。	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(2) Z 的所有可能取值为 $0,1,2$，

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}.$$

故 Z 的概率分布为

Z	0	1	2
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

五、解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1=\int_0^1 (a+bx^2)dx=a+\frac{1}{3}b,$ 则 $3a+b=3$；

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x(a+bx^2)dx=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b=\frac{3}{5},$ 得 $2a+b=\frac{12}{5}$；

综合上式解得 $a=\frac{3}{5},b=\frac{6}{5}.$

（2）$DX=EX^2-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(\frac{3}{5})^2=\int_0^1 x^2(a+bx^2)dx-(\frac{3}{5})^2=\frac{2}{25}$.

六、解：设第 i 箱重量为 X_i 千克，$i=1,2,\cdots,n$，由独立同分布中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(50n,5^2 n)$. 依据下式可以确定 n：

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le 5000\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-50n}{5\sqrt{n}}\le\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.9772=\Phi(2),$$

故 $\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，从而 $n<98.0199$，即最多只能装 98 箱．故填 98.

七、解：（1）当 $z\le 0$ 时，$F_{Z_i}(z)=0$；当 $z>0$ 时，

$$F_{Z_i}(z)=P\{Z_i\le z\}=P\{|X_i-\mu|\le z\}=P\{-z\le X_i-\mu\le z\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-z}^{z}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\text{，}$$

所以Z_i的概率密度为 $$f_{Z_i}(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

（2） $$EZ_i=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_{Z_i}(z)\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{0}^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z=-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\text{，}$$

令$\dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\bar{Z}$，解得$\sigma$的矩估计量为$\hat{\sigma}=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\bar{Z}$，其中$\bar{Z}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i$．

（3）似然函数为 $$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\sigma)=\frac{2^n}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}\text{，}$$

对数似然函数为 $$\ln L=\ln\frac{2^n}{(\sqrt{2\pi})^n}-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2\text{，}$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^3}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2=0$，解得$\sigma$的最大似然估计值为$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}$，所以$\sigma$的

最大似然估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2}$

综合自测试题(六)答案

一、 选择题

1．D　2．C　3．C　4．D　5．C　6．C

三、填空题

1．0.9772　2．$P(B\,|\,A\cup\bar{B})=0.25$

3．$P\{V>4\}=1-P\{V\le 4\}=1-F_{\max}(4)=1-[F(4)]^5=1-\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)^5$

4． $\dfrac{1}{e}$　　5．1

三、解：令事件 A 表示“取到的一个元件为次品”，事件 $B_i(i=1,2,3)$ 为“取到的元件由 i 号厂商提供”。则事件 B_1,B_2,B_3 构成一个完备事件组，且都有正的概率：

$$P(B_1)=0.15，\ P(B_2)=0.8，\ P(B_3)=0.05.$$

又已知条件概率：$P(A|B_1)=0.02, P(A|B_2)=0.01, P(A|B_3)=0.03.$

（1）由全概率公式：$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)\\&=0.0125.\end{aligned}$

（2）由贝叶斯公式：

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times0.15}{0.0125}=0.24, P(B_2|A)=0.64, P(B_3|A)=0.12.$$

显然次品来自二号厂商的概率最大.

四、解：(1) $EY=\int_0^1 y\cdot 2y\mathrm{d}y=\dfrac{2}{3}$,. $P\{Y\le EY\}=P\left\{Y\le\dfrac{2}{3}\right\}=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\mathrm{d}y=\dfrac{4}{9}$

(2) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z,\ X=0\}+P\{X+Y\le z,\ X=2\}$

$$=P\{X=0, Y\le z\}+P\{X=2, Y+2\le z\}=\frac{1}{2}\left[P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-2\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[F_Y(z)+F_Y(z-2)].$$

故 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}[f_Y(z)+f_Y(z-2)]=\begin{cases}0, & z\le 0\\ z, & 0\le z<1\\ 0, & 1\le z<2\\ z-2, & 2\le z<3\\ 0, & z\ge 3\end{cases}=\begin{cases}z, & z\ge 3,\\ z-2, & 0\le z<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

五、解：以 X 表示一周 5 天内机器发生故障的天数,则 $X\sim B(5,0.2)$,

$P\{X=0\}=0.8^5=0.328$; $P\{X=1\}=C_5^1\cdot 0.2\cdot 0.8^4=0.4096$;

$P\left\{X=2\right\}=C_5^2\cdot 0.2^2\cdot 0.8^3=0.2048$;

$P\left\{X\geq 3\right\}=1-P\left\{X=0\right\}-P\left\{X=1\right\}-P\left\{X=2\right\}=0.0576$.

则利润的分布律为

Y	10	5	0	-2
P	0.328	0.4096	0.2048	0.0576

$EY=10\times 0.328+5\times 0.4096+0\times 0.2048-2\times 0.0576=5.2128$.

六、解：（1）$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\int_0^\theta x^2(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\theta$，解得$\theta=2\mu_1$，

用$A_1=\bar{X}$代替μ_1，得θ的矩估计量$\hat{\theta}=2\bar{X}$；

（2）$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x;\theta)\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\int_0^\theta x^3(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{3\theta^2}{10}$，

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{\theta^2}{20},\quad D\hat{\theta}=4D\bar{X}=\frac{4DX}{n}=\frac{\theta^2}{5n}.$$

七、

解.(1).假设：H_0：$\sigma^2\geq 8^2$，H_1：$\sigma^2<8^2$

(2).检验统计量：$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\mu\right)^2\sim\chi^2(n)$

(3).拒绝域：$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\mu\right)^2\leq\chi_{1-\alpha}{}^2(n)=\chi_{0.95}{}^2(8)=2.733$

(4).计算并决策：$\chi^2=\frac{1}{64}\sum_{i=1}^n\left(X_i-80\right)^2=10.359>2.733$接受$H_0$,

即可以认为总体方差σ^2不小于64.