第 2 章　矩　阵

2．1　矩阵的基本概念

在第 1 章中，我们对矩阵有了一个初步印象，在线性代数里，矩阵是研究的主要对象，矩阵是数量关系的一种表现形式，矩阵将一个有序数表作为一个整体研究，使问题变得简洁明了，矩阵有着广泛的应用，是研究线性方程组和线性变换的有力工具，也是研究离散问题的基本手段．

1．矩阵的定义

定义 2. 1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表称为 $m\times n$ **矩阵**，记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素．

通常用大写字母 A,B,C 等表示矩阵． $m\times n$ 矩阵 A 简记为

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \text{ 或 } A=(a_{ij}) \text{ 或 } A_{m\times n}\ .$$

若矩阵 A 的行数与列数都等于 n，则称 A 为 n 阶矩阵，或称为 n 阶方阵．n 阶矩阵 A 记作 A_n．

只有一行的矩阵称为**行矩阵**，或称为**行向量**．记作

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ .$$

只有一列的矩阵称为**列矩阵**，或称为**列向量**．记作

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

两个矩阵的行数相等、列数也相等，就称它们是**同型矩阵**．若 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\ ,$$

则称矩阵 A 与矩阵 B **相等**， 记作 $A=B$.

2．几种特殊矩阵

零矩阵 所有元素均为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记为 O .

对角矩阵 主对角线以外的元素全为零的矩阵（即 $a_{ij}=0$ （$i\neq j$））（方阵中元素 a_{ii}（$i=1,2,\cdots,n$）所示的位置称为主对角线）

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

称为**对角矩阵**，记作 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

数量矩阵 矩阵

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$$

称为**数量矩阵**.

单位矩阵 n 阶方阵

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

称为 n 阶**单位矩阵**，简称**单位阵**.

上三角形矩阵 主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

称为**上三角形矩阵**.

下三角形矩阵 主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为**下三角形矩阵**.

上三角形矩阵与下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**. .

矩阵的应用十分广泛，许多实际问题都可以化为矩阵来研究.

例如，一个公司有 3 个销售点甲、乙、丙，销售 5 种产品 A ，B，C，D，E，每天的销售量可用下列表表示：

	A	B	C	D	E
甲	3	5	4	9	2
乙	4	3	6	7	3
丙	0	3	4	5	6

也可以用一个矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 来表示每天各个销售点的销售量，用矩阵表示销售量，便于进行各种统计与数学处理.