分章测试题（4）详细解答

1．-3．

2．（1）(D)；（2）(D)；（3）(C)；（4）(D)；（5）(A).

3．解：取 $\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\xi}_1-(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$,

则方程组的通解为：$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}_1,(k\in R)$，即 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},(k\in R)$.

4．解：由 $\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{pmatrix}$

$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}$，知

（1）当 $a\neq1$ 时，$R(A)=R(A,\mathbf{b})=4$，方程组有唯一解；

（2）当 $a=1,b\neq-1$ 时，$R(A)=2,R(A,\mathbf{b})=3$，方程组无解；

（3）当 $a=1,b=-1$ 时，$R(A)=R(A,\mathbf{b})=2<4$，方程组有无穷多解，

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ （k_1,k_2 为任意常数）.

5．解：由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix},$$知

（1）当$a=-1,b\neq 0$时，$\boldsymbol{\beta}$不能表为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合；

（2）当$a\neq -1$时，$\boldsymbol{\beta}$有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的唯一线性表示式．此时，

有$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2b/(a+1)\\0&1&0&0&(a+b+1)/(a+1)\\0&0&1&0&b/(a+1)\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$，

故$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3$．

6．证明：设有$x_1(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_0)+x_2(\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_0)+\cdots+x_{n-r}(\boldsymbol{\gamma}_{n-r}-\boldsymbol{\gamma}_0)=\mathbf{0}$，则

$(-x_1-x_2-\cdots-x_{n-r})\boldsymbol{\gamma}_0+x_1\boldsymbol{\gamma}_1+x_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+x_{n-r}\boldsymbol{\gamma}_{n-r}=\mathbf{0}$，

由$\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-r}$线性无关，知$x_1=x_2=\cdots=x_{n-r}=0$，

故$\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_0,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-r}-\boldsymbol{\gamma}_0$线性无关．由于$\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-r}$是非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解，故$\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_0,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-r}-\boldsymbol{\gamma}_0$是导出组$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的$n-r$个线性无关解．

而$R_S=n-R(A)=n-r$（其中S是$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解空间），故$\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_0,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-r}-\boldsymbol{\gamma}_0$是导出组$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系．