4．6　向量的内积 正交矩阵

定义 4．12　设有n维向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，令

$$[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

称$[x,y]$为向量x与y的**内积**.

当x与y都是列向量时，有$[x,y]=x^Ty$.

内积具有下列性质（其中x,y,z为n维向量，λ为实数）：

（1）$[x,y]=[y,x]$；

（2）$[\lambda x,y]=\lambda[x,y]$；

（3）$[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$；

（4）当且仅当$x=0$时，$[x,x]=0$；当$x\neq 0$时，$[x,x]>0$.

这些性质可根据内积定义直接证明.

定义 4．13　令

$$\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

称$\|x\|$为n维向量x的**长度**（或**范数**）.

当$\|x\|=1$时, 称x为**单位向量**.

向量的长度具有下述性质：

（1）非负性　当$x\neq 0$时，$\|x\|>0$；当$x=0$时，$\|x\|=0$；

（2）齐次性　$\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$；

（3）三角不等式　$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

证　（1）与（2）是显然的，只需证明（3）．因为

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=[x+y,x+y]=[x,x]+2[x,y]+[y,y]\\&\leq\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=\left(\|x\|+\|y\|\right)^2,\end{aligned}$$

所以

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$$

上面证明中用到了**柯西—施瓦兹不等式**，即$\left|[x,y]\right|\leq\|x\|\cdot\|y\|$（当且仅当$x,y$线性相关时等号成立）.

事实上，由于

$$\varphi(t)=[tx+y,tx+y]=t^2[x,x]+2t[x,y]+[y,y]\geq 0,$$

因此

$$\Delta = 4([x,y]^2 - [x,x][y,y]) \le 0,$$

$$[x,y]^2 \le [x,x][y,y],$$

即

$$\left|[x,y]\right| \le \|x\| \cdot \|y\|.$$

由上述可得如下的定义：

（1） 当 $x \ne 0$， $y \ne 0$ 时，$\theta = \arccos \dfrac{[x,\ y]}{\|x\| \cdot \|y\|}$ 称为 n 维向量 x 与 y 的**夹角**.

（2）当 $[x,y]=0$ 时，称向量 x 与 y **正交**．显然，若 $x=0$，则 x 与任何向量都正交.

定义 4．14 两两正交的非零向量构成的向量组称为**正交向量组**.

定理 4．11 若 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，即正交向量组线性无关.

证 设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，使

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = 0.$$

以 α_i^T 左乘上式两端，得 $\lambda_i\alpha_i^T\alpha_i = 0$，因 $\alpha_i \ne 0$，故

$$\alpha_i^T\alpha_i = \|\alpha_i\|^2 \ne 0,$$

从而必有 $\lambda_i = 0\,(i=1,2,\cdots,r)$．于是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

定义 4．15 设向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间 V 的一个基，如果 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是 V 的一个**规范正交基**.

例如，$e_1 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}, e_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, e_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ 就是 R^3 的一个规范正交基.

为了计算方便，我们常常需要从向量空间 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 出发，找出 V 的一个规范正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_r$．这样一个问题，称为把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 这个基**规范正交化**.

施密特正交化 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V 中的一个基，首先将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1,\ \alpha_2]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{[\beta_1,\ \alpha_r]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\ \alpha_r]}{[\beta_2,\ \beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\beta_{r-1},\ \alpha_r]}{[\beta_{r-1},\ \beta_{r-1}]}\beta_{r-1}.$$

然后将$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$单位化：

$$e_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\quad e_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\quad \cdots\cdots,\quad e_r=\frac{1}{\|\beta_r\|}\beta_r.$$

容易验证，$e_1,e_2,\cdots,e_r$是V的一个规范正交基，且与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$等价.

上述从线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$导出正交向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$的过程称为**施密特正交化过程**．它满足：对任何$k\ (1\le k\le r)$，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$等价.

例 6．1　试用施密特正交化过程将线性无关向量组

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(1,4,9)^T$$

规范正交化.

解　取

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\ \alpha_2]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\ \alpha_3]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\ \alpha_3]}{[\beta_2,\ \beta_2]}\beta_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

再取

$$e_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad e_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad e_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

则e_1,e_2,e_3即为所求.

定义 4．16　若n阶方阵A满足$A^TA=E$（即$A^{-1}=A^T$），则称A为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

正交阵有下述性质：

（1）若A为正交阵，则$A^{-1}=A^T$也是正交阵，且$|A|=\pm1$；

（2）若A和B都是正交阵，则AB也是正交阵;（可推广）

（3）n阶方阵A为正交阵的充要条件是A的n个列（行）向量是一个正交单位向量组.

证　性质（1)、（2）显然成立．下面证明性质（3).

只就列向量加以证明．设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，因为

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

所以

$$A^TA=E\Leftrightarrow \alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}1,i=j;\\0,i\neq j.\end{cases},$$

即n阶方阵A为正交阵的充要条件是A的n个列向量是一个正交单位向量组.

同理可证n阶方阵A为正交阵的充要条件是A的n个行向量是一个正交单位向量组.

例 6．2 已知方阵A满足$A^2-4A+3E=O$，且$A^T=A$. 证明：$A-2E$为正交矩阵.

证 因为$A^T=A$，$A^2-4A+3E=O$，所以

$$(A-2E)^T(A-2E)=(A^T-2E)(A-2E)=(A-2E)(A-2E)=A^2-4A+3E+E=E,$$

故矩阵$A-2E$为正交矩阵.

定义 4．16 若P为正交阵，则线性变换$y=Px$称为**正交变换**.

正交变换有着许多优良特性.

设$y=Px$为正交变换，则有

$$[y_1,y_2]=y_1^Ty_2=(Px_1)^T(Px_2)=x_1^T(P^TP)x_2=x_1^Tx_2=[x_1,x_2],$$

即正交变换保持向量的内积不变. 从而正交变换保持向量的长度、夹角、距离不变，因此几何图形经正交变换后其大小、形状都不会改变.

补充线性方程组的内积形式.

设 $\alpha_1^T=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$， $\alpha_2^T=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$， …， $\alpha_m^T=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$，

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$，则线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

可表示为

$$\begin{cases} \alpha_1^T x = b_1, \\ \alpha_2^T x = b_2, \\ \quad\vdots \\ \alpha_m^T x = b_m. \end{cases}$$

称之为线性方程组的**内积形式**.