第 4 章　矩阵的秩与 n 维向量空间

4．1　矩阵的秩

矩阵的秩是矩阵的一个重要的数字特征，是矩阵在初等变换下的一个不变量，它能表述线性代数变换的本质特性，矩阵的秩在研究 n 维向量空间的空间结构及向量之间的相互关系中起着重要的作用.

定义 4．1　设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，任取 A 的 k 行与 k 列($k\le m,k\le n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原来的次序所构成的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k **阶子式**.

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

定义 4．2　设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，如果 A 中至少存在一个非零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全为零，那么称 D 为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为矩阵 A 的**秩**，记作 $R(A)$.

并规定零矩阵的秩等于 0.

由上述定义可知：

（1）$R(A)$ 是 A 的非零子式的最高阶数；

（2）$0\le R(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$；

（3）$R(A^T)=R(A)$；

（4） 对于 n 阶方阵 A，有 $R(A)=n \Leftrightarrow |A|\ne 0$.

例 1．1　求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解　由于 $|A|\ne 0$，因此 $R(A)=3$. 由于 B 的所有 3 阶子式全为零，显然 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ 是 B 的一个二阶非零子式，因此 $R(B)=2$.

结论　行（列）阶梯形矩阵的秩等于非零行（列）的行（列）数.

对于行、列数较多的矩阵 A，用秩的定义计算 $R(A)$，有时要计算很多个行列式，工作

量相当大．此时，通常用初等变换来计算 $R(A)$．下面介绍这种方法，为此，先证明一个很重要的定理．

定理 4．1　若 $A \sim B$，　则 $R(A)=R(B)$．

证　只证明：若 A 对调两行变为 B，则 $R(A)=R(B)$．

设 $R(A)=r$，且 A 的某个 r 阶子式 $D\neq 0$．设 D 是由矩阵 A 中的第 i_1，i_2，…，　i_r 行与第 j_1，　j_2，…，　j_r 列交叉元组成的，A 经一次初等行变换变为 B，变换后的 D 在 B 中的位置为第 i_1'，i_2'，…，　i_r' 行与第 j_1，　j_2，…，　j_r 列，这些行列交叉元组成的 r 阶子式记作 D_1．显然，D_1 是由 D 经过一次初等变换得到的，从 $D\neq 0$ 可推出 $D_1\neq 0$，从而 $R(B)\geq r$．由于 B 亦可经一次初等变换变为 A，故也有 $R(B)\leq R(A)$，因此 $R(A)=R(B)$．

从而，若 $A\overset{r}{\sim}B$，则 $R(A)=R(B)$．

于是，$A\overset{c}{\sim}B$，则 $A^T\overset{r}{\sim}B^T$，故 $R(A)=R(A^T)=R(B^T)=R(B)$．

由此得证，若 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$．证毕．

例 1．2　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

求 $R(A)$，并求 A 的一个最高阶非零子式．

解　由于

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_4-r_2\\ r_3-r_2}}{\overset{\substack{r_2-r_1-r_3\\ r_4+r_3\\ r_3-2r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)=B,$$

显然$R(B)=3$，因此$R(A)=3$.

可见，

$$A_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&-8&6\\2&-2&1\\-2&-8&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}(\beta_1,\beta_2,\beta_4)=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-10&3\\0&0&-6\\0&0&0\end{pmatrix}=B_1,$$

显然，$R(B_1)=3$，所以$R(A_1)=3$，故A_1中必有3阶非零子式．A_1的前三行构成的子式

$$\begin{vmatrix}1&4&2\\3&-8&6\\2&-2&1\end{vmatrix}=60\neq 0,$$

该子式也是A的一个最高阶非零子式.

例 1．3　已知$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,4,5)^T,\alpha_3=(3,4,5,6)^T,\alpha_4=(4,5,6,t)^T$，

且$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，则$t=$______.

解　由于

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&t\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-r_2\\r_2-r_1}}{\overset{r_4-r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&t-6\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-r_1\\r_3\leftrightarrow r_4}}{\overset{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&t-7\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

而$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，所以$t=7$．故填7.

例 1．4　设

$$A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\k\\2\end{pmatrix},\quad B=(A,b),$$

问k取何值，可使

（1）$R(A)=R(B)=3$；（2）$R(A)<R(B)$；（3）$R(A)=R(B)<3$.

解　由于

$$B=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&k\\1&1&2&2\end{pmatrix}\underset{r_3-kr_1}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\r_2-r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&k-1&-1&k-2\\0&1-k&1-2k&1-2k\end{pmatrix}\underset{r_3\div(-1)}{\overset{\substack{r_3+r_2\\r_2\div(-1)}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&1-k&1&2-k\\0&0&2k&k+1\end{pmatrix},$$

因此，

（1） 当$k\neq 0$且$k\neq 1$时，$R(A)=R(B)=3$；

（2） 当$k=0$时，$R(A)=2, R(B)=3, R(A)<R(B)$；

（3） 当$k=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&1-k&1&2-k\\0&0&2k&k+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}\overset{r_3-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$R(A)=R(B)=2<3$.

矩阵的秩的性质

① $0\leq R(A_{m\times n})\leq \min\{m,n\}$.

② $R(A^T)=R(A)$.

③ 若$A\sim B$，则$R(A)=R(B)$.

④ 若P、Q可逆，则$R(PAQ)=R(A)$.

⑤ $\max\{R(A),R(B)\}\leq R(A,B)\leq R(A)+R(B)$. 特别地，当$B=b$为列向量时，有

$$R(A)\leq R(A,b)\leq R(A)+1.$$

证 由于A的最高阶非零子式也是(A,B)的非零子式，所以$R(A)\leq R(A,B)$. 同理有$R(B)\leq R(A,B)$. 从而

$$\max\{R(A),R(B)\}\leq R(A,B).$$

设$R(A)=r, R(B)=s$. 则A和B列阶梯形A_0和B_0中分别含有r个和s个非零列. 因为$A\overset{c}{\sim}A_0, B\overset{c}{\sim}B_0$，所以$(A,B)\overset{c}{\sim}(A_0,B_0)$. 由于$(A_0,B_0)$中只含有$r+s$个非零列，所以$R(A_0,B_0)\leq r+s$，而$R(A,B)=R(A_0,B_0)$，故$R(A,B)\leq r+s$，即

$$R(A,B)\leq R(A)+R(B).$$

⑥ $R(A+B)\leq R(A)+R(B)$.

证 显然$(A+B,B)\overset{c}{\sim}(A,B)$，故

$$R(A+B)\leq R(A+B,B)=R(A,B)\leq R(A)+R(B).$$

⑦ $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

证 设 $R(A)=r, R(B)=s$. 又设 A 的行阶梯形为 A_0， B 的列阶梯形为 B_0，则存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $A=PA_0, B=B_0Q$. 因为 $AB=PA_0B_0Q$，所以

$$R(AB)=R(A_0B_0).$$

由于 A_0 有 r 个非零行，B_0 有 s 个非零列，因此 A_0B_0 至多有 r 个非零行和 s 个非零列. 故

$$R(A_0B_0) \le \min\{r, s\} = \min\{R(A), R(B)\},$$

即

$$R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}.$$

⑧ 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

证 设矩阵 $A_{m\times n}$ 秩为 r， 显然 $r\le n$，对矩阵 $A_{m\times n}$ 存在可逆矩阵 P_m 和 Q_n，使

$$P_m A_{m\times n} Q_n = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

$$P_m A_{m\times n} Q_n Q_n^{-1} B_{n\times l} = P_m A_{m\times n} B_{n\times l} = O,\quad R(Q_n^{-1}B_{n\times l}) = R(B_{n\times l}).$$

设 $Q_n^{-1}B_{n\times l} = C_{n\times l} = \begin{bmatrix} C_{r\times l} \\ C_{n-r\times l} \end{bmatrix}$，则

$$P_m A_{m\times n} Q_n Q_n^{-1} B_{n\times l} = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{r\times l} \\ C_{n-r\times l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{r\times l} \\ O \end{bmatrix} = O,$$

故 $C_{r\times l}=O$，所以 $Q_n^{-1}B_{n\times l} = C_{n\times l} = \begin{bmatrix} O \\ C_{n-r\times l} \end{bmatrix}$. 因为 $C_{n\times l}$ 至多有 $n-r$ 行不全为零，故

$$R(C_{n\times l}) = R(B) \le n-r.$$

从而

$$R(A)+R(B) = r+R(B) \le r+n-r = n.$$

例 1．5 设 A 为 $n\times m$ 矩阵， B 是 $m\times n$ 矩阵， $m>n$，则（　　）.

（A）$R(AB)>m$；　（B）$R(AB)=m$；　（C）$R(AB)<m$；　（D）$R(AB)\ge m$.

解 因为 AB 为 n 阶矩阵，所以 $R(AB)\le n<m$. 故选（C）.

例 1．6 设 A, B 都是 n 阶非零方阵，且 $AB=O$，则 $R(A)$____ n.

解　由于 $AB=O$，故 $R(A)+R(B)\le n$，而 B 是 n 阶非零方阵，所以 $R(B)\ge 1$，于是 $R(A)<n$．故填 $<$．

例 1．7　设 A 是 4×3 矩阵，且 $R(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $R(AB)=$________.

解　因为 $|B|=10\ne 0$，所以 B 可逆，故 $R(AB)=R(A)=2$．故填 2.

例 1．8　设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$， E 为 n 阶单位阵，　证明：

$$R(A)+R(A-E)=n.$$

证　由 $A^2=A$，知　$A(A-E)=O$．由性质 8，有

$$R(A)+R(A-E)\le n.$$

因为 $A+(E-A)=E$，由性质 6，有

$$R(A)+R(E-A)=R(A)+R(A-E)\ge R(E)=n.$$

所以 $R(A)+R(A-E)=n$．