第1章　线性方程组的消元法

一、　复习及引入新课

求解线性方程组是线性代数的一个基本问题，线性代数的许多理论是从解线性方程组的过程中发展起来的．本章介绍用消元法解简单的线性方程组，并引入n元线性方程组与矩阵的概念．

1．二元和三元线性方程组的求解

对于二元和三元线性方程组的求解，我们通常是用消元法求解．

例1．1　解方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ x-3y=-1. \end{cases}$

（详细板书求解过程）

例1．2　解方程组 $\begin{cases} 3x+2y+2z=9, \\ x-2y+2z=-1, \\ 2x-3y-3z=6. \end{cases}$

（详细板书求解过程）

以上两例，均是将方程组进行变形，逐步消去方程中未知变元的个数．当方程中未知变元只剩一个时，变可直接得到解，再将解依次回代入方程，从而求得其他变元的解．

2．n 元线性方程组简介

对于n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1—1}$$

是否同样可以用消元法求解？

如果n元线性方程组具有如下的形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1—2}$$

其中$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{n-1n-1}, a_{nn}$ 均不为零，则可以由下到上得到方程组的解：

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}},$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1n-1}} - \frac{a_{n-1n}}{a_{n-1n-1}} x_n,$$

…….

$$x_1 = b_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n.$$

形如式（1—2）的方程组称为三角形方程组，这是n元线性方程组的一种特殊形式，求解比较容易，但对一般的形如式（1—1）的n元线性方程组，是否可以化为三角形方程组？在例 1．2 中，把一个三元线性方程组化成了三角形方程组，从而得到了方程组的解，这种方法启发我们用某些变换将方程组化为三角形方程组以便于求解. 但必须保证，对方程组的变换而得到的新方程组，必须和原方程组有同样的解.

以下的变换能保持方程组的解不变（同解变换）：

（1）将第i个方程与第 j 个方程交换位置，方程组的解不变；

（2）将第i个方程乘上一个非零常数 k ，方程组的解不变；

（3）将第 j 个方程乘上一个常数 k 再加于第i个方程，方程组的解不变（请学生课后证明）

二、　新课讲解

1．矩阵与初等变换的概念

对方程组实施上述变换时，方程组改变的仅仅是未知量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的系数与常数项，因此，我们可以把方程组（1—1）的系数与常数项列成一个表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots . a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

这个表和方程组（1－1）是对应的，称为对应方程组（1—1）的**矩阵**. 方程组的特性都可以在这个矩阵中得到体现，当对方程组做出以上三种变换时，方程组所对应的矩阵也会有相应的变换.

变换（1）相当于矩阵第i行与第 j 行对换，记作$r_i \leftrightarrow r_j$；

变换（2）相当于矩阵第 i 行的每一个元素都乘以非零常数 k ，记作 kr_i ；

变换（3）相当于矩阵第 j 行所有元素都乘上一个常数 k 再加于第 i 行，记作 r_i+kr_j .

矩阵的这三种变换称为矩阵的初等行变换，对方程组的变换就可视为对矩阵做初等行变换，而矩阵通过有限次初等行变换得到的矩阵所对应的方程组，与原矩阵所对应的方程组是同解方程组.

方程组（1—2）所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots a_{nn} & b_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 a_{11} , a_{22} , ... , a_{n-1n-1} , a_{nn} 均不为零．这种矩阵所对应的方程组是很容易求解的．由此推想，一般线性方程组所对应的矩阵，能否通过初等行变换化为上面的矩阵形式？或者化为其他所对应的方程组容易求解的矩阵形式？用高斯消元法，我们可以将方程组化为最简形式.

2．高斯消元法

下面通过例题介绍高斯消元法.

例 1．3 用高斯消元法求解线性方程组 $\begin{cases} x-3y+7z=20, \\ 2x+4y-3z=-1, \\ -3x+7y+2z=7. \end{cases}$

解： $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ -3 & 7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+3r_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & -2 & 23 & 67 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{1}{5}r_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & 0 & \frac{98}{5} & \frac{294}{5} \end{bmatrix} = A_1 \xrightarrow{\frac{5}{98}r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+17r_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{10}r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 7 & 20\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & 23\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+7r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}= A_2 .$$

变换所得的矩阵 A_2 对应的方程组为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=3,\end{cases}$ 这就是方程组的解.

例中形如 A_1 的矩阵，称为**行阶梯形矩阵**．其特点是矩阵中每一行的第一个非零元同列下面的元素都为零；形如 A_2 的矩阵称为**行最简形矩阵**，其特点是非零行的第一个非零元为1，所在列的其他元素为零.

用高斯消元法解线性方程组，就是用矩阵的初等行变换将方程组所对应的矩阵化为行最简形矩阵，从而得到方程组的解.

事实上，对于线性方程组（1—1），我们并不能保证它一定有解，即使有解，也不能保证解是唯一的.

例 1．4　解方程组　（1）$\begin{cases}x-2y=-1,\\-x+3y=3;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x-2y=-1,\\-x+2y=3;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x-2y=-1,\\-x+2y=1;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=3,\\-x+2y=-3.\end{cases}$

解：二元方程组的解的几何意义是直线的公共交点，分别绘出四个方程组直线图（略）.

从图中可以看出，方程组（1）对应的两条直线有唯一交点，从而方程组有唯一解 $x=3$，$y=2$；方程组（2）对应的两条直线平行，无交点，从而方程组无解；方程组（3）对应的两条直线重合，直线上的点都是解，从而方程组有无穷多个解；方程组（4）对应的三条直线没有共同的交点，从而方程组无解.

方程组（1）对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\-1 & 3 & 3\end{pmatrix}$，$r_2+r_1$ 得 $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$；$r_1+2r_2$ 得 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，所以，方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

方程组（3）对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$r_2+r_1$ 得 $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$．变换后的矩阵

只对应一个方程 $x-2y=-1$，即 $x=2y-1$，y 可取任意值．故方程组（3）有无穷个解．

方程组（2），（4）无解．

如果线性方程组（1—1）有唯一解，则称线性方程组是适定的；如有无穷个解，则称线性方程组是欠定的；如没有解，则称线性方程组是超定的．在第五章中，我们将解决线性方程组在什么样的情况下是适定的、欠定的或超定的．

3．高斯消元法解线性方程组的 Matlab 实验

1）Matlab 简介

Matlab 是美国 The MathWorks 公司出品的计算机科学计算软件，从 1984 年推出以来，受到广泛的推崇，在很多领域里，Matlab 已成为科技人员首选的计算机数学语言．它的语言简洁，功能强大，几乎涵盖了所有的数学计算内容，人机交互性能好，其表达方式符合科技人员的思维习惯和书写习惯，使用短简的语句，便能完成许多复杂的计算．MATLAB 是“矩阵实验室”（Matrix Laboratory）的缩写，它是一种以矩阵运算为基础的交互式程序语言，因此特别适于线性代数求解．线性代数是一门理论比较抽象、计算强度很大的数学学科，并具有广泛的应用．在传统教材给出的线性代数的计算方法，如用手工计算，只能解决一些低阶、变量较少的问题，而在实际中出现的大量的线性问题，都是高阶的和变量很多的，使用 Matlab 语言辅助线性代数的教学，近几年来已成为流行的教学模式．本书将对 Matlab 语言作简单的介绍，并在各章中都安排使用 Matlab 语言的实验，以解决相应章节的计算问题．Matlab 是科技工作者得力的科学计算工具，读者可查阅有关的书籍对其进一步了解．

2）矩阵的表示

当运行 Matlab 程序后，会出现一个命令窗，Matlab 语句可在命令窗中提示符>>后键入．如要在 Matlab 中输入一个矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，可在 Matlab 提示符“〉〉”后面键入：

```
>> A=[1 2 3
      4 5 6
      7 8 9]
```

按回车键屏幕显示：

```
A =
     1     2     3
     4     5     6
```

7　　8　　9

也可以键入：

```
>>A=[1，2，3;4，5，6;7，8，9]
```

或>>A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

按回车键，屏幕显示同上，变量 A 在程序中就代表所输入的矩阵.

3）线性方程组的高斯消元法

线性方程组的高斯消元法，等价于对相应的矩阵做行初等变换，将其化为行最简型矩阵，在 Matlab 语言中，调用一个函数 rref()，可将行矩阵化为最简型矩阵.

如要将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 & 9 \\ 6 & -2 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵， 先键入矩阵：

```
>>A=[1 2 -1 4 7;1 2 3 4 3;-1 3 -2 4 9;6 -2 7 1 2]
```

屏幕显示：

```
A =
     1     2    -1     4     7
     1     2     3     4     3
    -1     3    -2     4     9
     6    -2     7     1     2
```

再调用函数，将化为 A 行最简型矩阵：

```
>> rref(A)
```

结果显示为：

```
ans =
    1．0000     0          0          0         13．3333
    0          1．0000     0          0         27．6667
    0          0          1．0000     0         -1．0000
    0          0          0          1．0000   -15．6667
```

例 1．5　求解方程组 $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x \quad -z=-3 \end{cases}$

（1）键入方程矩阵

```
>>A =
        1      2      3      9
        2     -1      1      8
        3      0     -1      3
```

（2）化为行阶梯矩阵

```
>> rref(A)
ans =
        1      0      0      2
        0      1      0     -1
        0      0      1      3
```

所以 x=2 ，y=-1， z=3

例 1．6 求解方程组$\begin{cases} x\text{-}2y+\mathrm{z}=3 \\ 2x-3y\text{-}\mathrm{z}=7 \\ 5x\text{-}8\mathrm{y}\text{-}\mathrm{z}=20 \end{cases}$

```
>>A=[1 -2 1 3;2 -3 -1 7;5 -8 -1 20];
rref(A)
ans =
        1      0     -5      0
        0      1     -3      0
        0      0      0      1
```

对应的方程为$\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \\ 0=1 \end{cases}$ 显然，方程无解.

例 1．7 求解方程组$\begin{cases} 3x+4y\text{-}3\mathrm{z}=\text{-}6 \\ \text{-}x-y+2\mathrm{z}=4 \\ 3+2\mathrm{y}+\mathrm{z}=2 \end{cases}$

```
>> A=[3 4 -3 -6;-1 -1 2 4;1 2 1 2];
>> rref(A)
ans =
        1      0     -5    -10
        0      1      3      6
```

0　　0　　0　　0

对应的方程为：$\begin{cases} x = 5z-10 \\ y = -3z+6 \\ z = z \end{cases}$

Z 取任意值，得到的 x，y，z 都是方程的解，所以方程有无穷多个解.

三、　课堂小结

本节课主要掌握矩阵、矩阵初等变换的概念，会用初等行变换法解线性方程组．对使用 Matlab 软件有所了解.

四、　练习与作业

《练习册》相关部分内容.