5．2　线性方程组解的结构

1．齐次线性方程组解的结构

本节用向量空间的理论来讨论齐次线性方程组解的结构．为此先讨论齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解的性质．

性质 5．1　若 $x=\xi_1$，$x=\xi_2$ 为方程组 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的解．

证　因为 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0$，所以 $x=\xi_1+\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解．

性质 5．2　若 $x=\xi$ 为方程组 $Ax=0$ 的解，k 为任意常数，则 $x=k\xi$ 也是 $Ax=0$ 的解．

证　因为 $A(k\xi)=kA\xi=k0=0$，所以 $x=k\xi$ 是 $Ax=0$ 的解．

由性质 5.1、性质 5.2 可知，齐次线性方程组 $Ax=0$ 的全体解向量构成一个向量空间，称之为该齐次线性方程组的**解空间**，记作 S．如果能求得解空间 S 的一个基 $S_0:\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$，那么方程组 $Ax=0$ 的任一个解向量都可由这个基 S_0 线性表示；另一方面，由性质 5.1、性质 5.2 可知，基 S_0 的任何线性组合

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$$

都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量，因此上式便是方程组 $Ax=0$ 的通解．

齐次线性方程组的解空间的一个基称为该齐次线性方程组的一个**基础解系**．

由上面的讨论可知，要求齐次线性方程组的通解，只需求出它的基础解系．我们用矩阵初等行变换的方法来求线性方程组的通解，也可以用同一方法来求齐次线性方程组的基础解系．

设方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r，并不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关，于是 A 的行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵 B 对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\ \cdots\ -b_{1,n-r}x_n, \\ \qquad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\ \cdots\ -b_{r,n-r}x_n, \end{cases}$$

其等价方程组为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1}\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2}\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

把 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 作为自由未知数，并令它们依次等于 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$，可得方程组 $Ax=0$ 的通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数.

把上式记作

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r},$$

可知解集 S 中的任一个解向量 x 都可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r} \in S$ 线性表示．又因为矩阵 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r})$ 中有一个 $n-r$ 阶子式 $|E_{n-r}| \neq 0$，故 $R(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}) = n-r$，所以 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关．根据基的定义，知 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是解空间的一个基，所以 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间的维数为 $n-r$.

在上面的讨论中，我们先求出齐次线性方程组的通解，再从通解求得基础解系．其实，也可先求基础解系，然后再写出通解．这只需先得到同解方程组：

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \ \cdots \ - b_{1,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \ \cdots \ - b_{r,n-r}x_n, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n, \\ x_{r+1} = \quad x_{r+1} \\ \qquad \cdots \quad \cdots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad x_n, \end{cases}$$

然后，分别取

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

（理论上也可以取其他任意 $n-r$ 个线性无关的 $n-r$ 维向量，上面的取法是为了使计算简便一些）

依次可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

合起来便得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

方程组的通解为

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数.

由以上的讨论，可推得以下定理：

定理 5．3　设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A) = r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集是一个向量空间，且其维数为 $n-r$．当 $R(A) = n$ 时，方程组 $Ax = 0$ 只有零解，没有基础解系；当 $R(A) = r < n$ 时，方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含 $n-r$ 个解向量，设它们为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$，则方程组 $Ax = 0$ 的通解为

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数.

例 2．1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0, \end{cases}$$

的基础解系，通解及解空间.

解法 1 对系数矩阵进行初等行变换，化为行最简形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

行最简形矩阵相应的方程组为

$$\begin{cases} x_1= x_3+x_4+5x_5, \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1= x_3+x_4+5x_5, \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5, \\ x_3=x_3, \\ x_4=x_4, \\ x_5=x_5. \end{cases}$$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则对应地有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

由此得方程组的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3=\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

方程组的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3\ (k_1, k_2, k_3\in R),$$

解空间为

$$S=\left\{\, x \mid x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3, k_1, k_2, k_3\in R\right\}.$$

解法 2　将系数矩阵化为行最简形矩阵

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

其等价方程组为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

由此得方程组的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

方程组的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3\ (k_1, k_2, k_3\in R),$$

解空间为

$$S=\left\{\, x \mid x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3, k_1, k_2, k_3\in R\right\}.$$

例 2．2　证明：矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价的充分必要条件是齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

证　必要性　因为矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价，故存在矩阵 $P_{l\times m}$ 与 $Q_{m\times l}$，使

$$A=QB,\quad B=PA.$$

所以 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=PAx=0$ 的解，$Bx=0$ 的解都是 $Ax=QBx=0$ 的解，因此 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

充分性　若方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $Ax=0$，$Bx=0$，$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 同解．设它们的解空间 S 的维数为 r，则三个系数矩阵的秩

$$R(A)=R(B)=R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n-r.$$

根据定理 4．10 的推论知，A 与 B 的行向量组等价.

例 2．3　证明 $R(A^TA)=R(AA^T)=R(A)$.

证　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，　显然方程组 $Ax=0$ 的解都是 $A^TAx=0$ 的解.

设 x_0 是方程组 $A^TAx=0$ 的任一个解，即 $A^TAx_0=0$，则 $x_0^TA^TAx_0=0$，即 $(Ax_0)^T(Ax_0)=0$，故 $Ax_0=0$，所以 x_0 也是方程组 $Ax=0$ 的解，从而 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解，因此 $R(A^TA)=R(A)$.

由上述已证结论可知，$R(AA^T)=R(A^T)$，而 $R(A^T)=R(A)$，故

$$R(A^TA)=R(AA^T)=R(A).$$

这是个结论，要记住.

2．非齐次线性方程组解的结构

称齐次线性方程组 $Ax=0$ 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的**导出组**.

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有如下性质：

性质 5. 3　设 $x=\eta_1$ 与 $x=\eta_2$ 都是方程组 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是导出组 $Ax=0$ 的解.

证　因为 $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$，所以 $x=\eta_1-\eta_2$ 为导出组 $Ax=0$ 的解.

性质 5. 4　设 $x=\eta$ 是方程组 $Ax=b$ 的解，$x=\xi$ 是导出组 $Ax=0$ 的解，则 $x=\eta+\xi$ 是方程组 $Ax=b$ 的解.

证　因为 $A(\eta+\xi)=A\eta+A\xi=b+0=b$，所以 $x=\eta+\xi$ 是方程组 $Ax=b$ 的解.

若 η^* 是 $Ax=b$ 的某个解（称之为**特解**），x 为 $Ax=b$ 的任一个解，　则由性质 5．3 可知，

$$\xi=x-\eta^*$$

是其导出组 $Ax=0$ 的解，因此方程组 $Ax=b$ 的任一个解 x 总可表示为

$$x=\eta^*+\xi.$$

若导出组 $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，则方程组 $Ax=b$ 的任一个解总可表示为

$$x=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}.$$

而由性质 5．4 可知，　对任何实数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$，　上式总是方程组 $Ax=b$ 的解.　于是方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=\eta^{*}+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}\,,$$

其中c_1, c_2, $\cdots$, c_{n-r}为任意常数.

于是有以下定理：

定理5．4 设η^{*}是n元非齐次线性方程组$Ax=b$的一个特解，$R(A)=r$，若$r=n$，则方程组$Ax=b$有唯一解η^{*}；若$r<n$，设导出组$Ax=0$的基础解系为ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-r}，则方程组$Ax=b$的通解为

$$x=\eta^{*}+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}\,,$$

其中c_1, c_2, $\cdots$, c_{n-r}为任意常数.

由此可知，要求非齐次方程组$Ax=b$的通解，只需求出它的一个特解以及导出组$Ax=0$的通解（或基础解系）即可．而求特解与基础解系可以在同一个过程中进行，即对方程组$Ax=b$的增广矩阵$B=(A,b)$施行初等行变换，化为行最简形矩阵.

例2．4 求解方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4-x_5=1,\\ x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1,\\ x_1+x_2+x_4+2x_6=2,\\ 2x_2+2x_3+x_4-x_6=0.\end{cases}$

解 对增广矩阵$B=(A,b)$施行初等行变换：

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1&1&-1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&0&2&2\\0&2&2&1&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&1&-1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1\\0&-1&-1&0&1&2&1\\0&2&2&1&0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&-1&0&1\\0&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&2&3&2\\0&0&0&-1&-2&-3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3]{r_1-r_3,\ r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&2&1&0&-3&-3&-1\\0&1&1&0&-1&-2&-1\\0&0&0&1&2&3&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1&1&1\\0&1&1&0&-1&-2&-1\\0&0&0&1&2&3&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=R(A,b)=3<6$，故原方程组有无穷多个解， 且与如下方程组同解：

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_5 - x_6\,, \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 + 2x_6\,, \\ x_3 = x_3\,, \\ x_4 = 2 - 2x_5 - 3x_6\,, \\ x_5 = x_5\,, \\ x_6 = x_6\,, \end{cases}$$

所以，所求的通解为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{（}c_1\,, c_2\,, c_3\text{为任意常数）.}$$

例 2．5 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，已知$\eta_1\,, \eta_2\,, \eta_3$是它的三个解向量，且$\eta_1 = (2\,, 3\,, 4\,, 5)^T$，$\eta_2 + \eta_3 = (1\,, 2\,, 3\,, 4)^T$，求该方程组的通解.

解 因为四元非齐次线性方程组$Ax = b$的系数矩阵的秩$R(A) = 3$，所以齐次线性方程组$Ax = 0$的基础解系中仅含有 1 个解向量．显然$2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = (3\,, 4\,, 5\,, 6)^T$是$Ax = 0$的非零解向量，故它是$Ax = 0$的一个基础解系，从而$Ax = b$的通解为

$$x = (2\,, 3\,, 4\,, 5)^T + k(3\,, 4\,, 5\,, 6)^T \text{（}k\text{ 为任意常数）.}$$