概率论与数理统计练习题（3）

离散型随机变量、连续型随机变量

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 Poisson 分布，已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，

则 λ =______．

（2）若随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\le x<1,\\ 0.8, & 1\le x<3,\\ 1, & 3\le x<+\infty.\end{cases}$，

则 X 的分布律为________________________________．

（3）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X\le\dfrac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$__________．

（4）若随机变量 Y 在 $(1,6)$ 上均匀分布，则方程 $x^2+Yx+1=0$ 有实根的概率是______．

2．选择题

（1）下面是某个随机变量的概率分布律的为（　　）．

（A）$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0.5 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0.7 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\frac{1}{3}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2 & \cdots & \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n & \cdots\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots\\ \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & \cdots & (\frac{1}{2})^n & \cdots\end{pmatrix}$．

（2）设 $f(x)=\sin x$，要使 $f(x)$ 为某随机变量 X 的概率密度，则 X 的可能取值的区间为（　　）．

（A）$[\pi,\frac{3}{2}\pi]$；　　（B）$[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$；　　（C）$[0,\pi]$；　　（D）$[0,\dfrac{\pi}{2}]$．

（3）设随机变量 X 的概率密度函数是 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$，则其分布函数是（　　）．

（A） $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$；　　（B） $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$；

（C） $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$；　　（D） $F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}/2, & x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-x}/2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$.

3．一汽车沿街行驶，需通过 3 个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿不依赖于其他信号灯，而且红绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口数，求 X 的分布律.

4．设随机变量 $X\sim N(108,9)$，求：（1） $P\{101.1<X<117.6\}$；（2）常数 a，使 $P\{X<a\}=0.90$；（3）常数 a，使 $P\{|X-a|>a\}=0.01$.

5．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}k\sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求：（1）常数 k；（2）X 的分布函数；（3） $P\{0<X<\dfrac{\pi}{2}\}$.

概率论与数理统计练习题（3）详细解答

1. 填空题

(1) $\dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}\Rightarrow \lambda=2$.

(2) $F(x)$的间断点$-1, 1, 3$即为X的可能取值，在每个间断点的跳跃度即为X取该值的概率. X的分布律为

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

(3) $P\{X\le \frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}} 2x\,dx=\frac{1}{4}$，$Y\sim B(3,\frac{1}{4})$. 故$P\{Y=2\}=C_3^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^1$
$=\frac{9}{64}$.

(4) $P\{$方程有实根$\}=P\{\Delta=Y^2-4\ge 0\}=P\{Y\le -2$或$Y\ge 2\}=P\{Y\le -2\}$
$+P\{Y\ge 2\}=0+\int_2^6 \frac{1}{5}dx=\frac{4}{5}$.

2. 选择题

(1) 作为分布律，它必须满足且只需满足两点：① $p_i\ge 0, i=1,2,\cdots$；
② $\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1$. 只有选项(D)满足这两点. 故选(D).

(2) 作为概率密度，$f(x)$必须满足且只需满足两点：① $f(x)\ge 0$；
② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. 只有选项(D)满足这两点. 故选(D)

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}, & x<0;\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_0^x\frac{1}{2}e^{-t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$
故选(B).

3．解： X 表示汽车首次遇到红灯前已通过的路口数，其可能取值为 0，1，2，3，则

$$P\{X=0\}=\frac{1}{2},\qquad P\{X=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$
$$P\{X=2\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\qquad P\{X=3\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

即 X 的分布律为

X	0	1	2	3
p_k	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/8$

4. (1) $P\{101.1 < X < 117.6\} = \phi\left(\frac{117.6-108}{3}\right) - \phi\left(\frac{101.1-108}{3}\right)$

$= \phi(3.2) - \phi(-2.3) = \phi(3.2) + \phi(2.3) - 1 = 0.9886$.

(2) $P\{X < a\} = \phi\left(\frac{a-108}{3}\right) = 0.90$，查表得 $\phi(1.28) \approx 0.90$，

故 $\frac{a-108}{3} \approx 1.28$，$a \approx 111.84$.

(3) $P\{|X-a| > a\} = P\{X<0$ 或 $X>2a\} = P\{X<0\} + P\{X>2a\}$

$= \phi\left(\frac{0-108}{3}\right) + 1 - \phi\left(\frac{2a-108}{3}\right) = 1 - \phi\left(\frac{2a-108}{3}\right) = 0.01$

$\phi\left(\frac{2a-108}{3}\right) = 0.99$，查表得 $\phi(2.33) \approx 0.99$，故 $\frac{2a-108}{3} \approx 2.33$

$a \approx 57.495$

5. (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$，得 $k\int_0^{\pi} \sin x dx = 1$，解得 $k = \frac{1}{2}$.

(2) 当 $x<0$ 时，$F(x) = 0$；当 $x > \pi$ 时，$F(x) = 1$；

当 $0 \le x \le \pi$ 时，$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\sin t\, dt = \frac{1}{2}(1-\cos x)$.

综上得 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0 \le x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$

(3) $P\{0 < X < \frac{\pi}{2}\} = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \frac{1}{2}$.