3．4 逆阵公式

第 2 章中学习了利用矩阵的初等变换求矩阵的逆，下面我们将给出一个求逆矩阵的公式，形式是很完美的，但在实际应用中，只有对三阶以下的的矩阵才有可操作性.

定义 3．5 矩阵 A 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下方阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**，简称**伴随阵**.

伴随矩阵的一个基本性质：$AA^*=A^*A=|A|E$.

定理 3．2 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,$$

其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵．称上式为**逆阵公式**.

证 因为 $AA^*=A^*A=|A|E$，且 $|A|\neq 0$，故

$$A\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}A=E,$$

所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

推论 1 设 A,B 为 n 阶方阵，若 $AB=E$ 或 $BA=E$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=B$.

证 因为 $|AB|=|A||B|=|E|=1$，故 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆．设 A 的逆矩阵为 A^{-1}，

$$A^{-1}=A^{-1}E=A^{-1}(AB)=(A^{-1}A)B=EB=B.$$

推论 2 $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$.

证 因为 $|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|E|=1$，所以 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

例 4．1 求矩阵 A 的逆矩阵.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=3$，$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3$，$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}=-4$，

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}=2$，$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$，$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}=2$，

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1$，$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3$，$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=3$，

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0$，

得到矩阵A的伴随矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix}3&0&-3\\-4&2&3\\2&-1&0\end{bmatrix}.$$

由逆阵公式，得

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&0&-3\\-4&2&3\\2&-1&0\end{bmatrix}.$$

例 4．2 求解三元线性方程组$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$.

解 方程的系数矩阵就是上例中的矩阵A，因为A可逆，用A的逆阵左乘方程两边，得

$$A^{-1}A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&0&-3\\-4&2&3\\2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

例 4. 2 的求解方法可推广到矩阵方程的求解：对于矩阵方程 $AX = B$，如果系数矩阵 A 是方阵，且 A 可逆，则 $X = A^{-1}B$.

例 4. 3 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，$E$ 为四阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$________.

解 由 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，得 $B+AB+A=E$，即 $[\frac{1}{2}(E+A)](E+B)=E$，所以 $(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. 故填 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.