概率论与数理统计练习题（8）

样本及其分布

姓名____________学号____________班级____________

1．填空题

（1）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从________.

（2）设 X_1, X_2, X_3, X_4 为总体 $N(0, 2^2)$ 的样本，$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$,则当 $a=$______，$b=$______时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为______.

（3）设 $X\sim F(n,n)$，且 $P\{X>\alpha\}=0.05$，则 $P\{X>\frac{1}{\alpha}\}=$______.

2．选择题

（1）设 $X\sim N(1, 2^2)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的样本，则（　　）.

（A）$\frac{\overline{X}-1}{2}\sim N(0,1)$；　　（B）$\frac{\overline{X}-1}{4}\sim N(0,1)$；

（C）$\frac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；　　（D）$\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$.

（2）设随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布，则随机变量 T^2 服从（　　）.

（A）$\chi^2(n)$；　（B）$\chi^2(n-1)$；　（C）$F(n,1)$；　（D）$F(1,n)$.

（3）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 EA_2, DA_2 分别为（　　）.

（A）$\sigma^2, 2\sigma^4$；　（B）$\sigma^2, 3\sigma^4$；　（C）$\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n}$；　（D）$\sigma^2, \frac{4\sigma^4}{n}$.

（4）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，$X\sim\chi^2(n)$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $E\overline{X}, D\overline{X}$ 分别为（　　）.

（A）$n, 2n$；　（B）$1, 2n$；　（C）$n, 2$；　（D）$\frac{1}{n}, n$.

3．设总体 $X\sim N(60,15^2)$，从总体中抽取一个容量为100的样本，求样本均值与总体均值之差的绝对值大于3的概率.

4．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，S^2 为其样本方差，且 $P\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 1.5\}\ge 1-\alpha$．若样本容量$n$满足$\chi_\alpha^2(n-1)\ge 38.9$，求$n$的最小值.

5．设$X_1,X_2,\cdots,X_9$为总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，令$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$，$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$，$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$，证明：$Z\sim t(2)$.

概率论与数理统计练习题（8）详细解答

1．填空题

（1）

$E\bar{X}=\mu$，$D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}$　故 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

（2）

$X_1-2X_2\sim N(0,20)$，$3X_3-4X_4\sim N(0,100)$

$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$，$\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\sim N(0,1)$

$\left(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2\sim\chi^2(1)$，$\left(\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\right)^2\sim\chi^2(1)$

$$\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}\sim\chi^2(2)$$

故 $a=\frac{1}{20}$，$b=\frac{1}{100}$，自由度为 2．

（3）

$X\sim F(n,n)\Rightarrow\frac{1}{X}\sim F(n,n)$

$P\{X>\alpha\}=0.05\Rightarrow P\{\frac{1}{X}<\alpha\}=0.05\Rightarrow P\{\frac{1}{X}>\frac{1}{\alpha}\}=0.95$

故 $P\{\frac{1}{X}>\frac{1}{\alpha}\}=P\{X>\frac{1}{\alpha}\}=0.95$．

2．选择题

（1）

$X\sim N(1,2^2)\Rightarrow\bar{X}\sim N(1,\frac{2^2}{n})\Rightarrow\frac{\bar{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 故选 C

（2）

$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，$X^2\sim\chi^2(1)$

$T^2=\frac{X^2/1}{Y/n}\sim F(1,n)$．故选 D．

（3）

$$E(X_i^2) = DX_i + (EX_i)^2 = \sigma^2$$

$$EA_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sigma^2$$

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad 令\ \frac{x^2}{2\sigma^2} = t$$

$$= \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = 3\sigma^4 \quad \left(\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}\right)$$

$$\left(\Gamma(r+1) = r\Gamma(r),\ \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$$

$$D(X_i^2) = E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$$

$$DA_2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = \frac{2\sigma^4}{n} \quad 故选\ C.$$

（4）

$$E\overline{X} = EX = n \qquad D\overline{X} = \frac{1}{n}DX = \frac{1}{n}\times 2n = 2 \qquad 故选\ C$$

3．解：

由抽样分布定理，得

$$\frac{\overline{X} - 60}{15/\sqrt{100}} \sim N(0,1),$$

于是，

$$P\{|\overline{X} - 60| > 3\} = 1 - P\{|\overline{X} - 60| \le 3\}$$

$$= 1 - P\left\{\left|\frac{\overline{X} - 60}{15/\sqrt{100}}\right| \le \frac{3}{15/\sqrt{100}}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\left|\frac{\overline{X} - 60}{15/\sqrt{100}}\right| \le 2\right\}$$

$$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)]$$

$$= 2[1 - \Phi(2)]$$

4．解：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad 即有\ P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 1.5\right\} = P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le 1.5(n-1)\right\} \ge 0.95$$

$$从而\ P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > 1.5(n-1)\right\} < 0.05 \quad 而\ P\{\chi^2 > \chi^2_{0.05}(26)\} = 0.05$$

$$其中\ \chi^2_{0.05}(26) = 38.885. \quad 从而\ 1.5(n-1) > 38.885 \quad 解得\ n \ge 27$$

5． 证明：

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y_1 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$，$Y_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3}) \Rightarrow Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2}) \Rightarrow \frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$\frac{(3-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$ 即 $\frac{S^2}{\sigma^2/2} \sim \chi^2(2)$ 从而

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2/2} / 2}} \sim t(2)$$