线性代数练习题（8）详细解答

1．填空题

（1）因为 0 是 A 的特征值，所以 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{vmatrix}=2(a-1)=0$，解得 $a=1$．由特征值的性质 1 得，$0+2+\lambda_3=1+2+a=4$，所以 A 的第 3 个特征值是 $\lambda_3=2$．故填$1,2$.

（2）由 $P^{-1}AP=B$ 及 $A^2=A$ 得，$B^2=(P^{-1}AP)^2=P^{-1}A^2P=P^{-1}AP=B$．故填 B .

（3）因为 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$，故 $(A^*)^3+5E$ 的特征值为 $\dfrac{|A|^3}{\lambda^3}+5$．故填 $\dfrac{|A|^3}{\lambda^3}+5$.

（4）因为 $A-3E$ 的特征值分别为 $\lambda_1=2-3=-1$，$\lambda_2=4-3=1$，$\lambda_3=6-3=3$，所以 $|A-3E|=-1\times1\times3=-3$．故填$-3$.

（5）因为 A 相似于 B，故 $A-2E$ 相似于 $B-2E$，$A-E$ 相似于 $B-E$，从而 $R(A-2E)+R(A-E)=R(B-2E)+R(B-E)=3+1=4$．故填 4 .

2．解：由 $|A-\lambda E|=0$，即 $\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)=0$，得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，由 $(A+E)x=0$，解得对应 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $p_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_1\neq0$.

当 $\lambda_2=0$ 时，由 $Ax=0$，解得对应 $\lambda_2=0$ 的特征向量为 $p_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k_2\neq0$.

当 $\lambda_3=9$ 时，由 $(A-9E)x=0$，解得对应 $\lambda_3=9$ 的特征向量为 $p_3=k_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$k_3\neq0$.

3． 解: 设 $a=(1,k,1)^T$ 是 A^{-1} 对应于特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量，即 $A^{-1}a=\dfrac{1}{\lambda}a$，于是 $Aa=\lambda a$，

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix},$$

解得$\begin{cases} k=-2, \\ \lambda=1 \end{cases}$或$\begin{cases} k=1, \\ \lambda=4. \end{cases}$

4．解：因为A与B相似，故$|A|=|B|$，$tr(A)=tr(B)$，即

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ -3x+4y=8, \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases}$

5．证明：设正交矩阵A对应于特征值λ的特征向量为p，则$p \neq 0$，$Ap=\lambda p$，故

$$p^T p = p^T A^T Ap = (Ap)^T (Ap) = (\lambda p)^T (\lambda p) = \lambda^2 p^T p,$$

即$(\lambda^2 -1) p^T p = 0$，从而$\lambda^2 - 1 = 0$，即$\lambda^2 = 1$.