2．3　矩阵的逆

定义 2．6　对于n阶矩阵A，若存在n阶矩阵B，使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵A是**可逆的**，并称B为A的**逆矩阵**，简称**逆阵**． A的逆阵记为A^{-1}.

说明:

（1）只有方阵才存在逆矩阵；

（2）逆阵是唯一的，即如果矩阵A是可逆的，那么A的逆阵是唯一的.

事实上，设B_1和B_2都是A的逆矩阵，则有

$$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2,$$

所以逆矩阵是唯一的.

（3）设A, B为n阶方阵，若$AB = E$或$BA = E$，则A可逆，且$A^{-1} = B$.

逆矩阵的性质：

（1）若A可逆，则A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$　.

（2）若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，且$(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

（3）若A、B为同阶可逆矩阵，则AB亦可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证　由于 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$，

同理$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$，故AB可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

（4）若A可逆，则A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$　.

证　由于$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$， 同理$(A^{-1})^T(A^T) = E$，故$A^T$也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

对角阵的逆

设$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，如果$\lambda_i \neq 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$，容易验证，$A$可逆，且$A$的逆阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$