2．4　分块矩阵

对行数和列数较高的矩阵进行运算时，为了利用某些矩阵的特点，常常采用分块法，使大矩阵的运算化成一些小矩阵的运算．所谓**矩阵分块**，就是将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每个小矩阵称为A的**子块**或**子矩阵**，以这些子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

例如，$A=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，若令$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$，$O=(0,0,0)$，$A_2=(1)$

则$A=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_3&A_1\\O&A_2\end{pmatrix}$.

若令$E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}0&3\\0&-1\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，则$A=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_2&A_3\\O&E_2\end{pmatrix}$.

若令$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$a_4=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，则$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$.

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算相类似.

（1）设矩阵A与B有相同的行数和列数，且采用相同的分块法，即

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\\vdots&\ddots&\vdots\\A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1r}\\\vdots&\ddots&\vdots\\B_{s1}&\cdots&B_{sr}\end{pmatrix},$$

其中对任意$i=1,2,\cdots,\ s\quad j=1,2,\cdots r$，$A_{ij}$与$B_{ij}$的行数与列数分别相同，则

$$A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11}&\cdots&A_{1r}+B_{1r}\\\vdots&\ddots&\vdots\\A_{s1}+B_{s1}&\cdots&A_{sr}+B_{sr}\end{pmatrix}.$$

（2）设λ为常数，$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\\vdots&\ddots&\vdots\\A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix}$，则

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr}\end{pmatrix}.$$

（3）设 A 是 $m\times l$ 矩阵，B 是 $l\times n$ 矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{st}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{t1} & \cdots & B_{tr}\end{pmatrix},$$

对任意 $i=1,2,\cdots$，s，$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，则

$$AB=\begin{pmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{s1} & \cdots & C_{sr}\end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$ （$i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,r$）.

例 4．1　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$，求 AB .

解　把 A、B 分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\\hline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},$$

则
$$AB=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1B_{12}+B_{22}\end{pmatrix}.$$

而

$$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$A_1B_{12}+B_{22}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\5&3\end{pmatrix},$$

于是
$$AB=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\\hline -2&4&1&1\\-1&1&5&3\end{array}\right).$$

（4）设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

（5）设 n 阶矩阵 A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且在对角线上的子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中 $A_i\,(i=1,2,\cdots,s)$都是方阵，那么称 A 为**分块对角矩阵**.

若分块对角矩阵 A 中各 $A_i\,(i=1,2,\cdots,s)$都是可逆阵，则 A 也可逆，且有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

矩阵**按行分块**和**按列分块**是两种十分常见的分块法．设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，

（1）**按行分块**　若 A 的第 i 个行向量记作

$$a_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad (i=1,2,\cdots,m),$$

则

$$A=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}.$$

称 $a_1^T,a_2^T,\cdots,a_m^T$ 为矩阵 A 的**行向量组**.

（2）**按列分块**　若 A 的第 j 个列向量记作

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}\ (j=1,2,\cdots,n),$$

则

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为矩阵 A 的**列向量组**.

矩阵的乘法可先将矩阵按行、列分块后再相乘.

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$$AB=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix} a_1^Tb_1 & a_1^Tb_2 & \cdots & a_1^Tb_n \\ a_2^Tb_1 & a_2^Tb_2 & \cdots & a_2^Tb_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^Tb_1 & a_m^Tb_2 & \cdots & a_m^Tb_n \end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=a_i^Tb_j=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ .$$

设

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

则

$$\Lambda_m A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1^T \\ \lambda_2\alpha_2^T \\ \vdots \\ \lambda_m\alpha_m^T \end{pmatrix},$$

$$A_{m\times n}\Lambda_n=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=(\lambda_1a_1,\ \lambda_2a_2,\ \cdots,\ \lambda_\mathrm{n}a_n)\ .$$

注：列向量（列矩阵）常用小写黑体字母表示, 如 a,b,α,β 等；行向量（行矩阵）用列向量的转置表示，如 a^T,b^T,α^T,β^T 等.