分章测试题（2）详细解答

1．（1）预备知识．定义：设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，则 A 的行列式定义为 $|A|=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\pi(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列，$\pi(p_1p_2\cdots p_n)$ 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数．

解：由于 $f(x)=\begin{vmatrix}2x-1&0&0&3\\1&x&1&-1\\3&2&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}$，根据行列式的上述定义，知 x^4,x^3 只可能在 $(2x-1)x^3$ 中出现，因此 x^3 的系数为 $\underline{-1}$．常数项是 $f(0)=\begin{vmatrix}-1&0&0&3\\1&0&1&-1\\3&2&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\underline{-8}$；

（2）24；（3）2；（4）0；（5）解：将 C 的后 n 行依次与 C 的前 m 行交换，有 $|C|=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}B&O\\O&A\end{vmatrix}=\underline{(-1)^{mn}ab}$；（6）6；（7）$(2-n)n!$；（8）$-14$；（9）$a=1$ 或 $b=0$；（10）解：$(2A^*)^*=2^{n-1}(A^*)^*=2^{n-1}|A|^{n-2}A=\underline{2A}$．

2．（1）(C)；（2）(D)；（3）(C)；（4）(B)；（5）(D)．

3．（1）解：$D=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$．

（2）解：$D=\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}$

$$=abcdef\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=4abcdef.$$

（3）解：$D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\-a&-a&0&0\\0&a&b&0\\0&0&-b&-b\end{vmatrix}$

$=(1+a)\begin{vmatrix}-a&0&0\\a&b&0\\0&-b&-b\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&0\\0&-b&-b\end{vmatrix}=ab^2(1+a)-ab^2=a^2b^2$.

（4）解：$D_n=[x+(n-2)b]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\b&x-b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&\cdots&x-b\end{vmatrix}$

$=[x+(n-2)b]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-2b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x-2b\end{vmatrix}=[x+(n-2)b](x-2b)^{n-1}$.

（5）解：将 D_n 按第一行元素展开，得 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$，

所以 $D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})$ 或 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$

由上面两个递推关系式分别通过递推可得

$D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})=a^2(D_{n-2}-bD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-bD_1)=a^n$，

$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=b^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n$，

当 $a\neq b$ 时，$D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$，

当 $a=b$ 时，$D_n=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=(n+1)a^n$，

于是 $D_n=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, a\neq b,\\(n+1)a^n,\quad a=b.\end{cases}$

4．解：由于 $f(x)=(x+\sum\limits_{i=1}^{4}a_i)\begin{vmatrix}1&a_2&a_3&a_4+x\\1&a_2&a_3+x&a_4\\1&a_2+x&a_3&a_4\\1&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}$

$$=(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)\begin{vmatrix}x&0&0&1\\0&x&0&1\\0&0&x&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=x^3(x+\sum_{i=1}^{4}a_i),$$

故 $x_1=x_2=x_3=0,\ x_4=-\sum_{i=1}^{4}a_i$.

5．解：由于 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=\frac{|A|}{4}A^*XA=8A^{-1}X+E$，所以 $\frac{|A|}{4}AA^*XA=8X+A$，

因此 $(4A-8E)^TX^T=A^T$，而 $((4A-8E)^T,A^T)=\begin{pmatrix}-4&-4&4&1&-1&1\\4&-4&-4&1&1&-1\\-4&4&-4&-1&1&1\end{pmatrix}$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-4&-4&4&1&-1&1\\0&-8&0&2&0&0\\0&8&-8&-2&2&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1/4\\0&1&0&-1/4&0&0\\0&0&1&0&-1/4&0\end{pmatrix},$$

故 $X=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&0&0\end{pmatrix}$.

6．解：设平面方程为 $ax+by+cz+d=0$，将三点 $(1,1,1),(2,3,-1),(3,-1,-1)$ 代入得

$$\begin{cases}a+\ b+c+d=0,\\2a+3b-c+d=0,\\3a-\ b-c+d=0,\end{cases}$$ 解之得 $a=-\frac{1}{2}d,\ b=-\frac{1}{8}d,\ c=-\frac{3}{8}d$，

由此得平面方程为 $4x+y+3z-8=0$.