高等数学下 期末复习题

1. 已知 A$(1,-1,3)$，B$(3,-2,1)$,直线 L: $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$, 平面$\pi$方程为

$4x-2y+z-2=0$，

求（1）$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}$；

（2）与$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量；

（3）A 点到直线 L 的距离；B 点到平面π的距离；

（4）判断直线 L 与平面π的位置关系.

2. 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}};\qquad \lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-\cos(xy)}{x^2};$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to2}}\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}};\qquad \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x}.$$

3. 证明下列极限不存在

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$；　　　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$

4. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的连续性、可导性和可微性；并就一般二元函数，指出这三个概念之间的关系.

5. 设 $z=y\tan(x^2-y^2)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. （1）已知 $z=z(x,y)$ 由方程 $x=\ln\dfrac{z}{y}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（2）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z-e^{z}+2xy=3$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7. 设 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$，求 $\dfrac{dz}{dx},\dfrac{dy}{dx}$.

8. 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y，x^2+y^2)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

9. （1）求$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点（1，－2，1）的切线方程及法平面方程.

（3）求$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$在点（1，－2，2）处的法线方程及切平面方程.

10. 求函数$f(x,y)=e^{y+x}(\frac{x^3}{3}+y)$的极值.

11. 求函数$f(x,y)$满足$f_x(x,y)=(y+1)^2e^x+xe^x$, $f(0,y)=y^2+2y$，

求$f(x,y)$的极值.

12. 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-2x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$，

上的最大值和最小值.

13. 计算下列二重积分

（1）$\iint\limits_D \frac{\sin y}{\pi-y}dxdy$，其中 D 是由 $y=x, x=\pi$ 以及 x 轴所围区域.

（2）设 $D: x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1$, 求 $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}d\sigma$.

（3）$I=\iint\limits_D (2x-y)dxdy$. 其中 D 是由 $y=x,\ y=2x,\ y=2$ 所围的区域.

（4）$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-9\right|d\sigma$，其中 D: $x^2+y^2\le 16$.

11. 化二次积分$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$为极坐标形式.

12. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv$, 其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面$z=4$所围城的立体.

13. 设$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv \quad \Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le R$（图 10-19），分别把$I$表示为三种坐标系下的三次积分.

14. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2 dv$，其中$\Omega$是由抛物面$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=2$所围的空间立体.

15. 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 所围立体的体积及表面积.

16. 求 $\oint_L (x^2 + y^2)\mathrm{d}s$，其中$L$为$x^2 + y^2 + z^2 = 1$与 $x + y + z = 1$ 的交线.

17. 设曲线积分 $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且

$\varphi(0) = 0$，求 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x)dy$.

18. 求 $I = \int_L \left[e^x \sin y - b(x+y)\right]dx + \left(e^x \cos y - ax\right)dy$，其中 a, b 为正常数，L 为从

A(2a, 0)沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点(0, 0)的弧.

19. 求$\int_L (x^5 y-y)\,dx+(\frac{x^6}{6}+x)\,dy$.其中L 是$x^2+y^2=R^2$在第一象限由$(0,\ R)$到$(R,\ 0)$ 的弧段.

20.验证$(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$ 在整个xoy平面内为某一函数$U(x,y)$的全微分，并求$U(x,y)$.

21. 设$\mathrm{Q}(x,\ y)$在xy平面上有一阶连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xy\mathrm{d}x+\mathrm{Q}(x,y)\mathrm{d}y$与路径无关，对任何$t$恒有$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 求函数$Q(x,y)$.

22. 求 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-(y-1)\mathrm{d}x}{4x^2+(y-1)^2}$，其中 L 是以 $(0,0)$ 为心，R（$R\neq 1$）为半径的圆周，取逆时针方向.

23. 设 S 是有向曲面 $z=x^2+y^2$（$0\leqslant z\leqslant 1$），其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角，求曲面积分 $I=\iint\limits_S (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

24. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中Σ为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\leq z\leq 1)$ 的上侧.

25. 求 $I=\iint\limits_\Sigma -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中Σ为圆柱面 $x^2+y^2=4$，被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截得部分的外侧.

26. 求$\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 C 是曲线$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$从 z 轴正向往 z 轴负向看去，C 的方向是顺时针方向.

27.判断下列级数的敛散性

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{\pi}{n})$　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+k}{n^2}$

28. 叙述交错级数莱布尼茨判别法，并证明级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$条件收敛.

29. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}(x-3)^n$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+(-2)^n} \frac{x^n}{n}$ （3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n+2^n} x^{2n-1}$

30. 求下列函数的幂级数展开式

（1）e^{-x^2} 和 $\ln(1-x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开；

（2）ln（$4+3x-x^2$）展开成 x 的幂级数.

31.试确定 $\varphi(x)$，使 $\left[x^3+2y\varphi(x)\right]dx+\left[x\varphi(x)-x^3-y^3\right]dy=0$ 是全微分方程，$\varphi(1)=3$，并求此全微分方程的通解.

32.求下列微分方程的通解.

（1）$xy'+y=\frac{1}{x^2+1}$， （2）$(2x+y)dx+(4y+x)dy=0$

（3）$y''-5y'+6y=0$， （4）$y''-2y'+y=0$

（5）$y''-2y'+4y=0$.

33.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$的收敛半径和收敛区间.

34.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$的收敛半径和收敛区间.