一维椭圆形问题的有限元方法

刘畅 5130109014

1. 实验目的

1. 熟悉有限元求解过程；
2. 掌握子结构法构造有限元方程；
3. 熟悉 Matlab 编程。

2. 问题描述

求解以下一维椭圆形问题：

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{du}{dx}\right)+u=f,\ 0<x<1, \\ u(0)=0,\ p(1)\dfrac{du}{dx}(1)+u(1)=\beta, \end{cases} \tag{2-1}$$

其中 $p(x)=1+x^2$

假定解为 $y=x^2$，将其带入(2-1)可以得到 $f=-2-5x^2$ ， $\beta=5$ 。

下文将按照 $f=-2-5x^2$ ，$\beta=5$ 进行求解，并将有限元求解结果与解析解 $y=x^2$ 进行对比

3. 有限元方法求解步骤

3.1. 给出原问题的虚功描述

选取有限元空间为 $V=\{v充分光滑，且v(0)=0\}$

与原问题等价的虚功问题是：
求 $u\in V$，使得 $\forall v\in V$ 满足

$$a(u,v)=f(v) \tag{3-1}$$

其 $a(u,v)=\int_0^1\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx}+uv\right)dx+u(1)v(1),\quad f(v)=\int_0^1 fvdx+5v(1)$

3.2. 有限元空间的构造

对 $[0,1]$ 进行剖分，设节点 $x_{0,}x_1,\cdots,x_N$ 满足

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=b, \tag{3-2}$$

这样得到子区间 $e_i=[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,N)$ 称为“单元”，单元 e_i 的长度 $h_i=x_i-x_{i-1}$，出于简单考虑，在本文中使用均匀剖分，如下图所示：

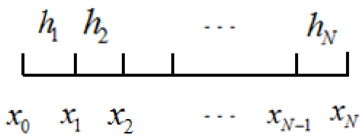

图 3-1 单元剖分示意图

构造 $U_h=\{v\,|\,v\in C[a,b],v\text{充分光滑},v|_{e_k}\in P_1(e_k),1\le k\le N\}$ 容易验证，U_h 是实数域上的一个线性空间。

定义：$V_h=U_h\cap V=\{v\,|\,v\text{充分光滑},v|_{e_k}\in P_1(e_k),1\le k\le N,v(a)=0\}$

在该空间中，可以构造一组基：

$$\phi_k(x_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1,k=j\\0,k\neq j\end{cases} \tag{3-3}$$

具体地：

$$\phi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h_1},x_0\le x\le x_1\\0,\text{其他}\end{cases} \tag{3-4}$$

$$\phi_k(x)=\begin{cases}\dfrac{x_k-x}{h_k},x_{k-1}\le x\le x_k\\\dfrac{x-x_k}{h_{k+1}},\mathrm{x}_k\le x<x_{k+1}\end{cases},k=1,2,\cdots N-1 \tag{3-5}$$

$$\phi_N(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N-1}}{h_N},x_{N-1}\le x\le x_N\\0,\text{其他}\end{cases} \tag{3-6}$$

则对 $\forall v\in U_h$，

$$v=\sum_{k=0}^{N}v(k)\phi_k(x)=v_k\phi_k(x) \tag{3-7}$$

3.3. 有限元方法的获得

使用有限维逼近子空间V_h代替原空间V，有限元方法即寻找$u_h\in V_h$使

$$a(u_h,v)=F(v),\forall v\in V_h \tag{3-8}$$

3.4. 有限元方程组的获得

取$u_h=\sum_{i=0}^{N}u_i\phi_i$，在(3-8)中取$v=\phi_j,0\le j\le N,$可得

$$a(\sum_{i=1}^{N}u_i\phi_i,\phi_j)=F(\phi_j),j=0,1,2,\cdots N \tag{3-9}$$

考虑到$a(u,v)$为一双线性函数，$a(\sum_{i=0}^{N}u_i\phi_i,\phi_j)=\sum_{i=0}^{N}a(\phi_i,\phi_j)u_i$

所以可得$\mathbf{A}\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{F}}$，其中

$$\mathbf{A}=[a(\phi_i,\phi_j)]_{(N+1)\times(N+1)} \tag{3-10}$$

$$\vec{\mathbf{u}}=[u_0,u_1,u_2,\cdots,u_N]^T \tag{3-11}$$

$$\vec{\mathbf{F}}=[F(\phi_0),F(\phi_1),F(\phi_2),\cdots,F(\phi_N)]^T \tag{3-12}$$

借用力学名词，如果将$\vec{\mathbf{u}}$看做位移向量，则$\mathbf{A}$称为刚度矩阵，$\vec{\mathbf{F}}$ 称为载荷向量。下节将介绍通过子结构方法求解刚度矩阵及载荷向量。

3.5. 使用子结构方法求刚度矩阵和载荷向量

在获得有限元方程组之后，需要显示求解刚度矩阵

$$\mathbf{A}=[a(\phi_i,\phi_j)]_{(N+1)\times(N+1)}=[a_{ij}]_{(N+1)\times(N+1)} \tag{3-13}$$

以及载荷向量：

$$\vec{\mathbf{F}}=[F(\phi_0),F(\phi_1),F(\phi_2),\cdots,F(\phi_N)]^T=[F_0,F_1,F_2,\cdots F_N]^T{}_{(N+1)\times 1} \tag{3-14}$$

其中：

$$a(u,v)=\int_0^1\left(p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+uv\right)dx+u(1)v(1),\ \ f(v)=\int_0^1 fvdx+5v(1)$$

考虑到积分的可加性，可以首先在各个单元上计算上述积分，然后再相应叠加。
将整个区间划分为 N 个单元，如下图所示，

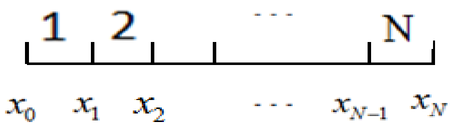

图 3-2 单元剖分示意图

记 $a_{ij}{}^{(k)}$ 为 a_{ij} 在第 k 个单元上的计算值。由 ϕ_i 的性质知：

$$\begin{aligned} a_{k-1,k-1}{}^{(k)} &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1+x^2)\frac{d\phi_{k-1}}{dx}\frac{d\phi_{k-1}}{dx}dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_{k-1}\phi_{k-1}dx + \phi_{k-1}(1)\phi_{k-1}(1) \\ &= \frac{1}{h_k}(1+\frac{x_{k-1}{}^2 + x_{k-1}x_k + x_k{}^2}{3}) + \frac{h_k}{3} \end{aligned} \tag{3-15}$$

$$\begin{aligned} a_{k-1,k}{}^{(k)} = a_{k,k-1}{}^{(k)} &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1+x^2)\frac{d\phi_{k-1}}{dx}\frac{d\phi_k}{dx}dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_{k-1}\phi_k dx + \phi_{k-1}(1)\phi_k(1) \\ &= -\frac{1}{h_k}(1+\frac{x_{k-1}{}^2 + x_{k-1}x_k + x_k{}^2}{3}) + \frac{h_k}{6} \end{aligned} \tag{3-16}$$

$$\begin{aligned} a_{k,k}{}^{(k)} &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1+x^2)\frac{d\phi_k}{dx}\frac{d\phi_k}{dx}dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_k\phi_k dx + \phi_k(1)\phi_k(1) \\ &= \frac{1}{h_k}(1+\frac{x_{k-1}{}^2 + x_{k-1}x_k + x_k{}^2}{3}) + \frac{h_k}{3} \end{aligned} \tag{3-17}$$

$$a_{i,j}{}^{(k)} = 0,\ i,j = 其他 \tag{3-18}$$

将 $\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{k-1,k-1}{}^{(k)} & a_{k-1,k}{}^{(k)} \\ a_{k,k-1}{}^{(k)} & a_{k,k}{}^{(k)} \end{bmatrix}, k = 1,2,\cdots N$ 称为单元刚度矩阵。

同理，记 $F_i^{(k)}$ 为 F_i 在第 k 个单元上的计算值。由 ϕ_i 的性质知：

$$F_{k-1}{}^{(k)} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (-2-5x^2)\frac{x_k - x}{h_k}dx \tag{3-19}$$

$$F_k{}^{(k)} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (-2-5x^2)\frac{x - x_{k-1}}{h_k}dx \tag{3-20}$$

$$F_i^{(k)} = 0,\ i = 其他 \tag{3-21}$$

将 $\vec{\mathbf{F}}^{(k)} = \begin{bmatrix} F_{k-1}{}^{(k)} \\ F_k{}^{(k)} \end{bmatrix}$ 称为单元载荷向量。

在每一个单元上求解得到了单元刚度矩阵，以及单元载荷向量后，使用“对号入座”方

法，将单元逐个遍历即可得到总刚矩阵，即：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0N} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N0} & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{00}{}^{(1)} & a_{01}{}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10}{}^{(1)} & a_{11}{}^{(1)}+a_{11}{}^{(2)} & a_{12}{}^{(2)} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21}{}^{(2)} & a_{22}{}^{(2)}+a_{33}{}^{(3)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN}{}^{(N)} \end{bmatrix} \tag{3-22}$$

同理，总载荷向量为：

$$\vec{\mathbf{F}}=\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}_{(N+1)}=\begin{bmatrix} F_0{}^{(1)} \\ F_1^{(1)}+F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)}+F_2^{(3)} \\ \vdots \\ F_N{}^{(N)} \end{bmatrix}_{(N+1)} \tag{3-23}$$

3.6.约束处理

由于总体刚度矩阵不是对称正定的，不能保证解的存在唯一性，需要根据约束条件对刚度矩阵及载荷向量进行约束处理。由于约束条件限制了 $u_0=0$，将刚度矩阵划去第一行和第一列，载荷向量划去第一行，得

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{21} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}_{N\times N} \tag{3-24}$$

$$\tilde{\vec{\mathbf{F}}}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \tag{3-25}$$

同时，令

$$\tilde{\vec{\mathbf{u}}}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \tag{3-26}$$

即可求得：

$$\tilde{\vec{\mathbf{u}}}=\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\vec{\mathbf{F}}} \tag{3-27}$$

根据约束条件，可得各节点的有限元数值解为：

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\mathbf{u}} \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} \tag{3-28}$$

在求解区间上的有限元数值解为：

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} u_k \phi_k(x) \tag{3-29}$$

4. 求解结果

根据以上求解步骤，分别取单元数为 10,100,1000 进行求解，并与理论解 $u(x)=x^2$ 进行对比，结果如下：

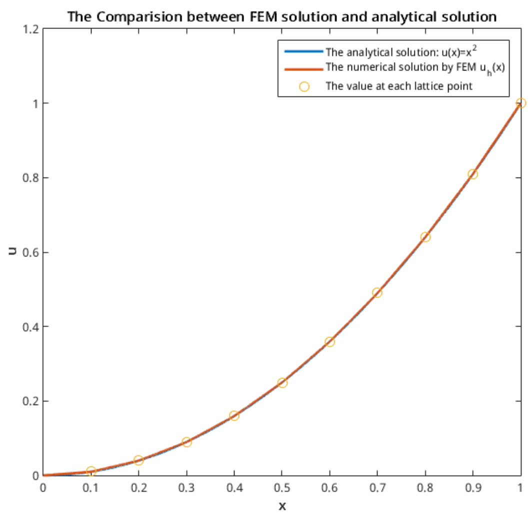

图 4-1 有限元结果与理论解对比（N=10）

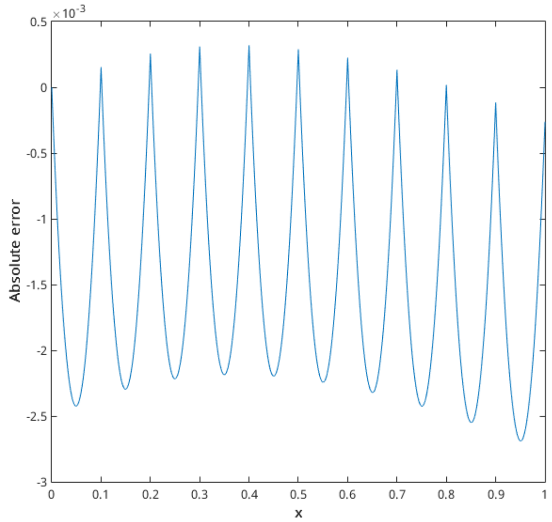

图 4-2 有限元结果绝对误差（N=10）

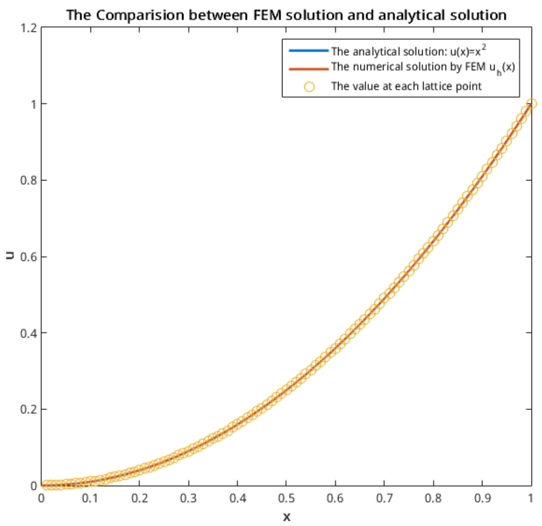

图 4-3 有限元结果与理论解对比（N=100）

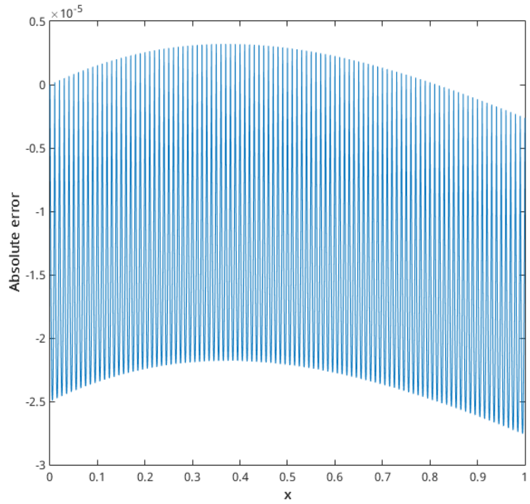

图 4-4 有限元结果绝对误差（N=100）

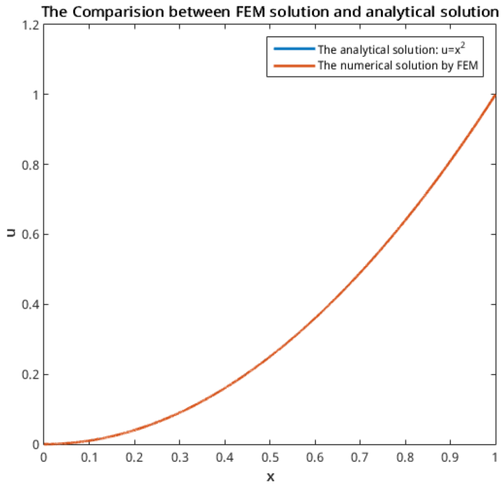

图 4-5 有限元结果与理论解对比（N=1000）

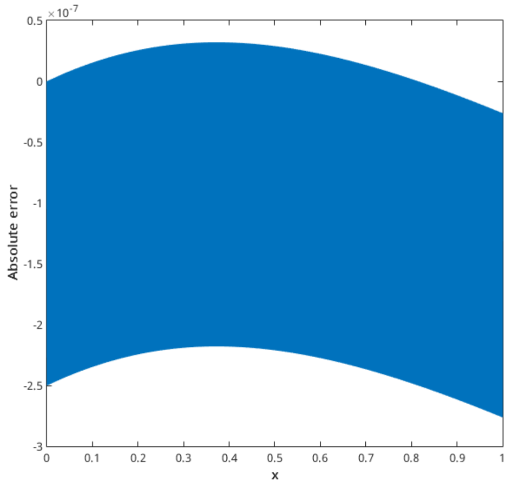

图 4-6 有限元结果绝对误差（N=1000）

同时，计算三种求解结果下的误差-2 范数：$\|\mathbf{u}-\mathbf{u_h}\|$，其与空间步长 $h=\dfrac{1}{N}$ 的关系如下图（取负对数）：

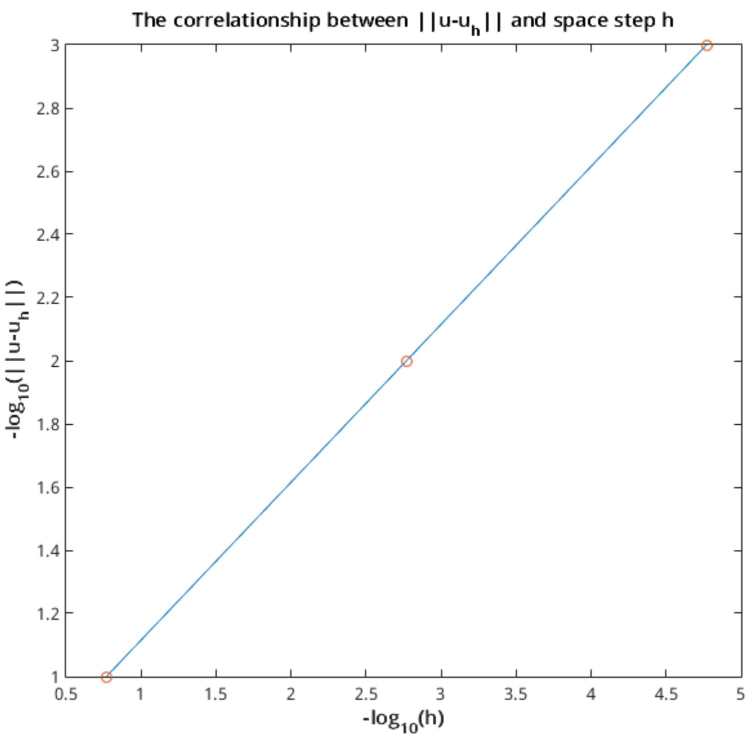

图 4-7 误差 $\|\mathbf{u}-\mathbf{u_h}\|$ 与空间步长 h 关系图（取负对数）

同时，为了进一步验证有限元方法的可行性，求解了另一个算例，假设解为 $u(x)=x(1-x)$，带入原方程(2-1)，可得 $f=2-x+5x^2$，$\beta=-2$，随后使用相同的方法

进行求解，结果对比如下：

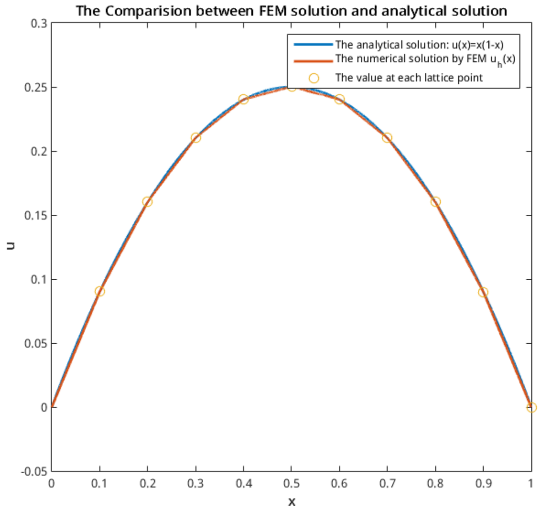

图 4-8 有限元结果与理论解对比（N=10）

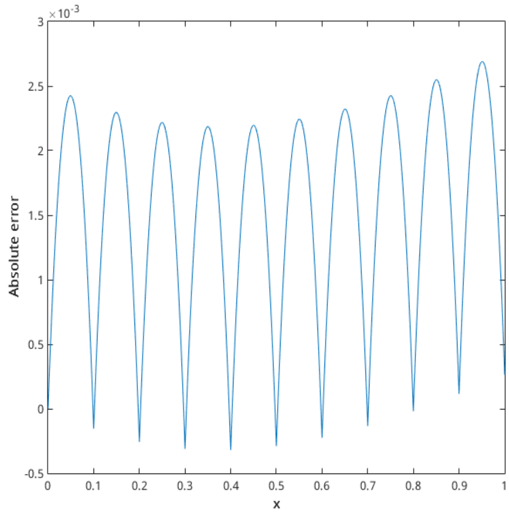

图 4-9 有限元结果绝对误差（N=10）

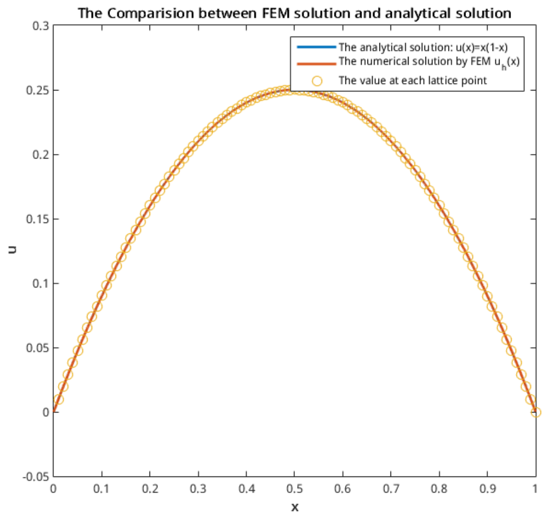

图 4-10 有限元结果与理论解对比（N=100）

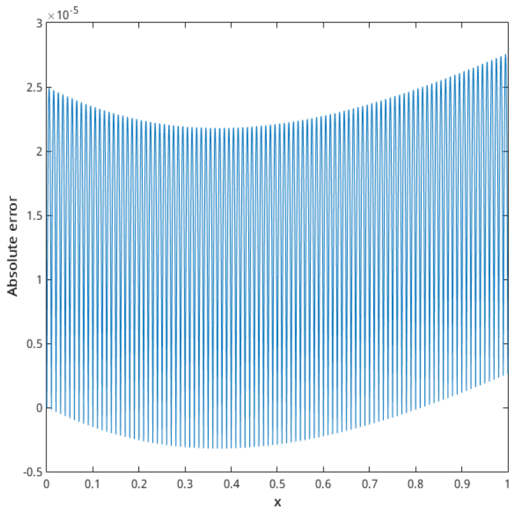

图 4-11 有限元结果绝对误差（N=100）

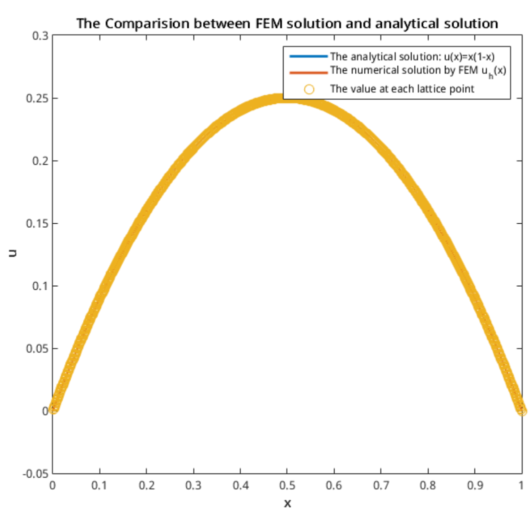

图 4-12 有限元结果与理论解对比（N=1000）

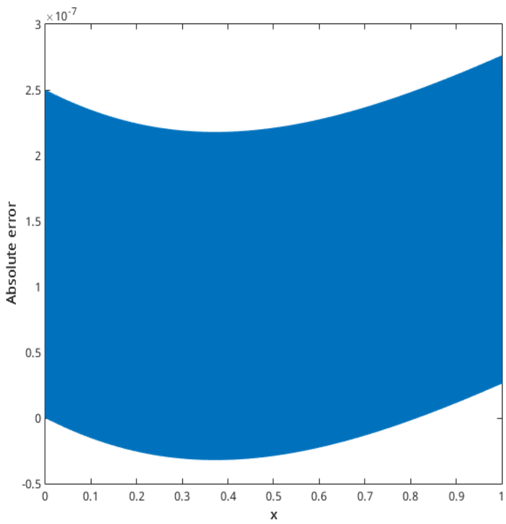

图 4-13 有限元结果绝对误差（N=1000）

同时，计算三种求解结果下的误差-2 范数：$\|\mathbf{u}-\mathbf{u_h}\|$ ，其与空间步长 $h=\dfrac{1}{N}$ 的关系如下图（取负对数）：

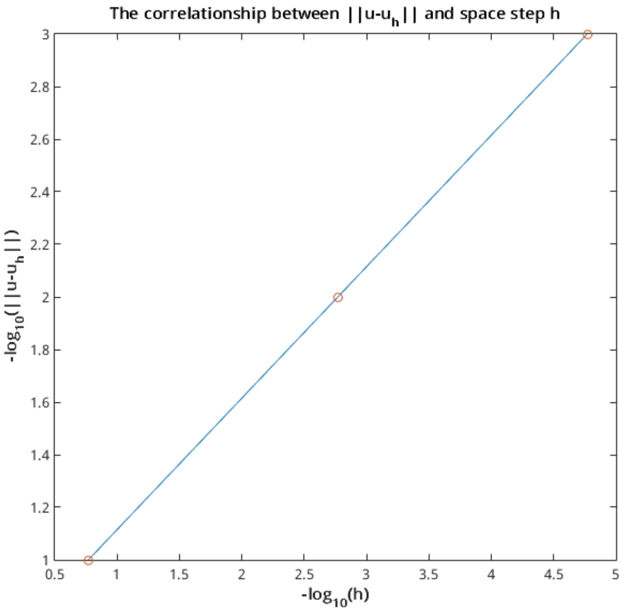

图 4-14 误差 $\|\mathbf{u}-\mathbf{u_h}\|$ 与空间步长 h 关系图（取负对数）

5. 结果分析

根据以上两个算例 $u=x^2$ 以及 $u=x(1-x)$ 的求解结果，可以发现有限元方法可以有效求解一维椭圆型问题。将数值解与理论解对比，发现两者基本吻合，且误差较小。同时，从图 4-8 中，可以明显看出数值解的是通过各个格点值线性插值而得。

同时，对比了不同网格下的求解结果，可以看出，随着网格加细（h 减小），误差也减小。从图 4-7 及图 4-14 中的斜率可以看出，$\|\mathbf{u}-\mathbf{u_h}\| \sim h^2$