

差分格式稳定性及数值效应比较实验

刘畅 5130109014

1. 实验目的

- 进行数值实验，比较四种差分格式求解对流方程的稳定性与数值效应；
- 熟悉 Matlab 编程；

2. 实验原理

求解对流方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, \\ u(0, x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2-1)$$

其中 $a=1, 2, 4$ ，差分格式中 $h=0.1, \tau=0.08$ ，网格比 $\lambda = \frac{\tau}{h}$

通过比较 $t=4$ 时数值结果，说明算法的稳定性和间断点附近的计算效果。一下分别介绍求解对流方程的四种差分格式并给出各差分格式的稳定性结论。

2.1. 迎风格式 (Upwind)

迎风格式的基本思想是：在双曲型方程中关于空间偏导数用在特征线方向一侧的单边差商来代替，式(2-1)的迎风格式是：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n), a > 0 \quad (2-2)$$

容易求出其时间空间方向上均为一阶精度，即 $L_h u(x, t) = O(\tau + h)$ ，迎风格式的节点分布如下：

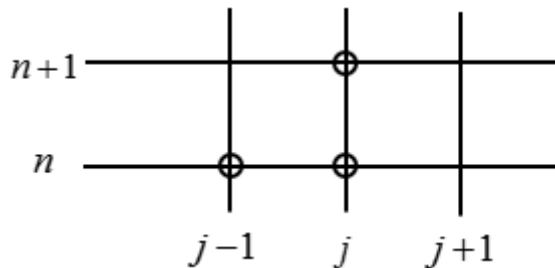


图 2-1 迎风格式节点分布

使用傅里叶方法分析迎风格式的稳定性，令 $u_j^n = v^n e^{ikjh}$ ，容易求出式(2-2)其增长因子

为

$$G(\tau, k) = 1 - a\lambda(1 - \cos kh) - a\lambda i \sin kh \quad (2-3)$$

所以：

$$|G(\tau, k)|^2 = 1 - 4a\lambda(1 - a\lambda) \sin^2 \frac{kh}{2} \quad (2-4)$$

如果 $a\lambda \leq 1$ ，则有 $|G(\tau, k)|^2 \leq 1$ ，即 Von-Neumann 条件满足。

所以迎风格式(2-2)在 $a\lambda \leq 1$ 时稳定。

2.2. Lax-Friedrichs 格式

在空间方向上使用中心差分，可以得到逼近对流方程(2-1)的一个中心差分格式：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (2-5)$$

其截断误差为 $O(\tau + h^2)$ ，但其是绝对不稳定的差分格式。

1954 年, Lax 和 Friedrichs 为克服上述格式的不稳定性, 用 $\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$ 来代替式(2-5)

中的 u_j^n ，得到 Lax-Friedrichs 格式：

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (2-6)$$

或写成：

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2-7)$$

容易求出，Lax-Friedrichs 格式得截断误差是 $O(\tau + h^2) + O(\frac{h^2}{\tau})$ 。由于在双曲型方程的

差分格式计算中，一般取网格比 $\lambda = \frac{\tau}{h} = \text{const}$ ，所以 Lax-Friedrichs 格式是一阶精度的差分

格式。Lax-Friedrichs 格式的节点分布如下图：

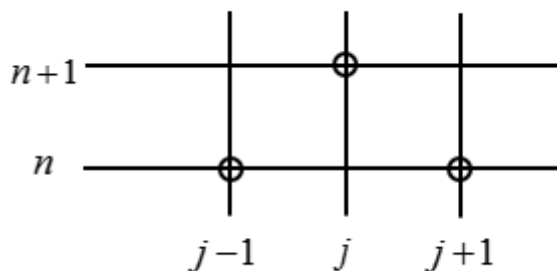


图 2-2 Lax-Friedrichs 格式节点分布

使用傅里叶方法分析迎风格式的稳定性，令 $u_j^n = v^n e^{ikjh}$ ，容易求出式(2-7)增长因子为

$$G(\tau, k) = \cos kh - ia\lambda \sin kh \quad (2-8)$$

所以：

$$|G(\tau, k)|^2 = 1 - (1 - a^2 \lambda^2) \sin^2 kh \quad (2-9)$$

当 $|a|\lambda \leq 1$ 时有 $|G(\tau, k)|^2 \leq 1$ ，即 Von-Neumann 条件满足。

所以 Lax-Friedrichs 格式格式(2-2)在 $|a|\lambda \leq 1$ 时稳定。

2.3. Lax-Wendroff 格式

前面讨论的迎风格式和 Lax-Friedrichs 格式是一阶精度的差分格式，1960 年 Lax 和 Wendroff 构造出一个二阶精度的二层格式，这个差分格式在实际计算中得到了充分的重视。这个格式的构造与前面格式的推导稍有不同，采用 Taylor 级数展开之外，还用到微分方程本身。

设 $u(t, x)$ 是微分方程(2-1)的光滑解，将 $u(x_j, t_{n+1})$ 在点 (x_j, t_n) 处做 Taylor 展开

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \tau \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_j^n + O(\tau^3) \quad (2-10)$$

利用微分方程(2-1)有：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-12)$$

把这两式带入前式(2-10)有：

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - a\tau \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n + \frac{a^2 \tau^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + O(\tau^3) \quad (2-13)$$

再用中心差商逼近上式中的导数项有：

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n &= \frac{1}{2h} [u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)] + O(h^2), \\ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n &= \frac{1}{h^2} [u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)] + O(h^2). \end{aligned} \quad (2-14)$$

得到：

$$\begin{aligned}
 u(x_j, x_{n+1}) &= u(x_j, t_n) - \frac{a\tau}{2h} [u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)] + O(\tau h^2) \\
 &\quad + \frac{a^2}{2} \frac{\tau^2}{h^2} [u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)] \\
 &\quad + O(\tau^2 h^2) + O(\tau^3)
 \end{aligned} \tag{2-15}$$

略去高阶项得到如下差分格式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\tau}{2h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2}{2} \frac{\tau^2}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{2-16}$$

从差分格式的构造可以看出(2-16)是二阶精度的差分格式，其节点分布如下图：

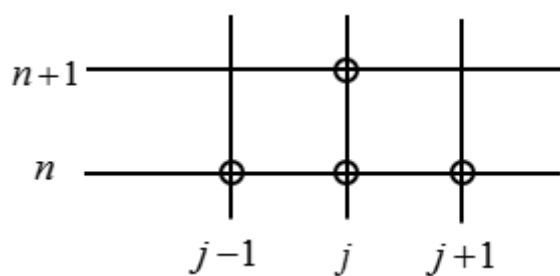


图 2-3 Lax-Wendroff 格式节点分布

差分格式(2-16)称为 Lax-Wendroff 格式，容易求出式(2-16)的增长因子为：

$$\begin{aligned}
 G(\tau, k) &= 1 - 2a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{kh}{2} - ia\lambda \sin kh, \\
 |G(\tau, k)|^2 &= 1 - 4a^2 \lambda^2 (1 - a^2 \lambda^2) \sin^4 \frac{kh}{2}.
 \end{aligned} \tag{2-17}$$

当 $|a|\lambda \leq 1$ 时有 $|G(\tau, k)|^2 \leq 1$ ，即 Von-Neumann 条件满足。

所以 Lax-Wendroff 格式格式(2-16)在 $|a|\lambda \leq 1$ 时稳定。

2.4. 修正迎风格式

根据 Courant-Friedrichs-Lewy 条件（CFL 条件）：差分格式的依赖区间包含偏微分方程初值问题的依赖区间。其为差分格式稳定的必要条件。

为了确定起见，不妨设 $a > 0$ ，根据特征线理论，偏微分方程初值问题的解 $u(x, t + \tau)$ 依赖于 $u(x - a\tau, t)$ ，而迎风格式中， u_j^{n+1} 依赖于点 u_{j-1}^n, u_j^n 。所以在 $a\lambda \leq 1$ 时，偏微分方程初值问题对 t 时刻的依赖区间 $x - a\tau$ 落在差分格式对 t 时刻的依赖区间 $(x - h, x)$ 中，迎风格式稳定。

为了将该思想推广，使得迎风格式能够无条件稳定，让差分格式对 t 时刻的依赖区间跟随偏微分方程初值问题对 t 时刻的依赖区间。显然， $x - a\tau$ 落在区间 $(x - ph - h, x - ph)$ ，

其中 $p = [a\lambda]$ ，所以可以令差分格式中， u_j^{n+1} 依赖于点 u_{j-p-1}^n, u_{j-p}^n ，得修正的迎风格式：

$$u_j^{n+1} = du_{j-p-1}^n + (1-d)u_{j-p}^n \quad (2-18)$$

式中 $p = [a\lambda], d = a\lambda - [a\lambda], \lambda = \tau/h$ 为网格比。记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

该差分格式的节点分布如下图所示：其中三角形表示特征线与 $t = n$ 的交点，其处于差分格式依赖区间之内。

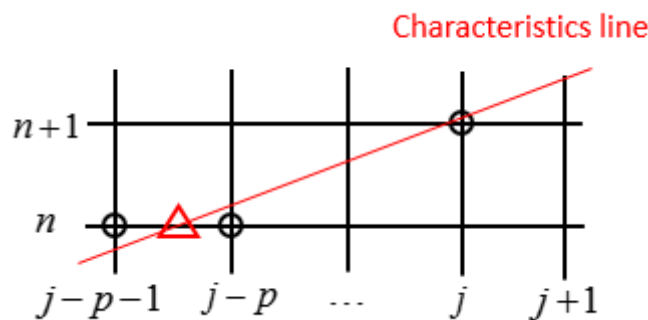


图 2-4 修正迎风格式节点分布

其增长矩阵为：

$$G(\tau, k) = de^{-(p+1)ikh} + (1-d)e^{-pikh} \quad (2-19)$$

$$\begin{aligned} |G(\tau, k)|^2 &= d^2 + (1-d)^2 + 2d(1-d)\cos kh \\ &\leq d^2 + (1-d)^2 + 2d(1-d) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2-20)$$

所以修正的迎风格式无条件稳定

2.5. 差分格式总结

以上四种差分格式可的计算公式以及稳定性总结如下表：

表格 2-1 迎风格式，Lax-Friedrichs 格式，Lax-Wendroff 格式，修正迎风格式计算公式及稳定性

格式名称	计算公式	稳定性
迎风格式	$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n), a > 0$	$ a \lambda \leq 1$ 时稳定
Lax-Friedrichs 格式	$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$	$ a \lambda \leq 1$ 时稳定

Lax-Wendroff 格式	$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2}{2} \frac{\tau^2}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$	$ a \lambda \leq 1$ 时稳定
修正迎风格式	$u_j^{n+1} = du_{j-p-1}^n + (1-d)u_{j-p}^n, \quad p = [a\lambda], d = a\lambda - [a\lambda]$	无条件稳定

3. 实验结果

$a=1$ 时，四种差分格式计算结果如下图：

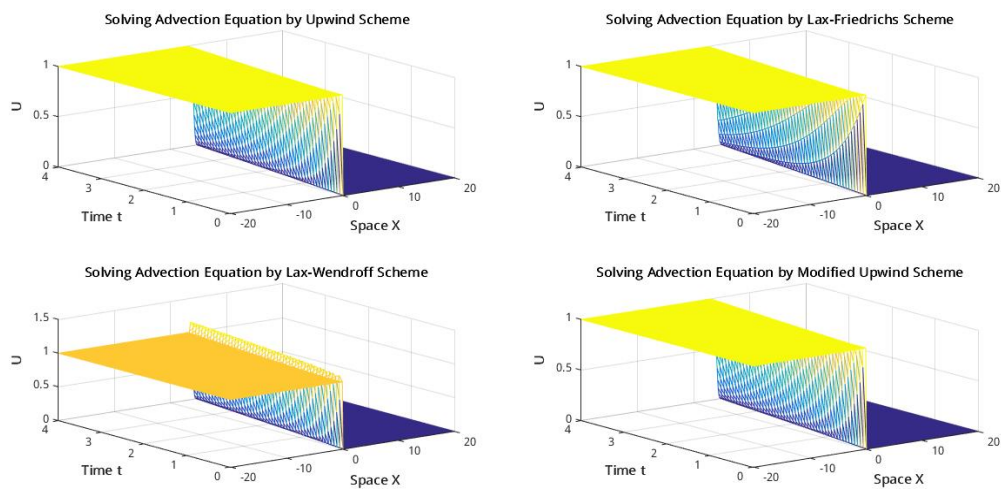


图 3-1 迎风格式, Lax-Friedrichs 格式, Lax-Wendroff 格式, 修正迎风格式计算结果时空分布 ($a=1$)

其在 $t=4$ 时计算结果的空间分布如下：

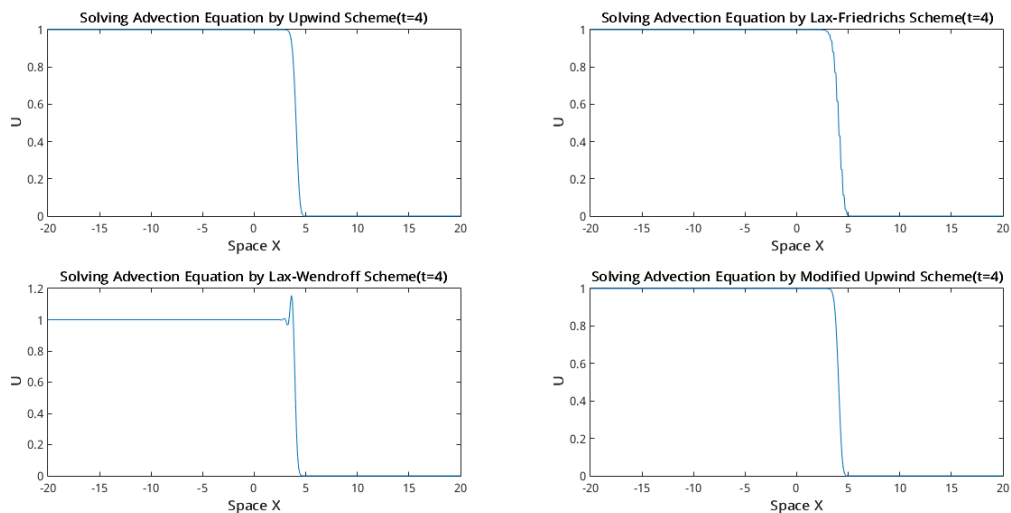


图 3-2 迎风格式, Lax-Friedrichs 格式, Lax-Wendroff 格式, 修正迎风格式计算结果 $t=4$ 时刻空间分布

$a=2, a=4$ 时四种差分格式计算结果的时空分布：

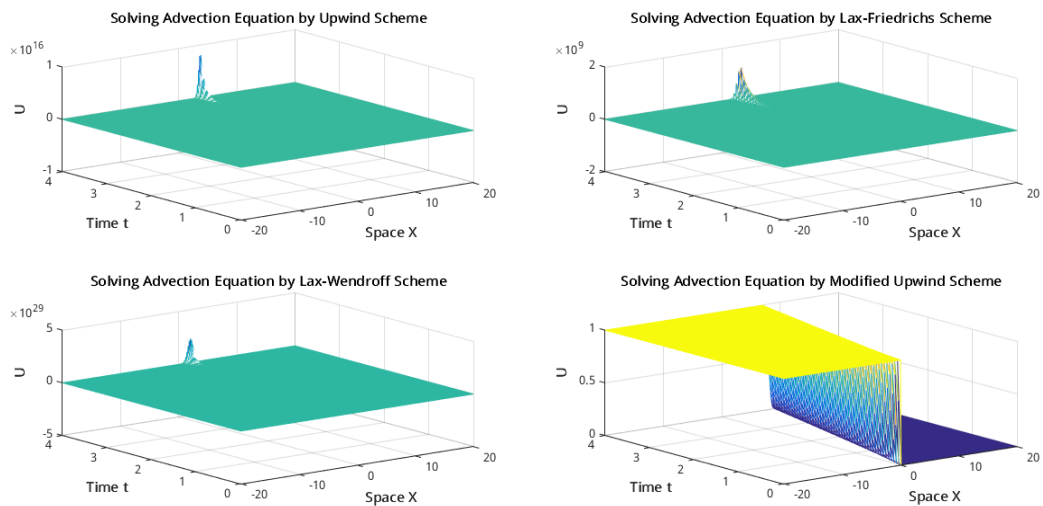


图 3-3 迎风格式, Lax-Friedrichs 格式, Lax-Wendroff 格式, 修正迎风格式计算结果时空分布($a=2$)

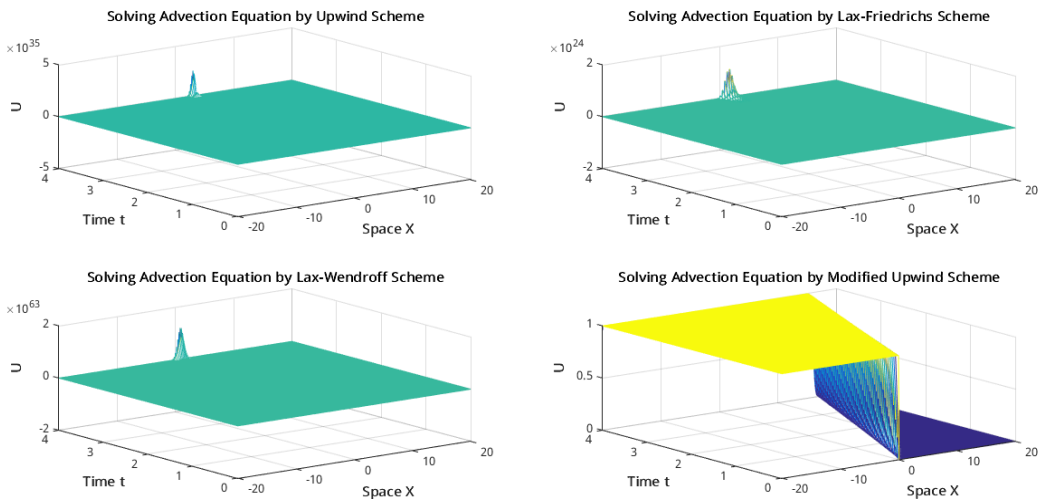


图 3-4 迎风格式, Lax-Friedrichs 格式, Lax-Wendroff 格式, 修正迎风格式计算结果时空分布($a=4$)

从图中可以看出, 修正的迎风格式对于 $a=1, a=2, a=4$ 时均可得到稳定的计算结果, 其在 $t=4$ 时刻计算结果的空间分布如下图:

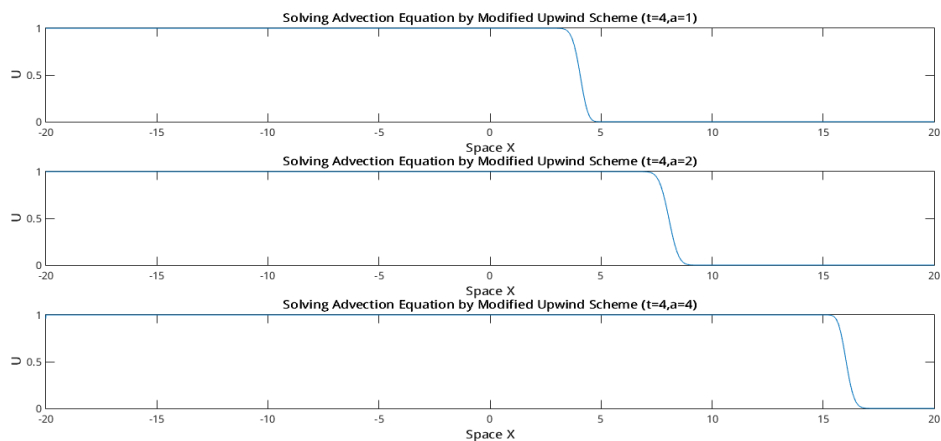


图 3-5 修正迎风格式计算结果 $t=4$ 时刻空间分布 ($a=1, 2, 4$)

4. 结果分析

由于网格比 $\lambda = \frac{\tau}{h} = 0.8$ ，在 $a=1$ 时， $|a|\lambda < 1$ ，四种差分格式均可得到稳定计算结果。

在 $a=2, a=4$ 时， $|a|\lambda > 1$ ，迎风格式，Lax-Friedrichs 格式，Lax-Wendroff 格式不稳定，而修正迎风格式此时仍然稳定。图 3-1，图 3-3，图 3-4 中可以明显观察到这一结果。

比较 $a=1$ 时间断点处的计算结果，如图 3-1，图 3-2 所示，可以看出迎风格式，Lax-Friedrichs 格式，修正迎风格式在间断点处计算结果仍然较好，而 Lax-Wendroff 格式计算结果在间断点处出现了波动。从四种差分格式的节点分布图：图 2-1 图 2-2 图 2-3 图 2-4 可以看出，Lax-Wendroff 格式除了依赖于 u_{j-1}^n, u_j^n 外，还依赖于 u_{j+1}^n ，而根据对流方程的

物理意义，在 $a > 0$ 时，其在 $u(x_0, t_0 + \tau)$ 处的值因只依赖于 $u(x, t_0), x < x_0$ 处的值。该方程的初值条件在 $x=0$ 处间断，即

$$u(0, x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

在使用迎风格式，Lax-Friedrichs 格式，修正的迎风格式计算时，空间方向从左到右依次计算，计算 $x=0$ 处的结果时，不会受到间断点后的结果影响，而使用 Lax-Wendroff 格式计算时，由于使用了 u_{j+1}^n 时的值，在计算 $x=0$ 处结果的时候，会受到间断点后的影响。所以 Lax-Wendroff 格式求得的数值解在间断点处会有波动现象出现。