ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 4 (50).*

УДК 517.9

Мухтарбай Отелбаев

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: otelbaevm@mail.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

В работе дано решение шестой проблемы тысячелетия (The Millennium Prize Problems): доказаны существование и единственность сильного решения трехмерной задачи Навье-Стокса с периодическими краевыми условиями по пространственным переменным.
Ключевые слова: *шестая проблема тысячелетия, уравнение Навье-Стокса, сильное решение.*

1 Введение

1.1 Краткая история проблемы

Задача описания динамики несжимаемой жидкости, в силу своей теоретической и прикладной важности, привлекает внимание многих исследователей. В середине 2000-го года математическим институтом Клея (Clay Mathematics Institute) эта задача была сформулирована как ***шестая проблема тысячелетия*** (*The Millennium Prize Problems*) о существовании и гладкости решений уравнений Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости [1].

Keywords: *the sixth problem of millennium, Navier-Stokes equation, strong solution*
2010 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35Q30, 76D05

Решению этой проблемы и до объявления ее проблемой тысячелетия было посвящено огромное множество работ. Так как их необозримо много, я их список просто не привожу. Глубокие результаты, по моему мнению, получены в работах О.А. Ладыженской [2-5] и R. Temam [6, 7]. Этой проблемой интересовались многие первоклассные математики, которым удавалось решить важные математические проблемы, в том числе задачи газо-гидродинамики. Существенные результаты получены в работах таких крупнейших математиков XX века, как А.Н. Колмогоров [8], J. Leray [9, 10], E. Hopf [11], J.-L. Lions [12, 13], М.И. Вишик [14], В.А. Солонников [15] и многих других. Конечно же, этот список далеко не полный. Я не ставил себе задачей привести полный обзор существующих работ. За исключением тех публикаций, результаты которых я непосредственно явно или неявно использовал при написании этой работы (см. [16-49]). В их число входят мои собственные работы (возможно с соавторами), а также работы многих казахских математиков, положительное влияние которых я испытывал непрерывно.

Полное решение проблемы для двумерного случая дано О.А. Ладыженской в [2]. В [5] ею приведен достаточно полный анализ современного состояния проблемы и обзор имеющейся литературы, предложены методы решения задачи. В частности, основная проблема глобальной однозначной разрешимости трехмерной задачи Навье-Стокса сведена к вопросу о нахождении специальной априорной оценки для всех возможных решений.

Следует иметь в виду также наличие большого количества ошибочных или не содержащих доказательства работ, которые опубликованы в малоизвестных журналах или заслужили электронную публикацию. Несмотря на ошибочность, эти работы заслуживают уважения.

Я этой проблемой занимаюсь, начиная с 1980 года. Во всех моих работах, написанных мною единолично или с соавторами, опубликованных после 1982 года, и посвященных нелинейным уравнениям, приближенным методам решения уравнений и финальной обратной задаче, были использованы идеи и технические приемы, возникшие при моих (а также некоторых моих учеников и соавторов) неудачных попытках решить проблему сильной разрешимости уравнения Навье-Стокса (см., например, [16-37]).

Пользуясь случаем, выражаю благодарность профессору М. Садыбекову за внимательное чтение работы. Он также переизложил коротко из-

ложенный мною раздел 4 и полностью написал раздел 8. Его замечания оказались очень полезными при оформлении окончательного вида данной статьи.

Работу посвящаю памяти моих дорогих учителей: профессоров математики Аманова Т.И., Гасымова М.Г., Костюченко А.Г., Левитана Б.М., Лизоркина П.И., а также моих школьных учителей Адыкеева И. и Паниванова А.М.

1.2 Постановка задачи

Пусть $Q \subset R^3$ - трехмерная область, $\Omega = (0,a) \times Q$, $a > 0$. В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда Q - трехмерный куб с центром в нуле и ребрами длины 2π, параллельными координатным осям.

Задача Навье-Стокса состоит в нахождении неизвестных:

вектор скорости $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$,

скалярная функция - давление $p(t,x)$

в точках $x \in Q$ в момент времени $t \in (0,a)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \triangle u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j, \quad (t,x) \in \Omega, \qquad j = 1,2,3; \\ div\ u \equiv \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad (t,x) \in \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), f_3(t,x))$ - внешние воздействия, $\triangle = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ - лапласиан по пространственным переменным, а коэффициент вязкости ν, не уменьшая общности, взят равным единице.

К системе уравнений (1.1) добавляются граничные (мы по пространственным переменным задаем периодические краевые условия) и начальные условия. Не уменьшая общности, начальное условие можно считать нулевым:

$$u(t,x)\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{Q}; \tag{1.2}$$

$$u(t,x)|_{x_k=-\pi} = u(t,x)|_{x_k=\pi}\,,$$

$$p(t,x)|_{x_k=-\pi} = p(t,x)|_{x_k=\pi}\,, \qquad k=1,2,3; \quad 0\le t\le a. \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(t,x)\Big|_{x_k=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial x_k}(t,x)\Big|_{x_k=\pi}\,.$$

Система уравнений (1.1) и начально-краевые условия (1.2), (1.3) не позволяют определить однозначно давление $p(t,x)$. Поэтому мы добавляем условие

$$\int_Q p\,(t,x)\,dx = p_0,\ \ p_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{1.4}$$

В задаче искомыми являются вектор-функция скорости $u=(u_1,u_2,u_3)$ и скалярная функция давления p. ***Решением задачи*** будем называть пару $(u;p)=(u_1,u_2,u_3;p)$.

Мы могли бы рассмотреть случай, когда вместо Q берется достаточно общая область, а вместо периодических граничных условий (1.3) - другие условия (например, условия "прилипания"). Мы такими рассмотрениями не хотим осложнять настоящую работу только из-за технических деталей. Все наши основные новаторские идеи и аналитическая техника будут продемонстрированы в этой работе для случая периодических краевых условий.

Более того, я собираюсь написать еще по крайней одну работу, посвященную случаю общих начально-краевых задач для системы уравнений гидро-газодинамики.

1.3 Необходимые обозначения и определения

Через $L_2\,(\Omega)$, как обычно, обозначим гильбертово пространство Лебега вектор-функций $f(t,x)=(f_1(t,x),f_2(t,x),f_3(t,x))\in R^3$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\int_\Omega \langle f\,(t,x)\,,g(t,x)\rangle\,dxdt \equiv \int_0^a \left(\int_Q \langle f\,(t,x)\,,g(t,x)\rangle\,dx\right)dt$$

и нормой $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$. Здесь и далее $\langle f,g\rangle$ - скалярное произведение векторов f и g в евклидовом пространстве R^3.

Для сокращения записи используем стандартные обозначения:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right);\ \langle u, \nabla \rangle\, u = \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j}\right);$$

$$grad\ p \equiv \nabla\ p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right).$$

Определение 1. *При $f \in L_2(\Omega)$ решение $(u;p) = (u_1, u_2, u_3; p)$ задачи* (1.1) – (1.4) *будем называть* ***сильным****, если*

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \triangle u, \langle u, \nabla \rangle\, u, grad\, p \in L_2(\Omega).$$

Определение 2. *Будем говорить, что задача* Навье-Стокса ***сильно разрешима*** *в $L_2(\Omega)$, если для любой $f \in L_2\,(\Omega)$ задача* (1.1) – (1.4) *имеет единственное сильное решение.*

2 Формулировка основного результата

Хорошо известен классический результат Е. Хопфа [11], который доказал, что задача (1.1) - (1.4) имеет обобщенное решение, удовлетворяющее оценке

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\|u_k(t,\cdot)\|^2_{L_2(Q)} + \int_0^t \|grad\ u_k(\eta,\cdot)\|^2_{L_2(Q)}\, d\eta \right) \le \sum_{k=1}^{3} \int_0^t \|f_k(\eta,\cdot)\|^2_{L_2(Q)}\, d\eta. \tag{2.1}$$

Такая оценка легко получается, если k-ое уравнение системы (1.1) умножить на u_k и, учитывая равенство $div\ u = 0$, а также начальные (1.2) и граничные (1.3) условия, их проинтегрировать и сложить при всех $k = 1, 2, 3$.

В случае, когда количество пространственных переменных не меньше трёх, оценка (2.1) оказывается не достаточной для использования теории возмущений. Именно это обстоятельство, по моему мнению, оказалось одной из важных причин возникновения одной из семи "Проблем тысячелетия" - проблемы о сильной разрешимости задачи Навье-Стокса (1.1) - (1.4).

Основным результатом работы является

Теорема 1. *При любой $f \in L_2(\Omega)$ задача* (1.1) – (1.4) *имеет единственное сильное решение* $(u;p)$ *и для него верна оценка*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| + \|\triangle u\| + \|(u, \nabla)\, u\| + \|grad\ p\| \leq C\Big(1 + \|f\| + \|f\|^l\Big), \qquad (2.2)$$

где $\|\cdot\|$ *- норма в* $L_2(\Omega)$, *а постоянные* $C > 0$ *и* $l \geq 1$ *не зависят от* $f \in L_2(\Omega)$.

Эта теорема дает полное решение ***шестой проблемы тысячелетия*** (*The Millennium Prize Problems*) о существовании и гладкости решений уравнений Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости [1]. Также этот результат позволяет использовать теорию возмущений, и повышать гладкость решения при повышении гладкости данных задачи.

Заметим, что если размерность пространства больше пяти, то сильная разрешимость в смысле принятого нами определения не позволяет использовать теорию возмущений.

В этой работе я нацелен только на трехмерный случай. Поэтому принял удобное мне определение. Случаи, когда размерность пространства выше трёх, будут рассмотрены в другой моей работе, в которую также будут включены некоторые случаи общих граничных условий.

3 Формулировка абстрактной задачи типа Навье-Стокса и основной теоремы для нее

Полное доказательство основной теоремы 1 достаточно объемно. Доказательство разобьем на несколько этапов. Основную часть доказательства составляет обоснование теоремы для абстрактной задачи типа Навье-Стокса. В этом разделе мы сформулируем эту задачу и приведем основной результат для нее.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим оператор A, удовлетворяющий следующему условию:

Условие А. *Оператор A - линейный самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H со вполне непрерывной резольвентой.*

Через $\mu_0 > -\infty$ обозначим точную нижнюю грань спектра оператора A. Хорошо известно, что μ_0 будет наименьшим собственным числом оператора A и для любого $\varphi \in D(A)$ выполнено неравенство

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle_H \geq \mu_0 \|\varphi\|^2,$$

где $D(A)$ - область определения оператора A; $\langle \varphi, \psi\rangle_H$ - скалярное произведение в H элементов $\varphi, \psi \in H$.

Через $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ обозначим полную ортонормированную систему собственных векторов оператора A, соответствующих собственным числам λ_j, пронумерованным в порядке неубывания: $\mu_0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots$.

В этом базисе действие оператора A может быть представлено в виде

$$A\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j e_j,$$

где φ_j - коэффициенты Фурье разложения элемента φ по базису $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j e_j.$$

Пользуясь этим представлением, определим степени (дробные или отрицательные) оператора $A_\mu = A - \mu_0 E + E$ в смысле спектрального разложения:

$$A_\mu^\alpha \varphi = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j - \mu_0 + 1)^\alpha \varphi_j e_j, \ \alpha \in R.$$

Пусть $B(\cdot,\cdot)$ - билинейный оператор в H, для которого выполнены следующие условия.

Условие B1. *Существует такое число* $0 < \gamma < 1/2$, *что для всех* $u, v \in D(A)$ *выполнено неравенство*

$$\|B(u,v)\|_H \leq K_\gamma \left\{ \left\|A_\mu^{\gamma+1/2} u\right\|_H \left\|A_\mu^\gamma v\right\|_H + \left\|A_\mu^\gamma u\right\|_H \left\|A_\mu^{\gamma+1/2} v\right\|_H \right\}, \quad (3.1)$$

где K_γ *- постоянная, не зависящая от* $u, v \in D(A)$.

Условие B2. *Существует такое число* $\theta \in (-3/2, -3/4)$, *что для всех* $u, v \in D(A)$ *выполнено неравенство*

$$\left\|A^\theta B(u,v)\right\|_H \leq K_\theta \left\{ \left\|A_\mu^{1/2} u\right\|_H \|v\|_H + \|u\|_H \left\|A_\mu^{1/2} v\right\|_H \right\}, \quad (3.2)$$

где K_θ - постоянная, не зависящая от $u, v \in D(A)$.

Условия (3.1) и (3.2) являются условиями, выражающими некоторую подчиненность билинейного оператора $B(\cdot,\cdot)$ оператору A.

Подчиним оператор $B(\cdot,\cdot)$ условию «ортогональности».

Условие B3. *Для всех $u \in D(A)$ выполнено условие ортогональности*

$$\langle B(u,u), u\rangle_H = 0. \tag{3.3}$$

Через $H_1(0,a)$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций, полученное пополнением конечных сумм вида

$$u(t) = \sum_{(j)} c_j(t) e_j$$

по норме

$$\|u(\cdot)\|_{H_1} = \left\{ \sum_{(j)} \int_0^a |c_j(t)|^2\, dt \right\}^{1/2},$$

где $c_j(t)$ - бесконечно гладкие на сегменте $[0,a]$ функции.

С использованием введенных операторов задачу Навье-Стокса (1.1) - (1.4) можно представить в виде

$$\begin{cases} u'(t) + Au + B(u,u) = f(t) \in H_1(0,a), \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Такую возможность мы продемонстрируем в разделе 4. Задачи вида (3.4) мы будем называть ***абстрактными задачами типа Навье-Стокса.***

Подчиним оператор $B(\cdot,\cdot)$ еще одному условию.

Обозначим через P - ортогональный проектор на собственное подпространство

$$G_{\mu_0} = \{x: Ax = \mu_0 x\},$$

где μ_0 - наименьшее собственное число оператора A. Так как A имеет компактную резольвенту, то проектор P будет конечномерным.

Определим преобразование $\widehat{B_P}$, действующее по формуле

$$\widehat{B_P}(u) = \big(E-P\big)B\big((E-P)u, (E-P)u\big) - B(u,u).$$

Потребуем для оператора $B(\cdot,\cdot)$ подчинение следующему условию.

Условие B4. *Если $u(t)$ непрерывно дифференцируемая вектор-функция со значениями в $D(A)$ такая, что $u(0)=0$, то*

$$\left\|\widehat{B_P}(u)\right\|_{H_1} \;\leq\; C\left\|u'+Au+B(u,u)\right\|_{H_1}^2.$$

Это условие мы используем только ради уменьшения объемов вычислений.

Для задачи (3.4) нами доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть A - линейный и $B(\cdot,\ \cdot)$ - билинейный операторы, для которых выполнены условия A и B1 - B4. Тогда верны следующие два утверждения:*

I) Для любой функции $f(t)\in H_1(0,a)$ задача (3.4) *имеет единственное решение $u(t)$, и это решение удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{0\leq t\leq a}\left\|A_\mu^{1/2}u(t)\right\|_H+\|u\|_{H_1}+\left\|u'\right\|_{H_1}+\left\|u'+Au\right\|_{H_1}+\|u\|_{H_1}+\|B(u,u)\|_{H_1}\leq$$

$$\leq C\big(1+\|f\|_{H_1}+\|f\|_{H_1}^l\big),$$

где C и l не зависят от f.

II) Через $u_f(t)$ и $u_g(t)$ обозначим решения задачи (3.4) *с правыми частями $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Тогда для любого $\delta>0$ найдется такое $\varepsilon>0$, что для всех $f(t),\ g(t)\in H_1(0,a)$, удовлетворяющих неравенству $\|f-g\|_{H_1}<\varepsilon$, будет иметь место неравенство*

$$\|Av\|_{H_1}+\left\|v'+Av\right\|_{H_1}<\delta,$$

где $v(t)=u_f(t)-u_g(t)$.

Доказательство этой теоремы приведено в разделах 6 и 7.

Отметим, что условие B1, налагаемое на операторы A и B, является существенным. В нашей работе [31] приведен пример задачи типа Навье-Стокса, для которой выполнены условия, обеспечивающие существование слабого решения задачи (3.4), но не выполнено условие B1. Показано, что эта задача не является сильно разрешимой.

4 Вывод основной теоремы 1 из теоремы 2

Пути вывода теоремы 1 из теорем типа 2 известны (см., например [27] и [28] или [29]). Чтобы читатель мог представить к чему нужно стремиться, в этом разделе мы докажем справедливость теоремы 1, считая теорему 2 доказанной.

Решение $u(t,x) \in L_2(\Omega)$ задачи (1.1) - (1.4) будем искать в виде разложения

$$u(t,x) = \sum_{\{m\}} u_m(t) e^{i\langle m,x\rangle},\ u_m = (u_{m1},\ u_{m2},\ u_{m3}), \tag{4.1}$$

где сумма берется по всем трехмерным целым векторам $m = (m_1, m_2, m_3)$. Для того, чтобы трехмерная вектор-функция $u = (u_1, u_2, u_3)$ была действительной, потребуем $\overline{u_m}(t) = u_{-m}(t)$, где $(-m) = (-m_1, -m_2, -m_3)$.

Для скалярной функции $\varphi(x) \in L_2(Q)$ определим оператор $(-\widetilde{\triangle})^{-1}$, задавая его действие формулой

$$\left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1} \varphi(x) = \sum_{m \neq (0,0,0)} \frac{\varphi_m}{|m|^2} e^{i\langle m,x\rangle},\ |m|^2 = |m_1|^2 + |m_2|^2 + |m_3|^2, \tag{4.2}$$

где φ_m - коэффициенты Фурье разложения функции $\varphi(x)$ в тригонометрический ряд

$$\varphi(x) = \sum_{\{m\}} \varphi_m e^{i\langle m,x\rangle},\ \varphi_m = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q \varphi(x)\, e^{-i\langle m,x\rangle} dx.$$

При $\alpha \geq 0$, через $(-\triangle + E)^\alpha$ определим степени оператора $(-\triangle + E)$, как замыкание в $L_2(Q)$ оператора, заданного на тригонометрических полиномах $u(x) = \sum_{\{m\}} u_m e^{i\langle m,x\rangle}$ по формуле

$$\Big((-\triangle + E)^\alpha\Big) u(x) = \sum_{\{m\}} \left(|m|^2 + 1\right)^\alpha u_m e^{i\langle m,x\rangle}.$$

Определим пространства Соболева $W_2^{(\alpha)}(Q)$, пополняя пространство тригонометрических полиномов по норме

$$\|u\|_{W_2^{(\alpha)}(Q)} = \left\|(-\triangle + E)^{\alpha/2} u(\cdot)\right\|_{L_2(Q)} = \left(\sum_{\{m\}} \left(|m|^2 + 1\right)^\alpha |u_m|^2\right)^{1/2}.$$

Там, где это необходимо, чтобы не вызывать путаницы, иногда будем обозначать оператор Лапласа в пространстве вектор-функций через $\triangle_3$, т.е. если $u = (u_1, u_2, u_3)$, то $\triangle_3 u = (\triangle u_1, \triangle u_2, \triangle u_3)$.

Введем в рассмотрение оператор F, являющийся замыканием в пространстве вектор-функций $L_2(Q)$ оператора, первоначально заданного на тригонометрических полиномах, выражением

$$F = E + grad\ (-\widetilde{\triangle})^{-1}\ div. \tag{4.3}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 4.1. *Оператор F является линейным ограниченным самосопряженным ортогональным проектором ($F^2 = F$) в пространстве вектор-функций $L_2(Q)$.*

Лемма 4.2. *Для любой скалярной функции $p\,(x) \in W_2^1\,(Q)$ вектор-функция $grad\ p\,(x)$ принадлежит ядру оператора F, то есть*

$$F\,(grad\ p(x)) = 0.$$

Лемма 4.3. *Оператор F является перестановочным с трехмерным оператором Лапласа $\triangle_3$ на любых вектор-функциях $u(x) \in W_2^2\,(Q)$:*

$$F\,(\triangle_3\ u(x)) = \triangle_3 F\,(\ u(x))\,.$$

Через $\widetilde{L_2}\,(Q)$ обозначим подпространство $L_2\,(Q)$ вектор-функций $u(x)$, для которых $(E - F)\,u\,(x) = 0$. В силу леммы 4.1 оператор F является ортогональным проектором. Поэтому и оператор $E - F$ также является проектором в $L_2\,(Q)$. Так как этот проектор является непрерывным, то все пространство $L_2\,(Q)$ может быть представлено в виде прямой суммы

$$L_2\,(Q) = Ker\,(E - F) \bigoplus KerF.$$

Таким образом, $\widetilde{L_2}\,(Q) = Ker\,(E - F)$.

Лемма 4.4. *Пусть $u\,(x) \in W_2^1\,(Q)$. Тогда $div\ u = 0$, если и только если $u\,(x) \in \widetilde{L_2}\,(Q)$.*

Следствие. *Если $u\,(x) \in W_2^1\,(Q)$ и $div\ u = 0$ (другими словами, если $u\,(x) \in W_2^1\,(Q) \bigcap \widetilde{L_2}\,(Q)$), то $Fu = u$.*

Доказательства этих лемм просты и вытекают из определений пространств Соболева $W_2^1(Q)$ и операторов F, $\triangle$, $grad$ с учетом, что они первоначально определены на тригонометрических полиномах. Они становятся почти очевидными (см. например [49]), если учесть, что класс периодических функций на кубе можно рассматривать как класс функций на торе (на множестве без границ). Но для полноты изложения доказательства этих лемм приведены в разделе 8 (в варианте, предложенном по моей просьбе М. Садыбековым).

Систему (1.1) запишем в одной из общепринятых форм - в векторной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u + \langle u, \nabla \rangle u + grad\ p = f, \\ \qquad div\ u = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Так как мы ищем решение задачи в классе сильных решений, то мы можем почленно подействовать на первое уравнение системы (4.4) оператором F. Тогда, с учетом леммы 4.2 и следствия из леммы 4.4, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u + F\langle u, \nabla \rangle u = Ff; \\ div\ u = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Таким образом, мы исключили давление $p(t,x)$ из системы. Отметим, что такие операции по исключению давления ранее уже проделывались (см., например, [28], [49]).

В силу леммы 4.3, если $u \in \widetilde{L_2}(Q)$, то $\triangle u \in \widetilde{L_2}(Q)$. То есть пространство $\widetilde{L_2}(Q)$ является инвариантным относительно оператора Лапласа $\triangle$. Так как правая часть первого уравнения в (4.5) также принадлежит $\widetilde{L_2}(Q)$, то получаем, что исходная задача Навье-Стокса (1.1) - (1.3) эквивалентно редуцирована к задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u + F\langle u, \nabla \rangle u = f,\ (t,x) \in \Omega; \\ u|_{t=0} = 0,\ x \in \overline{Q}, \end{cases} \tag{4.6}$$

рассматриваемой в пространстве $\widetilde{L_2}(Q)$.

В этом уравнении сделаем замену искомой функции $u(x,t) = v(x,t)e^t$. Тогда новая искомая функция v является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \triangle v + v + e^t F\langle v, \nabla \rangle v = e^t f,\ (t,x) \in \Omega; \\ v|_{t=0} = 0,\ x \in \overline{Q}, \end{cases} \tag{4.7}$$

Выбирая

- в качестве H - пространство $\widetilde{L_2}(Q)$,
- в качестве A - оператор Лапласа $(-\triangle + E)$ с областью определения $D(A) = W_2^2(Q) \bigcap \widetilde{L_2}(Q)$,
- в качестве $B(u,v)$ - преобразование $e^t F \langle u, \nabla \rangle v$,

получаем возможность записать исходную задачу Навье-Стокса (1.1) - (1.3) в виде задачи (3.4), которую мы назвали ***абстрактной задачей типа Навье-Стокса***.

Для применения теоремы 2 нам остается проверить условия A и B1 - B4.

Выполнение условия A является очевидным. Для выбранного нами оператора $\mu_0 = 1$. Следовательно, $A_\mu = A$. Поэтому проверку условий B1 - B3 мы проведем для оператора $A_\mu = A$.

Проверка условия B1. Покажем, что для всех $u, v \in D(A)$ выполнено неравенство

$$\|B(u,v)\|_H \le e^a K_\gamma \left\{ \left\| A^{\gamma+1/2} u \right\|_H \|A^\gamma v\|_H + \left\| A^{\gamma+1/2} v \right\|_H \|A^\gamma u\|_H \right\} \tag{4.8}$$

при некотором $0 < \gamma < 1/2$.

Хорошо известно, что в силу условия $div\ u = 0$ нелинейный член $\langle u, \nabla \rangle v$ может быть представлен в симметричном виде

$$\langle u, \nabla \rangle v = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j v).$$

Соответственно и билинейный оператор $B(u,v)$ может быть записан в другом виде. Поэтому имеем

$$\|B(u,v)\|_H^2 = \left\| e^t F \langle \nabla, u \rangle v \right\|_{L_2(Q)}^2 \le e^a \|F \langle \nabla, u \rangle v\|_{L_2(Q)}^2.$$

Так как F - ограниченный проектор, то $\|F\| = 1$. Следовательно,

$$e^{-a} \|B(u,v)\|_H^2 \le \|\langle \nabla, u \rangle v\|_{L_2(Q)}^2 = \int_Q |\langle \nabla, u(x) \rangle v(x)|^2 \, dx =$$

$$= \int_Q \sum_{k=1}^{3} \left|\langle \nabla, u(x)\rangle v_k(x)\right|^2 dx = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_Q \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j(x)\, v_k(x)\right)\right|^2 dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_Q \left|\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_j} v_k(x) + u_j(x)\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx.$$

Применением элементарных неравенств отсюда получаем

$$\begin{aligned} e^{-a}\left\|B(u,v)\right\|_H^2 \leq & 2\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int \left\{\left|\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_j}\right|^2 |v_k(x)|^2 + |u_j(x)|^2\left|\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j}\right|^2\right\} dx \leq \\ & \leq 2\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left\{\left(\int_Q \left|\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_j}\right|^4 dx\right)^{1/2}\left(\int_Q |v_k(x)|^4 dx\right)^{1/2} + \right. \\ & \left. + \left(\int_Q |u_j(x)|^4 dx\right)^{1/2}\left(\int_Q \left|\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j}\right|^4 dx\right)^{1/2}\right\} \leq \\ & \leq \left\{\left(\int_Q |\nabla u(x)|^4 dx\right)^{1/2}\left(\int_Q |v(x)|^4 dx\right)^{1/2} + \right. \\ & \left. + \left(\int_Q |u(x)|^4 dx\right)^{1/2}\left(\int_Q |\nabla v(x)|^4 dx\right)^{1/2}\right\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Согласно теоремам вложения [50] для всех функций u из пространства $H_2^{2\gamma}(T^3)$ (которое и есть на самом деле определенное нами пространство $W_2^{2\gamma}(Q)$), верно неравенство

$$\int_Q |u(x)|^4 dx \leq C\left\|u\right\|^2_{W_2^{2\gamma}(Q)} = C\left\{\int_Q \left|(-\triangle + E)^{\gamma} u(x)\right|^2 dx\right\}^2$$

при всех $2\gamma > 3(1/2 - 1/4) = 3/4$. Поэтому из (4.9) получаем

$$e^{-a}\left\|B\left(u,v\right)\right\|_H^2 \le$$
$$\le C\left\{\ \left(\int_Q\left|(-\triangle+E)^{\gamma+1/2}\,u\left(x\right)\right|^2dx\right)\left(\int_Q\left|(-\triangle+E)^{\gamma}\,v\left(x\right)\right|^2dx\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\int_Q\left|(-\triangle+E)^{\gamma}\,u(x)\right|^2dx\right)\left(\int_Q\left|(-\triangle+E)^{\gamma+1/2}\,v(x)\right|^2dx\right)\right\}=$$
$$=C\left\{\left\|(-\triangle+E)^{\gamma+1/2}\,u\left(x\right)\right\|_{L_2(Q)}^2\left\|(-\triangle+E)^{\gamma}\,v\left(x\right)\right\|_{L_2(Q)}^2+\right.$$
$$\left.+\left\|(-\triangle+E)^{\gamma+1/2}\,v\left(x\right)\right\|_{L_2(Q)}^2\left\|(-\triangle+E)^{\gamma}\,u\left(x\right)\right\|_{L_2(Q)}^2\right\},$$

где γ - любое число, удовлетворяющее неравенству $\gamma > 3/8$.

Таким образом, условие B1 выполнено при всех γ из интервала $(3/8, 1/2)$.

Проверка условия B2. Покажем, что для всех $u, v\ \in D(A)$ выполнено неравенство

$$\left\|A^{\theta}B\left(u,v\right)\right\|_H \le e^aK_{\theta}\left\{\left\|A^{1/2}u\right\|_H\left\|v\right\|_H+\left\|A^{1/2}v\right\|_H\left\|u\right\|_H\right\}, \tag{4.10}$$

где $-3/2 < \theta < -3/4$.

Лемма 4.5. *Оператор F является перестановочным с произвольной степенью трехмерного оператора Лапласа $(-\triangle_3+E)^{-\alpha}$, $\alpha \ge 0$ на любых вектор-функциях $u(x) \in L_2\left(Q\right)$:*

$$F\left((-\triangle_3+E)^{-\alpha}\ \ u(x)\right)=(-\triangle_3+E)^{-\alpha}\,F\left(\ u(x)\right).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.3 и для полноты изложения приведено в разделе 8.

Поэтому имеем

$$\left\|A^{\theta}B\left(u,v\right)\right\|_H=$$
$$=e^t\left\|(-\triangle_3+E)^{\theta}\,F\left\langle u,\nabla\right\rangle v\right\|_{L_2(Q)}=e^t\left\|F\left(-\triangle_3+E\right)^{\theta}\left\langle u,\nabla\right\rangle v\right\|_{L_2(Q)}.$$

Так как $\|F\| = 1$ и $3 > -2\theta > 3(1-1/2) = 3/2$, то пользуясь интегральным представлением действия $(-\triangle_3+E)^{\theta}$, получаем

$$\left\|A^\theta B\left(u,v\right)\right\|_H^2 \le e^{2a}\left\|\left(-\triangle_3+E\right)^\theta \langle u,\nabla\rangle v\right\|_{L_2(Q)}^2 =$$

$$= e^{2a}\int\limits_Q\left(\int\limits_Q \frac{\widehat{m}(x,y)}{|x-y|^\alpha}\left|\langle u,\nabla\rangle\vartheta\right|dy\right)^2 dx,$$

где $\widehat{m}(\cdot,\cdot)$ - непрерывная функция двух аргументов, а $\alpha = 3+2\theta \in (0,3/2)$ при $-3/2<\theta<-3/4$.

Отсюда имеем

$$\left\|A^\theta B\left(u,v\right)\right\|_H^2 \le$$

$$\le e^{2a}\int\limits_Q dx\Big(\int\limits_Q \frac{\widehat{m}(x,y)\left|(u,\nabla)\vartheta\left(y\right)\right|}{|x-y|^\alpha}dy\cdot\int\limits_Q \frac{\widehat{m}(x,\eta)\left|(u,\nabla)\vartheta\left(\eta\right)\right|}{|x-\eta|^\alpha}d\eta\Big).$$

Теперь поменяем порядок интегрирования

$$\left\|A^\theta B\left(u,v\right)\right\|_H^2 \le$$

$$\le e^{2a}\int\limits_Q\int\limits_Q\Big(\left|\langle u,\nabla\rangle\vartheta\left(y\right)\right|\left|\langle u,\nabla\rangle\vartheta\left(\eta\right)\right|\int_Q\frac{\widehat{m}(x,y)\widehat{m}(x,\eta)}{|x-y|^\alpha\,|x-\eta|^\alpha}dx\Big)dyd\eta.$$

Отсюда, так как $\widehat{m}(\cdot,\cdot)$ - ограничена, а $\alpha\in(0,3/2)$, получаем, что

$$\left\|A^\theta B\left(u,v\right)\right\|_H^2 \le K_\theta((u,\nabla)\vartheta\left(dy\right))^2 \le K_\theta\left\|u\right\|_{L_2(Q)}\left\|\nabla,\vartheta\right\|_{L_2(Q)}.$$

Из этого неравенства вытекает выполнение условия (3.2) при всех $-3/2<\theta<-3/4$. То есть условие B2 выполнено.

Проверка условия B3. Покажем, что для всех $u\in D(A)$ выполнено условие ортогональности

$$\langle B\left(u,u\right),u\rangle_H = 0. \tag{4.11}$$

С учетом самосопряженности оператора F (лемма 4.1) имеем

$$\langle B\left(u,u\right),u\rangle_H = e^t\left(F\langle u,\nabla\rangle u,u\right)_{L_2(Q)} = e^t\left(\langle u,\nabla\rangle u,Fu\right)_{L_2(Q)}.$$

Из следствия леммы 4.4 имеем $Fu = u$ для всех $u \in \widetilde{L_2}(Q)$. Поэтому

$$e^{-t}\left\langle B\left(u,u\right),u\right\rangle_H = \left(\left\langle u,\nabla\right\rangle u,u\right)_{L_2(Q)}.$$

Раскрывая скалярные произведения, будем иметь

$$e^{-t}\left\langle B\left(u,u\right),u\right\rangle_H =$$

$$= \int_Q \left\langle u\left(x\right), \left\langle u,\nabla\right\rangle u(x)\right\rangle dx = \int_Q \sum_{j=1}^{3} u_j\left(x\right)\left(\left\langle u,\nabla\right\rangle u_j(x)\right) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\int_Q \sum_{k=1}^{3} u_j\left(x\right)u_k(x)\frac{\partial u_j\left(x\right)}{\partial x_k}dx = \sum_{j=1}^{3}\int_Q \sum_{k=1}^{3} u_k\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\left(u_j\left(x\right)\right)^2}{2}dx.$$

Интегрируя последний интеграл по частям, с учетом периодических краевых условий (1.3), получим

$$e^{-t}\left\langle B\left(u,u\right),u\right\rangle_H = -\sum_{j=1}^{3}\int_Q \sum_{k=1}^{3}\frac{\left(u_j\left(x\right)\right)^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}u_k\left(x\right)dx =$$

$$= -\sum_{j=1}^{3}\int_Q \left(\frac{\left(u_j\left(x\right)\right)^2}{2}\ div\ u(x)\right)dx.$$

Так как для всех функций $u \in \widetilde{L_2}(Q)$ имеет место $div\ u\left(x\right) = 0$ (лемма 4.4), то из последнего равенства получаем $\left\langle B\left(u,u\right),u\right\rangle_H = 0$. Таким образом, условие B3 выполнено.

Проверка условия B4. Имеем

$$\widehat{B_P}\left(u\right) = (E-P)B\big((E-P)u,(E-P)u\big) - B\left(u,u\right) =$$

$$= -B\big((E-P)u,Pu\big) + PB\big((E-P)u,Pu\big) - B(Pu,u) - PB(u,u) + PB(Pu,u).$$

Подставляя сюда вместо $B\left(u,v\right)$ преобразование $e^tF\left\langle u,\nabla\right\rangle v$, получаем

$$\widehat{B_P}\left(u\right)e^{-t} = -F\left\langle\left[E-P\right]u,\nabla\right\rangle Pu + PF\left\langle\left[E-P\right]u,\nabla\right\rangle Pu -$$

$$-F\left\langle Pu,\nabla\right\rangle u - PF\left\langle u,\nabla\right\rangle u + PF\left\langle Pu,\nabla\right\rangle u.$$

Наименьшее собственное число оператора Лапласа равно нулю. Соответствующими собственными векторами будут трехкомпонентные вектора с постоянными (не зависящими от x) компонентами. И очевидно, что первые два слагаемых обращаются в нуль, поэтому

$$\widehat{B_P}(u)\,e^{-t} = -(E-P)\,F\,\langle Pu,\nabla\rangle\,u - PF\,\langle u,\nabla\rangle\,u. \tag{4.12}$$

Покажем, что второе слагаемое здесь обращается в нуль. Так как $PF\,\langle u,\nabla\rangle\,u$ - вектор с постоянными (не зависящими от x) компонентами, то

$$PF\,\langle u,\nabla\rangle\,u = \sum_{k=1}^{3}\langle F\,\langle u,\nabla\rangle\,u, e_k\rangle_{L_2(Q)}\,e_k.$$

Так как F - самосопряженный проектор, то

$$PF\,\langle u,\nabla\rangle\,u = \sum_{k=1}^{3}\langle\langle u,\nabla\rangle\,u, Fe_k\rangle_{L_2(Q)}\,e_k.$$

Учитывая, что $Fe_k = e_k$ (см. определение (4.3) проектора F), отсюда получаем

$$PF\,\langle u,\nabla\rangle\,u =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\langle\langle u,\nabla\rangle\,u, e_k\rangle_{L_2(Q)}\,e_k = \sum_{k=1}^{3}\left\langle\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_k)\,, e_k\right\rangle_{L_2(Q)} e_k = 0.$$

Последнее равенство легко получается интегрированием по частям в скалярном произведении, так как e_k - вектор с постоянными (не зависящими от x) компонентами.

Таким образом,

$$\widehat{B_P}(u)\,e^{-t} = -(E-P)\,F\,\langle Pu,\nabla\rangle\,u. \tag{4.13}$$

Приступаем к получению оценки (2.2). Так как P и F - проекторы, то получаем

$$\int_0^a dt\int_Q \|(E-P)\,F\,\langle Pu,\nabla\rangle\,u\|^2\,dx \le \int_0^a dt\int_Q \|\langle Pu,\nabla\rangle\,u\|^2\,dx.$$

Так как Pu - вектор с постоянными (не зависящими от x) компонентами, то

$$Pu=\sum_{k=1}^{3}C_k(t)e_k\equiv\sum_{k=1}^{3}\langle u,e_k\rangle_{L_2(Q)}e_k,$$

где e_k - базис в первом собственном подпространстве $\{u:\ \triangle u=0\}$. За такой базис можно взять векторы $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$.

Поэтому имеем

$$\int\limits_0^a dt\int\limits_Q\|\langle Pu,\nabla\rangle u\|^2\,dx\le$$

$$\le\left\{\max_{0\le t\le a}\max_{1\le k\le 3}\|Pu_k(t,\cdot)\|^2_{L_2(Q)}\right\}\left\{\int_0^a\sum_{k=1}^{3}\|\mathrm{grad\ u_k}(\eta,\cdot)\|^2_{L_2(Q)}\,d\eta\right\}\le$$

$$\le\left\{\max_{0\le t\le a}\max_{1\le k\le 3}\|u_k(t,\cdot)\|^2_{L_2(Q)}\right\}\left\{\int_0^a\sum_{k=1}^{3}\|\mathrm{grad\ u_k}(\eta,\cdot)\|^2_{L_2(Q)}\,d\eta\right\}.$$

Отсюда и из оценки Е. Хопфа (2.1) получаем

$$\int\limits_0^a dt\int\limits_Q\|(E-P)\,F\,\langle Pu,\nabla\rangle u\|^2\,dx\le\left\{\sum_{k=1}^{3}\int_0^a\|f_k(\eta,\cdot)\|^2_{L_2(Q)}\,d\eta\right\}^2.$$

Отсюда и из (4.13) следует выполнение условия B4.

Итак, все условия теоремы, то есть условия A и B1 - B4 выполнены. Поэтому из теоремы 2 получаем существование решения $u(t,x)$ задачи (4.6) и оценки для него. Давление $p(t,x)$ восстанавливается в силу уравнения (4.4) и условия (1.4). Оценки для $p(t,x)$ вытекают из (4.4) (с учетом (1.4)).

Таким образом, теорема 1 вытекает из теоремы 2. □

5 Ключевые идеи работы - основные моменты доказательства теоремы 2

В этом разделе мы опишем (не вполне строго) ключевые идеи, на которые опирается доказательство теоремы 2 (и работа в целом). Полное доказательство теоремы 2 приведено в следующих двух разделах.

Для упрощения изложения в этом разделе считаем, что $A \geq E$.

Из (3.4) перейдем к эквивалентному уравнению

$$\overset{\circ}{v} + L(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{v}) = \overset{\circ}{f}, \tag{5.1}$$

где $\overset{\circ}{v}(t) = u'(t) + Au(t)$,

$$L(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{v}) = B(T\overset{\circ}{v}, T\overset{\circ}{v}), \quad T\overset{\circ}{v} = \int_0^t e^{-A(t-\eta)}\overset{\circ}{v}(\eta)d\eta.$$

Здесь оператор $e^{-A(t-\eta)}$ понимается в смысле спектрального разложения:

$$e^{-A(t-\eta)}\varphi(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j(t-\eta)}\varphi_j(\eta)e_j.$$

Теперь стремимся оценить норму $\overset{\circ}{v}$ в $H_1(0,a)$ через норму $\overset{\circ}{f}$ в $H_1(0,a)$.

Положим

$$\begin{gathered}
R(v) = A^{2\theta}v - \frac{\left\|A^\theta v\right\|_{H_1}^2}{\|v\|_{H_1}^2}v, \\
D_v^* f(v) = f + L_v^* f, \\
S(v) = D_v^* f - \frac{\langle D_v^* f, v\rangle_{H_1}}{\|v\|_{H_1}^2}v - \frac{\langle D_v^* f, R\rangle_{H_1}}{\|R\|_{H_1}^2}R,
\end{gathered} \tag{5.2}$$

где θ - число из условия B2, а L_v^* - есть оператор, сопряженный к оператору L_v, который действует по формуле

$$L_v g = L(v,g) + L(g,v).$$

Пусть $\xi \in [0,\infty)$ — параметр. Рассмотрим семейство функций $v(\xi,\cdot)$ со значениями в $H_1 = H_1(0,a)$, являющихся по параметру ξ решением задачи

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} = -\alpha(\xi)R(v(\xi)) - \beta(\xi)S(\xi) + d(\xi), \\ v\big|_{\xi=0} = \overset{\circ}{v} \in H_1(0,a). \end{cases} \tag{5.3}$$

Здесь $\alpha(\xi) \geq 0$ и $\beta(\xi)$ - скалярные функции, а $d(\xi)$ — вектор-функция со значениями в $H_1(0,a)$, такая, что

$$\langle d(\xi), v(\xi)\rangle_{H_1} = \langle d(\xi), R(\xi)\rangle_{H_1} = \langle d(\xi), S(\xi)\rangle_{H_1} = 0. \tag{5.4}$$

Для обеспечения равенств (5.4), если $R(\xi) \neq 0$ и $S(\xi) \neq 0$, можно взять $d(\xi)$ из равенства

$$d(\xi) = g(\xi) - \frac{\langle g(\xi), v(\xi)\rangle_{H_1} v\,(\xi)}{\|v\,(\xi)\|^2_{H_1}} - \frac{\langle g(\xi), R(\xi)\rangle_{H_1} R\,(\xi)}{\|R\,(\xi)\|^2_{H_1}} - \frac{\langle g(\xi), S(\xi)\rangle_{H_1} S\,(\xi)}{\|S\,(\xi)\|^2_{H_1}},$$

где $g(\xi)$ - произвольная функция со значениями в $H_1(0,a)$.

Обозначим

$$f\left(\vartheta(\xi)\right) = v(\xi) + L\left(v(\xi), v(\xi)\right). \tag{5.5}$$

Отметим, что по построению (см. (5.2))

$$\langle v(\xi), R(\xi)\rangle_{H_1} = \langle v(\xi), S(\xi)\rangle_{H_1} = \langle R(\xi), S(\xi)\rangle_{H_1} = 0. \tag{5.6}$$

Поэтому, пользуясь равенствами (5.4), (5.6) и уравнениями для $v\,(\xi)$, находим

$$\left(\|v(\xi)\|^2_{H_1}\right)_\xi = 2\,\langle v(\xi), v_\xi(\xi)\rangle_{H_1} = 0,$$

$$\begin{aligned}\left(\left\|A^\theta v(\xi)\right\|^2_{H_1}\right)_\xi &= 2\left\langle A^{2\theta} v(\xi), v_\xi\right\rangle_{H_1} = \\ &= 2\left\langle A^{2\theta} v(\xi) - \frac{\left\|A^\theta v(\xi)\right\|^2_{H_1}}{\|v(\xi)\|^2_{H_1}} v(\xi), v_\xi\right\rangle_{H_1} = \\ &= 2\,\langle R(v(\xi)), v_\xi\rangle_{H_1} = -2\alpha(\xi)\,\|R(v(\xi))\|^2_{H_1},\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}\left(\|f\,(v(\xi))\|^2_{H_1}\right)_\xi &= \left(\|v(\xi) + L(v(\xi), v(\xi))\|^2_{H_1}\right)_\xi = 2\,\langle D^*_\vartheta f(v), v_\xi\rangle = \\ &= -2\,\langle D^*_v f, R\rangle_{H_1}\alpha(\xi) + \beta(\xi)\,\|S(v(\xi))\|^2_{H_1}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Далее обосновывается (*это достаточно трудно*) возможность выбора таких кусочно-непрерывных функций $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ и вектор-функции $d(\xi)$, чтобы для некоторого $\xi_1 \in (0,\infty]$ выполнялись условия *(i)* $\|v(\xi)\|_{H_1} = \left\|\overset{\circ}{v}\right\|_{H_1}$ при $\xi \in (0,\, \xi_1]$;

(ii) $\lim\limits_{\xi\to\xi_1} \|R(v(\xi))\|_{H_1} = 0$;

(iii) $\left\|A^{\theta}v(\xi)\right\|_{H_1}$ не возрастает в $(0,\, \xi_1)$;

$$(iiii)\ \ \|f(v(\xi))\|^2_{H_1} \equiv \|v(\xi) + L(v(\xi), v(\xi))\|^2_{H_1} \le \left\|\overset{\circ}{f}\right\|^2_{H_1} + C\left\|A^{\theta}\overset{\circ}{v}\right\|^m_{H_1}\left\|\overset{\circ}{v}\right\|^{2-\varepsilon}_{H_1},$$

где C, m и $\varepsilon \in (0,1)$ - не зависят от $\overset{\circ}{v}$.

Далее, из $R\left(v\left(\xi_1\right)\right) = 0$ вытекает, что при некотором собственном значении $\widehat{\lambda}$ оператора A имеет место $A^{2\theta}v\left(\xi_1\right) = \widehat{\lambda}^{2\beta}v\left(\xi_1\right)$ (в смысле $H_1(0,a)$).

Простыми рассуждениями случай кратного собственного значения $\widehat{\lambda}$ сводится к случаю операторов с простыми собственными значениями.

Если оператор A в H не имеет кратных собственных чисел, то из последнего равенства вытекает, что $v(\xi_1) = \Psi(t)e$, где e - собственный вектор A в пространстве H, $\Psi(t) \in L_2(0,a)$. Отсюда и из *(i)* имеем

$$\begin{gathered}\left\|\overset{\circ}{v}\right\|^2_{H_1} = \|v(\xi_1)\|^2_{H_1} \le \|v(\xi_1)\|^2_{H_1} + \|L(v(\xi_1), v(\xi_1))\|^2_{H_1} + \\ +2\left\langle L(v(\xi_1), v(\xi_1)), v(\xi_1)\right\rangle_{H_1} - 2\left\langle L(v(\xi_1), v(\xi_1)), v(\xi_1)\right\rangle_{H_1} = \\ = \|v(\xi_1) + L(v(\xi_1), v(\xi_1))\|^2_{H_1} - 2\left\langle L(v(\xi_1), v(\xi_1)), v(\xi_1)\right\rangle_{H_1}.\end{gathered}$$

Но $v(\xi_1) = \Psi(t)e$, поэтому

$$(Tv(\xi_1))(t) = \int_0^t e^{-A(t-\eta)}\Psi(\eta)ed\eta = \left(\int_0^t e^{-\widehat{\lambda}(t-\eta)}\Psi(\eta)d\eta\right)e = \widetilde{\Psi}(t)e,$$

$$L\left(v(\xi_1), v(\xi_1)\right) = B((Tv(\xi_1))(t), (Tv(\xi_1))(t)) = B(\widetilde{\Psi}(t)e, \widetilde{\Psi}(t)e) = \widetilde{\Psi}^2(t)B(e,e).$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\left\|\overset{\circ}{v}\right\|^2_{H_1} \le \|v(\xi_1) + L(v(\xi_1), v(\xi_1))\|^2_{H_1} - 2\left\langle \widetilde{\Psi}^2(t)B(e,e), \Psi(t)e\right\rangle_{H_1} = \\ = \|f\left(v(\xi_1)\right)\|^2_{H_1} - 2\int\limits_0^a \widetilde{\Psi}^2(t)\Psi(t)\left\langle B(e,e), e\right\rangle_H dt.\end{gathered}$$

Теперь воспользуемся условием ортогональности B3, а затем *(iiii)*. Тогда получаем

$$\left\|\overset{\circ}{v}\right\|_{H_1}^2 \le \|f(v(\xi_1))\|_{H_1}^2 \le \left\|\overset{\circ}{f}\right\|_{H_1}^2 + C\left\|A^\theta \overset{\circ}{v}\right\|_{H_1}^m \cdot \left\|\overset{\circ}{v}\right\|_{H_1}^{2-\varepsilon}. \tag{5.9}$$

Из условия B2 и из энергетического неравенства (слабой априорной оценки типа Хопфа (2.1)), как будет подробно показано в разделе 7, вытекает, что

$$\left\|A^\theta v\right\|_{H_1(0,a)} \le C_\theta \|f(v)\|_{H_1}^2.$$

Отсюда и из оценки (5.9) получаем оценку

$$\left\|\overset{\circ}{v}\right\|_{H_1}^2 \le C\left(1 + \left\|\overset{\circ}{f}\right\|_{H_1(0,a)}^2 + \left\|\overset{\circ}{f}\right\|_{H_1(0,a)}^l\right), \tag{5.10}$$

где C и l - не зависят от $\overset{\circ}{v}$ и $\overset{\circ}{f}$.

Априорная оценка (5.10) есть оценка $u' + Au$ через правую часть уравнения (3.4). Из этой оценки мы в разделе 7 получаем теорему 2. Так как эта оценка (т.е. (5.10)) есть сильная оценка, то существует много путей (см., например, в работах О.А. Ладыженской) вывода теоремы 2 из оценки (5.10).

Мы в разделе 7 предлагаем свой путь вывода из оценки (5.10) теоремы 2, приспособленный к широкому классу абстрактных параболических уравнений. Полный вывод оценки (5.10) мы приведем в разделе 6.

Основные трудные моменты работы сосредоточены именно в разделе 6: главные технические трудности заключаются в выборе подходящих $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ и $d(\xi)$. Хотя мы по существу следуем изложенному в этом разделе подходу, нам приходится ради технических удобств несколько отклониться от указаний этого раздела при реализации его идей.

6 Априорная оценка решений одного класса уравнений в гильбертовом пространстве

Пусть $\widehat{H}$ - гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, A - самосопряженный линейный оператор в $\widehat{H}$, а $L(\cdot,\cdot)$ - билинейное непрерывное преобразование. То есть, если g и $v \in \widehat{H}$, то $L(g,v)$ - линейное преобразование по любому из своих аргументов при фиксированном другом. При $u \in \widehat{H}$ через L_u обозначим оператор, действующий на $g \in \widehat{H}$ по формуле

$$L_u g = L\,(u, g) + L(g, u),$$

а через L_u^* - сопряженный к L_u оператор.

Будем использовать ниже выписанные условия (У.1), (У.2), (У.3) и (У.4).

(У.1) *Для некоторого $-\infty < \beta < 0$, при любых v, $u \in \widehat{H}$ выполнены неравенства*

$$\langle Au, u\rangle \geq \|u\|^2\,,$$

$$\|L(u, \vartheta)\| \leq C_\beta \left\|A^\beta u\right\| \left\|A^\beta \vartheta\right\|,$$

где C_β - постоянное число, не зависящее от u и ϑ, а $\langle \cdot, \cdot\rangle$ и $\|\cdot\|$ здесь и далее - скалярное произведение и норма в $\widehat{H}$.

(У.2) *Если u - собственный вектор оператора A (то есть $Au = \lambda u$), то $\langle u, L\,(u, u)\rangle = 0$.*

(У.3) *Спектр оператора A состоит из последовательности чисел*

$$1 \equiv \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... < \lambda_n < \lambda_{n+1} < ..., \quad 16 \leq \lambda_2 \leq 100$$

такой, что пространство $\widehat{H}$ может быть представлено в виде ортогональной суммы собственных подпространств $\widehat{H} = \bigotimes_{j=0}^{M} G_{\lambda j}$, где $G_{\lambda j}$ - собственные подпространства $G_{\lambda j} \equiv \{x : \; Ax = \lambda_j x\}$ (конечномерные или бесконечномерные) оператора A, $M = dim\widehat{H} \leq \infty$. При этом

$$dim\, G_{\lambda_1} \geq 20.$$

Здесь dim - размерность.

(У.4) *Если $u \in \widehat{H}$, $e \in G_{\lambda_1} \equiv G_1 = \{x : \; Ax = x\}$, то*

$$L(e, u) = L(u, e) = L_u e = L_u^* e = L_e u = L_e^* u = 0.$$

При использовании условий (У.2) и (У.4) читатель заметит, что эти условия можно ослабить. Мы, чтобы уменьшить объем работы, эти условия берем в написанной выше форме.

Имеет место

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия (У.1), (У.2), (У.3) и (У.4). Предположим, что для некоторого* $\overset{\circ}{u} \in \widehat{H}$ *выполнена слабая оценка*

$$\left\| A^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\| \le C_{\theta},$$

где $\theta < \min\left(-\frac{3}{4}, \beta\right)$, *а* β *- из условия (У.1). Тогда для* $\overset{\circ}{u}$ *верна сильная оценка*

$$\left\| \overset{\circ}{u} \right\| \le C_1 \left(1 + \left\| \overset{\circ}{f} \right\| + \left\| \overset{\circ}{f} \right\|^{l} \right), \quad \text{где } \overset{\circ}{f} = \overset{\circ}{u} + L\left(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{u} \right). \tag{6.1}$$

Здесь C_1 *и* l *зависят только от* C_{β} *и* β *из условия (У.1), а также от* C_{θ}*и* θ.

Необходимо сразу оговориться, что так как нас интересует априорная оценка при не малых значениях $\left\| \overset{\circ}{f} \right\|$, то в неравенстве (6.1) в скобке для удобства добавлена единичка.

Эту теорему мы сначала докажем в случае, когда $\widehat{H}$ - конечномерное пространство. При этом будем получать оценки, не зависящие от размерности пространства $\widehat{H}$. Затем докажем теорему 6.1 в полном объеме. В конце этого раздела мы получим теорему 6.2, в которой будет снято условие (У.4).

Для доказательства теоремы нам нужны некоторые построения и леммы.

Введем в рассмотрение следующие вектора:

$$\left.\begin{array}{c} R\left(u\right)=A^{2\theta}u-\frac{\left\|A^{\theta}u\right\|^{2}}{\left\|u\right\|^{2}}u, \\ \\ D_{u}^{*}f=f+L_{u}^{*}f, \\ \\ S\left(u\right)=D_{u}^{*}f-\frac{<D_{u}^{*}f,u>}{\left\|u\right\|^{2}}u-\frac{<D_{u}^{*}f,R>}{\left\|R\right\|^{2}}R, \\ \\ \text{и скаляры:} \\ K\left(u\right)=-<D_{u}^{*}f,R>\left\|R\right\|^{-2}, \\ \\ \tilde{\mu}(u)=-\frac{\langle D_{u}^{*}f,u\rangle}{\left\|u\right\|^{2}}, \\ \\ \mu(u)=\frac{\left\|A^{\theta}u\right\|^{2}}{\left\|u\right\|^{2}}. \end{array}\right\} \qquad (6.2)$$

Здесь (и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное) θ - из условий теоремы 6.1.

Эти вектора и скаляры определены, если $u\neq 0$, $R\neq 0$. Легко доказать, что выполнены следующие условия ортогональности:

$$\langle u,s\rangle=\langle u,R\rangle=\langle R,s\rangle=0.$$

В дальнейшем u может быть вектор-функцией от параметра $\xi\in(0,\infty)$. Тогда S, R, f, D_u^*f и K также зависят от ξ. Мы часто вместо

$$K(u(\xi)),\ \tilde{\mu}(u(\xi)),\ \mu(u(\xi)),\ S\left(u\left(\xi\right)\right),\ R\left(u(\xi)\right),\ f(u(\xi))$$

будем писать

$$K(\xi),\ \tilde{\mu}(\xi),\ \mu(\xi),\ S\left(\xi\right),\ R(\xi),\ f(\xi),$$

а иногда совсем не отмечаем зависимость от ξ и от $u(\xi)$ - пишем просто K, $\tilde{\mu}$, μ, S, R, f.

Всюду в этом разделе, если не оговорено противное, считаем выполненными условия (У.1), (У.2), (У.3) и (У.4).

Лемма 6.1. *Если* $u_1,u_2,\ldots,u_k\in\widehat{H}$, $\quad 1\leq k<20$, *и если* $\lambda=\lambda_1$ *- первое собственное значение оператора* A, *то найдется собственный вектор* e

оператора A : $Ae = \lambda_1 e$, такой, что $\|e\| = 1$ и $\langle u_j, e\rangle = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Размерность собственного подпространства, соответствующего собственному числу λ_1 - не менее 20. Условия $\langle u_j, e\rangle = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$, дают k уравнений относительно коэффициентов $c_1, \ldots, c_{20}$ неизвестного собственного вектора, который мы ищем в виде $e = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_{20}e_{20}$, где $e_1, e_2, \ldots, e_{20}$ - ортонормальная система из G_{λ_1}. Из классической теории линейных алгебраических уравнений известно, что такая система имеет нетривиальное решение, так как количество неизвестных больше количества уравнений. Поэтому лемма доказана. $\square$

Для нас будет важной следующая интерполяционная

Лемма 6.2. *Если $\theta < \beta < 0$, то для любого $u \in \widehat{H}$ выполнено неравенство*

$$\left\|A^\beta u\right\|^2 \leq 2\,\|u\|^{2(1-\beta/\theta)}\left\|A^\beta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}}.$$

Доказательство. Согласно условию (У.3) все пространство $\widehat{H}$ может быть разбито на ортогональную сумму собственных подпространств $\widehat{H} = \bigotimes_{n=0}^{M} G_{\lambda n}$. Поэтому произвольный элемент $u \in \widehat{H}$ может быть представлен в виде

$$u = \sum_{n=1}^{M} u_n \lambda_n^{-\theta},$$

где $u_n \in G_{\lambda_n}$. Тогда

$$\left\|A^\theta u\right\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{M} u_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{M}\|u_n\|^2,$$

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{M}\|u_n\|^2\lambda_n^{-2\theta},$$

$$A^\beta u = \sum_{n=1}^{M} u_n \lambda_n^{(\beta-\theta)}.$$

Поэтому для произвольного $\widetilde{\lambda} \geq 1$ имеем

$$\left\|A^{\beta}u\right\|^2 = \sum_{n=0}^{M} \|u_n\|^2 \lambda_n^{2(\beta-\theta)} = \sum_{\widetilde{\lambda} \geq \lambda_n} \|u_n\|^2 \lambda_n^{2(\beta-\theta)} + \sum_{\widetilde{\lambda} < \lambda_n} \|u_n\|^2 \lambda_n^{2(\beta-\theta)} \leq$$
$$\leq \widetilde{\lambda}^{2(\beta-\theta)} \left\|A^{\theta}u\right\|^2 + \sum_{\widetilde{\lambda} < \lambda_n} \|u_n\|^2 \lambda_n^{-2\theta} \lambda_n^{2\beta} \leq$$
$$\leq \widetilde{\lambda}^{2(\beta-\theta)} \left\|A^{\theta}u\right\|^2 + \widetilde{\lambda}^{2\beta} \|u\|^2 .$$

Выбираем теперь $\widetilde{\lambda}$ из условия

$$\widetilde{\lambda}^{-2\theta} = \|u\|^2 \left\|A^{\theta}u\right\|^{-2} .$$

Но из условия $\lambda_0 = 1$ легко видеть, что $\widetilde{\lambda} \geq 1$. Поэтому

$$\left\|A^{\beta}u\right\|^2 \leq 2\widetilde{\lambda}^{2\beta} \|u\|^2 .$$

Следовательно, получаем

$$\left\|A^{\beta}u\right\|^2 \leq 2 \|u\|^2 \left(\frac{\|u\|^2}{\|A^{\theta}u\|^2} \right)^{\frac{2\beta}{-2\theta}} = 2 \|u\|^{2-\frac{2\beta}{\theta}} \left\|A^{\theta}u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} .$$

Лемма доказана. □

Лемма 6.3. *Если $u \neq 0$, $R(u) = 0$, то u - собственный вектор оператора $A^{2\theta}$ (т.е. существует такое число $\widehat{\lambda}$, что $A^{2\theta}u = \widehat{\lambda}u$), причём выполнено неравенство*

$$\|u\| \leq \|u + L(u,u)\| \equiv \|f(u)\| .$$

Доказательство. Из определения $R(u)$ в (6.2) сразу имеем, что u - собственный вектор оператора $A^{2\theta}$, причём $\widehat{\lambda} = \left\|A^{\theta}u\right\|^2 \|u\|^{-2}$. Воспользуемся условием (У.2): $\langle u, L(u,u)\rangle = 0$. Тогда получим

$$\|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|L(u,u)\|^2 = \|u\|^2 + \|L(u,u)\|^2 + 2\langle L(u,u), u\rangle =$$
$$= \|u + L(u,u)\|^2 \equiv \|f(u)\|^2 .$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6.4. *Пусть пространство* $\widehat{H}$ *- конечномерно. Если последовательность* $u_j \in \widehat{H} \quad (j = 1, 2, ...)$ *такова, что*

$$\|u_j\| = \|u\|\,, \;\; u \lim_{j\to\infty} \|u_j + L\,(u_j,\,u_j)\| = f_\infty, \;\; \varliminf_{j\to\infty} \|R\,(u_j)\| = 0,$$

то существует $u_0 \in \widehat{H}$ *такой, что*

$$\|u_0\| = \|u\| \le f_\infty = \|u_0 + L\,(u_0,\,u_0)\|\,.$$

Здесь $\varliminf$ *- означает нижний предел.*

Доказательство. Так как $\varliminf_{j\to\infty} \|R\,(u_j)\| = 0$, $\|u_j\| = \|u\|$, то в силу конечномерности $\widehat{H}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u_{j,k}\}$, сходящуюся к некоторому u_0, такую, что

$$\lim_{j,k\to\infty} \|R\,(u_{j,k})\| = 0, \quad u_{j,k} \xrightarrow{\widehat{H}} u_0.$$

Отсюда и из непрерывности билинейного оператора $L\,(\cdot,\cdot)$ имеем

$$L\,(u_{j,k},\,u_{j,k}) \xrightarrow{\widehat{H}} L\,(u_0,\,u_0)\,.$$

Поэтому результат доказываемой леммы вытекает из леммы 6.3.

Лемма доказана. $\square$

Мы часто будем использовать следующую очевидную лемму.

Лемма 6.5. *Пусть* $\widehat{C} \ge 1$. *Тогда для произвольного* $u \in \widehat{H}$ *выполняется одно из условий* (6.3), (6.4), (6.5) *и* (6.6)*:*

$$R\,(u) \ne 0, \; K\,(u) \le \widehat{C}, \tag{6.3}$$

$$R\,(u) \ne 0, \; K\,(u) > \widehat{C}, \; S(u) \ne 0, \; \|S(u)\|\,\|R(u)\|^{-2} \ge 10^{-1}, \tag{6.4}$$

$$R\,(u) \ne 0, \; K\,(u) > \widehat{C}, \; \|S(u)\| < 10^{-1}\,\|R\,(u)\|^2\,, \tag{6.5}$$

$$R\,(u) = 0, \tag{6.6}$$

где $K\,(u)$, $R\,(u)$ *и* $S\,(u)$ *- из* (6.2), *а значение* $\widehat{C}$ *будет выбрано в следующей лемме.*

В следующей лемме приводим систематически используемые в дальнейшем оценки.

Лемма 6.6. *Справедливы утверждения a), b) и c):*

a) для $f(u)$, L_u^*g, L_ug, $\widetilde{L}_f^*g = L_g^*f, L_u^*L_ug$, $\langle L_u^*f, u\rangle \|u\|^{-2}$ *справедливы оценки*

$$\|f(u)\| \le \|u\| + 2C_\beta \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|u\|^{2(1-\beta/\theta)},$$

$$|\tilde{\mu}| \equiv \|\langle D_u^* f, u\rangle\| \|u\|^{-2} \le 16 \left(1 + C_\beta^2 \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|u\|^{2(1-\beta/\theta)}\right),$$

$$\|L_u g\| \le 4C_\beta \|u\|^{1-\beta/\theta} \left\|A^\theta u\right\|^{\beta/\theta} \|g\|,$$

$$\|L_u^* g\| \le 4C_\beta \|u\|^{1-\beta/\theta} \left\|A^\theta u\right\|^{\beta/\theta} \|g\|,$$

$$\|L_u^* L_\mathrm{u} g\| \le 16C_\beta^2 \|u\|^{2(1-\beta/\theta)} \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|g\|,$$

$$\left\|\widetilde{L}_f^* g\right\| = \left\|L_g^* f\right\| \le 4C_\beta \|g\| \left[\|u\| + 2C_\beta \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|u\|^{2(1-\beta/\theta)}\right],$$

$$\left\|L_g^* f\right\| \le C_\beta \|g\| \|f\|.$$

Здесь C_β *- из условия (У.1).*

b) Пусть $\mathring{u}$ *- из теоремы 6.1 и* $\widetilde{K}(u) = (1 + \tilde{\mu}(u) + (1-\mu)K(u))$. *Если*

$$\widehat{C} = \lambda_2^{-4\theta} 4000 (1 + C_\beta)^2 \left(1 + \left\|\mathring{u}\right\|^{7/8} + \left\|\mathring{u}\right\|^{1-\beta/\theta} \left\|A^\theta \mathring{u}\right\|^{\beta/\theta}\right)^2,$$

$$\|u\| = \left\|\mathring{u}\right\|, \ \left\|A^\theta u\right\| \le \left\|A^\theta \mathring{u}\right\| \le \frac{1}{2}\left\|\mathring{u}\right\|, \ \left\|\mathring{u}\right\| \ge 1,$$

$$\|f\| \le \|u\|^{1/4} \text{ и } K(u) \ge \widehat{C},$$

то

$$\frac{1}{2}K(u) < \tilde{K}(u) < 2K(u).$$

c) Если выполнены условия пункта b), то

$$\|R(u)\| < 2\tilde{K}^{-2/7}(u).$$

Доказательство. Пользуясь условием (У.1) и леммой 6.2, имеем

$$\|f(u)\| = \|u + L(u,u)\| \le \|u\| + \|L(u,u)\| \le \|u\| + C_\beta \left\|A^\beta u\right\|^2 \le$$

$$\le \|u\| + 2C_\beta \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|u\|^{2(1-\beta/\theta)}.$$

Первое неравенство доказано.

Далее имеем

$$\frac{|\langle D_u^* f, u\rangle|}{\|u\|^2} = \frac{|\langle f + \mathrm{L}_\mathrm{u}^* f, u\rangle|}{\|u\|^2} = \left|\frac{\langle f,\ 2u + 2L(u,u) - u\rangle}{\|u\|^2}\right| = \left|\frac{\langle f,\ 2f - u\rangle}{\|u\|^2}\right| \le$$

$$\le \frac{2\|f\|^2}{\|u\|^2} + \frac{2\|f\|}{\|u\|} \le 2\left(\frac{\|f\|}{\|u\|} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Используем здесь предыдущий результат, тогда

$$\frac{|\langle D_u^* f, u\rangle|}{\|u\|^2} \le 2\left(2 + 2C_\beta \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|\mathrm{u}\|^{1-\frac{2\beta}{\theta}}\right)^2 \le$$

$$\le 16\left(1 + \mathrm{C}_\beta^2 \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{4\beta}{\theta}} \|u\|^{2-\frac{4\beta}{\theta}}\right).$$

Теперь, учитывая ограниченность оператора A^θ: $\left\|A^\theta\right\| \le 1$, получим

$$\left\|A^\theta u\right\|^{\frac{4\beta}{\theta}} \|u\|^{2-\frac{4\beta}{\theta}} \le \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|u\|^{2(1-\beta/\theta)}.$$

Отсюда вытекает справедливость второго неравенства.

Переходим к доказательству третьего неравенства. Используем условие (У.1) и лемму 6.2:

$$\|L_u g\| \le \|L(u,g)\| + \|L(g,u)\| \le$$

$$\le 2C_\beta \left\|A^\beta u\right\| \left\|A^\beta g\right\| \le 4C_\beta \|u\|^{(1-\beta/\theta)} \left\|A^\theta u\right\|^{\beta/\theta} \|g\|.$$

Третье неравенство доказано.

Далее, для оценки $L^*_{\mathrm{u}}g$, пользуясь уже полученными оценками, имеем

$$\|L_u^* g\| = \sup_{\|v\|=1} \langle L_u^* g, v\rangle = \sup_{\|v\|=1} \langle g, L_u v\rangle \le$$

$$\le \sup_{\|v\|=1} \|g\| \, \|L_u v\| \le \|g\| \, 4C_\beta \, \|u\|^{(1-\beta/\theta)} \left\|A^\theta u\right\|^{\beta/\theta}.$$

Четвертое неравенство доказано.

Аналогично для пятого неравенства имеем

$$\|L_u^* L_u g\| = \sup_{|v|=1} \langle L_u^* L_u g, \, v\rangle = \sup_{|v|=1} \langle L_u g, \, L_u v\rangle =$$

$$= \|L_u g\| \sup_{\|v\|=1} \|L_u v\| .$$

Теперь применим ранее доказанное третье неравенство, тогда

$$\|L_u^* L_u g\| \le 4C_\beta \, \|u\|^{1-\beta/\theta} \left\|A^\theta u\right\|^{\beta/\theta} \|g\| \sup_{\|v\|=1} \left(4\mathrm{C}_\beta \, \|u\|^{1-\beta/\theta} \left\|A^\theta u\right\|^{\beta/\theta} \|g\| \right) =$$

$$= 16 \, C_\beta^2 \, \|u\|^{2-\frac{2\beta}{\theta}} \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|g\| .$$

Пятое неравенство доказано.

Для $\tilde{L}^*_f g = L^*_g f$ имеем

$$\left\|\tilde{L}_f^* g\right\| = \sup_{\|v\|=1} \left\langle L_g^* f, \, v\right\rangle = \sup_{\|v\|=1} \langle f, \, L_g v\rangle \le \|f(u)\| \sup_{\|v\|=1} \|L_g v\| \le$$

$$\le \left(\|u\| + 2C_\beta \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|u\|^{2(1-\frac{\beta}{\theta})} \right) 4C_\beta \, \|g\| .$$

Все неравенства пункта a) леммы доказаны.

Докажем пункт b). Имеем

$$\tilde{K}(u) = (1-\mu) \, K(u) + 1 - \langle D_u^* f, u\rangle \, \|u\|^{-2} ,$$

$$\langle D_u^* f, u\rangle = \langle f, u + 2L(u,u)\rangle = 2 \, \|f\|^2 - \langle f, u\rangle .$$

Докажем оценку для $\tilde{K}(u)$. Так как $\|u\| \geq 1$, а из условия леммы $\left\|A^\theta u\right\| \leq \left\|A^\theta \overset{\circ}{u}\right\| \leq 1/2 \left\|\overset{\circ}{u}\right\|$, то получаем

$$\mu = \mu(u) = \frac{\left\|A^\theta u\right\|^2}{\|u\|^2} < \frac{1}{4}.$$

Используем доказанное второе неравенство пункта a), тогда

$$\|\langle D_u^* f, u\rangle\| \, \|u\|^{-2} \leq 16 \left(1 + C_\beta^2 \left\|A^\theta u\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \|u\|^{2(1-\beta/\theta)}\right) \leq$$

$$\leq 16 \left(1 + C_\beta^2 \left\|A^\theta \overset{\circ}{u}\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{2(1-\beta/\theta)}\right) \leq$$

$$\leq 16 \, (1 + C_\beta)^2 \left(1 + \left\|A^\theta \overset{\circ}{u}\right\|^{\frac{2\beta}{\theta}} \left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{2(1-\beta/\theta)}\right) \leq$$

$$\leq 16(1 + C_\beta)^2 \left(1 + \left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{\frac{7}{8}} + \left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{1-\beta/\theta} \left\|A^\theta \overset{\circ}{u}\right\|^{\beta/\theta}\right)^2 = \frac{\widehat{C}}{250} \leq \frac{K(u)}{250}.$$

Отсюда легко вытекает утверждение пункта b) леммы.

Докажем пункт c). Используя условия пункта b) леммы и доказанные в пункте a) неравенства, получаем

$$\widehat{C} \leq K(u) = \frac{-\langle D_u^* f, R(u)\rangle}{\|R(u)\|^2} \leq \frac{\|D_u^* f\|}{\|R(u)\|} \leq \frac{\|f\| \, (1 + 4C_\beta \, \|u\|^{1-\beta/\theta} \left\|A^\theta u\right\|^{\beta/\theta})}{\|R(u)\|} \leq$$

$$\leq \|u\|^{1/4} \, (1 + 4C_\beta \, \|u\|^{1-\beta/\theta} \left\|A^\theta u\right\|^{\beta/\theta}) \, \|R(u)\|^{-1} \leq$$

$$\leq 4 \, (1 + C_\beta) \left(1 + \left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{1/4} + \left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{5/4-\beta/\theta} \left\|A^\theta \overset{\circ}{u}\right\|^{\beta/\theta}\right) \|R(u)\|^{-1} \leq$$

$$\leq 4 \, (1 + C_\beta) \left(1 + \left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{1/4} + \left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{5/4}\right) \|R(u)\|^{-1} \leq \hat{C}^{5/7} \, \|R(u)\|^{-1}$$

Отсюда и из пункта b) легко получаем

$$\|R(u)\| \leq \widehat{C}^{5/7} K^{-1}(u) \leq K^{-2/7}(u) < 2^{2/7} \tilde{K}^{-2/7}(u) \leq 2\tilde{K}^{-2/7}(u).$$

Лемма 6.6 доказана. □

Лемма 6.7. *Пусть u_1 - некоторый вектор $\|u_1\| = \left\|\overset{\circ}{u}\right\|$, для которого выполнено* (6.3), *где $\widehat{C}$ - из леммы 6.6, а $\overset{\circ}{u}$ - из теоремы 6.1. Определим $u(\xi)$, как решение задачи Коши:*

$$\begin{cases} u_\xi = -R(u), \quad \xi_1 < \xi < \xi_2; \\ u\,|_{\xi=\xi_1} = u_1, \end{cases} \tag{6.7}$$

где ξ_2 - самая левая точка, в которой выполняется хотя бы одно из условий

$$K(u(\xi)) \geq 2\widehat{C} \text{ или } R(u(\xi)) = 0.$$

Тогда для любой точки $\hat{\xi}$, такой, что $\xi_1 \leq \hat{\xi} \leq \xi_2$ выполнены равенства

$$\left\|u(\hat{\xi})\right\|^2 = \|u_1\|^2,$$

$$\left\|A^\theta u(\hat{\xi})\right\|^2 = \left\|A^\theta u_1\right\|^2 - 2\int_{\xi_1}^{\hat{\xi}} \|R(u(\eta))\|^2 \, d\eta,$$

и неравенство

$$\left\|f\left(u(\hat{\xi})\right)\right\|^2 \leq \|f(u_1)\|^2 + 4\widehat{C}\int_{\xi_1}^{\hat{\xi}} \|R(u(\eta))\|^2 \, d\eta,$$

где $\widehat{C}$ - из леммы 6.6, θ - из теоремы 6.1.

Для $\xi_2 - \xi_1$ выполнена оценка $\xi_2 - \xi_1 \geq \varphi(r_0)$, где $r_0 = \min\left\{1, \inf\limits_{\xi\in(\xi_1,\xi_2)} \|R(\xi)\|\right\}$, а $\varphi(\cdot)$ - непрерывная на $[0,\infty)$ функция, такая что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \neq 0$ при $t > 0$.

Доказательство. Имеем

$$\left(\|u(\xi)\|^2\right)_\xi = 2\left\langle u(\xi),\, u_\xi(\xi)\right\rangle,$$

$$\left(\left\|A^\theta u(\xi)\right\|^2\right)_\xi = 2\left\langle A^\theta u,\, A^\theta u_\xi\right\rangle = 2\left\langle A^{2\theta} u(\xi),\, u_\xi\right\rangle, \tag{6.8}$$

$$\left(\|f(u)\|^2\right)_\xi = 2\left\langle f(u),\, u_\xi + L_{u(\xi)} u_\xi\right\rangle = 2\left\langle D_u^* f(u),\, u_\xi\right\rangle.$$

Теперь, используя определения R, S, а также равенства $\langle R,\, u\rangle = \langle s,\, u\rangle = \langle R,\, s\rangle = 0$, в силу уравнения для $u\,(\xi)$ из (6.8) получаем

$$\left(\|u\,(\xi)\|^2\right)_\xi = -2\,\langle u, R\rangle = 0,$$

$$\left(\left\|A^\theta u\,(\xi)\right\|^2\right)_\xi = -2\,\|R\|^2\,,$$

$$\left(\|f\;(u\,(\xi))\|^2\right)_\xi = 2\,\langle D_u^* f\,(u)\,,\, u_\xi\rangle = -2\,\langle D_u^* f\,(u)\,,\, R\rangle =$$

$$= -2\frac{\langle D_u^* f\,(u)\,,\, R\rangle}{\|R\|^2}\,\|R\|^2 = 2K\,(u)\,\|R\|^2 \le 4\widehat{C}\,\|R\|^2\,.$$

При выводе последнего неравенства учтено, что при $\xi \in (\xi_1,\, \xi_2)$ выполнено неравенство $K(u(\xi)) < 2\hat{C}\left(\overset{\circ}{u}\right)$.

Интегрируя эти равенства, для $\|u\|$ и $\left\|A^\theta u\right\|$ получаем равенства

$$\|u(\xi)\| = \|u_1\|\,,\, \left\|A^\theta u(\xi)\right\|^2 = \left\|A^\theta u_1\right\|^2 - 2\int_{\xi_1}^{\xi} \|Ru\,(\eta)\|^2\,d\eta.$$

А для $\|f(u\,(\xi))\|$ получаем неравенство

$$\|f\,(u\,(\xi))\|^2 \le \|f\,(u_1)\|^2 + 4\widehat{C}\int_{\xi_1}^{\xi} \|R\;(u\,(\xi))\|^2\,d\xi.$$

Оценим разность $\xi_2 - \xi_1$. При $r_0 = 0$ необходимое неравенство очевидно.

Если $r_0 \ne 0$, то так как $R\,(\xi) \ge r_0$ при $\xi \in [\xi_1,\, \xi_2]$, то в силу непрерывности $u\,(\xi)$ и $K\,(u\,(\xi))$ выполнено равенство $K\,(u\,(\xi_2)) = 2\widehat{C}$. Но

$$K\,(u\,(\xi_2)) \equiv K\,(\xi_2) = K\,(\xi_1) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} [K\,(\eta)]_{\,\eta} d\eta \le K\,(\xi_1) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} |[K\,(\eta)]_{\,\eta}|\,d\eta \le$$

$$\le K\,(\xi_1) + \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(\left\|(D_u^* f)_\eta\right\|\,\|R\|^{-1} + 3\,\|D_u^* f\|\,\frac{\|R_\eta\|}{\|R\|^2}\right)d\eta.$$

Теперь, раскрывая $(D_u^* f)_\eta$ и R_η , находим

$$(D_u^* f)_\eta = (f)_\eta + (L_u^* f)_\eta = u_\eta + L_u u_\eta + (L_u^* u + L_u^* L(u,u))_\eta =$$

$$= u_\eta + L_u u_\eta + L_u^* u_\eta + L_u^* L_u u_\eta + L_{u_\eta}^* f.$$

$$R_\eta = \left(A^{2\theta} u - \frac{\left\|A^\theta u\right\|^2}{\|u\|^2} u \right)_\eta = A^{2\theta} u_\eta - \frac{\left\|A^\theta u\right\|^2}{\|u\|^2} u_\eta - \frac{\left(\left\|A^\theta u\right\|^2\right)_\eta}{\|u\|^2} u =$$

$$= A^{2\theta} u_\eta - \frac{\left\|A^\theta u\right\|^2}{\|u\|^2} u_\eta + \frac{2\,\|R\|^2}{\|u\|^2} u$$

Теперь, пользуясь Леммой 6.6, получаем

$$K\left(u\left(\xi_2\right)\right) \equiv K\left(\xi_2\right) \leq K\left(\xi_1\right) + \left(\xi_2 - \xi_1\right) \cdot m(\|u\|) \frac{1}{r_0^2},$$

где $m\left(\cdot\right) > 0$ - непрерывная функция. Отсюда, так как в промежутке $[\xi_1,\ \xi_2]$ функция $\|u(\xi)\|$ - постоянна, то в силу соотношений

$$K\left(u\left(\xi_2\right)\right) = 2\widehat{C},\ K(u(\xi_1)) \leq \widehat{C}$$

получаем, что

$$\xi_2 - \xi_1 \geq \widehat{C} \frac{r_0^2}{m(\left\|\overset{\circ}{u}\right\|)} \equiv 2\varphi(r_0).$$

Лемма доказана. □

Лемма 6.8. *Пусть* u_1 *- некоторый вектор такой, что* $\|u_1\| = \left\|\overset{\circ}{u}\right\|$, *и для которого выполнено* (6.4), *где* $\widehat{C}$ *- из леммы 6.6, а* $\overset{\circ}{u}$ *- из теоремы 6.1. Определим* $u\left(\xi\right)$ *при* $\xi > \xi_1$ *как решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_\xi = -R + < D_u^* f, R > \frac{S}{\|S\|^2}, \\ u_\xi\big|_{\xi=\xi_1} = u_1, \end{cases} \tag{6.9}$$

до тех пор: $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, *пока не будет выполнено хотя бы одно из трех условий:*

$$\begin{cases} \text{или} \quad K(u(\xi_2)) \leq 1/2\widehat{C}, \\ \text{или} \quad \|S(\xi_2)\| \leq \frac{\|R(\xi_2)\|^2}{20}, \\ \text{или} \quad R\left(u\left(\xi_2\right)\right) \equiv R(\xi_2) = 0. \end{cases} \tag{6.10}$$

Тогда при $\xi_1 \le \xi \le \xi_2$ выполняются равенства

$$\left\|A^{\theta}u(\xi)\right\|^2 = \left\|A^{\theta}u_1\right\|^2 - 2\int_{\xi_1}^{\xi_2}\|R(\eta)\|^2\,d\eta,\ \|u(\xi)\| = \|u_1\|^2,$$

$$\|f(u(\xi))\|^2 = \|f\ (u_1)\|^2,$$

где θ - из теоремы 6.1, а ξ_2 - самая левая точка, для которой выполняются хотя бы одно из условий (6.10).

Для $\xi_2 - \xi_1$ выполнено неравенство $\xi_2 - \xi_1 \ge \varphi_1(r_0)$, где $\varphi_1(\cdot)$ - непрерывная функция, такая, что $\varphi_1(0) = 0$ и $\varphi_1(t) \ne 0$ при $t > 0$, а $r_0 = \min\left\{1,\ \inf\limits_{\xi\in(\xi_1,\xi_2)}\|R(\xi)\|\right\}$.

Доказательство. Учитывая равенства $\langle u, R\rangle = \langle u, s\rangle = \langle R, s\rangle = 0$ и

$$D_u^* f = \langle D_u^* f,\, u\rangle\frac{u}{\|u\|^2} + \frac{\langle D_u^* f,\, R\rangle}{\|R\|^2}R + S,$$

пользуясь (6.8), получаем

$$\left(\|u(\xi)\|^2\right)_{\xi} = 0,\quad \left(\left\|A^{\theta}u(\xi)\right\|^2\right)_{\xi} = -2R,\quad \left(\|f(u(\xi))\|^2\right)_{\xi} = 0.$$

Интегрируя эти равенства, приходим к равенствам этой леммы.

Оценим разность $\xi_2 - \xi_1$. При $r_0 = 0$ необходимое неравенство очевидно.

Если $r_0 \ne 0$, то имеем или $K(u(\xi_2)) = 1/2\widehat{C}$ и или $\|S(u(\xi_2))\| = \frac{1}{20}\|R(u(\xi_2))\|^2$.

В случае $K(u(\xi_2)) = 1/2\widehat{C}$ оценка для разности $\xi_2 - \xi_1$ доказывается так же, как доказана аналогичная оценка в лемме 6.7.

В случае $\|S(u(\xi_2))\| = \frac{1}{20}\|R(u(\xi_2))\|^2$ обозначим через $\tilde{\xi_1}$ такую точку на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$, начиная с которой всюду выполнено неравенство $\|S(u(\xi))\| \le \frac{1}{10}\|R(u(\xi_2))\|^2$, $\tilde{\xi_1} \le \xi < \xi_2$. Тогда имеем

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{20} = \tfrac{\|S(u(\xi_2))\|}{\|R(u(\xi_2))\|^2} \ge \tfrac{\left\|S\left(u\left(\tilde{\xi_1}\right)\right)\right\|}{\left\|R\left(u\left(\tilde{\xi_1}\right)\right)\right\|^2} - \left|\int_{\tilde{\xi_1}}^{\xi_2}\left(\tfrac{\|S(u(\xi))\|}{\|R(u(\xi))\|^2}\right)_{\xi}d\xi\right| \ge \\ \ge \tfrac{1}{10} - \int_{\tilde{\xi_1}}^{\xi_2}\left|\left(\tfrac{\|S(u(\xi))\|}{\|R(u(\xi))\|^2}\right)_{\xi}\right|d\xi.\end{gathered}\tag{6.11}$$

Вычислим и оценим подинтегральное выражение для $\tilde{\xi_1} \le \xi < \xi_2$, учитывая определение S и уравнение для $u(\xi)$,

$$\left(\frac{\|S(u(\xi))\|}{\|R(u(\xi))\|^2}\right)_\xi = \frac{-2\langle R,\, R_\xi\rangle}{\|R(u(\xi))\|^4}\|S(u(\xi))\| + \frac{(\|S(u(\xi))\|)_\xi}{\|R(u(\xi))\|^2}.$$

Несложно установить, что

$$(\|S(u(\xi))\|)_\xi = \left(\left(\|S(u(\xi))\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)_\xi = \frac{\langle S,\, S_\xi\rangle}{\|S(u(\xi))\|}.$$

Отсюда получаем

$$\left|\left(\frac{\|S(u(\xi))\|}{\|R(u(\xi))\|^2}\right)_\xi\right| \le \left|\frac{-2\langle R,\, R_\xi\rangle}{\|R(u(\xi))\|^4}\|S(u(\xi))\|\right| + \left|\frac{\langle S,\, S_\xi\rangle}{\|R(u(\xi))\|^2\,\|S(u(\xi))\|}\right|.$$

Для R_ξ имеем оценку

$$\|R_\xi\| = \left\|\left(A^{2\theta} - \frac{\left\|A^\theta u\right\|^2}{\|u\|^2}\right)u_\xi - \frac{2\left\langle A^{2\theta}u,\, u_\xi\right\rangle}{\|u\|^2}u\right\| \le 4\,\|u_\xi\|\,.$$

Для $|\langle S,\, S_\xi\rangle|$ имеем оценку

$$|\langle S,\, S_\xi\rangle| = \left|\left\langle S,\, (D_u^* f)_\xi + \widetilde{\mu}_\xi u + \widetilde{\mu} u_\xi + K_\xi R + K R_\xi\right\rangle\right| =$$

$$= \left|\left\langle S,\, \left(u_\xi + L_u u_\xi + L_u^* u_\xi + L_u^* L_u u_\xi + L_{u_\xi}^* f\right) + \widetilde{\mu} u_\xi + K R_\xi\right\rangle\right|.$$

Применим оценки из леммы 6.6. Тогда, учитывая, что $\left\|A^\theta\right\| \le 1$, получаем

$$|\langle S,\, S_\xi\rangle| \le \|S\|\left[\left(1 + 4C_\beta\|u\| + 4C_\beta^2\|u\|^2 + 2C_\beta\|f\|\right)\|u_\xi\|\right] +$$

$$+ \|S\|\left[16\left(1 + 4C_\beta^2\|u\|^2\right)\|u_\xi\| + \|K R_\xi\|\right] \le$$

Используем, что

$$\|K R_\xi\| = K\,\|R_\xi\| = \left\|\frac{\langle D_u^* f,\, R\rangle}{\|R\|^2}\right\|\|R_\xi\| \le \frac{\|D_u^* f\|}{\|R\|}4\,\|u_\xi\| \le$$

$$\leq 4\frac{(1+4C_\beta\|u\|)\,\|f\|}{\|R\|}\,\|u_\xi\| \leq 4\frac{(1+4C_\beta\|u\|)\,(1+2C_\beta\|u\|)}{\|R\|}\,\|u_\xi\|\,.$$

Тогда будем иметь с использованием оценки для f из леммы 6.6

$$|\langle S,\,S_\xi\rangle| \leq \|S\|\,\|u_\xi\|\left(1+4C_\beta\|u\|+4C_\beta^2\|u\|^2+2C_\beta\|u\|\,(1+2C_\beta\|u\|)\,\right)+$$

$$+\,\|S\|\,\|u_\xi\|\left(16(1+4C_\beta^2\|u\|^2)+4\frac{(1+4C_\beta\|u\|)\,(1+2C_\beta\|u\|)}{r_0}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\|S\|\,\|u_\xi\|}{r_0}\left(21+30C_\beta\|u\|+104C_\beta^2\|u\|^2\,\right) \leq \frac{\|S\|\,\|u_\xi\|}{r_0}\left(30\,(1+2C_\beta\|u\|)^2\,\right).$$

Из этих оценок вытекает для всех $\tilde{\xi_1} \leq \xi < \xi_2$

$$\left|\left(\frac{\|S\,(u\,(\xi))\|}{\|R\,(u\,(\xi))\|^2}\right)_\xi\right| \leq \frac{4\,\|u_\xi\|\,\|S\,(u\,(\xi))\|}{\|R\,(u\,(\xi))\|^3}+\frac{30\,(1+2C_\beta\|u\|)^2\,\|u_\xi\|}{r_0\,\|R\,(u\,(\xi))\|^2} \leq$$

$$\leq \frac{4\,\|u_\xi\|}{10\,\|R\,(u\,(\xi))\|}+\frac{30\,(1+2C_\beta\|u\|)^2\,\|u_\xi\|}{r_0\,\|R\,(u\,(\xi))\|^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{r_0^3}\left(\frac{4}{10}+30\,(1+2C_\beta\|u\|)^2\right)\|u_\xi\|\,.$$

Из уравнения (6.9) заменяем u_ξ, тогда

$$\left|\left(\frac{\|S\,(u\,(\xi))\|}{\|R\,(u\,(\xi))\|^2}\right)_\xi\right| \leq \frac{1}{r_0^3}\left(\frac{4}{10}+30\,(1+2C_\beta\|u\|)^2\right)\left(\,\|R\,(u\,(\xi))\|+\|D_u^* f\|\,\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{r_0^3}\left(\frac{4}{10}+30\,(1+2C_\beta\|u\|)^2\right)\left(\,\|u\,(\xi)\|+\|f\|\,(1+C_\beta\|u\|)\,\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{r_0^3}\left(\frac{4}{10}+30\,(1+2C_\beta\|u\|)^2\right)\left(\,\|u\,(\xi)\|+\|u\|\,(1+C_\beta\|u\|)^2\,\right) =: \frac{m(\left\|\mathring{u}\right\|)}{r_0^3}.$$

Отсюда и из (6.11) имеем

$$\frac{1}{20} \geq \frac{1}{10}-\left(\xi_2-\tilde{\xi_1}\right)\frac{m(\left\|\mathring{u}\right\|)}{r_0^3}.$$

Откуда и получаем оценку разности $\xi_2 - \xi_1 \geq \xi_2 - \tilde{\xi_1}$:

$$(\xi_2 - \xi_1) \geq \frac{1}{20} \frac{r_0^3}{m(\left\|\overset{\circ}{u}\right\|)}.$$

Лемма доказана. □

В дальнейшем мы увидим, что «плохой случай» - это тот случай, когда $S(\cdot)$ обращается в нуль. Поэтому нам будет нужна следующая лемма, «выводящая $S(\cdot)$ из нуля».

Лемма 6.9. *Пусть u_1 - некоторый вектор такой, что $\|u_1\| = \left\|\overset{\circ}{u}\right\|$ и для которого выполнено* (6.5)*, где $\widehat{C}$ - из леммы 6.6, а $\overset{\circ}{u}$ - из теоремы 6.1. Тогда, если $S(u_1) = 0$ и*

$$\left\|A^\theta u_1\right\| < \frac{1}{2}\|u_1\| \text{ и } \left\|\mathrm{A}^\theta u_1\right\| \leq \left\|\mathrm{A}^\theta \overset{\circ}{u}\right\|,$$

то можно выбрать такой элемент $e \in \hat{H}$ так, чтобы для решения $u(\xi)$ при $\xi \geq \xi_1$ задачи

$$\begin{cases} u_\xi = e - \frac{\langle e,u\rangle}{\|u\|^2}u - \frac{\langle e,R\rangle}{\|R\|^2}R, \\ u(\xi)|_{\xi=\xi_1} = u_1 \end{cases}$$

найдется $\widetilde{\varepsilon} > 0$ такое, что при $\xi \in (\xi_1, \xi_1 + \widetilde{\varepsilon})$ выполнены соотношения

$$S(u(\xi)) \neq 0, \quad \|u(\xi)\| = \|u_1\|, \quad \left\|A^\theta u(\xi)\right\| = \left\|A^\theta u_1\right\|,$$

$$\|f(u(\xi))\|^2 \leq \|f(u_1)\|^2 + C_1(\xi - \xi_1)^2,$$

$$\|S_\xi(\xi)\|_{|\xi=\xi_1} \geq \frac{1}{2}\widehat{C}.$$

Здесь θ - из теоремы 6.1, а $C_1 < \infty$.

Доказательство. Равенства для $\|u(\xi)\|$, $\left\|A^\theta u(\xi)\right\|$ получаются на всем отрезке, где имеет смысл уравнение для $u(\xi)$. Их обоснование аналогично доказательству таких же равенств в леммах 6.7 и 6.8.

Далее, имеем

$$S(\xi) = D_u^* f - \frac{\langle D_u^* f, u\rangle}{\|u\|^2}u - \frac{\langle D_u^* f, R\rangle}{\|R\|^2}R,$$

$$S_\xi(\xi) = (D_u^* f)_\xi - \left(\frac{\langle D_u^* f,\, u\rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle D_u^* f,\, R\rangle}{\|R\|^2} R \right)_\xi =$$
$$= u_\xi + L_u u_\xi + L_u^* u_\xi + L_{u_\xi}^* f + L_u^* L_u u_\xi - \left(\frac{\langle D_u^* f,\; u\rangle}{\|u\|^2} \right)_\xi u - \tag{6.12}$$
$$- \frac{\langle D_u^* f,\, u\rangle}{\|u\|^2} u_\xi - \left(\frac{\langle D_u^* f,\; R\rangle}{\|R\|^2} \right)_\xi R - \frac{\langle D_u^* f,\; R\rangle}{\|R\|^2} R_\xi.$$

Выберем e так, чтобы выполнялись условия

$$\|e\| = 1,\; Ae = e,\; \langle u_1, e\rangle = \langle R(u_1), e\rangle = 0,$$
$$\left(\langle D_u^* f(u), R\rangle \, \|R\|^{-1} \right)_\xi |_{\xi=\xi_1} = 0, \tag{6.13}$$
$$\left(\langle D_u^* f(u), u\rangle \, \|u\|^{-2} \right)_\xi |_{\xi=\xi_1} = 0 \,.$$

Это возможно в силу леммы 6.1.

Теперь, учитывая выбор (6.13), равенства (6.12) и

$$u_\xi|_{\xi=\xi_1} = e,$$

$$R_\xi|_{\xi=\xi_1} = \left(A^{2\beta} u_\xi - \frac{\left\|A^\beta u\right\|^2}{\|u\|^2} u_\xi - \left(\frac{\left\|A^\beta u\right\|^2}{\|u\|^2} \right)_\xi u \right)_{\xi=\xi_1} = (1-\mu)\, e,$$

в силу условия (У.4) для $S_\xi(\xi)\,|_{\xi=\xi_1}$ получаем

$$S_\xi(\xi)\,|_{\xi=\xi_1} =$$
$$= e + L_{u_1}^* e + L_{u_1} e + L_{u_1}^* L_{u_1} e + L_e^* f(u_1) - \tilde\mu(u_1) e + K(u_1)(1-\mu) e = \tag{6.14}$$
$$= \left[1 - \tilde\mu(u_1) + K(u_1)(1-\mu)\right] e = \tilde K e.$$

Так как по условиям леммы $0 < \mu \le 1/2$, то, использовав оценки для $\tilde\mu(u_1)$ и $\tilde K$ из леммы 6.6, получаем

$$\|S_\xi(\xi)\,|_{\xi=\xi_1}\| \ge \frac{1}{2} K(u) \ge \frac{1}{2} \hat C.$$

Это доказывает последнее неравенство леммы.

Из полученного для $S_\xi(\xi_1)$ неравенства и равенства

$$S(\xi) = (\xi - \xi_1)\, S_\xi(\xi_1) + (\xi - \xi_1)^2\, O(1) \tag{6.15}$$

вытекает существование такого $\widetilde{\varepsilon} > 0$, что величина $\|S(\xi)\|$ отлична от нуля, если $\xi \in (\xi_1,\ \xi_1 + \widetilde{\varepsilon}]$.

Для оценки $f(u(\xi))$ имеем

$$\|f(u(\xi))\|^2 = \|f(u_1)\|^2 + 2\int_{\xi_1}^{\xi} \langle D_u^* f,\ u_\eta(\eta)\rangle\, d\eta =$$

$$= \|f(u(\xi_1))\|^2 + 2\int_{\xi_1}^{\xi} \left(\left\langle \frac{\langle D_u^* f,\ u\rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle D_u^* f,\ R\rangle}{\|R\|^2} R + S,\ u_\eta \right\rangle \right) d\eta =$$

$$= \|f(u_1)\|^2 + 2\int_{\xi_1}^{\xi} \langle S(u(\eta)),\ e\rangle\, d\eta.$$

Здесь использовано уравнение для $u(\cdot)$.

Отсюда и из (6.15) при малых $\xi - \xi_1$ получаем неравенство леммы для $f(u(\xi))$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6.10. *Пусть $u_1 \in \widehat{H}$ - некоторый вектор такой, что*

$$\|u_1\| = \left\| \overset{\circ}{u} \right\|,\ \left\| A^\theta u_1 \right\| \le \left\| A^\theta \overset{\circ}{u} \right\|,$$

для которого выполнено условие (6.5) из леммы 6.5, то есть

$$R(u_1) \neq 0,\ K(u_1) > \widehat{C},\ \|S(u_1)\| < 10^{-1} \|R(u_1)\|^2, \tag{6.16}$$

где $\widehat{C}$ - из пункта b) леммы 6.6, а $\overset{\circ}{u}$ и θ - из теоремы 6.1. Пусть $S(u_1) \neq 0$. Представим его в виде

$$S(u_1) = \|S(u_1)\|\,(re + z),$$

где r - скаляр, e - нормированный собственный вектор: $e \in G_{\lambda_1} = \{x:\ Ax = x\}$, z - вектор из ортогонального дополнения к G_{λ_1}: $z \in \widehat{H} \ominus G_{\lambda_1}$, причем $r^2 + \|z\|^2 = 1$.

Тогда $z \neq 0$ и найдется такой элемент $\widehat{u} \in \widehat{H}$, что

$$(\|\widehat{u}\| = \|u_1\|) \cap \left(\left\| A^\theta \widehat{u} \right\| = \left\| A^\theta u_1 \right\| \right) \cap (\|f(\widehat{u})\| \le \|f(u_1)\|).$$

При этом $R(\widehat{u}) \neq 0$ *и*

$$\|S(\widehat{u})\| > \|S(u_1)\|.$$

Доказательство разобьем на несколько утверждений.
Утверждение 6.1. $z \neq 0$.

Докажем от противного. Пусть $z = 0$, тогда $S(u_1) = \|S(u_1)\| e$, где $e \in G_{\lambda_1}$. Представим u_1 в виде $u_1 = c\tilde{e} + \tilde{u}$, где c - скаляр, $\tilde{e} \in G_{\lambda_1}$, $\tilde{u} \in \widehat{H} \ominus G_{\lambda_1}$. Тогда, используя условия (У.4), имеем

$$D^*_{u_1} f(u_1) = f(u_1) + L^*_{u_1} f(u_1) = u_1 + L(u_1, u_1) + L^*_{u_1} u_1 + L^*_{u_1} L(u_1, u_1) =$$
$$= [c\tilde{e} + \tilde{u}] + [L(c\tilde{e}, c\tilde{e}) + L_{\tilde{u}} c\tilde{e} + L(\tilde{u}, \tilde{u})] + [L^*_{\tilde{u}} c\tilde{e} + L^*_{\tilde{u}} \tilde{u} + L^*_{c\tilde{e}} c\tilde{e} + L^*_{ce} \tilde{u}] +$$
$$+ [L^*_{\tilde{u}} L(c\tilde{e}, c\tilde{e}) + L^*_{\tilde{u}} L_{\tilde{u}} c\tilde{e} + L^*_{\tilde{u}} L(\tilde{u}, \tilde{u}) + L^*_{ce} L(c\tilde{e}, c\tilde{e}) + L^*_{c\tilde{e}} L_{\tilde{u}} c\tilde{e} + L^*_{c\tilde{e}} L(\tilde{u}, \tilde{u})] =$$
$$= c\tilde{e} + \tilde{u} + L(\tilde{u}, \tilde{u}) + L^*_{\tilde{u}} \tilde{u} + L^*_{\tilde{u}} L(\tilde{u}, \tilde{u}) = c\tilde{e} + f(\tilde{u}) + L^*_{\tilde{u}} f(\tilde{u}) =$$
$$= c\tilde{e} + D^*_{\tilde{u}} f(\tilde{u}). \tag{6.17}$$

Также используя условия (У.4), получим

$$\tilde{\mu}(u_1) u_1 = c\tilde{\mu}(u_1) e + \tilde{\mu}(u_1) \tilde{u},$$

$$K(u_1) R(u_1) = K(u_1)(1 - \mu(u_1)) e + K(u_1) \left(A^{2\theta} \tilde{u} - \mu(u_1) \tilde{u}\right). \tag{6.18}$$

Из этих равенств будем иметь

$$\|S(u_1)\| e = S(u_1) = D^*_{u_1} f - \frac{< D^*_{u_1} f, u_1 >}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{< D^*_{u_1} f, R >}{\|R\|^2} R =$$
$$= D^*_{u_1} f + \tilde{\mu}(u_1) u_1 + K(u_1) R(u_1) =$$
$$= c\tilde{e} + D^*_{\tilde{u}} f(\tilde{u}) + c\tilde{\mu}(u_1) e + \tilde{\mu}(u_1) \tilde{u} +$$
$$+ K(u_1)(1 - \mu(u_1)) e + K(u_1) \left(A^{2\theta} \tilde{u} - \mu(u_1) \tilde{u}\right) =$$
$$= c\tilde{K}(u_1) \tilde{e} + D^*_{\tilde{u}} f(\tilde{u}) + \tilde{\mu}(u_1) \tilde{u} + K(u_1) \left(A^{2\theta} \tilde{u} - \mu(u_1) \tilde{u}\right) =$$
$$\equiv c\tilde{K}(u_1) \tilde{e} + \tilde{N}(\tilde{u}, u_1),$$

где $\tilde{N}\left(\tilde{u}, u_1\right) \in \widehat{H} \ominus G_{\lambda_1}$, а обозначение $\tilde{K}\left(u_1\right)$ - из леммы 6.6. Таким образом, мы получили

$$\|S(u_1)\| \, e = c\tilde{K}\left(u_1\right)\tilde{e} + \tilde{N}\left(\tilde{u}, u_1\right),$$

где e и $\tilde{e}$ - из одного подпространства G_{λ_1}, а $\tilde{N}\left(\tilde{u}, u_1\right)$ - из его ортогонального дополнения. Поэтому $\tilde{N}\left(\tilde{u}, u_1\right) = 0$ и $c\tilde{K}\left(u_1\right)\tilde{e} = S(u_1)$.

Но $\langle S\left(u_1\right), u_1\rangle = 0$, поэтому

$$0 = c\tilde{K}\left(u_1\right)\langle e, u_1\rangle = c\tilde{K}\left(u_1\right)\langle e, ce + \tilde{u}\rangle = c^2\tilde{K}\left(u_1\right).$$

Так как по условию леммы $K\left(u_1\right) > \widehat{C}$, то, используя оценку из леммы 6.6, имеем $\tilde{K}\left(u_1\right) \neq 0$. Следовательно, $c = 0$.

Но тогда $S(u_1) = 0$. Это противоречит условию $S(u_1) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $z \neq 0$.

Утверждение 6.1 доказано. □

Докажем теперь, что существует необходимый нам вектор $\widehat{u}$.

Через M_u обозначим линейный оператор, действующий при каждом u по формуле

$$M_u g = g + \tilde{\mu}\left(u\right) g + K\left(u\right)\left(A^{2\theta} - \mu\right) g + \left(L_u + L_u^* + L_u^* L_u\right) g + L_g^* f\left(u\right).$$

Определим при $\xi \geq \xi_1$ вектор-функцию $u\left(\xi\right)$, как решение задачи

$$u_\xi\left(\xi\right) = \widehat{e} - \frac{\langle\widehat{e}, u\rangle}{\|u\|^2} u - \frac{\langle\widehat{e}, R\rangle}{\|R\|^2} R\left(u\right), \; u\left(\xi\right)|_{\xi=\xi_1} = u_1,$$

где

$$\widehat{e} = e_1 - \frac{\langle e_1, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle e_1, R\left(u_1\right)\rangle}{\|R\left(u_1\right)\|^2} R\left(u_1\right),$$

а вектор e_1 будет выбран в будущем.

Тогда, учитывая равенства $\langle u, R\rangle = \langle u, S\rangle = \langle R, S\rangle = 0$, получаем

$$\left(\|u\|^2\right)_\xi = 2\left\langle u, u_\xi\right\rangle = -2\left\langle u, \widehat{e} - \frac{\langle\widehat{e}, u\rangle}{\|u\|^2} u - \frac{\langle\widehat{e}, R\rangle}{\|R\|^2} R\left(u\right)\right\rangle = 0,$$

$$\left(\left\|A^\theta(u)\right\|^2\right)_\xi = 2\left\langle A^{2\theta} u, u_\xi\right\rangle = 2\left\langle A^{2\theta} u - \mu u, u_\xi\right\rangle =$$

$$= 2\left\langle R\left(u\right), u_{\xi}\right\rangle = -2\left\langle R\left(u\right), \widehat{e} - \frac{\left\langle \widehat{e}, u\right\rangle}{\left\|u\right\|^{2}}u - \frac{\left\langle \widehat{e}, R\right\rangle}{\left\|R\right\|^{2}}R\left(u\right)\right\rangle = 0,$$

$$\left(\left\|f(u)\right\|^{2}\right)_{\xi} = 2\left\langle D_{u}^{*}f,\ u_{\xi}\right\rangle = 2\left\langle D_{u}^{*}f,\ \widehat{e} - \frac{\left\langle \widehat{e}, u\right\rangle}{\left\|u\right\|^{2}}u - \frac{\left\langle \widehat{e}, R\right\rangle}{\left\|R\right\|^{2}}R\left(u\right)\right\rangle =$$

$$=2\left\langle S\left(u\left(\xi\right)\right) + \frac{< D_{u_1}^{*}f, u >}{\left\|u\right\|^{2}}u + \frac{< D_{u}^{*}f, R >}{\left\|R\right\|^{2}}R,\ \widehat{e} - \frac{\left\langle \widehat{e}, u\right\rangle}{\left\|u\right\|^{2}}u - \frac{\left\langle \widehat{e}, R\right\rangle}{\left\|R\right\|^{2}}R\left(u\right)\right\rangle =$$

$$= 2\left\langle S\left(u\left(\xi\right)\right), \widehat{e}\right\rangle,$$

$$\left(\left\|S(u\left(\xi\right))\right\|^{2}\right)_{\xi} = 2\left\langle S\left(u\left(\xi\right)\right), S\left(u\left(\xi\right)\right)_{\xi}\right\rangle =$$

$$= 2\left\langle S\left(u\left(\xi\right)\right), u_{\xi} + \tilde{\mu}\left(u\right)u_{\xi} + K\left(u\right)\left(A^{2\theta} - \mu\right)u_{\xi}\right\rangle +$$

$$+2\left\langle S\left(u\left(\xi\right)\right), \left(L_{u} + L_{u}^{*} + L_{u}^{*}L_{u}\right)u_{\xi} + L_{u_{\xi}}^{*}f\left(u\right)\right\rangle =$$

$$= 2\left\langle S\left(u\left(\xi\right)\right), M_{u(\xi)}u_{\xi}\left(\xi\right)\right\rangle = 2\left\langle P_{u}M_{u(\xi)}S\left(u\left(\xi\right)\right), \widehat{e}\right\rangle,$$

где P_u - оператор, действующий по формуле:

$$P_{u}\varphi = \varphi - \frac{\left\langle \varphi, u\right\rangle}{\left\|u\right\|^{2}}u - \frac{\left\langle \varphi, R\right\rangle}{\left\|R\right\|^{2}}R\left(u\right).$$

Из этих равенств после интегрирования выводим

$$\left\|u\left(\xi\right)\right\| = \left\|u_{1}\right\|,$$

$$\left\|A^{\theta}u\left(\xi\right)\right\| = \left\|A^{\theta}u_{1}\right\|,$$

$$\left\|f(u\left(\xi\right))\right\|^{2} = \left\|f(u_{1})\right\|^{2} + 2\left(\xi - \xi_{1}\right)\left\langle S\left(u_{1}\right), \widehat{e}\right\rangle + \left(\xi - \xi_{1}\right)^{2}O\left(1\right),$$

$$\left\|S(u\left(\xi\right))\right\|^{2} = \left\|S\left(u_{1}\right)\right\|^{2} + 2\left(\xi - \xi_{1}\right)\left\langle P_{u_1}M_{u_1}S\left(u_{1}\right), \widehat{e}\right\rangle + \left(\xi - \xi_{1}\right)^{2}O\left(1\right).$$

Учитывая определение P_u, условия ортогональности $\langle u, R\rangle = \langle u, S\rangle = \langle R, S\rangle = 0$ и определение $\widehat{e}$ через e_1, для $f(u(\xi))$ и $S(u(\xi))$ получаем

$$\left\|f(u\left(\xi\right))\right\|^{2} = \left\|f(u_{1})\right\|^{2} + 2\left(\xi - \xi_{1}\right)\left\langle S\left(u_{1}\right), e_{1}\right\rangle + \left(\xi - \xi_{1}\right)^{2}O\left(1\right);$$

$$\left\|S(u\left(\xi\right))\right\|^{2} = \left\|S\left(u_{1}\right)\right\|^{2} + 2\left(\xi - \xi_{1}\right)\left\langle P_{u_1}M_{u_1}S\left(u_{1}\right), e_{1}\right\rangle + \left(\xi - \xi_{1}\right)^{2}O\left(1\right).$$

Возьмём теперь точку $\xi_2 > \xi_1$ и положим $u_2 = u(\xi_2)$. Выберем ξ_2 так, чтобы разность $\xi_2 - \xi_1$ была настолько мала, что для u_2 (также, как и для u_1) выполняются условия (6.16), то есть

$$R(u_2) \neq 0,\ K(u_2) > \widehat{C},\ \|S(u_2)\| < 10^{-1} \|R(u_2)\|^2 .$$

Тогда из последних равенств имеем

$$\|u_2\| = \|u_1\|,$$

$$\left\|A^\theta u_2\right\| = \left\|A^\theta u_1\right\|,$$

$$\|f(u_2)\|^2 = \|f(u_1)\|^2 + 2(\xi_2 - \xi_1)\langle S(u_1), e_1\rangle + (\xi - \xi_1)^2 O(1), \tag{6.19}$$

$$\|S(u_2)\|^2 = \|S(u_1)\|^2 + 2(\xi_2 - \xi_1)\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), e_1\rangle + (\xi - \xi_1)^2 O(1).$$

Теперь, так как $R(u_2) \neq 0$, то при $\xi_2 \leq \xi$ определим вектор-функцию $u(\xi)$, как решение задачи

$$\begin{cases} u_\xi = \tilde{e} - \frac{\langle \tilde{e}, u\rangle}{\|u\|^2} u - \frac{\langle \tilde{e}, R\rangle}{\|R\|^2} R, \\ u(\xi)\big|_{\xi=\xi_2} = u_2, \end{cases} \tag{6.20}$$

где u_2 - из (6.19), а $\tilde{e} \in G_{\lambda_1} = \{x : Ax = x\}$ и $\tilde{e}$ такой, что

$$\|\tilde{e}\| = 1,\ \langle \tilde{e}, u_2\rangle = \langle \tilde{e}, R(u_2)\rangle = \langle \tilde{e}, S(u_2)\rangle = 0,$$

$$\widetilde{\mu}(u(\xi))_\xi\Big|_{\xi=\xi_2} = K(u(\xi))_\xi\Big|_{\xi=\xi_2} = 0.$$

Такой выбор $\tilde{e}$ возможен в силу условия (У.3) (см. лемма 6.1).

Вычислим $S_\xi(u(\xi))$ при $\xi = \xi_2$. Как и в (6.14), в силу условия (У.4) с учетом выбора $\tilde{e}$ получаем

$$S_\xi(\xi)\big|_{\xi=\xi_2} = \tilde{e} + L^*_{u_2}\tilde{e} + L_{u_2}\tilde{e} + L^*_{u_2}L_{u_2}\tilde{e} + L^*_{\tilde{e}} f(u_2) - \tilde{\mu}(u_2)\tilde{e} + \tag{6.21}$$

$$+K(u_2)(1-\mu)\tilde{e} = \Big(1 - \tilde{\mu}(u_2) + K(u_2)(1-\mu)\Big)\tilde{e} = \widetilde{K}(u_2)\widetilde{e}.$$

Для $\|f(u(\xi))\|^2$ и $\|S(u(\xi))\|^2$ имеем

$$\|f(u(\xi))\|^2 = \|f(u_2)\|^2 + 2\int_{\xi_2}^{\xi} \langle D_u^* f(u), u_\eta\rangle\, d\eta =$$

$$= \|f(u_2)\|^2 + 2\int_{\xi_2}^{\xi} \langle S(u(\eta)), \tilde{e}\rangle\, d\eta =$$

$$= \|f(u_2)\|^2 + (\xi_3-\xi_2)^2 \langle S_\eta(0), \tilde{e}\rangle + (\xi_3-\xi_2)^3 O(1) = \tag{6.22}$$

$$= \|f(u_2)\|^2 + (\xi_3-\xi_2)^2 \widetilde{K}(u_2) + (\xi_3-\xi_2)^3 O(1),$$

$$\|S(u(\xi))\|^2 = \|S(u_2)\|^2 + 2(\xi_3-\xi_2)\langle S(u(\eta)), S_\eta(u(\eta))\rangle\Big|_{\eta=\xi_2}$$

$$+ (\xi_3-\xi_1)^2 \Big[\|S_\eta(u(\eta))\|^2 + \langle S(u(\eta)), S_{\eta\eta}(u(\eta))\rangle\Big]\Big|_{\eta=\xi_2} + (\xi_3-\xi_2)^3 O(1) =$$

$$= \|S(u_2)\|^2 + (\xi_3-\xi_1)^2 \Big(\widetilde{K}(u_2)^2 + \langle S(u(\eta)), S_{\eta\eta}(u(\eta))\rangle\Big)\Big|_{\eta=\xi_2} +$$

$$+ (\xi_3-\xi_2)^3 O(1).$$

При выводе этих равенств использованы выбор $\tilde{e}$ из условия $\langle S(u_1), \tilde{e}\rangle = 0$ и равенство $S_\eta(0) = \tilde{K}\tilde{e}$.

Помимо ξ_2 выберем еще $\xi_3 > \xi_2$ и положим $u_3 = u(\xi_3)$. Выбор ξ_2 и ξ_3 подчиним условиям

$$-2(\xi_2-\xi_1)\langle S(u_1), e_1\rangle > \langle \xi_3-\xi_2\rangle^2 \langle S_\eta(0), \tilde{e}\rangle = (\xi_3-\xi_2)^2 \tilde{K}(u_2), \tag{6.23}$$

$$-2(\xi_2-\xi_1)\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), e_1\rangle <$$

$$< (\xi_3-\xi_2)^2 \Big(\|S_\eta(u(\eta))\|^2 + \langle S(u(\eta)), S_{\eta\eta}(u(\eta))\rangle|_{\eta=\xi_2} \Big).$$

Такой выбор ξ_2 и ξ_3 возможен (за счет выбора ξ_3 и e_1), если

$$-2(\xi_2-\xi_1)\langle S(u_1), e_1\rangle > (\xi_3-\xi_2)^2 \tilde{K}(u_2) =$$

$$= (\xi_3-\xi_2)^2 \Big(\tilde{K}(u_2)^2 + \langle S(u(\eta)), S_{\eta\eta}(u(\eta))\rangle|_{\eta=\xi_2}\Big)\times$$

$$\times \frac{\tilde{K}(u_2)}{\tilde{K}(u_2)^2 + \langle S(u(\eta)), S_{\eta\eta}(u(\eta))\rangle|_{\eta=\xi_2}} >$$

$$> g \cdot \left(-2\left(\xi_2 - \xi_1\right)\left\langle P_{u_1} M_{u_1} S\left(u_1\right), e_1\right\rangle\right), \tag{6.24}$$

где

$$g = \frac{\tilde{K}\left(u_2\right)}{\tilde{K}\left(u_2\right)^2 + \left.\langle S(u\left(\eta\right)), S_{\eta\eta}(u\left(\eta\right))\rangle\right|_{\eta=\xi_2}}. \tag{6.25}$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ - малое число. Вместо первого неравенства в (6.23) возьмём ξ_3 из равенства

$$-2\left(\xi_2 - \xi_1\right)\left\langle S\left(u_1\right), e_1\right\rangle = \left(\xi_3 - \xi_2\right)^2 \left[\tilde{K}^2\left(u_2\right) + \varepsilon\right].$$

Отсюда найдем $\left(\xi_3 - \xi_2\right)^2$ и его подставим во второе неравенство в (6.23). Тогда убеждаемся, что при выполнении условия (6.24), беря $\varepsilon > 0$ достаточно малым, можно удовлетворить второе неравенство (6.23).

Теперь выясним, когда можно выбрать ξ_2 и ξ_3 так, чтобы выполнялось (6.24).

Утверждение 6.2. *При выполнении условия* (6.16) *скалярная величина* g *из* (6.25) *строго положительна.*

Доказательство. Действительно, вычислим $\langle S(u\left(\eta\right)), S_{\eta\eta}(u\left(\eta\right))\rangle$ при $\eta = \xi_2$

$$\left.\langle S(u\left(\eta\right)), S_{\eta\eta}(u\left(\eta\right))\rangle\right|_{\eta=\xi_2} =$$

$$= \left.\left\langle S\left(u\right), \left\{u_\eta\left(\eta\right) + \left(L_{u(\eta)} + L^*_{u(\eta)} + L^*_{u(\eta)} L_{u(\eta)}\right) u_\eta\left(\eta\right)\right\}_\eta\right\rangle\right|_{\eta=\xi_2} +$$

$$+ \left.\left\langle S\left(u\right), L^*_{u_\eta(\eta)} f\left(u\left(\eta\right)\right)\right\}_\eta\right\rangle\right|_{\eta=\xi_2} +$$

$$+ \left.\left\langle S\left(u\right), \left\{\left(\widetilde{\mu}\left(u\left(\eta\right)\right) u\right)_\eta + \left(K\left(u\left(\eta\right)\right) R\left(u\left(\eta\right)\right)\right)_\eta\right\}_\eta\right\rangle\right|_{\eta=\xi_2} =$$

$$= \left.\left\langle S\left(u_2\right), u_{\eta\eta}\left(\eta\right) + \left(L_{u_2} + L^*_{u_2} + L^*_{u_2} L_{u_2}\right) u_{\eta\eta}\left(\eta\right) + L^*_{u_{\eta\eta}(\eta)} f\left(u_2\right)\right\rangle\right|_{\eta=\xi_2} +$$

$$+ \left.\left\langle S\left(u_2\right), \widetilde{\mu}\left(u_2\right) u_{\eta\eta} + K\left(u_2\right) R_{\eta\eta}\left(u\left(\eta\right)\right)\right\rangle\right|_{\eta=\xi_2}. \tag{6.26}$$

При выводе этого равенства мы воспользовались условием (У.4), равенствами $\langle u, S\rangle = \langle R, S\rangle = 0$ и выбором $\tilde{e}$ в уравнении (6.20).

Далее, для $u_{\eta\eta}(\eta)$ и $R_{\eta\eta}(u(\eta))$ при $\eta = \xi_2$ из (6.20) выводим

$$u_{\eta\eta}(\eta)\big|_{\eta=\xi_2} = -\left\{\frac{\langle\tilde{e}, u\rangle}{\|u\|^2}u + \frac{\langle\tilde{e}, R\rangle}{\|R\|^2}R\right\}_\eta\Bigg|_{\eta=\xi_2} =$$

$$= -\left\{\frac{1}{\|u\|^2}u + \frac{\langle\tilde{e}, R_\eta\rangle}{\|R\|^2}R\right\}\Bigg|_{\eta=\xi_2} = -\frac{u_2}{\|u_2\|^2} - \frac{1-\mu(u_2)}{\|R(u_2)\|^2}R(u_2),$$

$$R_{\eta\eta}(u(\eta))\big|_{\eta=\xi_2} = \left[A^{2\theta} - \mu(u_2)\right] u_{\eta\eta}(\eta)\big|_{\eta=\xi_2}.$$

Теперь, подставив полученное в (6.26) с использованием оценок из леммы 6.6, находим

$$\left|\langle S(u(\eta)), S_{\eta\eta}(u(\eta))\rangle\big|_{\eta=\xi_2}\right| \le C_0 K(u_2)\,\|S(u_2)\|\left(\frac{1}{\|u_2\|} + \frac{1}{\|R(u_2)\|}\right),$$

где C_0 зависит от константы C_β из условия (У.1).

Отсюда, используя оценку $K(u_2)$ через $\widetilde{K}(u_2)$ из леммы 6.6, а также условия (6.5) из леммы 6.5, получаем

$$\langle S(u(\eta)), S_{\eta\eta}(u(\eta))\rangle\big|_{\eta=\xi_2} \le C_1\widetilde{K}(u_2),$$

где C_1 - константа (зависящая от константы C_β из условия (У.1)), для которой $C_1 \le \frac{1}{10}\widehat{C}$, а $\widehat{C}$ - константа из леммы 6.6. Отметим, что неравенство между C_1 и $\widehat{C}$ есть следствие выбора $\widehat{C}$ в лемме 6.6.

Из полученной оценки вытекает (в силу $K > \widehat{C}$), что $g > 0$.

Утверждение 6.2 доказано. □

Покажем, что выполнение неравенств (6.24) возможно за счет выбора e_1, если $r^2 \ge 0,5$. Для этого необходимо выполнение неравенства (сравниваем левые и правые части неравенств (6.24))

$$-2(\xi_2 - \xi_1)\langle S(u_1), e_1\rangle > g\cdot(-2(\xi_2-\xi_1)\langle P_{u_1}M_{u_1}S(u_1), e_1\rangle). \qquad (6.27)$$

Если $P_{u_1}M_{u_1}S(u_1) = 0$, то в качестве e_1 можем выбрать, например, $e_1 = -re$, где r - из представления

$$S(u_1) = \|S(u_1)\|\,(re + z).$$

Если же $P_{u_1} M_{u_1} S\,(u_1) \neq 0$, то запишем представление

$$PM_{u_1} S\,(u_1) = \alpha_1 e + \alpha_2 z + d,$$

где $\langle d, e\rangle = \langle d, z\rangle = 0$.

Рассмотрим сначала случай $d \neq 0$.

В этом случае выбираем $e_1 = \frac{d}{\|d\|}$. Тогда неравенство (6.27) превратится в следующее:

$$0 > -2g \cdot (\xi_2 - \xi_1)\, \|d\|\,,$$

которое очевидно выполняется в силу положительности g.

Теперь рассмотрим случай $d = 0$. Тогда

$$P_{u_1} M_{u_1} S\,(u_1) = \alpha_1 e + \alpha_2 z.$$

В этом случае e_1 будем искать в виде $e_1 = \beta_1 e + \beta_2 z$. Тогда неравенство (6.27) превращается в

$$-\|S(u_1)\| \left(\beta_1 r + \beta_2 \|z\|^2\right) > -g \cdot \left(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \|z\|^2\right). \tag{6.28}$$

В случае, если отличен от нуля определитель

$$\rho = \begin{vmatrix} r & \|z\|^2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \|z\|^2 \end{vmatrix},$$

то числа β_1и β_2 можно выбрать так, чтобы левая часть (6.28) была положительной, а правая часть равнялась нулю. В этом случае неравенство (6.27) будет выполнено.

Покажем, что определитель $\rho \neq 0$.

Утверждение 6.3. *При $r^2 \geq 0,5$ определитель $\rho \neq 0$.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть определитель $\rho = 0$. Тогда вектора $S(u_1)$ и $P_{u_1} M_{u_1} S\,(u_1)$ окажутся пропорциональными. То есть существует константа γ_1, что

$$P_{u_1} M_{u_1} S\,(u_1) = \gamma_1 S(u_1). \tag{6.29}$$

Представим u_1 в виде $u_1 = C\widetilde{e} + \widetilde{u}$, где C - скаляр, $\tilde{e} \in G_{\lambda_1} = \{x : Ax = x\}$, $\widetilde{u} \in \hat{H} \ominus G_{\lambda_1}$. Тогда из (6.19) и (6.20) имеем

$$S\,(u_1) = C\,[\tilde{e} + \tilde{\mu}\,(u_1)\,\tilde{e} + K\,(u_1)\,(1 - \mu\,(u_1))\,\tilde{e}] + N\,(u_1)\,, \tag{6.30}$$

где $N(u_1) \in \hat{H} \ominus G_{\lambda_1}$. Отсюда

$$\|S(u_1)\| r = C\widetilde{K}(u_1) \text{ или } C = \frac{\|S(u_1)\| r}{\widetilde{K}(u_1)}. \tag{6.31}$$

Из (6.30) легко заметить, что $\tilde{e} = e$, где e - из представления $S(u_1) = \|S(u_1)\|(re + z)$. Поэтому $u_1 = Ce + \widetilde{u}$.

Теперь умножим $P_{u_1} M_{u_1} S(u_1)$ скалярно на e, тогда

$$\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), e\rangle = \langle M_{u_1} S(u_1), P_{u_1} e\rangle.$$

Вычислим $P_{u_1} e$

$$P_{u_1} e = e - \frac{\langle e, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle e, R(u_1)\rangle}{\|R(u_1)\|^2} R(u_1) = e - \frac{C^2}{\|u_1\|^2} e - \frac{C^2(1-\mu)^2}{\|R(u_1)\|^2} e + \widetilde{M}(u_1) =$$

$$= \Big(1 - \frac{\|S(u_1)\|^2 r^2}{\|u_1\|^2 \widetilde{K}(u_1)^2} - \frac{\|S(u_1)\|^2 r^2 (1-\mu)^2}{\|R(u_1)\|^2 \widetilde{K}(u_1)^2}\Big) e + \widetilde{M}(u_1),$$

где $\widetilde{M}(u_1) \in \widehat{H} \ominus G_{\lambda_1}$.

Используя это равенство, так как $K(u_1) > \widehat{C}$, $\|u_1\| \geq \|R(u_1)\|$, то в силу условия (6.5) из леммы 6.5 получаем

$$P_{u_1} e = \Big(1 - \frac{1}{5\widehat{C}}\Big) e + \widehat{M}(u_1), \text{ где } \Big\|\widehat{M}(u_1)\Big\| \leq \frac{1}{2\widehat{C}}.$$

Поэтому, используя оценки из леммы 6.6 и полученные выше соотношения, будем иметь

$$\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), e\rangle =$$

$$= \Big\langle S(u_1) + \Big(L_{u_1} + L_{u_1}^* + L_{u_1}^* L_{u_1}\Big) S(u_1) + L_{S(u_1)}^* f(u_1), P_{u_1} e\Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \widetilde{\mu}(u_1) S(u_1) + K(u_1)\Big(A^{2\theta} - \mu(u_1)\Big) S(u_1), P_{u_1} e\Big\rangle \geq$$

$$\geq \|S(u_1)\| \widetilde{K}(u_1) r \langle e, P_{u_1} e\rangle - \|S(u_1)\| \Big|\Big\langle K(u_1)\Big(A^{2\theta} - \mu(u_1)\Big) z, P_{u_1} e\Big\rangle\Big| -$$

$$- \|P_{u_1} e\| \|S(u_1)\| \frac{K(u_1)}{100} \geq$$

$$\geq \|S(u_1)\| \left(\widetilde{K}(u_1)\, r \left(1 - \frac{1}{2\widehat{C}}\right) - K(u_1)\, \lambda_2^{2\theta} - \frac{K(u_1)}{100}\right) \geq$$
$$\geq \frac{\|S(u_1)\|}{4} \widetilde{K}(u_1). \tag{6.32}$$

В последнем неравенстве использовано утверждение леммы 6.6 о взаимной оценке $K(u_1)$ и $\widetilde{K}(u_1)$, а также предположения, что $\lambda_2^{2\theta} < \frac{1}{16}$ и $r^2 \geq 0,5$.

Далее, умножаем $P_{u_1} M_{u_1} S(u_1)$ скалярно на z, тогда

$$|\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), z\rangle| = |\langle M_{u_1} S(u_1), P_{u_1} z\rangle| \leq$$
$$\leq \left|\left\langle S(u_1) + \left[L_{u_1} + L_{u_1}^* + L_{u_1}^* L_{u_1}\right] S(u_1) + L_{S(u_1)}^* f(u_1), P_{u_1} z\right\rangle\right| +$$
$$+ \left|\left\langle \widetilde{\mu}(u_1)\, S(u_1) + K(u_1) \left(A^{2\theta} - \mu(u_1)\right) S(u_1), P_{u_1} e\right\rangle\right| \leq$$
$$\leq C_0 \|z\| \left\|\left[L_{u_1} + L_{u_1}^* + L_{u_1}^* L_{u_1}\right] S(u_1) + L_{S(u_1)}^* f(u_1)\right\| +$$
$$+ \left|\left\langle \widetilde{\mu}(u_1)\, z + K(u_1) \left(A^{2\theta} - \mu(u_1)\right) z, P_{u_1} e\right\rangle\right| \|S(u_1)\| +$$
$$+ |\langle e, P_{u_1} z\rangle|\, \widetilde{K}(u_1)\, \|S(u_1)\|\, r. \tag{6.33}$$

Теперь используем неравенства

$$\left\|A^{2\theta} z\right\| \leq \lambda_2^{2\theta} \|z\|, \ \left\|\widehat{M}(u_1)\right\| \leq \frac{1}{2\widehat{C}},$$

равенство $P_{u_1} e = \left(1 - \frac{1}{5\widehat{C}}\right) e + \widehat{M}(u_1)$, а также неравенства леммы 6.6, тогда из (6.33) выводим

$$|\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), z\rangle| \leq \frac{1}{5} \widetilde{K}(u_1)\, \|S(u_1)\|\, \|z\|^2. \tag{6.34}$$

Из (6.32) и (6.34) находим соотношение

$$\frac{|\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), z\rangle|}{|\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), e\rangle|} \leq \frac{1/5 \widetilde{K}(u_1)\, \|S(u_1)\|\, \|z\|^2}{\frac{\|S(u_1)\|}{4} \widetilde{K}(u_1)} \leq \frac{4}{5} \|z\|^2. \tag{6.35}$$

Для скалярных произведений $\langle S(u_1), e\rangle$ и $\langle S(u_1), z\rangle$ верны равенства

$$\langle S(u_1), e\rangle = \|S(u_1)\|\, r, \ \langle S(u_1), z\rangle = \|S(u_1)\|\, \|z\|^2.$$

Отсюда

$$\frac{\langle S(u_1), z\rangle}{\langle S(u_1), e\rangle} = \frac{\|z\|^2}{r} > \sqrt{2}\,\|z\|^2 .$$

Сравниваем полученное с (6.35). Имеем с учетом пропорциональности векторов $S(u_1)$ и $P_{u_1} M_{u_1} S(u_1)$ (см. (6.29))

$$\sqrt{2}\,\|z\|^2 < \frac{\langle S(u_1), z\rangle}{\langle S(u_1), e\rangle} = \frac{|\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), z\rangle|}{|\langle P_{u_1} M_{u_1} S(u_1), e\rangle|} \le \frac{4}{5}\,\|z\|^2 .$$

Последнее может быть выполнено только при $z = 0$. Это противоречит Утверждению 6.1.

Полученное противоречие доказывает Утверждение 6.3. $\square$

Таким образом, нами показано, что выполнение неравенств (6.24) возможно за счет выбора e_1, если $r^2 \ge 0,5$.

Следовательно, при $r^2 \ge 0,5$ можно выбрать e_1 так, чтобы выполнялось (6.23) (при малых $\xi_2 - \xi_1$ и $\xi_3 - \xi_2$).

Теперь в (6.22) возьмем $\xi = \xi_3$. Тогда, уменьшив при необходимости $\xi_2 - \xi_1$ и положив $\widehat{u} = u(\xi_3)$, из первых равенств (6.19) и (6.22) получаем

$$\|f(\widehat{u})\| = \|f(u(\xi_3))\| \le \|f(u_1)\| ,$$

а из вторых равенств (6.19) и (6.22) выводим строгое неравенство

$$\|S(\widehat{u})\| = \|S(u(\xi_3))\| > \|S(u_1)\| .$$

Таким образом, при $r^2 \ge 0,5$ утверждение леммы доказано.

Рассмотрим теперь случай $r^2 < 0,5$. Тогда $\|z\|^2 \ge 0,5$.

В этом случае возьмём $0 \ne \tilde{e} \in G_{\lambda_1}$, $\|\tilde{e}\| = 1$ и определим вектор-функцию $u(\xi)$ при $\xi \ge \xi_1$, как решение следующей задачи

$$\left\{ \begin{array}{c} u_\xi = \tilde{e} - \frac{\langle \tilde{e}, u\rangle}{\|u\|^2} u - \frac{\langle \tilde{e}, R\rangle}{\|R\|^2} R - \frac{\langle \tilde{e}, S\rangle}{\|S\|^2} S, \\ \\ u(\xi)|_{\xi=\xi_1} = u_1. \end{array} \right. \tag{6.36}$$

Выбор $\tilde{e}$ подчиним дополнительным условиям

$$\langle \tilde{e}, u_1\rangle = \langle \tilde{e}, R(u_1)\rangle = \langle \tilde{e}, S(u_1)\rangle = (\tilde{\mu}(u(\xi)))_\xi \Big|_{\xi=\xi_1} = (K(u(\xi)))_\xi \,|_{\xi=\xi_1} = 0 \tag{6.37}$$

Это возможно в силу леммы 6.1.

Учитывая выбор (6.37), условие (У.4), а также условия ортогональности $\langle u, R\rangle = \langle u, S\rangle = \langle R, S\rangle = 0$, верные по построению, имеем

$$S_\eta\left(u\left(\eta\right)\right)|_{\eta=\xi_1} =$$

$$= \Big(u_\eta + \left(L^*_{u_1} + L_{u_1} + L^*_{u_1} L_{u_1}\right) u_\eta + L^*_{u_\eta} f\left(u_1\right) + \tilde{\mu} u_\eta + (KR)_\eta\Big)|_{\eta=\xi_1} = \quad (6.38)$$

$$= \tilde{e} + \tilde{\mu}\tilde{e} + K\left(R\left(u\left(\eta\right)\right)\right)_\eta|_{\eta=\xi_1} = \tilde{e} + \tilde{\mu}\left(\tilde{u}\right)\tilde{e} + K\left(1-\mu\right)\tilde{e} = \tilde{K}\tilde{e}.$$

Для $S_{\eta\eta}\left(u\left(\eta\right)\right)|_{\eta=\xi_1} = 0$ получаем

$$S_{\eta\eta}\left(u\left(\eta\right)\right)|_{\eta=\xi_1} =$$

$$= \Big(u_{\eta\eta} + \left(L^*_u + L_u + L^*_u L_u\right) u_{\eta\eta} + L^*_{u_{\eta\eta}} f\left(u\right) + \left(\tilde{\mu} u\right)_{\eta\eta} + \left(KR\right)_{\eta\eta}\Big)|_{\eta=\xi_1} +$$

$$+ \Big(\left(L^*_u + L_u + L^*_u L_u\right)_\eta u_\eta + L^* u_\eta \left(f\left(u\right)\right)_\eta\Big)|_{\eta=\xi_1}.$$

Теперь, используя условия (У.4), равенства $\langle S, u\rangle = \langle S, R\rangle = 0$ и выбор (6.38), получаем

$$\langle S,\, S_{\eta\eta}\rangle\Big|_{\eta=\xi_1} = \Big\langle S\left(u\right),\, u_{\eta\eta} + \tilde{\mu}\left(u\right) u_{\eta\eta} + K\left(u\right)\left(R\left(u\right)\right)_{\eta\eta}\Big\rangle|_{\eta=\xi_1} +$$

$$+ \Big\langle S\left(u\right), \left(L^*_u + L_u + L^*_u L_u\right) u_{\eta\eta} + L^*_{u_{\eta\eta}} f\left(u\right)\Big\rangle|_{\eta=\xi_1} =$$

$$= \Big\langle S\left(u\right),\, u_{\eta\eta} + \tilde{\mu}\left(u\right) u_{\eta\eta} + K\left(u\right)\Big(A^{2\theta} - \mu\Big) u_{\eta\eta}\Big\rangle|_{\eta=\xi_1} + \quad (6.39)$$

$$+ \Big\langle S\left(u\right), \left(L^*_u + L_u + L^*_u L_u\right) u_{\eta\eta} + L^*_{u_{\eta\eta}} f\left(u\right)\Big\rangle|_{\eta=\xi_1}.$$

Для $u_{\eta\eta}$ из уравнения для $u\left(\eta\right)$, учитывая выбор (6.37), найдем

$$u_{\eta\eta}\Big|_{\eta=\xi_1} = \left(-\frac{\langle\widetilde{e}, u\rangle}{\|u\|^2} u - \frac{\langle\widetilde{e}, R\rangle}{\|R\|^2} R - \frac{\langle\widetilde{e}, S\rangle}{\|S\|^2} S\right)_\eta|_{\eta=0} =$$

$$= -\frac{u_1}{\|u\|^2} - \frac{\left(1-\mu\right) R\left(u_1\right)}{\|R\|^2} - \langle\widetilde{e}, S_\eta\left(u\right)\rangle\Big|_{\eta=0} \frac{S\left(u_1\right)}{\|S\left(u_1\right)\|^2}\,.$$

Подставляя $u_{\eta\eta}$ в равенство (6.39), учитывая, что $\langle S, u\rangle = \langle S, R\rangle = 0$, $S(\tilde{u}) = \|S(\tilde{u})\|$, $z \in H \ominus G_{\lambda_1}$, имеем с использованием оценок леммы 6.6

$$\langle S, S_{\eta\eta}\rangle|_{\eta=\xi_1} =$$

$$-\tilde{K}(u_1)\left[1+\tilde{\mu}(u_1)+K(u_1)(\left\langle A^{2\theta}z, z\right\rangle - \mu(u_1)\|z\|^2)\right] - C_1K(u_1) \geq$$

$$\geq -\tilde{K}(u_1)\left(1+\tilde{\mu}(u_1)+K\lambda_2^{2\theta}\right) - C_1K(u_1) \geq$$

$$\geq -\tilde{K}(u_1)\left(1+\tilde{\mu}(u_1)+\frac{1}{16}K(u_1)\right) - C_1K(u_1),$$

где постоянная C_1 зависит от C_β из условия (У.1) и такова, что $0 < C_1 \leq 100$.

Поэтому при малых $\xi-\xi_1$, учитывая выбор $\widehat{C}$ (см. лемму 6.6) и $K(u_1) > \widehat{C}$, имеем

$$\|S(u(\xi))\|^2 = \|S(u_1)\|^2 + 2\langle S(u), S_\eta(u(\eta))\rangle|_{\eta=\xi_1}(\xi-\xi_1)+$$

$$+2\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\Big(\int\limits_{\xi_1}^{\tau}\|S_\eta(u(\eta))\|^2 + \langle S(u(\eta)), S_{\eta\eta}\eta\rangle\, d\eta\Big)d\tau =$$

$$= \|S(u_1)\|^2 + (\xi-\xi_1)^2\left(\tilde{K}^2(u_1) - \tilde{K}(u_1)(1+\tilde{\mu}(u_1)+K(u_1))\right)+$$

$$+(\xi-\xi_1)^3 O(1) \geq \|S(u_1)\|^2 + \frac{1}{4}(\xi-\xi_1)^2\tilde{K}^2(u_1) + (\xi-\xi_1)^3 O(1).$$

Отсюда вытекает, что при малых $\xi-\xi_1$ величина $\|S(u(\xi))\|$ в случае $r^2 < 0,5$ строго возрастает.

Поэтому, так как уравнение (6.36) сохраняет нормы $u(\xi)$, $A^\theta u(\xi)$ и $f(u(\xi))$, то можно выбрать точку $\xi_2 > \xi_1$ такую, что

$$\|S(u(\xi_2))\| > \|S(u(\xi_1))\|,\ \|u(\xi_2)\| = \|u(\xi_1)\|,$$

$$\left\|A^\theta u(\xi_2)\right\| = \left\|A^\theta u(\xi_1)\right\|,\ \|f(u(\xi_2))\| = \|f(u(\xi_1))\|.$$

Следовательно, выбирая $\widehat{u} = u(\xi_2)$, получаем утверждение леммы в случае $r^2 < 0,5$.

Лемма 6.10 доказана полностью. □

Пусть $u_1 \in \widehat{H}$ - некоторый вектор такой, что $\|u_1\| = \left\|\mathring{u}\right\|$. Введем в рассмотрение число $r(u_1)$ следующим образом:

$$r(u_1) = \sup \{\|S(u)\|\}, \tag{6.40}$$

где *supremum* берет по всем таким $u \in \widehat{H}$, для которых выполнено условие

$$(\|u\| = \|u_1\|) \cap \left(\left\|A^\theta u\right\| = \left\|A^\theta u_1\right\|\right) \cap (\|f(u)\| \le \|f(u_1)\|). \tag{6.41}$$

Справедлива

Лемма 6.11. *Пусть $\widehat{H}$ - конечномерно, тогда имеют место следующие утверждения a) и b):*

a) Существует вектор $\widehat{u} \in \widehat{H}$, удовлетворяющий условиям (6.41) *такой, что*

$$\|S(\widehat{u})\| = r(u_1);$$

b) Если $r(u_1) = +\infty$, то $R(\widehat{u}) = 0$.

Доказательство. Из определения $r(u_1)$ следует, что найдется такая последовательность $u_2, u_3, ..., u_n, ...$, что каждый элемент этой последовательности удовлетворяет условию (6.41) и выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|S(u_n)\| = r(u_1). \tag{6.42}$$

Так как пространство $\widehat{H}$ конечномерно, то (если нужно, переходя к подпоследовательности) можно считать, что последовательность u_n фундаментальна в $\widehat{H}$ и поэтому имеет предельный элемент. Обозначим его $\widehat{u} \in \widehat{H}$. Имеем $u_n \to \widehat{u}$ в $\widehat{H}$.

Поэтому в силу непрерывности $f(\cdot)$ и ограниченности A^θ из (6.42) и (6.40) построен необходимый элемент, доказывающий пункт *a)* леммы.

Число $r(u_1)$ может быть равным $+\infty$. Как легко видеть из определения вектора S, это может реализоваться только в случае $\|R(u_n)\| \to 0$. Поэтому пункт *b)* так же доказан.

Лемма 6.11 доказана полностью. □

Для удобства дальнейших ссылок приведем вытекающее из лемм 6.10 и 6.11

Следствие 6.1. *Пусть $\widehat{H}$ - конечномерно, и для элемента $u_1 \in \widehat{H}$ выполнено условие* (6.5) *из леммы 6.5. Тогда, если*

$$\|u_1\| = \left\|\overset{\circ}{u}\right\|, \ \left\|A^\theta u_1\right\| < \frac{\lambda_2^\theta}{2}\|u_1\|, \ \left\|A^\theta u_1\right\| \le \left\|A^\theta \overset{\circ}{u}\right\|,$$

где $\overset{\circ}{u}$ - из теоремы 6.1, то для любого $\varepsilon>0$ можно построить $u_\varepsilon \in \widehat{H}$ такой, что

$$(\|u_\varepsilon\| = \|u_1\|) \cap \left(\left\|A^\theta u_\varepsilon\right\| = \left\|A^\theta u_1\right\|\right) \cap \left(\|f(u_\varepsilon)\|^2 \le \|f(u_1)\|^2 + \varepsilon\right)$$

и либо $\|R(u_\varepsilon)\| = 0$, либо для u_ε выполняется одно из условий (6.3), *или* (6.4), *или* (6.6).

Доказательство. Если $S(u_1) = 0$ и $\varepsilon>0$, то с помощью леммы 6.9 построим $\tilde{u_\varepsilon}$ такой, что $\{\|S(\tilde{u}_\varepsilon)\| \ne 0\}$ и выполнено условие

$$(\|\tilde{u_\varepsilon}\| = \|u_1\|) \cap \left(\left\|A^\theta \tilde{u}_\varepsilon\right\| = \left\|A^\theta u_1\right\|\right) \cap \left(\|f(\tilde{u}_\varepsilon)\|^2 \le \|f(u_1)\|^2 + \varepsilon\right).$$

Если $S(u_1) \ne 0$, то в дальнейшем в качестве $\tilde{u_\varepsilon}$ берем u_1. При этом, если $S(u_1) \ne 0$, то можно взять $\varepsilon = 0$.

Если для $\tilde{u}_\varepsilon$ либо $\|R(\tilde{u}_\varepsilon)\| = 0$, либо выполняется одно из условий (6.3), или (6.4), или (6.6), то следствие окажется доказанным. При этом в качестве u_ε берем $\tilde{u}_\varepsilon$.

В противном случае, применив лемму 6.11 (принимая за u_1 найденный $\tilde{u_\varepsilon}$), мы построим вектор-функцию $\tilde{u}$, для которой выполняется утверждение *a)* леммы 6.11

$$\|S(\tilde{u})\| = r(\tilde{u}_\varepsilon).$$

Если $r(\tilde{u}_\varepsilon) = \infty$, то согласно пункту *b)* леммы 6.11 получаем, что $\|R(\tilde{u})\| = 0$. Следствие доказано, если принять за u_ε найденный $\tilde{u}$.

Если $r(\tilde{u}_\varepsilon) < \infty$, то для построенного $\tilde{u}$ проверяем выполнение условий $\|R(\tilde{u})\| = 0$, или (6.3), или (6.4), или (6.6). Если хотя бы одно из этих условий выполнено, то доказательство следствия завершено, если принять за u_ε найденный $\tilde{u}$.

В противном случае рассмотрим

$$S(\tilde{u}) = \|S(\tilde{u})\|(\eta e + z), \ e \in G_{\lambda_1}, \ z \in H \ominus G_{\lambda_1}, \ \eta^2 + \|z\|^2 = 1.$$

Случай $\|z\| = 0$ не возможен в силу леммы 6.10.

Если $0 < \|z\| \le 1$, то по лемме 6.10, сохранив нормы $\tilde{u}$ и $A^{\theta}\tilde{u}$, не увеличивая норму $f\,(\tilde{u})$, можно строго увеличить норму $S\,(\tilde{u})$. Это противоречит определению $\tilde{u}$, как элемента, на котором достигается *supremum*. Поэтому, для построенного $\tilde{u}$ всегда будет выполнено одно из условий $\|R(\tilde{u})\| = 0$, или (6.3), или (6.4), или (6.6).

Следствие доказано. $\square$

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 6.1.

Доказательство теоремы 6.1 в конечномерном случае.

Пусть $\overset{0}{u} \in \widehat{H}$ и $\overset{0}{f} = \overset{0}{u} + L(\overset{0}{u}, \overset{0}{u})$. По условию теоремы $\left\|A^{\theta}\overset{\circ}{u}\right\| \le C_{\theta}$.

Нам необходимо получить оценку (6.1) из теоремы 6.1, в которой C_1 и l зависят только от постоянных, фигурирующих в условии (У.1) и от C_{θ}, но не зависят от размерности пространства $\widehat{H}$.

Здесь уместно отметить, что из оценки $\left\|A^{\theta}\overset{\circ}{u}\right\| \le C_{\theta}$, в силу конечномерности $\widehat{H}$, всегда можно получать оценку вида (6.1), в которой константы зависят от размерности пространства. Ценность нашей теоремы состоит именно в том, что в ней постоянные C_1 и l не зависят от размерности пространства.

Если выполнено неравенство

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\| \le 1, \tag{6.43}$$

то неравенство (6.1) справедливо при выборе $C_1 = 1$ *и* $l = 0$.

Если выполнено неравенство

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\| \le 10\lambda_2^{-4\theta}\left\|A^{\theta}\overset{\circ}{u}\right\|, \tag{6.44}$$

то неравенство (6.1) справедливо при выборе $C_1 = 10\lambda_2^{-4\theta}C_{\theta}$ *и* $l = 0$.

Если выполнено

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\| \le \left\|\overset{\circ}{f}\right\|, \tag{6.45}$$

то неравенство (6.1) справедливо при выборе $C_1 = 1$ *и* $l = 0$.

Пусть не выполнено ни одно из неравенств (6.43), (6.44), (6.45). Тогда выполнено

$$\left(\left\|\overset{\circ}{u}\right\| \ge 1\right) \cap \left(\left\|\overset{\circ}{u}\right\| > 10\lambda_2^{-4\theta}\left\|A^{\theta}\overset{\circ}{u}\right\|\right) \cap \left(\left\|\overset{\circ}{u}\right\| > \left\|\overset{\circ}{f}\right\|\right). \tag{6.46}$$

Неравенства (6.46) вместе с условиями (У.1) - (У.4) позволяют применять доказанные леммы и следствие 6.1.

Согласно лемме 6.5 элемент $\overset{0}{u}$ удовлетворяет одному из условий (6.3), или (6.4), или (6.5), или (6.6).

Если для $\overset{0}{u}$ выполнено (6.6), то в силу леммы 6.3 получаем нужную сильную оценку

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\| \leq \left\|f(\overset{\circ}{u})\right\|.$$

Если для $\overset{0}{u}$ выполнено (6.3), то пользуясь леммой 6.7 (выбирая в лемме $u_1 = \overset{0}{u}$), строим вектор $\overset{1}{u} = u\,(\xi_2)$, удовлетворяющий одному из условий (6.4), или (6.5), или (6.6).

Если для $\overset{0}{u}$ выполнено (6.4), то пользуясь леммой 6.8 (выбирая в лемме $u_1 = \overset{0}{u}$), строим $\overset{1}{u} = u\,(\xi_2)$, удовлетворяющий одному из условий (6.3), или (6.5), или (6.6).

Если для $\overset{0}{u}$ выполнено (6.5), то пользуясь следствием 6.1 (выбирая $u_1 = \overset{0}{u}$), строим $\overset{1}{u} = u_\varepsilon$, удовлетворяющий одному из условий $\left\|R(\overset{1}{u})\right\| = 0$, или (6.3), или (6.4), или (6.6).

Если для $\overset{1}{u}$ выполнено(6.6), то в силу леммы 6.3 получаем нужную сильную оценку

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\| = \left\|\overset{1}{u}\right\| \leq \left\|f(\overset{1}{u})\right\|.$$

Если же (6.6) не выполняется, то по $\overset{1}{u}$ аналогично строим $\overset{2}{u}, \overset{3}{u}, ...$ и т.д.

Процесс должен быть остановлен на n-ном шагу, если для $\overset{n}{u}$ выполнено (6.6), либо нарушено условие типа (6.46)

$$\left(\left\|\overset{n}{u}\right\| \geq 1\right) \cap \left(\left\|A^\theta \overset{n}{u}\right\| \leq \lambda_1^{4\theta} 10^{-1} \left\|\overset{n}{u}\right\|\right) \cap \left(\left\|f\left(\overset{n}{u}\right)\right\| < \left\|\overset{n}{u}\right\|\right). \qquad (6.47)$$

Предположим, что построен $\overset{n}{u}$, который удовлетворяет одному из условий (6.3), или (6.4), или (6.5) и не удовлетворяет (6.47). Тогда процесс не останавливается и переходим к построению $\overset{n+1}{u}$.

Если для $\overset{n}{u}$ выполнено (6.3), то с помощью леммы 6.7 (выбирая в лемме $u_1 = \overset{n}{u}$) строим вектор $\overset{n+1}{u} = u\,(\xi_2)$ и получим, что для $\overset{n+1}{u}$ выполнено одно из условий (6.4), или (6.5), или (6.6) и

$$\left(\left\|\overset{n+1}{u}\right\| = \left\|\overset{n}{u}\right\|\right) \cap \left(\left\|A^{\theta}\overset{n+1}{u}\right\|^2 = \left\|A^{\theta}\overset{n}{u}\right\|^2 - 2\int\limits_{\triangle_{n,1}} \|R(u(\xi))\|^2\, d\xi\right) \cap$$

$$\cap \left(\left\|f(\overset{n+1}{u})\right\|^2 \le \left\|f(\overset{n}{u})\right\|^2 + 4\widehat{C}\int\limits_{\triangle_{n,1}} \|R(u(\xi))\|^2\, d\xi\right), \tag{6.48}$$

где $\triangle_{n,1}$ - некоторый отрезок, для длины $d(\triangle_{n,1})$ которого справедлива оценка снизу $d(\triangle_{n,1}) \ge \varphi(r_n)$. Здесь $\widehat{C}$ - постоянная из леммы 6.6, $r_n = \inf\limits_{\xi\in\triangle_{n,1}} \|R(u(\xi))\|$, где $u(\xi)$ - решение задачи Коши (6.7) с начальными данными $\overset{n}{u}$; $\varphi(\cdot)$ - строго монотонная неотрицательная функция, такая что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) \ne 0$ при $t \ne 0$.

Если для $\overset{n}{u}$ выполнено условие (6.4), то с помощью леммы 6.8 (выбирая в лемме $u_1 = \overset{n}{u}$) строим $\overset{n+1}{u} = u(\xi_2)$, и получим, что для $\overset{n+1}{u}$ выполнено одно из условий (6.3), или (6.5), или (6.6) и

$$\left(\left\|\overset{n+1}{u}\right\| = \left\|\overset{n}{u}\right\|\right) \cap \left(\left\|A^{\theta}\overset{n+1}{u}\right\|^2 = \left\|A^{\theta}\overset{n}{u}\right\|^2 - \int\limits_{\triangle_{n,2}} \|R(u(\xi))\|^2\, d\xi\right) \cap$$

$$\cap \left(\left\|f(\overset{n+1}{u})\right\| \le \left\|f(\overset{n}{u})\right\|\right) \tag{6.49}$$

где $\triangle_{n,2}$ - некоторый отрезок, для длины которого справедлива оценка снизу $d(\triangle_{n,1}) \ge \varphi\left(\left\|S(\overset{n}{u})\right\|\right)$, где $\varphi(\cdot)$ - строго монотонная неотрицательная функция, такая что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) \ne 0$ при $t \ne 0$. Здесь $u(\xi)$ - решение задачи Коши (6.9) с начальными данными $\overset{n}{u}$.

Если же для $\overset{n}{u}$ выполнено условие (6.5), то пользуясь следствием 6.1 (выбирая $u_1 = \overset{n}{u}$), строим $\overset{n+1}{u} = u_\varepsilon$ и получим, что для $\overset{n+1}{u}$ выполнено одно из условий (6.3), или (6.4), или (6.6) и

$$\left(\left\|\overset{n+1}{u}\right\| = \left\|\overset{n}{u}\right\|\right) \cap \left(\left\|A^{\theta}\overset{n+1}{u}\right\| = \left\|A^{\theta}\overset{n}{u}\right\|\right) \cap \left(\left\|f(\overset{n+1}{u})\right\| \le \left\|f(\overset{n}{u})\right\| + \varepsilon_n\right), \tag{6.50}$$

где ε_n - заранее выбранное малое число.

Очевидно, что можно считать отрезки $\triangle_{j,i}\,(j=1,2,3,...;\,i=1,2)$ непересекающимися.

Следует обратить внимание, что во всех случаях $\overset{n+1}{u}$ строится с сохранением нормы: $\left\|\overset{n+1}{u}\right\| = \left\|\overset{n}{u}\right\|$ (см. (6.48), (6.49), (6.50)), а норма $A^\theta u$ не возрастает.

Выбираем $\varepsilon_n = 2^{-n}\varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$ - некоторое малое число, тогда получаем

$$\left\|\overset{n+1}{u}\right\| = \left\|\overset{n}{u}\right\| = ... = \left\|\overset{1}{u}\right\| = \left\|\overset{\circ}{u}\right\|,$$

$$\left\|A^\theta \overset{n+1}{u}\right\|^2 = \left\|A^\theta \overset{\circ}{u}\right\|^2 - \Big(\sum_{j=1}^{n}{}^{(1)}\int\limits_{\triangle_{j,1}}\|R(u(\xi))\|^2\,d\xi + \sum_{j=1}^{n}{}^{(2)}\int\limits_{\triangle_{j,2}}\|R(u(\xi))\|^2\,d\xi\Big), \tag{6.51}$$

$$\left\|f(\overset{n+1}{u})\right\|^2 \le \left\|f(\overset{\circ}{u})\right\|^2 + 4\widehat{C}\sum_{j=1}^{n}{}^{(1)}\int\limits_{\triangle_{j,1}}\|R(u(\xi))\|^2\,d\xi + 2\varepsilon,$$

где $\widehat{C}$ - число, выбранное в лемме 6.6.

Здесь $\sum_{j=1}^{n}{}^{(1)}$ означает, что суммирование распространяется только на те j , которые таковы, что на j-том шагу для построения $\overset{j+1}{u}$ использована лемма 6.7, а $\sum_{j=1}^{n}{}^{(2)}$ означает, что суммирование распространяется только на те j , которые таковы, что на j-том шагу для построения $\overset{j+1}{u}$ использована лемма 6.8.

Из (6.51) для $\left\|f\left(\overset{n+1}{u}\right)\right\|$ сразу вытекает оценка

$$\left\|f\left(\overset{n+1}{u}\right)\right\|^2 \le \left\|f\left(\overset{\circ}{u}\right)\right\|^2 + 4\widehat{C}\left\|A^\theta\overset{\circ}{u}\right\|^2 + 2\varepsilon. \tag{6.52}$$

В наших построениях возможно два случая:

(i) процесс конечен, то есть обрывается на некотором N;

(ii) процесс бесконечен.

В первом случае (i) процесс построения $\overset{2}{u}, \overset{3}{u}, ...$ обрывается, если при некотором $N \ge 2$

$$\left\{R\left(\overset{N}{u}\right) = 0\right\} \cup \left\{\left\|f\left(\overset{N}{u}\right)\right\| \ge \left\|\overset{\circ}{u}\right\|\right\}.$$

Если получилось, что $R\left(\overset{N}{u}\right)=0$, то из леммы 6.3 следует оценка

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\|^2=\left\|\overset{N}{u}\right\|^2\le\left\|f\left(\overset{N}{u}\right)\right\|^2.$$

Поэтому в случае **(i)** всегда имеем оценку$\left\|f\left(\overset{N}{u}\right)\right\|\ge\left\|\overset{\circ}{u}\right\|$. Следовательно,

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\|^2\le\left\|f\left(\overset{N}{u}\right)\right\|^2\le\left\|f\left(\overset{\circ}{u}\right)\right\|^2+4\widehat{C}\left\|A^\theta\overset{\circ}{u}\right\|^2+2\varepsilon, \tag{6.53}$$

где

$$\widehat{C}=\lambda_2^{-4\theta}4000\left(1+C_\beta\right)^2\left(1+\left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{7/8}+\left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{1-\beta/\theta}\left\|A^\theta\overset{\circ}{u}\right\|^{\beta/\theta}\right)^2.$$

Так как по предположениям теоремы 6.1 $\left\|A^\theta\overset{\circ}{u}\right\|\le C_\theta$, а по условию $\left\|\overset{\circ}{u}\right\|\ge 1$, то из (6.53) получаем

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\|^2\le\left\|f\left(\overset{\circ}{u}\right)\right\|^2+\lambda_2^{-4\theta}16000\left(1+C_\beta\right)^2C_\theta^2\left(1+\left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{7/8}+\left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{1-\beta/\theta}C_\theta^{\beta/\theta}\right)^2+2\varepsilon\le$$

$$\le\left\|\overset{\circ}{u}\right\|^{2\alpha}\left(\left\|f\left(\overset{\circ}{u}\right)\right\|^2+\lambda_2^{-4\theta}16000\left(1+C_\beta\right)^2C_\theta^2\left(2+C_\theta^{\beta/\theta}\right)^2+2\varepsilon\right), \tag{6.54}$$

где $\alpha=max\left\{7/8,\,1-\beta/\theta\right\}$. Очевидно, что $0<\alpha<1$. Поэтому из (6.54) находим

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\|\le\left(\left\|f\left(\overset{\circ}{u}\right)\right\|^2+\lambda_1^{-4\theta}16000\left(1+C_\beta\right)^2C_\theta^2\left(2+C_\theta^{\beta/\theta}\right)^2+2\varepsilon\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\left\|\overset{\circ}{u}\right\|\le C_1\left(1+\left\|f\left(\overset{\circ}{u}\right)\right\|^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\right),$$

где константа C_1 зависит только от C_β, θ и β из условия (У.1), а также от C_θ, но не зависит от размерности пространства $\widehat{H}$.

Таким образом оценка (6.1) получена в случае **(i).**

Рассмотрим теперь **случай (ii)**, когда процесс построения $\overset{2}{u}, \overset{3}{u}, \ldots$ бесконечен.

Тогда, по крайней мере, одна из лемм 6.7 или 6.8 используется бесконечное число раз. Это следует из того, что за каждым случаем применения следствия 6.1 применяется одна из лемм 6.7 или 6.8. Таким образом, возможны 2 случая:

(ii.1) - случай, когда бесконечное число раз используется лемма 6.7;

(ii.2) - случай, когда лемма 6.7 используется конечное число раз, а лемма 6.8 - бесконечное число раз.

Разберем сначала случай **(ii.1)**, то есть случай, когда бесконечное число раз используется лемма 6.7. Тогда из (6.49) имеем

$$\left\| A^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty}{}^{(1)} \int\limits_{\triangle_{j,1}} \|R(u(\xi))\|^2 \, d\xi.$$

Обозначим $\delta_j \equiv \inf\limits_{\xi \in \triangle_{j,1}} \|R(u(\xi))\|$, $r_{0\,j} = \min\{1, \ \delta_j\}$. Тогда в силу леммы 6.7 имеем, что

$$\left\| A^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\|^2 \geq \sum_{j \geq 1}^{\infty}{}^{(1)} \varphi(r_{0\,j}) \delta_j^2,$$

где $\varphi(\cdot)$ - неотрицательная монотонно возрастающая функция. Здесь обращаем внимание на то, что из этой оценки следует сходимость бесконечного ряда справа. Поэтому, очевидно, $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Отсюда вытекает, что найдется такая последовательность чисел $\xi_{\mathrm{j}} \in \triangle_{j,1}$, что

$$\lim_{j \to \infty} \|R(u(\xi_j))\| = 0. \tag{6.55}$$

Следовательно, из леммы 6.4 получаем, что

$$\left\| \overset{\circ}{u} \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \left\| \overset{n}{u} \right\|^2 \leq \lim_{n \to \infty} \left\| f\left(\overset{n}{u} \right) \right\|^2.$$

Тогда в силу (6.52) выполнено неравенство

$$\left\| \overset{\circ}{u} \right\|^2 \leq \left\| f\left(\overset{\circ}{u} \right) \right\|^2 + 4\widehat{C} \left\| A^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\|^2 + 2\varepsilon.$$

Отсюда, действуя, как и в случае **(i)**, получаем оценку (6.1), где константа C_1 зависит только от C_β, θ и β из условия (У.1), а также от C_θ, но не зависит от размерности пространства $\widehat{H}$. Случай **(ii.1)** рассмотрен полностью.

Разберем теперь случай **(ii.2)**, то есть случай, когда бесконечное число раз используется лемма 6.8. Тогда из (6.51) имеем

$$\left\|A^\theta \overset{\circ}{u}\right\|^2 \geq \sum_{j\geq 1}^{\infty}{}^{(2)} \int\limits_{\triangle_{j,2}} \|R(u(\xi))\|^2 \, d\xi.$$

Далее ход получения оценки полностью совпадает с рассуждениями случая **(ii.1)**.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи процессов построения последовательностей $\overset{2}{u}, \overset{3}{u}, \ldots$. И во всех случаях нами из слабой оценки получена сильная оценка (6.1).

Теорема 6.1 в конечномерном случае доказана.

При этом еще раз подчеркнем, что константа C_1 зависит только от C_β и β из условия (У.1), а также от θ и C_θ, но не зависит от размерности пространства $\widehat{H}$.

Существуют очень много стандартных методов, которые из полученной в конечномерном случае оценки позволяют вывести априорную оценку в общем случае, которые многие авторы называют методом Галёркина. Поэтому дальнейший путь доказательства леммы 6.1 опирается на стандартные известные приемы.

Докажем теперь теорему 6.1 в бесконечномерном случае.

Пусть P_N - есть N-мерные ($N < \infty$) ортогональные проекторы в $\widehat{H}$, перестановочные с оператором A, такие, что P_N при $N \to \infty$ сильно сходится к единичному оператору. То есть, $P_N x \to x$ при $N \to \infty$ для любого $x \in \widehat{H}$.

Обозначим через $H^{(N)}$ гильбертово пространство размерности N и равное $H^{(N)} \equiv P_N \widehat{H}$. В $H^{(N)}$ в качестве скалярного произведения берется индуцированное из $\widehat{H}$ скалярное произведение, т.е. если $x, y \in H^{(N)}$, то $\langle x, y\rangle_{H^{(N)}} = \langle x, y\rangle_{\widehat{H}}$.

В $H^{(N)}$ определим самосопряженный оператор A_N: если $x \in H^{(N)}$, то

$$A_N x = P_N A x = P_N A P_N x.$$

Определим билинейное преобразование $L^{(N)}$, положив, если $x, y \in H^{(N)}$, то

$$L^{(N)}(x, y) = P_N L(x, y) = P_N L\left(P_N x, P_N y\right).$$

Проектор P_N возьмем так, чтобы размерность собственного подпространства $G_{1,N} = \left\{x \in H^{(N)}, A_N x = x\right\}$ была не ниже чем, 20.

Покажем, что в $H^{(N)}$ для пары A_N и $L^{(N)}(\cdot,\cdot)$ выполнены условия (У.1), (У.2), (У.3) и (У.4) и причем константы в этих условиях не зависят от N.

В силу выбора P_N и $N < \infty$ выполнение условий (У.2) и (У.3) очевидно. Остается проверить условия (У.4) и (У.1).

Покажем, что выполнены условия (У.4).

Если $u \in H^{(N)}$ и e удовлетворяет уравнению $A_N e = e$, то имеем $P_N u = u$, $P_N e = e$ и $Ae = e$. Поэтому

$$L^{(N)}\left(e, u\right) = P_N L\left(P_N e, P_N e\right) = P_N L\left(e, u\right) = 0,$$

$$L^{(N)}\left(u, e\right) = P_N L\left(P_N u, P_N e\right) = P_N L\left(u, e\right) = 0,$$

$$L_e^{(N)} u = L_u^{(N)} e = L^{(N)}(u, e) + L^{(N)}(e, u) = 0.$$

Для произвольного $g \in H^{(N)}$ имеем

$$\left\langle L_e^{(N)*} u, g\right\rangle = \left\langle u, L_e^{(N)} g\right\rangle = 0,$$

$$\left\langle L_u^{(N)*} e, g\right\rangle = \left\langle e, L_u^{(N)} g\right\rangle = \left\langle e, P_N L\left(P_N u, P_N g\right)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle e, P_N L\left(P_N g, P_N u\right)\right\rangle = \left\langle e, L(u, g) + L(g, u)\right\rangle = \left\langle e, L_u g\right\rangle = \left\langle L_u^* e, g\right\rangle = 0.$$

В силу произвольности $g \in H^{(N)}$ имеем $L_e^{(N)*} u = L_u^{(N)*} e = 0$.

Выполненность условия (У.4) доказана.

Докажем выполнение условия (У.1). Имеем: если $g, u \in H^{(N)}$, то

$$\left\langle A_N u, u\right\rangle_{H^{(N)}} = \left\langle P_N A P_N u, P_N u\right\rangle_{\widehat{H}} = \left\langle A P_N u, P_N u\right\rangle \geq \left\|P_N u\right\|_{\widehat{H}}^2 = \left\|u\right\|_{H^{(N)}}^2,$$

$$\left\|L^{(N)}\left(g, u\right)\right\|_{H^{(N)}} = \left\|P_N L\left(P_N g, P_N u\right)\right\|_{\widehat{H}} \leq \left\|L\left(P_N g, P_N u\right)\right\|_{\widehat{H}} \leq$$

$$\leq C_\beta \left\|A^\beta P_N g\right\|_{\widehat{H}} \left\|A^\beta P_N u\right\|_{\widehat{H}} = C_\beta \left\|A_N^\beta g\right\|_{H^{(N)}} \left\|A^\beta u\right\|_{H^{(N)}}.$$

Мы доказали выполнение неравенств условия (У.1).

Таким образом, если в $\widehat{H}$ выполнены условия (У.1), (У.2), (У.3) и (У.4), то для конечномерных операторов A_N и $L^{(N)}(\cdot,\cdot)$ в $H^{(N)}$ эти условия также выполняются и с теми же константами.

Пусть для $\overset{\circ}{u} \in \widehat{H}$ выполнено условие

$$\left\| A^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\| \leq C_{\theta}.$$

Тогда по построению проекторов P_N имеем

$$P_N \overset{\circ}{u} \to \overset{\circ}{u},$$

$$A_N^{\theta} \overset{\circ}{u} \equiv P_N A^{\theta} P_N \overset{\circ}{u} \to A^{\theta} \overset{\circ}{u}.$$

Здесь знак "$\to$" означает сильную сходимость при $N \to \infty$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое N_{ε} такое, что для всех $N > N_{\varepsilon}$ имеет место

$$-\varepsilon \left\| A^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\| \leq \left\| A^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\| - \left\| A_N^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\| \leq \varepsilon \left\| A^{\theta} \overset{\circ}{u} \right\|, \tag{6.56}$$

$$-\varepsilon \left\| \overset{\circ}{u} \right\| \leq \left\| \overset{\circ}{u} \right\| - \left\| P_N \overset{\circ}{u} \right\| \leq \varepsilon \left\| \overset{\circ}{u} \right\|. \tag{6.57}$$

Из (6.56) вытекает, что для больших N имеет место оценка $\left\| A_N^{\theta} \overset{0}{u} \right\| \leq (1-\varepsilon) \left\| A^{\theta} \overset{0}{u} \right\| \leq C_{\theta}$. То есть выполнены все условия теоремы 6.1. Поэтому из теоремы 6.1, доказанной в конечномерном случае, получаем сильную оценку

$$\left\| P_N \overset{\circ}{u} \right\| \leq C_1 \left(1 + \left\| P_N f \left(P_N \overset{\circ}{u} \right) \right\| + \left\| P_N f \left(P_N \overset{\circ}{u} \right) \right\|^{l} \right),$$

где константы C_1и l не зависят от N.

Отсюда и из (6.57) находим

$$\left\| \overset{\circ}{u} \right\| \leq \frac{C_1}{1-\varepsilon} \left(1 + \left\| P_N f \left(P_N \overset{\circ}{u} \right) \right\| + \left\| P_N f \left(P_N \overset{\circ}{u} \right) \right\|^{l} \right).$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, в силу непрерывности $f(\cdot)$, получаем сильную оценку теоремы 6.1 в бесконечномерном случае.

Теорема 6.1 доказана полностью. □

Теперь нам необходимо избавиться от условия (У.4).

Предположим, что выполнены условия (У.1), (У.2) и (У.3). Пусть P - ортогональный проектор на собственное подпространство

$$G_{\lambda_1} = \{x : Ax = x\}.$$

Для $f(u) = u + L(u,u)$ имеем

$$f(u) = u + (E-P)\,L\,((E-P)\,u, (E-P)\,u) +$$

$$+\Big(L\,(u,u) - (E-P)\,L\,((E-P)\,u, (E-P)\,u)\Big) =$$

$$= u + \tilde{L}(u,u) + \Big(\,(E-P)\,L\,(Pu,u) + L\,(u,Pu) + L\,(Pu,Pu)\Big) + PL(u,u).$$

Можно рассматривать билинейный оператор

$$\tilde{L}(u,v) = (E-P)\,L((E-P)\,u, (E-P)\,v),$$

как главную нелинейность оператора $L(u,v)$, а выражение

$$L_P\,(u,v) = (E-P)\,\Big(L(Pu,v) + L(u,Pv) + L(Pu,Pv)\Big) + PL(u,v)$$

рассматривать, как его возмущение.

Покажем, что для $\tilde{L}(\cdot,\cdot)$ выполняется условие (У.4). Действительно пусть $e \in G_{\lambda_1} = (x : Ax = x)$ и $u \in \widehat{H}$. Тогда имеем

$$\tilde{L}(e,u) = (E-P)\,L((E-P)\,e, (E-P)\,u) = 0,$$

так как$(E-P)\,e = 0$.

Аналогично $\tilde{L}(u,e) = 0$. Поэтому

$$\tilde{L}_u e = \tilde{L}(e,u) + \tilde{L}(u,e) = 0,\ \tilde{L}_e u = \tilde{L}(e,u) + \tilde{L}(u,e) = 0.$$

Так как $(E-P)\,e = 0$, то для произвольного $g \in \widehat{H}$ имеем

$$\Big\langle \widetilde{L}_u^* e, g \Big\rangle = \Big\langle e, \tilde{L}_u g \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle e, (E-P)\,\Big(L((E-P)\,u, (E-P)\,g) + L\,((E-P)\,g, (E-P)\,u)\Big)\Big\rangle =$$

$$= \left\langle (E-P)\,e, \Big(L((E-P)\,u, (E-P)\,g) + L\left((E-P)\,g, (E-P)\,u\right)\Big)\right\rangle = 0.$$

А для $\left\langle \widetilde{L}_e^* u, g\right\rangle$ в силу $(E-P)\,e = 0$ сразу имеем

$$\left\langle \widetilde{L}_e^* u, g\right\rangle = \left\langle u, \tilde{L}_e g\right\rangle = 0.$$

Таким образом, выполненность условия (У.4) для $\tilde{L}(\cdot,\cdot)$ доказана.

Покажем, что для $\tilde{L}(\cdot,\cdot)$ выполняется условие (У.1). Так как P - ортогональный проектор на собственное подпространство, то он перестановочен с оператором A и с любой его степенью. Поэтому

$$\left\|(E-P)\,\tilde{L}(u,v)\right\| \le \left\|L\left((E-P)\,u, (E-P)\,v\right)\right\| \le$$

$$\le C_\beta \left\|A^\beta\,(E-P)\,u\right\| \left\|A^\beta\,(E-P)\,v\right\| \le C_\beta \left\|A^\beta u\right\| \left\|A^\beta v\right\|.$$

То есть мы доказали второе неравенство из условия (У.1). Первое же неравенство из условия (У.1) касается только оператора A .

Таким образом, выполненность условия (У.1) для $\tilde{L}(\cdot,\cdot)$ доказана.

Выполненность условия (У.2) для $\tilde{L}(\cdot,\cdot)$ также является простым следствием перестановочности операторов P и A.

Условие (У.3) оператора $\tilde{L}(\cdot,\cdot)$ не касается.

Таким образом, если для билинейного оператора $L(u,v)$ выполнены три условия (У.1), (У.2) и (У.3), то для оператора $\tilde{L}(\cdot,\cdot)$ выполнены четыре условия (У.1), (У.2), (У.3) и (У.4).

От $L_P(\cdot,\cdot)$ потребуем, чтобы выполнялось

Условие (У.5). При некоторых постоянных $n \ge 0$ и $C_P > 0$ выполнена оценка

$$\left\|L_P\,(u,u)\right\| \le C_P\left(\left\|u + L\,(u,u)\right\| + \left\|u + L\,(u,u)\right\|^n\right). \tag{6.58}$$

Справедлива

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия (У.1), (У.2), (У.3) и (У.5). Предположим, что для некоторого $\mathring{u} \in \widehat{H}$ выполнена слабая оценка*

$$\left\|A^\theta \mathring{u}\right\| \le C_\theta,$$

где $\theta < \min(-3/4, \beta)$*, а* β *- из условия (У.1). Тогда для* $\mathring{u}$ *верна сильная оценка*

$$\left\|\mathring{u}\right\| \leq C_2 \left(1 + \left\|\mathring{f}\right\| + \left\|\mathring{f}\right\|^m\right), \quad \text{где } \mathring{f} = \mathring{u} + L\left(\mathring{u}, \mathring{u}\right). \tag{6.59}$$

Здесь C_2 *и* m *- зависят только от* C_β *и* β *из условия (У.1), от* C_P *и* n *из условия (У.5), а также от* C_θ *и* θ*.*

Доказательство. Для $\tilde{L}(\cdot,\cdot)$ и A выполнены все условия теоремы 6.1. Поэтому для $\mathring{u} \in \widehat{H}$ получаем

$$\left\|\mathring{u}\right\| \leq C_1 \left(1 + \left\|\mathring{u} + \tilde{L}\left(\mathring{u}, \mathring{u}\right)\right\| + \left\|\mathring{u} + \tilde{L}\left(\mathring{u}, \mathring{u}\right)\right\|^l\right), \tag{6.60}$$

где C_1 и l - зависят только от C_β и β из условия (У.1), а также от C_θи θ.

Следующее неравенство очевидно:

$$\left\|\mathring{u} + \tilde{L}(\mathring{u}, \mathring{u})\right\| = \left\|\mathring{u} + L(\mathring{u}, \mathring{u}) - L_P\left(\mathring{u}, \mathring{u}\right)\right\| \leq \left\|\mathring{u} + L(\mathring{u}, \mathring{u})\right\| + \left\|L_P\left(\mathring{u}, \mathring{u}\right)\right\|.$$

Воспользуемся здесь оценкой (6.58) условия (У.5), тогда

$$\left\|\mathring{u} + \tilde{L}(\mathring{u}, \mathring{u})\right\| \leq (C_P + 1)\left(\left\|\mathring{u} + L(\mathring{u}, \mathring{u})\right\| + \left\|\mathring{u} + L(\mathring{u}, \mathring{u})\right\|^n\right).$$

Подставляя полученное в (6.60), получаем (6.59).

Теорема 6.2 доказана. □

Отметим, что для многих задач условие (У.5) автоматически выполняется. Однако автор считает интересным рассмотреть следующую задачу.

Задача N1. *Доказать теорему 6.2, не используя условие (У.5).*

7 Оценки решений абстрактных уравнений типа Навье-Стокса и доказательство теоремы 2

В этом разделе мы теорему 2 выведем из теоремы 6.2. Отметим, что мы могли бы значительно сократить (или вообще не писать) этот раздел, отделавшись ссылкой на выкладки из работ [26-30] или из работы Р.С. Сакса [49], или из работ О.А. Ладыженской [2-5].

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, а $A = A^*$ - самосопряженный оператор в H, такой, что $A \geq \mu E$, то есть для любого $x \in H$ выполнено $\langle Ax, x \rangle \geq \mu \left| x \right|^2$, и пусть $(A - (\mu - 1)\,E))^{-1} = A_\mu^{-1} \in \sigma_\infty$. Здесь E - единица-оператор, а σ_∞ - класс вполне непрерывных операторов. Обозначим через $\lambda_{1,} \leq \lambda_{2,} \leq \ldots, \lambda_j \leq \ldots$ - собственные числа оператора A, занумерованные в порядке неубывания с учетом кратности, а через $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_j, \ldots$ - соответствующую полную ортонормированную систему собственных векторов.

Через $H_1 = H_1\,[0, a]$ обозначим гильбертово пространство, полученное пополнением множества вектор-функций, представимых в виде конечных сумм

$$\omega\,(t) = \sum_{\{j\}} \omega_j(t) e_j \tag{7.1}$$

по норме

$$\left\| \omega\,(\cdot) \right\|_{H_1} = \left(\int_0^a \left\| \omega(t) \right\|_H^2 dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{\{j\}} \int_0^a \left| \omega(t) \right|^2 dt \right)^{1/2},$$

где $\omega_j(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $[0,\mathrm{a}]$ скалярные функции.

Пусть еще $B_0(\cdot,\cdot)$ - билинейный оператор, определенный при $u, v \in D(A)$, где $D(\cdot)$ - область определения. Будем предполагать, что выполнены условия B1, B2, B3 и B4 (см. раздел 3).

Теперь рассмотрим задачу

$$\begin{cases} v_t + Av + B\,(v, v) = f\,(t) \in H_1 = H_1\,[0, a]\,, \\ \qquad\qquad v(t)|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

где $B\,(v, v) = \varphi(t) B_0\,(v, v)$, $\varphi(t)$ - непрерывная на $[0, a]$ функция. Наличие $\varphi(t)$ существенной роли не играет, но нам удобно использовать уравнение в котором присутствует $\varphi(t)$.

Очевидно, что $B\,(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям B1-B4.

В дальнейшем всюду в этом разделе, не уменьшая общности, можно считать, что $A \geq E$. В противном случае в рассматриваемом уравнении можно сделать замену $v\,(t) = e^{(-\mu+1)t} \tilde{v}(t)$. Тогда вместо (7.2) получим задачу

$$\begin{cases} \tilde{v}_t + (A - (\mu - 1)\,E)\tilde{v} + e^{(-\mu+1)t} B\,(\tilde{v}, \tilde{v}) = Ba^{-(\mu-1)t} f\,(t)\,, \\ \qquad\qquad \widetilde{v}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

В этом уравнении вместо $B(\cdot,\cdot)$ выступает $e^{(-\mu+1)t}B(\cdot,\cdot)$, а вместо A - оператор $A-(\mu-1)E \geq E$. Поэтому всюду в дальнейшем считаем $A \geq E$.

Обозначив $v_t + Av = u(t)$ запишем (7.2) в «ограниченной форме» (в виде интегрального уравнения):

$$u + \tilde{B}(u,u) = f(t) \in H_1, \tag{7.3}$$

где

$$\tilde{B}(u,u) = B(Tu,Tu), \quad Tu = \int_0^t e^{-A(t-\eta)}u(\eta)d\eta.$$

Здесь $e^{-A(t-\eta)}$ понимается в смысле спектрального разложения.

В теореме 6.2 из раздела 6 получена оценка для решения $u(\cdot)$ уравнения вида (7.3). Но $u = v_t + Av$, где v - из (7.2). Поэтому фактически в теореме 6.2 получена сильная оценка решения задачи (7.2).

Следовательно, все элементы дальнейшего доказательства теоремы 2 в той или иной форме известны. Существует множество работ, в которых, предполагая, что решение Е. Хопфа обладает некоторой дополнительной гладкостью, повышают гладкость решения до тех пор, пока не получится гладкость решения такой, какая она есть в моих теоремах.

Лемма 7.1. *Пусть $\omega(t)$ - вектор-функция, представимая в виде* (7.1), *такая, что $\omega(0)=0$. Тогда*

$$\|\omega(t)\|_H^2 + \int_0^t \left\|A^{1/2}\omega(\eta)\right\|_H^2 d\eta \leq \int_0^t \left\|A^{-1/2}\left[\omega'(\eta) + A\omega(\eta) + B(\omega,\omega)\right]\right\|_H^2 d\eta.$$

Это есть энергетическая оценка, которая в ранее известных работах использовалась для доказательства существования слабого решения.

Для доказательства этой леммы обозначим $f(t) = \omega' + A\omega + B(\omega,\omega)$. Тогда имеем

$$\int_0^t <\omega' + A\omega + B(\omega,\omega), \omega>_H d\eta = \int_0^t <f,\omega>_H d\eta \leq$$

$$\leq \int_0^t <A^{-1/2}f, A^{1/2}\omega>_H d\eta \leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|A^{-1/2}f\right\|_H^2 d\eta + 1/2\int_0^t \left\|A^{1/2}\omega\right\|_H^2 d\eta.$$

Но с учетом условия B3 имеем

$$\int_0^t <\omega' + A\omega + B(\omega,\omega), \omega>_H = \frac{\|\omega(t)\|_H^2}{2} + \int_0^t \left\|A^{1/2}\omega(\eta)\right\|_H^2 d\eta.$$

Из этих двух соотношений, так как $A \geq E$, $A^{-1/2} \leq E$, вытекает лемма. □

Неравенство леммы, доказанное для $\omega(t)$, представимых в виде (7.1), распространяются на все такие $\omega(t)$, которые таковы, что

$$\omega = \lim_{j\to\infty} \omega_j,$$

$$A^{-1/2}(\omega' + A\omega + B(\omega,\omega)) = \lim_{j\to\infty} A^{-1/2}(\omega_j' + A\omega_j + B(\omega_j,\omega_j)).$$

Здесь пределы понимаются в смысле $H_1[0,a]$, а $\omega_j(t)$ - из класса вектор-функций, представимых в виде (7.1). Такой общеизвестный прием нами будет применяться часто (возможно без оговорок).

Лемма 7.2. *Пусть* $\omega(0) = 0$ *и* $\omega'(t) + A\omega(t) = g(t)$. *Тогда для любого* $\alpha \in (-\infty,\infty)$ *при* $t \geq 0$ *верна оценка*

$$\|A^\alpha\omega(t)\|^2 + \int_0^t \left\|A^{\alpha+1/2}\omega(\eta)\right\|^2 d\eta \leq \int_0^t \left\|A^{\alpha-1/2}g(\eta)\right\|^2 d\eta.$$

Доказательство. Умножим скалярно уравнение $\omega'(t) + A\omega(t) = g(t)$ на $A^{2\alpha}\omega(t)$ и проинтегрируем, тогда имеем

$$\frac{\|A^\alpha\omega(t)\|^2}{2} + \int_0^t \left\|A^{\alpha+1/2}\omega(\eta)\right\|^2 d\eta = \int_0^t < A^{\alpha+1/2}\omega(\eta),\ A^{\alpha-1/2}g(\eta) > d\eta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|A^{1/2+\alpha}\omega(\eta)\right\|^2 d\eta + 1/2\int_0^t \left\|A^{\alpha-1/2}g(\eta)\right\|^2 d\eta.$$

Сравнивая конец и начало этих неравенств, получаем лемму. □

Лемма 7.3. *Пусть* $\omega(0) = 0$ *и* $\omega' + A\omega = g \in H_1[0,a]$. *Тогда выполнено неравенство*

$$\left\|A^\theta(\omega' + A\omega)\right\|_{H_1}^2 \leq 2\Big(K_\theta^2 \left\|\omega' + A\omega + B(\omega,\omega)\right\|_{H_1}^4 + \left\|\omega' + A\omega + B(\omega,\omega)\right\|_{H_1}^2\Big),$$

где θ и K_θ - из условия B2 (см. раздел 3).
Доказательство. Имеем

$$\left\|A^{\theta}\left(\omega'+A\omega\right)\right\|_{H}^{2}\leq 2\left\|A^{\theta}\left(\omega'+A\omega+B\left(\omega,\omega\right)\right)\right\|_{H}^{2}+2\left\|A^{\theta}B\left(\omega,\omega\right)\right\|^{2}\leq$$

$$\leq 2\left\|A^{\theta}\left(\omega'+A\omega+B\left(\omega,\omega\right)\right)\right\|^{2}+2K_{\theta}^{2}\left\|A^{1/2}\omega\right\|^{2}\|\omega\|^{2}.$$

В последнем переходе мы использовали условие B2. Теперь проинтегрируем это неравенство. Тогда, пользуясь леммой 7.2 и тем, что $\theta<0$ и $A\geq E$, получаем нужное неравенство. □

Лемма 7.4. *Если $u+\tilde{B}\left(u,u\right)=f$, то верно неравенство*

$$\left\|A^{\theta}u\right\|_{H}^{2}\leq 2K_{\theta}^{2}\left[\|f(\cdot)\|_{H_1}^{2}+\|f(\cdot)\|_{H_1}^{4}\right].$$

Здесь K_θ - из условия B2, а $\tilde{B}\left(u,u\right)=B\left(Tu,Tu\right)$.
Доказательство. Эта лемма получается из леммы 7.3, если обозначить $Tu=\omega$ (т.е., если обозначить $\omega'+A\omega=u$). □

Лемма 7.5. *Если $\tilde{B}\left(u,v\right)=B\left(Tu,Tv\right)$, то справедлива оценка*

$$\left\|\tilde{B}\left(u,v\right)\right\|_{H_1}^{2}\leq 2K_{\gamma}^{2}\left\|A^{\gamma-1/2}u\right\|_{H_1}^{2}\left\|A^{\gamma-1/2}v\right\|_{H_1}^{2}.$$

Здесь K_γ - из условия B1, а $\tilde{B}\left(\cdot,\cdot\right)$ - из (7.3).
Доказательство. Имеем

$$\left\|\tilde{B}\left(u,v\right)\right\|_{H_1}^{2}=\int_0^a\|B\left(Tu,Tv\right)\|_{H}^{2}(\eta)d\eta\leq$$

$$\leq K_{\gamma}^{2}\int_0^a\left[\left\|A^{\gamma+1/2}Tu\right\|^{2}\|A^{\gamma}Tv\|^{2}+\|A^{\gamma}Tu\|^{2}\left\|A^{\gamma+1/2}Tv\right\|^{2}\right](\eta)d\eta.$$

Мы под интегралом использовали условие B1.

Теперь, в силу равенств $\left(\frac{d}{dt}+A\right)T\ u=u,\ \left(T\ u\right)(0)=0$, можно применить лемму 7.2, из которой следует

$$\int_0^a\left\|A^{\gamma+1/2}Tu\right\|^{2}d\eta\leq\int_0^a\left\|A^{\gamma-1/2}u\right\|^{2}d\eta,$$

$$\sup_{0\le t\le 1} \|A^{\gamma}Tu\|^2 (t) \le \int_0^a \left\|A^{\gamma-1/2}u\right\|^2 (\eta)d\eta.$$

В точности такое же неравенство верно, если поменять u на v. Поэтому, подставляя эти оценки в предыдущее неравенство, получаем доказательство леммы. □

Лемма 7.6. *Пусть оператор A в H не имеет кратных собственных чисел. Тогда, если $A\omega\,(t) = \mu\omega\,(t)\,, \quad \omega\,(t) \in H_1$, то $\omega\,(t) = \psi\,(t)\,e$ и $Ae = \mu e$, где $e \in H$, а $\psi\,(\cdot)$ - скалярная функция из $L_2(0,a)$.*

Доказательство. Вектор-функция $\omega\,(t)$ допускает представление

$$\omega\,(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j\,(t)\,e_j,\ \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^a |\omega_j\,(t)|^2\,dt \equiv \|\omega\|^2_{H_1}.$$

Для $A\omega$ имеем $A\omega = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \omega_j\,(t)\,e_j$, поэтому

$$0 = A\omega - \mu\omega = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j - \mu)\omega_j\,(t)\,e_j,$$

$$0 = \|A\omega - \mu\omega\|^2_{H_1} = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j - \mu)^2 \int_0^a |\omega_j\,(t)|^2\,dt.$$

Такое равенство (так как оператор A не имеет кратных собственных чисел) возможно, если и только если $\mu = \lambda_{j_0}$ при некотором натуральном j_0 и $\omega_j(t) = 0$ при $j \ne j_0$, а при $j = j_0$, $Ae_{j_0} = \mu e_{j_0}$, $\omega_{j_0}(t) = \psi\,(t)\,e_{j_0}$.

Лемма доказана. □

Лемма 7.7. *Пусть оператор A в H (*а не в *H_1) не имеет кратных собственных чисел. Тогда, если $A\omega\,(t) = \mu\omega(t)$ в H_1, то*

$$\left\langle \tilde{B}\,(\omega,\omega)\,,\omega\right\rangle_{H_1} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\left\langle \tilde{B}\,(\omega,\omega)\,,\omega\right\rangle_{H_1} = \int_0^a \langle B\,(T\omega, T\omega)\,,\omega\rangle_{H}(\eta)d\eta.$$

Но в силу леммы 7.6 имеем, что $\omega(t) = \widetilde{\varphi}(t)\,e$, где e - собственный вектор оператора A в H. Поэтому

$$(T\omega)(t) = \int_0^t e^{-A(t-\eta)}\omega(\eta)\,d\eta = \int_0^t e^{-\mu(t-\eta)}\tilde{\varphi}(\eta)\,ed\eta \equiv \psi(t)\,e,$$

где $\psi(t)$ - скалярная функция из $L_2(0,a)$.

Поэтому

$$\left\langle \tilde{B}(\omega,\omega),\omega\right\rangle_{H_1} = \int_0^a \langle B(\psi(\eta)e,\psi(\eta)e),\ \varphi(\eta)e\rangle_H(\eta)d\eta =$$

$$= \int_0^a \psi^2(\eta)\,\varphi(\eta)\,\langle B(e,e),e\rangle\,d\eta = 0.$$

Здесь в последнем переходе использовано B3.

Лемма доказана. □

Лемма 7.8. *Если $Ae = \lambda e$, $e \in H$, то λ - будет собственным числом бесконечной кратности оператора A, рассматриваемого в $H_1[0,a]$.*

Доказательство. Если $\psi(t) \in L_2(0,a)$ и $Ae = \lambda e$, то $\psi(t)\,e$ будет собственным вектором A в H_1. Поэтому, так как $L_2(0,a)$ - бесконечномерно, лемма (которая тривиальна!) доказана. □

Помимо оператора T введем еще оператор T^α $(0 < \alpha \le 1)$, действующий в H_1 по формуле

$$(T^\alpha\varpi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1}\,e^{-A(t-\eta)}\varpi(\eta)\,d\eta, \quad \varpi(\cdot) \in H_1, \tag{7.4}$$

где $\Gamma(\alpha)$ есть классическая гамма-функция. При $\alpha = 0$ оператор T^0 можно понимать, как сильный предел операторов T^α при $\alpha \to 0$. Можно показать, что сильный предел T^α при $\alpha \to 0$ равен E - единица-оператору.

Лемма 7.9. *Если $\alpha,\beta \in (0,1)$ и $\alpha+\beta \le 1$, то $T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta}$.*

Доказательство. Имеем

$$(T^\alpha T^\beta v)(t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t \Big((t-\eta)^{\alpha-1}\,e^{-A(t-\eta)}\int_0^\eta (\eta-\xi)^{\beta-1}\,e^{-A(\eta-\xi)}v(\xi)d\xi\Big)d\eta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t e^{-A(t-\eta)}v(\eta)\Big(\int_\eta^t (t-\xi)^{\alpha-1}\,(\xi-\eta)^{\beta-1}\,d\xi\Big)d\eta.$$

Но $\Gamma(1)=1$ и

$$\int_{\eta}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}(\xi-\eta)^{\beta-1}d\xi=\int_{0}^{t-\eta}(t-\eta-r)^{\alpha-1}r^{\beta-1}dr=$$

$$=\int_{0}^{t-\eta}(t-\eta)^{\alpha-1}\left(1-\frac{r}{t-\eta}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{r}{t+\eta}\right)^{\beta-1}(t-\eta)^{\beta}d\frac{r}{t-\eta}=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-\xi)^{\alpha+\beta-1}.$$

Поэтому $T^{\alpha}T^{\beta}=T^{\alpha+\beta}$. Лемма доказана. □

Лемма 7.10. *Пусть $0<\alpha\leq 1$ и $\lambda>0$, а $y(\cdot)\in L_2(0,a)$ - произвольная функция. Тогда*

$$\int_{0}^{a}\left|\int_{0}^{t}e^{-\lambda(t-\eta)}(t-\eta)^{\alpha-1}y(\eta)\,d\eta\right|^{2}d\eta\leq C_{\alpha}\lambda^{-2\alpha}\int_{0}^{a}|y(\eta)|^{2}\,d\eta.$$

Доказательство. Продолжим функцию $y(\eta)$ нулем из отрезка $[0,a]$ на всю ось $(-\infty,+\infty)$. Тогда имеем

$$S\equiv\int_{0}^{a}\left|\int_{0}^{t}e^{-\lambda(t-\eta)}(t-\eta)^{\alpha-1}y(\eta)\,d\eta\right|^{2}dt\leq$$

$$\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda|t-\eta|}|t-\eta|^{\alpha-1}|y(\eta)|\,d\eta\right)^{2}dt.$$

Внутренний интеграл здесь есть свертка функции $e^{-\lambda|t|}|t|^{\alpha-1}$ с функцией $|y(t)|$. Поэтому

$$S\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_{t\to\xi}\left(e^{-\lambda|t|}|t|^{\alpha-1}\right)F_{t\to\xi}\left(|y(t)|\right)\right|^{2}d\xi,$$

где F - преобразование Фурье. Но

$$\left|F_{t\to\xi}e^{-\lambda|t|}|t|^{\alpha-1}\right|\leq C_{\alpha}\lambda^{-\alpha}.$$

Поэтому, так как имеет место равенство Парсеваля

$$\|F(y)\|_{L_2(-\infty,\infty)}=\|y(\cdot)\|_{L_2(-\infty,\infty)}=\|y\|_{L_2(0,a)},$$

получаем лемму. □

Лемма 7.11. *Если $0 < \alpha \leq 1$, то оператор T^{α} вполне непрерывен в H_1.*

Доказательство. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ - полная ортонормированная система собственных векторов оператора A и $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ - соответствующие собственные числа (они занумерованы в порядке неубывания). Так как $A^{-1} \in \sigma_{\infty}$, то имеем, что $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to \infty$.

Если $\omega(t) \in H_1$, то

$$\omega(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(t) e_j, \; \|\omega(t)\|_{H_1}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^a |\omega_j(\eta)|^2 d\eta,$$

и

$$(T^{\alpha}\omega)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^t \omega_j(\eta)(t-\eta)^{\alpha-1} e^{-\lambda_j(t-\eta)} d\eta \right] e_j.$$

Отсюда и из леммы 7.10 вытекают ограниченность T^{α} при $0 < \alpha \leq 1$.

Так как операторы с ядром $(t-\eta)^{\alpha-1} e^{-\lambda_j(t-\eta)}$ в $L_2(0,1)$ есть интегральные операторы со слабой особенностью, то (согласно классической теореме об интегральных операторах) они компактны. Поэтому оператор T_N^{α} , действующий по формуле

$$(T_N^{\alpha}\omega)(t) = \sum_{j=1}^{N} \left[\int_0^t \omega_j(\eta)(t-\eta)^{\alpha-1} e^{-\lambda_j(t-\eta)} d\eta \right] e_j$$

при любом натуральном N, вполне непрерывен. Согласно классическим результатам о вполне непрерывных операторах, нам достаточно показать, что

$\|T^{\alpha} - T_N^{\alpha}\|_{H_1 \to H_1} \to 0$ при $N \to \infty$.

Но

$$\|(T^{\alpha} - T_N^{\alpha}) \varpi_{H_1}\|^2 = \sum_{j \geq N} \int_0^a \left| \int_0^t \omega_j(\eta)(t-\eta)^{\alpha-1} e^{-\lambda_j(t-\eta)} d\eta) \right|^2 dt \leq$$

$$\leq C_{\alpha} \sum_{j \geq N} \lambda_j^{-2\alpha} \int_0^a |\omega_j(\eta)|^2 d\eta \leq C_{\alpha} \lambda_N^{-2\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 |\omega_j(\eta)|^2 d\eta =$$

$$= C_\alpha \lambda_N^{-2\alpha} \left\|\omega\right\|^2_{H_1}.$$

В этих переходах использована лемма 7.10. Отсюда в силу произвольности $\omega \in H_1$ и так как $\lambda_N \to +\infty$ вытекает $T_N^\alpha \to T^\alpha$ в операторной топологии. Поэтому лемма доказана. □

Лемма 7.12. *Если $\beta < \alpha$, то оператор $A^\beta T^\alpha$ ограничен в $H_1 = H_1[0,a]$, а если же $\beta < \alpha - 1/2$ $(\alpha > 1/2)$, то*

$$\sup_{t\in(0,a)} \left\| A^\beta T^\alpha V(\cdot)\right\|_H \le C \left\|V\right\|_{H_1}.$$

Доказательство. Имеем

$$S = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^a \left\| A^\beta \int_0^t e^{A(t-\eta)} (t-\eta)^{\alpha-1} V(\eta)\, d\eta \right\|_H^2 dt \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 \int_0^a \left(\int_0^t \left\| A^\beta (t-\eta)^\beta e^{-A(t-\eta)} \frac{V(\eta)}{(t-\eta)^{1-\alpha+\beta}} \right\|_H d\eta \right)^2 dt.$$

Из спектрального разложения получаем

$$\left\| A^\beta (t-\eta)^\beta e^{-A(t-\eta)} \right\|_{H\to H} \le \sup_{x>0} \left(x^\beta\ e^{-x} \right) = R_\beta < \infty. \tag{7.5}$$

Поэтому

$$S \le \frac{R_\beta}{\Gamma(\alpha)^2} \int_0^a \left(\int_0^t \frac{\left\|V(\eta)\right\|_H}{(t-\eta)^{1-\alpha+\beta}} d\eta \right)^2 dt.$$

Теперь, если $\alpha > \beta$, то из классической теоремы интегральных операторов с ядром со слабой особенностью имеем, что

$$S \le \tilde{R}_{\beta,\alpha} \left\|V(\cdot)\right\|^2_{H_1}.$$

Отсюда вытекает ограниченность оператора $A^\beta T^\alpha$ из H_1 в H_1.

Если же $0 \le \beta < \alpha - 1/2 \quad (\alpha > 1/2)$, то из оценки (7.5) вытекает

$$\left\| A^\beta T^\alpha V(\cdot) \right\|_H \le \sup_t C \int_0^t \frac{\left\|V(\eta)\right\|_H}{(t-\eta)^{1-\alpha+\beta}} d\eta \le$$

$$\le C \left(\int_0^t \left\|V(\eta)\right\|^2_H d\eta \right)^{1/2} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{(t-\eta)^{1-\alpha+\beta}} \right)^2 d\eta \right)^{1/2} \le \widetilde{C}_{\alpha,\beta} \left\|V(\cdot)\right\|_{H_1}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 7.14. *Пусть последовательность* $u_1, u_2, ..., u_j, ...$ *из* H_1 *при* $j \to \infty$ *слабо сходится в метрике* H_1 *к элементу* $v \in H_1$. *Тогда последовательность вектор-функций* $\tilde{B}(u_j, u_j)$ *при* $j \to \infty$ *сильно сходится к* $\tilde{B}(v, v)$ *в метрике* H_1. *Здесь* $\tilde{B}(\cdot, \cdot)$ *из* (7.3).

Доказательство. Возьмем малое число $\delta > 0$. Имеем

$$\tilde{B}(u_j,\, u_j) \equiv B(Tu_j,\, Tu_j) = B\left(T^{1-\delta}T^{\delta}u_j,\, T^{1-\delta}T^{\delta}u_j\right).$$

В силу леммы 7.11 последовательность вектор-функций $g_j = T^{\delta}u_j$ сильно сходится к некоторому элементу $g \in H_1$. Покажем, что $g = T^{\delta}v$. Для произвольного $\omega \in H_1$ имеем

$$\lim_{j\to\infty} \langle \omega,\, g_j\rangle_{H_1} = \langle \omega,\, g\rangle_{H_1}$$

и

$$\lim_{j\to\infty} \langle \omega, g_j\rangle_{H_1} = \lim_{j\to+\infty} \left\langle \left(T^{\delta}\right)^{*}\omega,\, u_j\right\rangle_{H_1} = \left\langle \left(T^{\delta}\right)^{*}\omega,\, v\right\rangle_{H_1} = \left\langle \omega,\, T^{\delta}v\right\rangle_{H_1}.$$

Отсюда вытекает, что $g = T^{\delta}v$.

Далее

$$\gamma_j \equiv \left\| B(T^{1-\delta}g_j, T^{1-\delta}g_j) - B(T^{1-\delta}g, T^{1-\delta}g)\right\|_H =$$

$$= \left\| B(T^{1-\delta}(g_j-g), T^{1-\delta}g_j) + B(T^{1-\delta}g, T^{1-\delta}(g_j-g))\right\|_H \leq$$

$$\leq \left\| B(T^{1-\delta}(g_j-g), T^{1-\delta}g_j)\right\|_H + \left\| B(T^{1-\delta}g, T^{1-\delta}(g_j-g))\right\|_H.$$

Из последнего неравенства и условия (B.1) выводим

$$\gamma_j \leq K_{\gamma} \left\| |A^{\gamma+1/2}T^{1-\delta}(g_j-g)\right\|_H \left(\left\| A^{\gamma}T^{1-\delta}g_j\right\|_H + \left\| A^{\gamma}T^{1-\delta}g\right\|_H\right) +$$

$$+ \left\| A^{\gamma}T^{1-\delta}(g_j-g)\right\|_H \left(\left\| A^{\gamma+1/2}T^{1-\delta}g_j\right\|_H + \left\| A^{\gamma+1/2}T^{1-\delta}g\right\|_H\right).$$

Так $\gamma < 1/2$, то число $\delta > 0$ можно взять так, чтобы $\gamma + 1/2 < 1 - \delta$. Поэтому из леммы 7.12 вытекает

$$\gamma_j \leq K_{\gamma,\delta} \|g_j - g\|_{H_1}(\|g_j\|_{H_1} + \|g\|_{H_1}).$$

Поэтому, так как $g_j \to g$ сильно, то отсюда получаем $\gamma_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 7.15. *Пусть оператор $A \geq E$, $A^{-1} \in \sigma_\infty$, A не имеет кратных собственных чисел в H и выполнены условия B1 - B4. Предположим, что $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \geq 16$. Тогда, если $v(0) = 0$, то имеет место оценка*

$$\left\|v' + Av\right\|_{H_1} + \left\|v'\right\|_{H_1} + \|Av\|_{H_1} + \|B(v,v)\|_{H_1} \leq$$

$$\leq C\Big(1 + \left\|v' + Av + B(v,v)\right\|_{H_1} + \left\|v' + Av + B(v,v)\right\|_{H_1}^{l}\Big),$$

где C и l зависят только от постоянных из условий B1 и B2.

Доказательство. Достаточно доказать оценку для $\|v' + Av\|_{H_1}$, так как в силу леммы 7.2, в которой берем $\alpha = 1/2$, величина $\|Av\|_{H_1}$ оценивается через $\|v' + Av\|_{H_1}$. Но тогда v' также оценивается через $\|v' + Av\|_{H_1}$.

Для оценки $\|B(v,v)\|_{H_1}$ вспомним условие B1 и тогда, так как $v = T(v' + Av)$, то из леммы 7.12 получаем оценку $\|B(v,v)\|_{H_1}$ через $v' + Av \quad (v(0) = 0)$.

Для получения оценки для $v' + Av$ обозначим $v' + Av = u, \quad (v(0) = 0)$. Тогда достаточно оценить u в H_1 через $\left\|u + \tilde{B}(u,u)\right\|_{H_1}$, где $\tilde{B}(\cdot,\cdot)$ - из (7.3). Поэтому нам достаточно проверить выполнимость условий (У.1), (У.2), (У.3) и (У.5) из раздела 6, когда вместо $L(\cdot,\cdot)$ берется $\tilde{B}(\cdot,\cdot)$. Тогда нужная оценка будет вытекать из теоремы 6.2.

Условие (У.1) вытекает из леммы 7.5 - получаем второе неравенство условия (У.1), а первое неравенство очевидно.

Условие (У.2) вытекает из леммы 7.7, а условие (У.3) - из леммы 7.8 и из $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 \geq 16$.

Условие (У.5) следует из леммы 7.4, если учесть определение проектора P.

Таким образом, все условия теоремы 6.2 выполняются. Поэтому лемма вытекает из теоремы 6.2.

В нижеследующей лемме мы избавимся от ненужных ограничений на оператор A. $\square$

Лемма 7.16. *Пусть A - самосопряженный оператор, такой, что $A \geq E$, $A^{-1} \in \sigma_\infty$, а $B(\cdot,\cdot)$ - билинейный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что выполнены условия B1 - B4.*

Тогда, если $v(0) = 0$*, то верна оценка*

$$\left\|v'(\cdot)\right\|_{H_1} + \left\|v' + Av\right\|_{H_1} + \|Av\|_{H_1} + \|B(v,v)\|_{H_1} \leq$$

$$\leq \tilde{C}\left(1 + \|f\|_{H_1} + \|f\|_{H_1}^{l}\right) \ \left(f = v' + Av + B(v,v)\right), \qquad (7.6)$$

где $\tilde{C} < \infty$ *и* $l < \infty$ *зависят только от постоянных из условий B1 и B2.*
Доказательство. Пусть $1 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ - собственные числа оператора A, занумерованные в порядке неубывания с учетом кратности и $e_1, e_2, ...$ - соответствующие собственные вектора.

Возьмем константу $C > 16$. Обозначим через A_C оператор, действующий по формуле

$$A_C\varphi = \langle\varphi, e_1\rangle e_1 + C\sum_{\lambda_j \leq C,\, j\neq 1}\langle\varphi, e_j\rangle e_j + \sum_{\lambda_j > C}\lambda_j\langle\varphi, e_j\rangle e_j.$$

Если $\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2, ..., \widetilde{\mu}_j, ...$ - собственные числа этого оператора, то имеем $\widetilde{\mu}_1 = \lambda_1 = 1$ и $\widetilde{\mu}_j \geq C$, если $j \geq 2$.

Пусть A_ε следующий оператор:

$$A_\varepsilon\varphi = \sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon_j\langle\varphi, e_j\rangle e_j,$$

где $\varepsilon_j > 0$ - малые числа $(j = 1, 2, \dots)$.

Положим $A_{C,\varepsilon} = A_C + A_\varepsilon$. Обозначим через $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_i, ...$ - собственные числа оператора $A_{C,\varepsilon}$. Так как собственные числа A_ε равны ε_j при $j \geq 2$ и нулю при $j = 1$, а собственные вектора совпадают с собственными векторами A_C (и A), можно малые числа ε_j $(j = 1, 2, \dots)$ подобрать так, чтобы $\varepsilon_j > 0$ при $j \geq 2$ и $A_{C,\varepsilon}$ не имел кратных собственных чисел. Кроме того, их можно выбрать так, чтобы было $\mu_j \geq C$ при $j \geq 2$.

Очевидно, что оператор $A_{C,\varepsilon} - A$ ограничен, причем $A_{C,\varepsilon} \geq A$.

Условия, наложенные на A, выполняются и для оператора $A_{C,\varepsilon}$. Кроме того, оператор $A_{C,\varepsilon}$ при $C \gg 1$ удовлетворяет всем условиям леммы 7.15. Поэтому получаем оценку из леммы 7.15, в которой вместо A фигурирует $A_{C,\varepsilon}$. Но

$$\|v_t + A_{C,\varepsilon}v + B(v,v)\|_{H_1} = \|v_t + Av + B(v,v) + (A_{C,\varepsilon} - A)v\|_{H_1} \leq$$

$$\leq \|(A_{C,\varepsilon} - A)v\|_{H_1} + \|v_t + Av + B\,(v,v)\|_{H_1}\,.$$

Оператор $A_{C,\varepsilon}$ – A ограничен, т.е. $\|A_{C,\varepsilon} - A\| \leq K_{C,\varepsilon} < \infty$, где $K_{C,\varepsilon}$ зависит от C и ε. Поэтому

$$\|(A_{C,\varepsilon} - A)\,v\|_{H_1} \leq K_{C,\varepsilon}\,\|v\|_{H_1} \leq \|K_{C,\varepsilon}\|_{H_1}\,\|v_t + Av + B\,(v,v)\|_{H_1}\,.$$

В последнем переходе мы использовали энергетическую оценку типа Е. Хопфа из леммы 7.1.

Лемма доказана. □

Так как уравнение (7.2) - параболическое (абстрактное), то наличие оценки типа (7.6) позволяет доказать единственность и существование решения задачи (7.2) в $H_1[0,a]$. Пути вывода теоремы типа существования из априорных оценок хорошо разработаны (см.[5] или [27]). Поэтому мы можем отделаться, отсылая читателя к уже известным работам. Но мы ради полноты изложения приводим доказательства. Ниже мы следуем работе [27].

Лемма 7.17. *Пусть выполнены условия леммы 7.16. Тогда для любого* $f \in H_1\,[0,1]$ *задача* (7.2) *имеет решение, допускающее оценки из леммы 7.16.*

Доказательство. Пусть для $f_0 \in H_1 = H_1\,[0,a]$ задача (7.2) имеет решение v_0, для которого выполнены оценки леммы 7.16. Для малого $\varepsilon > 0$ и $g \in H_1$, $0 < ||g||_{H_1} \leq 1$ рассмотрим возмущенную задачу

$$v' + Av + B\,(v,v) = f_0 + \varepsilon g,\ v\,(0) = 0.$$

Ищем $v\,(t)$ в виде $v\,(t) = v_0 + \varepsilon\varpi$. Тогда подставляя в (7.2), для ϖ получаем уравнение

$$\begin{cases} \varpi' + A\varpi + B_{v_0}\varpi + B\,(\varpi,\varpi) = g, \\ \varpi\,(0) = 0. \end{cases}$$

Возьмем $\lambda > 0$ и положим $\varpi = e^{\lambda t}\omega$. Тогда для $\omega\,(t)$ получаем задачу

$$\begin{cases} \omega' + (A + \lambda E)\,\omega + B_{v_0}\omega + \varepsilon e^{\lambda t}B\,(\omega,\omega) = e^{-\lambda t}g, \\ \omega\,(0) = 0. \end{cases}$$

Обозначим $\omega' + ((A + \lambda E)\,\omega = u$, тогда имеем

$$u + B_{v_0}T_\lambda u + \varepsilon e^{\lambda t}B(T_\lambda u, T_\lambda u) = g. \tag{7.7}$$

Здесь T_λ - оператор, определяемый формулой

$$T_\lambda = \int_0^t e^{-(A+\lambda E)(t-\eta)} r(\eta) d\eta.$$

Уравнение (7.7) запишем в виде

$$u = F_{\lambda,v_0}(u) =: g - B_{v_0} T_\lambda u + \varepsilon e^{\lambda t} B(T_\lambda u, T_\lambda u).$$

Покажем, что λ и ε можно выбрать так, чтобы преобразование F_{λ,v_0} было сжимающим. Пусть u_1и u_2 - из некоторого шара из H_1. Имеем

$$\|F_{\lambda,v_0}(u_1) - F_{\lambda,v_0}(u_2)\|_H \leq \|B_{v_0} T_\lambda (u_2 - u_1)\|_H +$$

$$+\varepsilon \left\| e^{\lambda t} \left(B\left(T_\lambda B_{v_0} T_\lambda (u_2 - u_1), T_\lambda u_1\right) + B\left(T_\lambda u_2, T_\lambda \left(u_2 - u_1\right)\right)\right)\right\|_H .$$

Воспользуемся условием B1, тогда

$$\|F_{\lambda,v_0}(u_1) - F_{\lambda,v_0}(u_2)\|_H \leq$$

$$\leq C\Big(\left\|A^{\gamma+1/2} v_0\right\|_H \|A^\gamma T_\lambda (u_1 - u_2)\|_H + \|A^\gamma v_0\|_H \left\|A^{\gamma+1/2} T_\lambda (u_1 - u_2)\right\|_H \Big)+$$

$$+\varepsilon e^{\lambda t}\Big(\left\|A^{\gamma+1/2} T_\lambda (u_1 - u_2)\right\|_H \left(\|A^\gamma T_\lambda u_1\|_H + \|A^\gamma T_\lambda u_2\|_H\right) +$$

$$+ \|A^\gamma T_\lambda (u_1 - u_2)\|_H \left(\left\|A^{\gamma+1/2} T_\lambda u_1\right\|_H + \left\|A^{\gamma+1/2} T_\lambda u_2\right\|_H \right)\Big). \quad (7.8)$$

Далее, возьмем δ такое, что $\gamma + \delta < 1/2$ и оценим $\|A^\gamma T_\lambda r\|_H$ и $\left\|A^{\gamma+1/2} T_\lambda r\right\|_{H_1}$ при $r \in H_1$. Имеем

$$\|A^\gamma T_\lambda r\|_H = \left\| \int_0^t e^{-(A+\lambda E)(t-\eta)} A^\gamma r(\eta) d\eta \right\| \leq$$

$$\leq \left\| (A+\lambda)^{-\delta} \int_0^t e^{-(A+\lambda E)(t-\eta)} A^\gamma (A+\lambda E)^\delta r(\eta) d\eta \right\|_H \leq$$

$$\leq \left\| (A+\lambda E)^{-\delta} \right\|_{H\to H} \left\| \int_0^t e^{-(A+\lambda)(t-\eta)} A^\gamma (A+\lambda)^\delta r(\eta) d\eta \right\|_{H\to H} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^\delta} C_{\gamma+\delta} \int_0^t \frac{\|r(\eta)\|_H}{\|t-\eta\|^{\gamma+\delta}} d\eta \leq$$

$$\leq \frac{C_{\gamma+\delta}}{\lambda^\delta} \left(\int_0^t \|t-\eta\|^{-2(\gamma+\delta)} \, d\eta \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|r(\eta)\|_H^2 \, d\eta \right) \leq C\lambda^{-\delta} \|r\|_{H_1}, \quad (7.9)$$

где C не зависит от $r \in H_1$ и $\lambda > 0$.

Мы при оценке нормы оператора $e^{-(A+\lambda E)(t-\eta)} A^\gamma (A+\lambda E)^\delta$ использовали неравенство

$$\left\| A^\gamma (A+\lambda E)^\delta e^{-(A+\lambda E)(t-\eta)} \right\|_{H \to H} \leq \sup_{\mu > 0} \left| \mu^\gamma (\mu+\lambda)^\delta e^{-(\mu+\lambda)(t-\eta)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(t-\eta)^{\gamma+\delta}} \sup_{\xi > 0} \left(\xi^{\gamma+\delta} (t-\eta)^{\gamma+\delta} e^{-\xi(\gamma+\delta)} \right) = \frac{1}{(t-\eta)^{\gamma+\delta}} \sup_{\xi>0} \xi^{\gamma+\delta} e^{-\xi} \leq$$

$$\leq C_{\gamma+\delta} \frac{1}{(t-\eta)^{\gamma+\delta}}, \quad \gamma+\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

где $C_{\gamma+\delta} < \infty$ при $\gamma+\delta \in (0, 1/2)$.

Для оценки $\left\| A^{\gamma+\frac{1}{2}} T_\lambda r \right\|_{H_1}$, используя такие же неравенства, когда вместо γ фигурирует $\gamma + 1/2$, получаем оценку

$$\left\| A^{\gamma+\frac{1}{2}} T_\lambda r \right\|_{H_1} \leq \frac{1}{\lambda^\delta} C \Big(\int_0^1 \left(\int_0^t \frac{|r(\eta)|_H}{(t-\eta)^{\gamma+\frac{1}{2}+\delta}} d\eta \right)^2 dt \Big)^{1/2},$$

где C не зависит от $r(\eta)$ и λ.

Так как $\gamma + 1/2 + \delta < 1$, то ядро $(t-\eta)^{-\gamma-1/2-\delta}$ есть ядро со слабой особенностью. Отсюда получаем

$$\left\| A^{\gamma+1/2} T_\lambda r \right\|_{H_1} \leq \widetilde{C} \lambda^{-\delta} \|r\|_{H_1}. \quad (7.10)$$

Из (7.5) вытекает, что

$$\|F_{\lambda,v_0}(u_1) - F_{\lambda,v_0}(u_2)\|_{H_1} \leq$$

$$\leq C\left(\int_0^1\left\|A^{\gamma+1/2}v_0\right\|^2\left\|A^\gamma T_\lambda\left(u_1-u_2\right)\right\|^2+\left\|A^\gamma v_0\right\|^2\left\|A^{\gamma+1/2}T_\lambda\left(u_1-u_2\right)\right\|^2\right)dy+$$

$$+\varepsilon^2 e^{2\lambda}\int_0^1\left\|A^{\gamma+1/2}T_\lambda\left(u_1-u_2\right)\right\|^2\left(\left\|A^\gamma T_\lambda u_1\right\|^2+\left\|A^\gamma T_\lambda u_2\right\|^2\right)\times$$

$$\times\left\|A^\gamma T_\lambda\left(u_1-u_2\right)\right\|^2\left(\left\|A^{\gamma+1/2}T_\lambda u_1\right\|^2+\left\|A^{\gamma+1/2}T_\lambda u_2\right\|^2\right)d\eta.$$

Теперь используем полученные для произвольного $r\in H_1$ оценки (7.9) и (7.10) (которые при применении к $A^{\gamma+1/2}v_0$ и $A^{1/2}v_0$ используются при $\lambda=0$), тогда получаем

$$\left\|F_{\lambda,v_0}\left(u_1\right)-F_{\lambda,v_0}\left(u_2\right)\right\|_{H_1}\leq$$

$$\leq C\left(\lambda^{-\delta}\left\|v_0\right\|_{H_1}\left\|u_1-u_2\right\|_{H_1}+\varepsilon^2 e^\lambda\left(\left\|u_1\right\|_{H_1}+\left\|u_2\right\|_{H_1}\right)\left\|u_1-u_2\right\|_{H_1}\right).$$

Теперь выберем сначала $\lambda\geq 0$ достаточно большим, а затем $\varepsilon>0$ достаточно малым, так чтобы было

$$\left\|F_1\left(u\right)-F_2\left(u\right)\right\|_{H_1}<\frac{1}{2}\left\|u_1-u_2\right\|.$$

Но тогда, согласно классическому принципу сжимающих отображений, при $\|g\|_{H_1}\leq 1$ уравнение (7.7) имеет решение. Поэтому имеет решение (7.3). Следовательно, имеет решение (7.2).

Следовательно, множество M всех $f\in H_1$, для которых задача (7.2) имеет решение, открыто в топологии H_1.

Кроме того, множество M - замкнуто. Действительно, если $f_j\in H_1(j=1,2,...)$, $f_j\to f_0\in H_1$, то для любого малого числа $\varepsilon>0$ и для достаточно больших $j\geq j_\varepsilon$ будем иметь

$$\left\|f_j\right\|_{H_1}\leq 2\left\|\mathring{f}\right\|_{H_1}+\varepsilon.$$

Но тогда согласно доказанной части леммы имеем $\left\|u_j\right\|_{H_1}\leq C_1$ где C_1 - постоянное число $0<C_1<\infty$, u_j - из равенства $u_j+\tilde{B}(u_j,u_j)=f_j$.

Так как H_1 - гильбертово пространство, то u_{jk} слабо сходится к некоторому $v\in H_1$, когда j_k стремится к $+\infty$ по некоторой подпоследовательности. Но тогда $\tilde{B}(u_{j_k},u_{j_k})$ сходится сильно к $B(v,v)$ в силу леммы 7.14.

Поэтому u_{j_k} сильно сходится к $v \in H_1$, так как $u_{j_k} + \tilde{B}(u_{j_k}, u_{j_k})$ сильно сходится к f_0. Следовательно, $v + \tilde{B}(v, v) = f_0$. Это значит, что $f_0 \in M$ и $M = \overline{M}$.

Так как M одновременно открыто и замкнуто, то оно должно быть или пустым множеством или совпадать со всем пространством H_1. Пустым оно не может быть, так как содержит, по крайней мере, нуль - элемент пространства H_1. Поэтому лемма доказана. □

Замечание 7.1. *Из доказательства леммы следует, что малому возмущению правой части задачи* (7.2) *соответствуют малые возмущения* $v' + Av$, Av, v' *и* $B(v, v)$, *где* v *- решение задачи* (7.2).

Приступим теперь к доказательству теоремы 2 из раздела 3 - основной теоремы для абстрактного уравнения.

Доказательство теоремы 2. Условия лемм 7.16 и 7.17 выполнены. Поэтому существование решения и оценки вытекают из лемм 7.16 и 7.17. Докажем единственность решения. Если v_1 и v_2 - два разных решения задачи (7.2), то положив $\omega = v_1 - v_2$, имеем

$$\begin{cases} \omega' + A\omega + B(\omega, v_1) + B(\omega, v_2) = 0, \\ \omega(t)\,|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Положим $\omega = e^{\lambda t} v\,(t)\,, \quad v + Av + \lambda v = u$. Тогда получим

$$u\,(t) = T_\lambda v = \int_0^t e^{-(A+\lambda E)(t-\eta)} e^{\lambda \eta} \omega(\eta) d\eta, \quad u = -B\,(T_\lambda u, v_1) - B\,(v_2, T_\lambda u)\,.$$

Отсюда, учитывая условия B1, имеем

$$\|u\|_H \leq C \left[\left(\left\| A^{\gamma+1/2} v_1 \right\|_H + \left\| A^{\gamma+1/2} v_2 \right\|_H \right) \|A^\gamma T_\lambda u\|_H + \right.$$

$$\left. + \left\| A^{\gamma+1/2} T_\lambda u \right\|_H (\|A^\gamma v_1\|_H + \|A^\gamma v_2\|_H) \right].$$

Теперь для $A^\gamma T_\lambda u$, $A^{\gamma+1/2} T_\lambda u$, $A^\gamma v_j$, $A^{\gamma+1/2} v_j$, $(j = 1, 2)$ применим оценки (7.9) и (7.10), доказанные для произвольного $r \in H_1$, тогда получим

$$\|u\|_{H_1} \leq \frac{1}{\lambda^\delta} C\, \|u\|_{H_1} \left[\|Av_1\|_{H_1} + n\, \|Av_2\|_{H_1} \right],$$

где $\delta > 0$, $\gamma + 1/2 + \delta < 1$.

Отсюда, выбрав λ большим, убеждаемся, что такое неравенство выполняется только, если $u = 0$. То есть, если $v_1 = v_2$.

Единственность решения доказана. Поэтому доказательство пункта a) теоремы 2 завершено. Пункт b) следует из замечания 7.1, т.е. вытекает из доказательства леммы 7.17. Теорема 2 доказана полностью. □

8 Доказательство лемм из раздела 4

В этом разделе дадим доказательства лемм 4.1 - 4.5.

Лемма 4.1. *Оператор F является линейным ограниченным самосопряженным проектором ($F^2 = F$) в пространстве вектор-функций $L_2(Q)$.*

Доказательство. Произвольную вектор-функцию $f(x)$ представим в виде разложения в тригонометрический ряд

$$f(x) = \sum_{\{m\}} f_m e^{i\langle m,x\rangle}, \tag{8.1}$$

$$f_m = (f_{m1},\ f_{m2},\ f_{m3}),\ f_k(x) = \sum_{\{m\}} f_{mk} e^{i\langle m,x\rangle}\ ,\ k = 1,2,3.$$

Пусть сначала $f(x) \in W_2^1(Q)$. Тогда

$$div\ f(x) = \sum_{\{m\}} [f_{m1}m_1 + f_{m2}m_2 + f_{m3}m_3]\, ie^{i\langle m,x\rangle} =$$

$$= \sum_{\{m\}} \langle f_m,\ m\rangle\, ie^{i\langle m,x\rangle},$$

$$\left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1} div\ f(x) = \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2} ie^{i\langle m,x\rangle},$$

$$grad\ \left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1} div\ f(x) = \begin{pmatrix} -\sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_1 e^{i\langle m,x\rangle} \\ -\sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_2 e^{i\langle m,x\rangle} \\ -\sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_3 e^{i\langle m,x\rangle} \end{pmatrix}.$$

Отсюда с учетом (4.2) действие оператора F в покоординатной форме имеет вид

$$Ff(x) = \begin{pmatrix} \sum_{\{m\}} f_{m1}e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_1 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} f_{m2}e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_2 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} f_{m3}e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_3 e^{i\langle m,x\rangle} \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Из этого представления очевидно, что оператор F, заданный на вектор–функциях $f(x) \in W_2^1(Q)$, является линейным ограниченным в пространстве вектор–функций $L_2(Q)$. Действие замыкания оператора F определяется формулой (8.2) для любых вектор–функций $f(x) \in L_2(Q)$.

Непосредственным вычислением из (8.2) нетрудно убедиться в том, что для любых двух функций $f(x)$, $g(x) \in L_2(Q)$ имеет место равенство

$$(Ff,\ g)_{L_2(Q)} = (f,\ g)_{L_2(Q)} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle \langle g_m,\ m\rangle}{|m|^2} e^{i\langle m,x\rangle},$$

откуда следует самосопряженность оператора F.

Для завершения доказательства леммы покажем, что $F^2 = F$. Для гладких функций $f(x) \in W_2^1(Q)$ это очевидно, так как

$$F^2 f = \left(E + grad\ \left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1}\ div\right)^2 f =$$

$$= f + 2grad\ \left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1}\ divf + grad\ (-\widetilde{\triangle})^{-1}\ div\ grad\ (-\widetilde{\triangle})^{-1}\ div\ f,$$

$$div\ grad\ \left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1} \varphi(x) = -\varphi(x)\,,\ \forall\varphi(x) \in L_2(Q)\,,$$

$$F^2 f = f + 2grad\ \left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1}\ divf - grad\ \left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1}\ divf = Ff.$$

Для того, чтобы доказать справедливость этого равенства для произвольных вектор–функций $f(x) \in L_2(Q)$, воспользуемся представлением (8.2). Пусть $\left(F^2 f\right)_k$ - k-я координата вектор–функции $F^2 f$. Тогда из (8.2) вычисляем

$$\left(F^2 f\right)_k = \sum_{\{m\}} f_{mk} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_k e^{i\langle m,x\rangle} -$$

$$
-\sum_{m\neq(0,0,0)}\frac{m_k}{|m|^2}\left\{\sum_{j=1}^{3}\left(f_{mj}m_j-\frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2}m_j^2\right)\right\}e^{i\langle m,x\rangle}=
$$

$$
=(Ff)_k-\sum_{m\neq(0,0,0)}\frac{m_k}{|m|^2}\left\{\langle f_m,\ m\rangle-\frac{\langle f_m,\ m\rangle}{|m|^2}\sum_{j=1}^{3}\left(m_j^2\right)\right\}e^{i\langle m,x\rangle}=(Ff)_k\,.
$$

Таким образом, $F^2f=Ff$ для всех вектор–функций $f\,(x)\in L_2\,(Q)$. А значит оператор F является проектором в пространстве вектор-функций $L_2\,(Q)$.

Лемма 4.1 доказана полностью. □

Лемма 4.2. *Для любой скалярной функции $p\,(x)\ \in\ W_2^1\,(Q)$ вектор-функция $grad\ p\,(x)$ принадлежит ядру оператора F, то есть*

$$
F\,(grad\ p(x))=0. \tag{8.3}
$$

Доказательство. Пусть сначала $p\,(x)\ \in\ W_2^2\,(Q)$. Тогда очевидно, что $div\,grad\,p\,(x)=\triangle p(x)$. Поэтому левая часть выражения (8.3) представима в виде

$$
F\,(grad\ p(x))=grad\ p\,(x)+grad\ (-\widetilde{\triangle})^{-1}\triangle p(x).
$$

Если функция $p\,(x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям на границе области Q, то $\left(-\widetilde{\triangle}\right)^{-1}\triangle p\,(x)=-p\,(x)$. В этом случае равенство (8.3) очевидно.

Для того, чтобы обосновать (8.3) для произвольных функций $p\,(x)\in W_2^1\,(Q)$, воспользуемся представлением оператора F в форме (8.2). Пусть p_m - коэффициенты Фурье разложения в тригонометрический ряд функции $p\,(x)$:

$$
p\,(x)=\sum_{\{m\}}p_me^{i\langle m,x\rangle}.
$$

Тогда $grad\ p(x)$ - это вектор с координатами

$$
grad\ p\,(x)=\left(\sum_{\{m\}}p_mm_1e^{i\langle m,x\rangle},\ \sum_{\{m\}}p_mm_2e^{i\langle m,x\rangle},\ \sum_{\{m\}}p_mm_3e^{i\langle m,x\rangle}\right). \tag{8.4}
$$

Через $(grad\, p\,(x))_m$ обозначим коэффициенты разложения вектор-функции $grad\ p\,(x)$ в тригонометрический ряд:

$$(grad\ p\,(x))_m = (p_m m_1,\ p_m m_2,\ p_m m_3)\,.$$

Поэтому $\langle (grad\ p\,(x))_m\,,\ m\rangle = p_m\,|m|^2$

Применяя к (8.4) оператор F в форме (8.2), получаем

$$Fgrad\ p\,(x) = \begin{pmatrix} \sum_{\{m\}} p_m m_1 e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{p_m|m|^2}{|m|^2} m_1 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} p_m m_2 e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{p_m|m|^2}{|m|^2} m_2 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} p_m m_3 e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{p_m|m|^2}{|m|^2} m_3 e^{i\langle m,x\rangle} \end{pmatrix} = 0.$$

Лемма 4.2 доказана полностью. □

Лемма 4.3. *Оператор F является перестановочным с трехмерным оператором Лапласа $\triangle_3$ на любых вектор–функциях $u(x) \in W_2^2\,(Q)$:*

$$F\,(\triangle_3\ u(x)) = \triangle_3 F\,(\ u(x))\,. \tag{8.5}$$

Доказательство. Как и в предыдущих леммах, равенство (8.5) является очевидным для более узкого класса функций. Действительно, если вектор-функция $u(x) \in W_2^3\,(Q)$ и удовлетворяет периодическим краевым условиям, то

$$F\,(\triangle_3\ u(x)) = \triangle_3\ u\,(x) + grad\ \left(-\widetilde{\triangle}_1\right)^{-1} div\ \triangle_3\ u\,(x) =$$

$$= \triangle_3\ u\,(x) + grad\ \left(-\widetilde{\triangle}_1\right)^{-1} \triangle_1\ div\ \ u\,(x) =$$

$$= \triangle_3\ u\,(x) + grad\ \triangle_1 \left(-\widetilde{\triangle}_1\right)^{-1}\ div\ \ u\,(x) =$$

$$= \triangle_3\ u\,(x) + \triangle_3 grad\ \left(-\widetilde{\triangle}_1\right)^{-1}\ div\ \ u\,(x) = \triangle_3 F\,(\ u(x))\,.$$

Здесь использована перестановочность операторов $\left(-\widetilde{\triangle}_1\right)^{-1}\triangle_1 = \triangle_1\left(-\widetilde{\triangle}_1\right)^{-1}$, которая имеет место на любых скалярных функциях $\varphi(x) \in W_2^2\,(Q)$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям.

Для того, чтобы обосновать (8.5) для случая произвольных вектор-функций $u(x) \in W_2^2(Q)$, воспользуемся представлением оператора F в форме (8.2). Пусть

$$u(x) = \sum_{\{m\}} u_m e^{i\langle m,x\rangle}, u_m = (u_{m1},\ u_{m2},\ u_{m3}),$$

тогда

$$Fu(x) = \begin{pmatrix} \sum_{\{m\}} u_{m1} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_1 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} u_{m2} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_2 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} u_{m3} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_3 e^{i\langle m,x\rangle} \end{pmatrix},$$

$$\triangle_3 u(x) = -\sum_{\{m\}} |m|^2 u_m e^{i\langle m,x\rangle},$$

$$F(\triangle_3\ u(x)) = \begin{pmatrix} -\sum_{\{m\}} |m|^2 u_{m1} e^{i\langle m,x\rangle} + \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\left\langle |m|^2 u_m,\ m\right\rangle}{|m|^2} m_1 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} |m|^2 u_{m2} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\left\langle |m|^2 u_m,\ m\right\rangle}{|m|^2} m_2 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} |m|^2 u_{m3} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\left\langle |m|^2 u_m,\ m\right\rangle}{|m|^2} m_3 e^{i\langle m,x\rangle} \end{pmatrix},$$

$$\triangle_3 Fu(x) = \begin{pmatrix} \sum_{\{m\}} |m|^2 u_{m1} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_1 |m|^2 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} |m|^2 u_{m2} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_2 |m|^2 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} |m|^2 u_{m3} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_3 |m|^2 e^{i\langle m,x\rangle} \end{pmatrix}.$$

Сравнение двух последних формул приводит к справедливости равенства (8.5) для произвольных вектор–функций $u(x) \in W_2^2(Q)$.

Лемма 4.3 доказана полностью. □

Лемма 4.4. *Пусть $u(x) \in W_2^1(Q)$. Тогда $div\ u = 0$, если и только если $u(x) \in \widetilde{L_2}(\Omega)$.*

Доказательство. Функцию $u(x) \in W_2^1(Q)$ представим в виде тригонометрического ряда

$$u(x) = \sum_{\{m\}} u_m e^{i\langle m,x\rangle},\ u_m = (u_{m1},\ u_{m2},\ u_{m3}).$$

Тогда $div\ u = \sum_{\{m\}} \langle u_m,\ m\rangle\, ie^{i\langle m,x\rangle}$ и равенство $div\ u = 0$ эквивалентно равенству

$$\langle u_m,\ m\rangle = 0 \tag{8.6}$$

для всех значений мультииндекса m.

С другой стороны, включение $u \in \widetilde{L_2}\,(\Omega)$ эквивалентно $Fu = u$. Это на основании представления (8.2) эквивалентно покоординатному равенству

$$\sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_k e^{i\langle m,x\rangle} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Сравнивая полученное с (8.6), убеждаемся в справедливости утверждения леммы 4.4. Доказательство завершено. □

Лемма 4.5. *Оператор F является перестановочным с произвольной степенью трехмерного оператора Лапласа $(-\triangle_3 + E)^{-\alpha}$, $\alpha \geq 0$ на любых вектор–функциях $u(x) \in L_2\,(Q)$:*

$$F\left((-\triangle_3 + E)^{-\alpha}\ \ u(x)\right) = (-\triangle_3 + E)^{-\alpha}\, F\,(u(x))\,. \tag{8.7}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4.3, воспользуемся представлением оператора F в форме (8.2). Пусть

$$u\,(x) = \sum_{\{m\}} u_m e^{i\langle m,x\rangle}, u_m = (u_{m1},\ u_{m2},\ u_{m3})\,,$$

тогда

$$Fu\,(x) = \begin{pmatrix} \sum_{\{m\}} u_{m1} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_1 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} u_{m2} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_2 e^{i\langle m,x\rangle} \\ \sum_{\{m\}} u_{m3} e^{i\langle m,x\rangle} - \sum_{m\neq(0,0,0)} \frac{\langle u_m,\ m\rangle}{|m|^2} m_3 e^{i\langle m,x\rangle} \end{pmatrix},$$

$$(-\triangle_3 + E)^{-\alpha}\, u\,(x) = \sum_{\{m\}} \left(|m|^2 + 1\right)^{-\alpha} u_m e^{i\langle m,x\rangle},$$

$$F\left((-\triangle_3 + E)^{-\alpha}\ \ u\,(x)\right) =$$

$$=\begin{pmatrix} -\sum_{\{m\}}\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_{m1}e^{i\langle m,x\rangle}+\sum_{m\neq(0,0,0)}\dfrac{\left\langle\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_m,\,m\right\rangle}{|m|^2}m_1e^{i\langle m,x\rangle}\\ \sum_{\{m\}}\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_{m2}e^{i\langle m,x\rangle}-\sum_{m\neq(0,0,0)}\dfrac{\left\langle\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_m,\,m\right\rangle}{|m|^2}m_2e^{i\langle m,x\rangle}\\ \sum_{\{m\}}\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_{m3}e^{i\langle m,x\rangle}-\sum_{m\neq(0,0,0)}\dfrac{\left\langle\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_m,\,m\right\rangle}{|m|^2}m_3e^{i\langle m,x\rangle}\end{pmatrix}$$

$$(-\triangle_3+E)^{-\alpha}Fu\,(x)=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{\{m\}}\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_{m1}e^{i\langle m,x\rangle}-\sum_{m\neq(0,0,0)}\frac{\langle u_m,\,m\rangle}{|m|^2}m_1\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}e^{i\langle m,x\rangle}\\ \sum_{\{m\}}\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_{m2}e^{i\langle m,x\rangle}-\sum_{m\neq(0,0,0)}\frac{\langle u_m,\,m\rangle}{|m|^2}m_2\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}e^{i\langle m,x\rangle}\\ \sum_{\{m\}}\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}u_{m3}e^{i\langle m,x\rangle}-\sum_{m\neq(0,0,0)}\frac{\langle u_m,\,m\rangle}{|m|^2}m_3\left(|m|^2+1\right)^{-\alpha}e^{i\langle m,x\rangle}\end{pmatrix}.$$

Сравнение двух последних формул приводит к справедливости равенства (8.7) для произвольных вектор-функций $u(x)\in W_2^2\,(Q)$.

Лемма 4.5 доказана полностью. $\square$

Литература

1 Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. http://claymath.org/ millennium/ Navier-Stokes_Equations. – Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. – P. 1-5.

2 Ладыженская О.А. Решение "в целом" краевой задачи Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 3. – С. 427-429.

3 Ладыженская О. А., Солонников В. А. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Труды МИАН СССР. – 1960. – Т. 59. – С. 115-173.

4 Ладыженская О.А. Математические вопросы вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

5 Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье- Стокса, существование и гладкость // УМН. – 2003. – Т. 58, № 2 (350). – С. 45-78.

6 Temam R. On the Theory and Numerical Analysis of the Nanier-Stokes Equations. College Park: Univ. of Maryland. – Lecture Note, 1973. – V. 9.

7 Temam R. Nanier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. Studies in Math. and its Appl. – Amsterdam, New York, Oxford: North Holland Pub. Comp., 1979. – V. 2.

8 Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. Серия физическая. – 1942. – Т. 6, № 1. – С. 56-58.

9 Leray J. Essai sur les mouvements plans d'un liquid visqueux que limitend des parois // Jurnal Math. Pyres Appl. – 1934. – V. 9. – P. 331-418.

10 Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espase. – Acta Math, 1934. – V. 63. – P. 193-248.

11 Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodinamischen Grundgleichungen. – Math. Nachr., 1951. – V. 4. – P. 213-231.

12 Lions J.-L. Èquations diffèrentielles opèrationnelles et problèms aux limites. – Berlin: Springen-Verlag, 1961 (Grundlehren Math. Wiss., V. 111).

13 Lions J.-L. Quelques mèthods de rèsolution des problèmes aux limites non linèaires. – Paris: Dunot / Gauthier-Villars, 1969. – 588 p.

14 Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические проблемы статистической гидромеханики. – М.: Наука, 1980. – 440 с.

15 Солонников В.А. Об оценках решений нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С. Л. Соболева и об оценках резольвенты оператора Стокса // Успехи математических наук. – 2003. – Т. 58, № 2. – С. 123-156.

16 Отелбаев М., Биргебаев А. О разделимости нелинейного дифференциального оператора 3-го порядка // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1984. – № 3. – С. 11-13.

17 Отелбаев М., Гриншпун Э.З. О гладкости решения нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1984. – № 5. – С. 26-29.

18 Отелбаев М., Ойнаров Р. Критерии липшицевости и сжимаемости нелинейных интегральных операторов // Сибирский математический журнал. – 1984. – Т. 25, № 6. – С. 116-127.

19 Отелбаев М. О коэрцитивных оценках решения разностных уравнений // Труды МИАН СССР. – 1988. – Т. 181. – С. 241-249.

20 Отелбаев М., Байдельдинов Б.Л. Гауссовы меры и аппроксимативные характеристики операторов // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1988. – № 5. – С. 6-9.

21 Отелбаев М., Мухамбетжанов А.Т., Смагулов Ш.С. Об одном методе фиктивной области нелинейных краевых задач // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 1998. – Т. 3, № 4. – С. 41-64.

22 Otelbaev M., Rsbaiuly B. One variational method of a solution of the nonlinear boundary value problems // Zhornal of science and enginieiring. – Elasig, 1999. – P. 321-328.

23 Отелбаев М., Кусаинова Л. Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов // Збірник праць институту математики НАН Украіна. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 165-190.

24 Отелбаев М., Смагулов Ш. О новом методе приближенных решений краевых задач в произвольной области // Доклады РАН. – 2001. – Т. 378, № 4. – С. 452-455.

25 Отелбаев М., Балдыбек Ж., Смагулов Ш. Об одном приближенном методе решения начально-краевой задачи уравнений Навье-Стокса // Доклады РАН. – 2002. – Т. 386, № 4. – С. 439-442.

26 Отелбаев М., Дурмаганбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения (в целом) одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. – 2006. – Т. 408, № 4. – С. 446-449.

27 Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. I // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 620-634.

28 Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. II // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 855-864.

29 Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. III // Труды МИРАН им. В.А. Стеклова. – 2008. – Т. 260. – С. 202-212.

30 Отелбаев М, Жапсарбаева Л.К. Непрерывная зависимость решения параболического уравнения в гильбертовом пространстве от параметров и

от начальных данных // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 818-849.

31 Отелбаев М. Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье-Стокса // Математические заметки. – 2011. – Т. 89, № 5. – С. 771-779.

32 Отелбаев М., Оспанов К.Н. Краевые задачи для обобщенной системы Коши-Римана с негладкими коэффициентами // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 283, № 1. – С. 46-49.

33 Отелбаев М., Оспанов К.Н. Об обобщенной системе Коши-Римана с негладкими коэффициентами // Известия вузов. Математика. – 1989. – № 3. – С. 48-56.

34 Отелбаев М., Муратбеков М.Б. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Известия вузов. Математика. – 1989. – № 3. – С. 44-47.

35 Отелбаев М., Гасанов А., Акпаев Б. Об одной задаче управления точечным источником тепла // Доклады РАН. – 2010. – Т. 435, № 3. – С. 317-319.

36 Hasanoglu (Hasanov) A., Otelbaev M. Semigroup approach for identification of an unknown source term in a parabolic equation from final overdetermination // The Fifth International Conference "Inverse problems: Modeling and Simulation". – Antalya, 2010. – P. 163-164.

37 Otelbaev M., Hasanov A., Akpayev B. A source identification problem related to mathematical model of laser surface heating // Applied Mathematics Letters. – 2012. – V. 25, № 10. – P. 1480-1485.

38 Сахаев Ш., Солонников В.А. О некоторых стационарных задачах магнитной гидродинамики в многосвязных областях // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2011. – Т. 397. – С. 126-149.

39 Акыш А. Ш. Устойчивость в l_p некоторых разностных схем для одной системы нелинейных параболических уравнений // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 273-280.

40 Джакупов К.Б., Гончаров А.И. Численное моделирование диффузионного горения в закрученных потоках двухфакельной топки // Сибирский физико-технический журнал. – 1991. – Вып. 6. – С. 83-93.

41 Абылкаиров У.У. Аппроксимация уравнений неоднородной жидкости // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 1986. – С. 127-131.

42 Абылкаиров У.У. Обратная задача для уравнения Навье- Стокса // Условно-корректные задачи математической физики: тез. всес. конф. – Алма-Ата, 1989. – С. 6.

43 Абылкаиров У.У. Однозначная разрешимость задачи протекания для 2D-3D системы Навье-Стокса. I // Математический журнал. – 2005. – Т. 5, № 2. – С. 5-11.

44 Абылкаиров У.У. Обратная задача протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье-Стокса. II // Математический журнал. – 2006. – Т. 6, № 2. – С. 14-22.

45 Абылкаиров У.У., Айтжанов С.Е. Однозначная разрешимость обратной задачи магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Математический журнал. – 2010. – Т. 10, № 1. – С. 13-22.

46 Айтжанов С.Е. Обратная задача для линейной системы тепловой конвекции // Вестник КазНПУ имени Абая. Серия физико-математические науки. – 2010. – № 1. – С. 17-23.

47 Байтуленов Ж.Б. Корректность стационарной задачи в одной диффузионной модели неоднородной жидкости // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. – 1999. – № 4 (18). – С. 3-8.

48 Солонников В.А. О дифференциальных свойствах первой краевой задачи для нестрционарной системы уравнений Навье-Стокса // Труды МИАН СССР. – 1964. – Т. 73. – С. 221-291.

49 Сакс Р.С. Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 53-79.

50 Schmeisser H.-J., Tribel H. Topics in Fourier Analysis and Function Spaces. – Chichester, Wiley, 1987. – 300 p.

51 Отелбаев М. Существование в целом сильного решения системы уравнений Навье-Стокса // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. – 2013. – № 2(93). – С. 38-44.

Статья поступила в редакцию 23.01.12,

окончательный вариант – 20.12.13.

Отелбаев М. СУЩЕСТВОВАНИЕ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

В работе дано полное решение ***шестой проблемы тысячелетия*** (*The Millennium Prize Problems*) о существовании и гладкости решений уравнений Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости: доказаны существование и единственность сильного решения трехмерной задачи Навье-Стокса с периодическими краевыми условиями по пространственным переменным.

Пусть $Q \equiv (0, 2\pi)^3 \subset R^3$ – трехмерная область, $\Omega = (0, a) \times Q$, $a > 0$.

Задача Навье-Стокса состоит в нахождении неизвестных: вектора скорости $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ и скалярной функции - давления $p(t, x)$, в точках $x \in Q$ в момент времени $t \in (0, a)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \triangle u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j, \quad (t, x) \in \Omega, \qquad j = 1, 2, 3;$$

$$\text{div } u \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad (t, x) \in \Omega,$$

начальным

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{Q}$$

и граничным условиям

$$u(t, x)|_{x_k=-\pi} = u(t, x)|_{x_k=\pi}\,, \ \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x)\bigg|_{x_k=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x)\bigg|_{x_k=\pi}, k = 1, 2, 3;$$

$$p(t, x)|_{x_k=-\pi} = p(t, x)|_{x_k=\pi}\,, \int_Q p\,(t, x)\, dx = p_0 = const \geq 0.$$

В работе доказывается, что при любой $f \in L_2\,(\Omega)$ задача Навье-Стокса имеет единственное сильное решение $(u; p)$, и для него верна оценка

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\| + \|\triangle u\| + \|(u, \nabla)\, u\| + \|\text{grad } p\| \leq C\Big(1 + \|f\| + \|f\|^l\Big),$$

где $\|\cdot\|$ - норма в $L_2\,(\Omega)$, а постоянные $C > 0$ и $l \geq 1$ не зависят от $f \in L_2\,(\Omega)$.

Өтелбаев М. НАВЬЕ-СТОКС ТЕҢДЕУIНIҢ КҮШТI ШЕШIМIНIҢ БАР БОЛУЫ

Жұмыста қысылмайтын есулі сұйық үшін Навье-Стокс теңдеулерінің шешімінің бар және қажетті туындылы екені туралы ***мыңжылдықтың алтыншы мәселесінің*** (*The Millennium Prize Problems*) толық шешімі берілген: кеңістік айнымалылары бойынша периодты шекаралық шартты-лы Навье-Стокстың үш өлшемді есебінің әлді шешімінің бар және жалғыз екендігі дәлелденді.

$Q \equiv (0, 2\pi)^3 \subset R^3$ - үш өлшемді облыс болсын, $\Omega = (0, a) \times Q$, $a > 0$.

Навье-Стокс есебі келесі белгісіздерді табудан құралады: $x \in Q$ нүктелері мен $t \in (0, a)$ уақытына тәуелді жылдамдық векторын $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ және скалярлы қысу функциясын $p(t, x)$, мына теңдеулер жүйесін

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \triangle u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j, \quad (t, x) \in \Omega, \qquad j = 1, 2, 3;$$

$$\operatorname{div}\, u \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad (t, x) \in \Omega,$$

бастапқы $u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{Q}$ және шекаралық шарттарын

$$u(t, x)|_{x_k=-\pi} = u(t, x)|_{x_k=\pi}, \ \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x)\bigg|_{x_k=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x)\bigg|_{x_k=\pi}, k = 1, 2, 3;$$

$$p(t, x)|_{x_k=-\pi} = p(t, x)|_{x_k=\pi}, \ \int_Q p\,(t, x)\, dx = p_0 = const \geq 0.$$

қанағаттандыратындай етіп.

Жұмыста кез келген $f \in L_2\,(\Omega)$-функциясы үшін Навье-Стокс есебі әлді жалғыз $(u; p)$ шешімді екендігі дәлелденді және ол үшін келесі баға орындалады

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\| + \|\triangle u\| + \|(u, \nabla)\, u\| + \|grad\ p\| \leq C\Big(1 + \|f\| + \|f\|^l\Big),$$

бұл жерде $\|\cdot\|$ - $L_2\,(\Omega)$-кеңістігіндегі норма, ал $C > 0$ және $l \geq 1$ тұрақты сандары $f \in L_2\,(\Omega)$-функциясына тәуелді емес.

Otelbaev M. EXISTENCE OF A STRONG SOLUTION OF THE NAVIER-STOKES EQUATION

In this work we give a complete solution of ***the sixth Millennium Prize Problems*** on existence and smoothness of solutions of the Navier-Stokes equations for an incompressible viscous fluid: existence and uniqueness of a strong solution of three-dimensional Navier-Stokes problem with periodic boundary conditions in space variables.

Let $Q \equiv (0, 2\pi)^3 \subset R^3$ be a three-dimensional domain, $\Omega = (0, a) \times Q$, $a > 0$.

Navier-Stokes problem is to find unknowns: a speed vector $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ and a scalar pressure function $p(t, x)$ at the points $x \in Q$ and time $t \in (0, a)$ satisfying the system of the equations

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \triangle u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j, \quad (t, x) \in \Omega, \qquad j = 1, 2, 3;$$

$$\operatorname{div}\, u \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad (t, x) \in \Omega,$$

initial

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \overline{Q}$$

and boundary conditions

$$u(t, x)|_{x_k=-\pi} = u(t, x)|_{x_k=\pi}\,, \ \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x)\bigg|_{x_k=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x)\bigg|_{x_k=\pi}, k = 1, 2, 3;$$

$$p(t, x)|_{x_k=-\pi} = p(t, x)|_{x_k=\pi}\,, \ \int_Q p\,(t, x)\, dx = p_0 = const \geq 0.$$

In the work we prove that for all $f \in L_2\,(\Omega)$ the Navier-Stokes problem has the unique strong solution $(u; p)$ and the estimate of it is valid

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\| + \|\triangle u\| + \|(u, \nabla)\, u\| + \|grad\ p\| \leq C\Big(1 + \|f\| + \|f\|^l\Big),$$

where $\|\cdot\|$ is a norm in $L_2\,(\Omega)$, and constants $C > 0$ and $l \geq 1$ do not depend on $f \in L_2\,(\Omega)$.