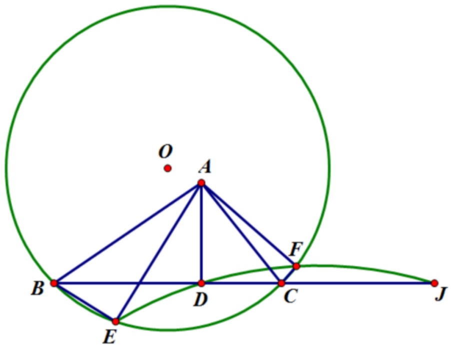
# 2024 年北大金秋营数学试题解答与评析

在 2024 年 10 月 18 日至 20 日, 北京大学举行了北京大学数学学科探究拓展活动, 共进行了两场考试, 每场考 4 道题, 第一天试题难度大于第二天. 其中第 3、4题为困难题, 第 8 题有一定难度, 第 1、2、5、6、7 题偏简单. 笔者水平有限, 本文给出的解答不当之处, 敬请批评指正!

## I. 试 题

**1.** 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $AD$ 是高. 过 $B, C$ 作 $\odot O$ 使 $A$ 不在 $\odot O$ 上, 点 $E$, $F$ 在 $\odot O$ 上, 满足 $AE \perp BE$, $AF \perp CF$. 设 $\triangle EDF$ 的外接与 $BC$ 交于点 $J$, 求证: $O, A, J$ 三点共线.




**2.** 设实数 $a > b > c$, 求证:

$$\left|\frac{(a-b)(b-c)(1-ab-bc-ca)}{(a-c)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\right| \leq \frac{1}{4}.$$

**3.** 设 $G$ 是一个 100 阶完全图, 甲乙两人轮流操作, 每回合甲先选一条未被选过的边, 乙再选一条未被选过的边. 124 个回合后, 若存在 $G$ 的一个由 25 个顶点

修订日期: **2024-12-18.**

不交 4- 圈组成的子图 $G'$, 使得 $G'$ 的边全被甲选到, 则甲获胜, 否则乙获胜. 求证: 乙有必胜策略.

**4.** 给定正整数 $k$. 求所有的函数 $f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{N}_+$, 使得对任意正整数 $x,y$, 均有

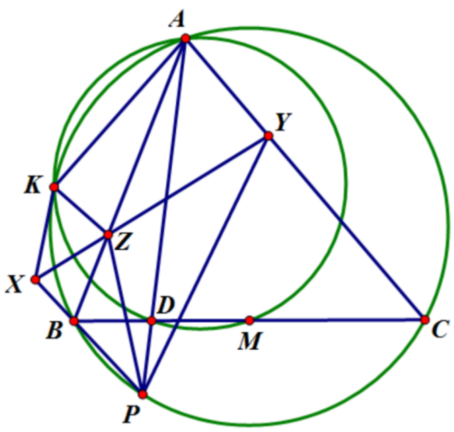
$$(f^{(x)}(y))^2-4kxy$$

是完全平方数.

**5.** 对复数 $\omega$, 记 $\omega+1,\omega-1,\omega+i,\omega-i$ 中模长最小者所构成的集合为 $T(\omega)$. 称复数列 $\{z_n\}$ 是有趣的, 如果 $|z_1|\le 1$, $z_{n+1}\in T(z_n)$, $n\in\mathbb{N}_+$. 求最小的实数 $C$, 使得对任何有趣的复数列 $\{z_n\}$, 都有 $|z_1+z_2+\cdots+z_{2024}|\le C$, 并求取等时 $z_1$ 的所有可能值.

**6.** 求最小的正整数 $d$, 使得存在 $d$ 次整系数多项式 $P(x)$, 满足对任意奇数 $n$, 有 $P(n)^3\equiv n\pmod{2024}$.

**7.** 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB<AC$, $\omega$ 为外接圆, $BC$ 的中点为 $M$. 点 $D$ 在线段 $BM$ 上(不包括端点), $AD$ 与 $\omega$ 交于另一点 $P$, $\triangle ADM$ 的外接圆与 $\omega$ 交于另一点 $K$. 设 $\omega$ 在 $K$ 处的切线与 $PB$ 交于点 $X$, 过 $K$ 作 $AK$ 的垂线交 $AB$ 于点 $Z$, $XZ$ 与 $AC$ 交于点 $Y$. 求证: $PA$ 平分 $\angle YPZ$.




**8.** 设 $n$ 是正整数, 称一个由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 $2n-1$ 项序列为优美的, 如果在序列中,

(1) 对 $1\le i\le n-1$, 第一个 $i$ 在第一个 $i+1$ 之前, 且至少有一个 $n$;

(2) 相邻的数不相同;

(3) 任何一对数相邻的次数为偶数.

求优美的序列的个数.

# II. 解答与评注

**1.** 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $AD$ 是高. 过 $B, C$ 作 $\odot O$ 使 $A$ 不在 $\odot O$ 上, 点 $E, F$ 在 $\odot O$ 上, 满足 $AE \perp BE$, $AF \perp CF$. 设 $\triangle EDF$ 的外接圆与 $BC$ 交于点 $J$, 求证: $O, A, J$ 三点共线.

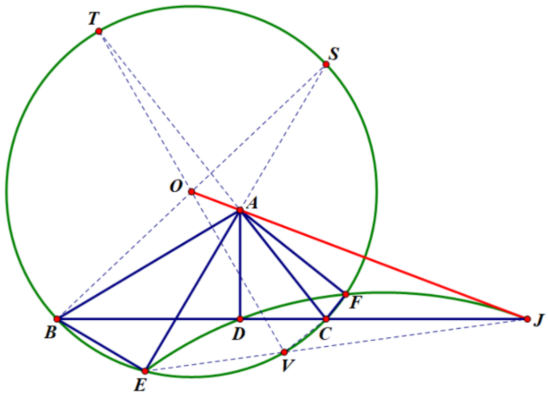



图 1.1

**证明 1**: 延长 $CA$ 再次交 $\odot O$ 于 $T$, $B$ 关于 $\odot O$ 的对径点 $S$, 设 $JE$ 与 $\odot O$ 再次交于 $V$, 如图1. 1. 由 $\angle AEB = 90°$, 知 $S, A, E$ 共线.

因为 $\angle ADB = \angle AFC = 90°$, 所以 $A, D, C, F$ 共圆, 即 $\angle ACF = \angle ADF$. 所以

$$\begin{aligned}\angle ACV &= \angle FCV - \angle ACF = 180° - \angle FEJ - \angle ADF \\ &= 180° - \angle FDJ - \angle ADF = 180° - \angle ADC = 90°.\end{aligned}$$

所以 $TV$ 为 $\odot O$ 直径.

对圆内接六边形 $BSEVTC$ 运用 Pascal 定理知: $O, A, J$ 共线. $\square$

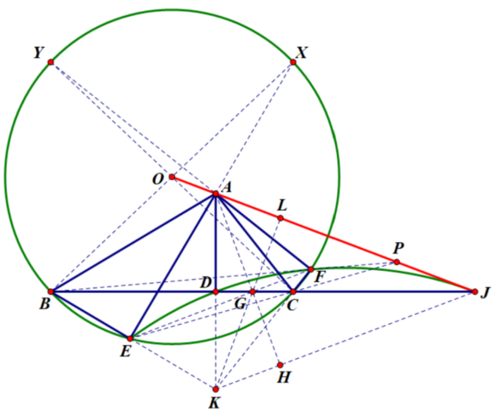



图 1.2

**证明 2**： 设 $BC, EF$交于 $G$, 作 $B, C$关于 $\odot O$的对径点 $X, Y$, 设 $BF, CE$ 交于 $P$, 如图 1. 2. 由 $\angle AFC = 90°$ 知 $Y, A, F$ 共线, 同理, $X, A, E$ 共线.

对圆内接六边形 $BXECYF$ 运用 Pascal 定理知 $O, A, P$ 共线.

因为

$$\angle ADB = \angle AEB = \angle AFC = 90°,$$

所以 $A, B, E, D$ 共圆, $A, F, C, D$ 共圆.

对 $\odot(ABED)$, $\odot(AFCD)$, $\odot O$ 运用根心定理, 知 $BE, AD, CF$ 交于一点, 记为 $K$.

对圆内接四边形 $BECF$ 运用 Brocard 定理知, $O, K, P, G$ 构成垂心组, 从而 $GK \perp OP$.

设 $H$ 为 $A$ 到 $JK$ 的投影, 则 $\angle AHK = \angle AEK = \angle AFK = 90°$, 所以 $A, E, K, H, F$ 共圆. 由 $\angle ADJ = \angle AHJ = 90°$ 知 $A, D, H, J$ 共圆.

对 $\odot(AEKHF)$, $\odot(ADHJ)$, $\odot(EDFJ)$, 运用根心定理, $BC, EF, AH$ 共点, 即为 $G$, 从而 $A, G, H$ 共线, 即 $AG \perp JK$, 又 $JG \perp AK$, 故 $G$ 为 $\triangle AKJ$ 垂心, 得 $GK \perp AJ$.

结合 $GK \perp OP$, $GK \perp AJ$, $O, A, P$ 共线知 $O, A, P, J$ 共线, 证毕. □

对于 $G$ 为 $\triangle AJK$ 垂心这一命题, 还有以下其他证明:

**证明 3**： 由法 2 知 $AD, BE, CF$共点 $K$. 取 $AK$ 中点 $Q$, 则 $Q$ 为 $\odot(AEKF)$ 心(为保证图形清晰, 在图 1.2 中未画出). 则

$$\begin{aligned}
& G \text{ 为 } \triangle AKJ \text{ 垂心} \\
\Leftrightarrow\ & DG \cdot DJ = DA \cdot DK \\
\Leftrightarrow\ & DG^2 + DG \cdot GJ = DA \cdot DK \\
\Leftrightarrow\ & DG^2 + EG \cdot GF = AD \cdot DK \\
\Leftrightarrow\ & DG^2 + QA^2 - GQ^2 = QA^2 - DQ^2 \\
\Leftrightarrow\ & DG^2 + DQ^2 = GQ^2,
\end{aligned}$$

这是显然成立的. □

**证明 4**： 由法 2 知 $G$ 为 $\triangle OKP$垂心. 设 $GK, AP$交于 $L$.

由 $\angle ALK = \angle AFK = \angle AEK = 90°$ 知 $A, L, F, K, E$ 共圆.

由圆幂定理:

$$GL \cdot GK = GE \cdot GF = GD \cdot GJ$$

知 $D, L, J, K$ 共圆, 从而 $\angle JLK = \angle JDK = 90^\circ$, 又 $\angle PLK = 90^\circ$, 故 $L, P, J$ 共线, 即 $O, A, J$ 共线. □

**评注** 第一题并不难, 主体想法都是使用 Pascal 定理刻画 $OA$, 具体实现有倒角倒边两大方向. 本题图形简洁, 也可以使用复数法, 对 $J$ 点使用同一法进行刻画, 此处不展开.

**2.** 设实数 $a > b > c$, 求证:
$$\left|\frac{(a-b)(b-c)(1-ab-bc-ca)}{(a-c)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\right| \leq \frac{1}{4}.$$

**证明 1**: 由 Cauchy 不等式,
$$\begin{aligned}(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) &= \left((a+b)^2 + (ab-1)^2\right)(c^2+1) \\ &\geq ((a+b)c + ab - 1)^2 \\ &= (ab+bc+ca-1)^2,\end{aligned}$$
得
$$|1-ab-bc-ca| \leq \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c)^2}.$$
从而
$$\begin{aligned}\left|\frac{(a-b)(b-c)(1-ab-bc-ca)}{(a-c)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\right| &\leq \frac{\left(\dfrac{a-b+b-c}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\prod(1+a^2)}}{(a-c)\cdot\prod(1+a^2)} \\ &= \frac{1}{4}\frac{a-c}{\sqrt{\prod(1+a^2)}} \\ &\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{a-c}{\sqrt{(1+a^2)(c^2+1)}} \\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{4}\cdot\frac{a-c}{-c+a} \\ &= \frac{1}{4},\end{aligned}$$
其中 $(*)$ 处用到了 Cauchy 不等式及 $a > c$, 原命题得证. □

**证明 2**: 同法 1, 只需证
$$|1-ab-bc-ca| \leq \sqrt{\prod(1+a^2)}.$$
而
$$\begin{aligned}\prod(1+a^2) - (1-ab-bc-ca)^2 &= a^2b^2c^2 - 2\sum a^2bc + \sum a^2 + 2\sum ab \\ &= (abc-a-b-c)^2 \geq 0,\end{aligned}$$
证毕. □

接下来我们展示一种三角换元的做法.

**证明 3：** 设 $a=\tan\alpha, b=\tan\beta, c=\tan\gamma, \alpha,\beta,\gamma\in a>b>c$ 知 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，由 $\alpha>\beta>\gamma$.

$$
\begin{aligned}
LHS &= \left|\frac{(\tan\alpha-\tan\beta)(\tan\beta-\tan\gamma)\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}{\tan\alpha-\tan\gamma}\cdot(1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha)\right| \\
&= \left|\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha-\gamma)}\cos\alpha\cos\gamma\cdot(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma-\tan\beta\sin(\alpha+\gamma))\right| \\
&= \left|\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha-\gamma)}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\beta}(\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\gamma)-\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\gamma))\right| \\
&= \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\sin(\alpha-\gamma)}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot|\cos(\alpha+\beta+\gamma)|
\end{aligned}
$$

因此原命题等价于

$$
4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha\cos\gamma|\cos(\alpha+\beta+\gamma)|\le\cos\beta\sin(\alpha-\gamma). \tag{1}
$$

对于 $x\in(0,\pi)$, $(\ln\sin x)''=-\frac{1}{\sin^2 x}<0$, 因此函数 $y=\ln\sin x$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上凸.

从而由 Jensen 不等式及三角函数的诱导公式, 有

$$
\begin{aligned}
4(\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma))\cdot(\cos\alpha\cos\gamma) &\le 4\sin^2\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha-\gamma}{2} \\
&= \sin^2(\alpha-\gamma) \qquad (2)\\
4(\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha)\cdot(\sin(\beta-\gamma)\cos\gamma) &\le 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}+\beta}{2} \\
&= \cos^2\beta \qquad (3)\\
\cos^2(\alpha+\beta+\gamma) &\le 1 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$(2)\times(3)\times(4)$ 后开平方根即得 (1) 式, 证毕. □

**评注** 本题主要考察对代数恒等变形是否熟练.

事实上, 法 2 中的恒等式 $\prod(1+a^2)=(1-\sum ab)^2+(abc-\sum a)^2$ 可以用复数解释:

$$
\begin{aligned}
\prod(1+a^2) &= \left|\prod(a+\mathrm{i})\right|^2 \\
&= |(abc-a-b-c)+\mathrm{i}(ab+bc+ca-1)|^2 \\
&= \left(abc-\sum a\right)^2+\left(\sum ab-1\right)^2.
\end{aligned}
$$

类似地, 有

$$
\prod(a^2+k)=k\left(\sum ab-k\right)^2+\left(abc-k\sum a\right)^2,
$$

$$
(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2)=(bcx+cay+abz-xyz)^2+(yza+zxb+xyc-abc)^2.
$$

**3.** 设 $G$ 是一个 100 阶完全图, 甲乙两人轮流操作, 每回合甲先选一条未被选过的边, 乙再选一条未被选过的边. 124 个回合后, 若存在 $G$ 的一个由 25 个顶点不交 4- 圈组成的子图 $G'$, 使得 $G'$ 的边全被甲选到, 则甲获胜, 否则乙获胜. 求证: 乙有必胜策略.

**证明：** 将甲、乙选边的过程看作从100 阶 空 图中连边的过程. 对于 $1 \leq t \leq 124$, 设第 $t$ 回合之后甲连的边构成集合 $E_R(t)$, 记 $G_R(t) = (V(G), E_R(t))$ 为 $G$ 的子图.

乙的策略: 设第 $t$ 回合时甲连边 $e$, $e$ 在 $G_R(t)$ 中的连通分支为 $G_e$.

若 $G_e$ 满足存在 $k \in \mathbb{Z}_+$:

(i) $|V(G_e)| = 4k$;

(ii) $|E(G_e)| = 5k - 2$;

(iii) $G_e$ 中存在 $(k-1)$ 个顶点不交4-圈(记这 $4(k-1)$ 个点构成集合 $V'$), 且选取这 $(k-1)$ 个顶点不交4-圈的方式唯一(特别地, $k=1$ 时, (iii) 意为 $G_e$ 中不存在4-圈);

(iv) $G_e$ 中 $V(G_e) \setminus V'$ 这四个点构成一条链 $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$, 且无边 $v_1 - v_4$.

则乙连边 $v_1 - v_4$, 否则乙任意连边.

**反证法.** 假设乙在这种策略下 $G_R = G_R(124)$ 中有 25 个顶点不交 4-圈, 则任一个点都恰属于这 25 个 4-圈中的一个. 从而 $G_R$ 中每个连通分支的点数一定是 4 的倍数.

**引理** 在乙的策略下, 对于 $1 \leq t \leq 124$, $G_0$ 为 $G_R$ 的一个连通分支, $|V(G_0)| = 4k$, 若 $G_0$ 中存在 $k$ 个顶点不交 4-圈, 则 $|E(G_0)| \geq 5k$.

证明 对 $k$ 归纳证明引理. 设 $G_0$ 中的 $k$ 个顶点不交 4-圈为 $C_1, C_2, \cdots, C_k$.

$k=1$ 的情形: 反证法, 若 $|E(G_0)| \leq 4$ , 则 $G_0 = C_1$. 由于甲刚连上 $C_1$ 中的三条边后, 乙会连 $C_1$ 中的最后一条边, 矛盾! 因此 $|E(G_0)| \geq 5$.

假设命题对 $< k$ 均成立, 考虑 $k$ 的情形. 反证法, 若 $|E(G_0)| \leq 5k-1$, 构造图 $G' = (V, E)$, 其中 $V = \{1, 2, \cdots, k\}$, $i$ 与 $j$ 之间连 $l$ 条边当且仅当 $C_i$ 与 $C_j$ 在 $G_0$ 中有 $l$ 条边(特别地, $i=j$ 时, $i$ 与 $i$ 本身连 $l$ 条边当且仅当 $C_i$ 内部有 $(l+4)$ 条边, 其中 $l > 0$) ( $G'$ 不一定为简单图), 则 $G'$ 边数

$$|E(G')| = |E(G_0)| - 4k \leq k - 1.$$

又 $G'$ 为连通图, 故 $|E(G')| \geq k-1$, 则 $|E(G')| = k-1$, 且 $|E(G_0)| = 5k-1$, $G'$ 为一棵树, 为简单图.

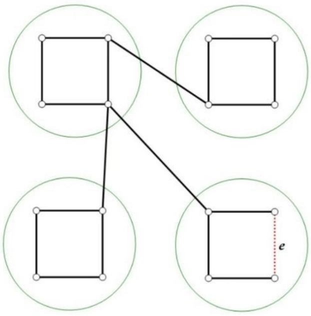



图 2

设 $G_0$ 中最后一条被连上的边为 $e$, 若 $e$ 为 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 中某一个中内部的边(图 2 是一个例子), 则甲刚连成 $G_0 \setminus e$ 后乙就会把 $e$ 连上, 矛盾! 因此 $e$ 的两个端点不在同一个 $C_i$ 中, 即 $e$ 为 $G_0$ 的割边. 设 $e$ 连接 $G_1$, $G_2$ 两个连通分支, 则 $G_1$, $G_2$ 中亦存在若干个(少于 $k$ 个) 顶点不交 4-圈覆盖所有顶点. 由归纳假设, $|E(G_1)| \geq \frac{5}{4}|V(G_1)|$, $|E(G_2)| \geq \frac{5}{4}|V(G_2)|$, 则

$$|E(G_0)| \geq \frac{5}{4}|V(G_0)| = 5k+1,$$

与反证假设矛盾! 这就完成了归纳过渡.

从而引理得证.

特别地, $t = 124$ 时, $G_R$ 每个连通分支其边数与点数之比都不小于 $\frac{5}{4}$, 从而 $|E_R(124)| \geq \frac{5}{4} \cdot 100 = 125$, 矛盾! 故乙必胜. □

**评注** 本题难点在于最终 25 个顶点不交 4-圈的选取方式多样, 从而过程中无法判断一条边是否有用, 阻碍了思路. 因此使用反证法, 考察甲成功状态下 $G_R$ 的结构, 再设计乙的策略来破坏它, 问题就迎刃而解.

**4.** 给定正整数 $k$. 求所有的函数 $f: \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$, 使得对任意正整数 $x, y$, 均有

$$(f^{(x)}(y))^2 - 4kxy$$

是完全平方数.

**证明**: 所求函数为 $f(x) = x + k$.

当 $f(x) = x + k$ 时, $f^{(x)}(y) = y + kx$, 因此 $(f^{(x)}(y))^2 - 4kxy = (y - kx)^2$ 为完全平方数. 下证仅有 $f(x) = x + k$ 这一个解.

固定 $y$. 对于素数 $p$, 设 $(f^{(p)}(y))^2 - 4kpy = a_p^2$, $a_p \in \mathbb{Z}$. 由 $4 \mid 4kpy$ 知 $f^{(p)}(y)$ 与 $a_p$ 同奇偶. 设 $f^{(p)}(y) + a_p = 2a$, $f^{(p)}(y) - a_p = 2b$, $a, b \in \mathbb{Z}_+$, 解得 $f^{(p)}(y) = a + b$, 由 $p \mid pky = ab$, 知 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.

故对于任意素数 $p$, 存在 $t, s \in \mathbb{Z}_+$ 使 $f^{(p)}(y) = tp + s$ 且 $ts = ky$. 注意到这样

的 $(t,s)$ 只有有限组, 且素数有无穷多个, 由抽屉原理, 存在素数集的无穷子集 $P$ 及 $t,s\in\mathbb{Z}_+$ 使 $ts=ky$ 且 $\forall p\in P$, $f^{(p)}(y)=tp+s$.

对于 $n\in\mathbb{Z}_+$, $p>n$, $p\in P$, 有 $F=\left(f^{(p-n)}(f^{(n)}(y))\right)^2-4k(p-n)f^{(n)}(y)$ 为平方数, 故 $F=(tp+s)^2-4k(p-n)f_n$ 为平方数, 其中 $f_n=f^{(n)}(y)$.

由 $ts=ky$ 知

$$
\begin{aligned}
&y^2F-(ytp+ys-2sf_n)^2\\
=&y^2\left((tp+s)^2-4k(p-n)f_n\right)-(y(tp+s)-2sf_n)^2\\
=&y^2(tp+s)^2-4ky^2(p-n)f_n-y^2(tp+s)^2+4sf_ny(tp+s)-4s^2f_n^2\\
=&4f_n(-ky^2(p-n)+sy(tp+s)-s^2f_n)\\
=&4f_n\left((ts-ky)yp+ky^2n+s^2y-s^2f_n\right)\\
=&4f_n(ky^2n+s^2y-s^2f_n)
\end{aligned}
$$

与 $p$ 无关. 若 $4f_n(ky^2n+s^2y-s^2f_n)$ 非零, 则其仅能表为有限组平方数之差. 而 $y^2F$, $(ytp+ys-2sf_n)^2$ 均可取充分大(因为 $p$ 可以取充分大), 因此

$$4f_n(ky^2n+s^2y-s^2f_n)=0,$$

得 $f_n=f^{(n)}(y)=y+\frac{tyn}{s}$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}_+$ 成立(此处用到了 $ts=ky$).

特别地, 取 $n\in P$, 有 $tn+s=f^{(n)}(y)=y+\frac{tyn}{s}$, 由 $P$ 为无限集知 $n$ 可取充分大, 从而 $\frac{ty}{s}=t$, $y=s$, $t=\frac{ky}{s}=k$, 即 $f^{(n)}(y)=kn+y$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}_+$ 成立. 特别地, 取 $n=1$, 得 $f(y)=y+k$.

由 $y$ 的任意性知 $f(x)=x+k$, 前已验证其为方程的解.

综上所述, 所求函数为 $f(x)=x+k$. □

**评注** 本题中很难对 $f$ 给出一个明确的表达形式, 这导致 $f$ 很难刻画. 该解法利用素数的整除性质及抽屉原理, 给出 $f$ 对部分自变量的明确表达式, 而后使用 $f^{(n)}=f^{(t)}\circ f^{(n-t)}$ 求得 $f$. 本题核心在于考虑固定 $y$ 变 $x$, 最关键的步骤在于证明数列 $\{f^{(n)}(y)\}_{n=1}^{+\infty}$ 几乎线性, 或者说存在无穷多个 $n$ 使得 $f^{(n)}(y)=kn+C$, 其中 $C$ 为常数.

**5.** 对复数 $\omega$, 记 $\omega+1,\omega-1,\omega+i,\omega-i$ 中模长最小者所构成的集合为 $T(\omega)$. 称复数列 $\{z_n\}$ 是有趣的, 如果 $|z_1|\le 1$, $z_{n+1}\in T(z_n)$, $n\in\mathbb{N}_+$. 求最小的实数 $C$, 使得对任何有趣的复数列 $\{z_n\}$, 都有 $|z_1+z_2+\cdots+z_{2024}|\le C$, 并求取等时 $z_1$ 的所有可能值.

**解**: $C_{\min}=1012$, 取等时 $z_1=0,\pm1,\pm i,\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i,-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$.

对 $z_1 = 0, \pm 1, \pm i$ 的情形, 容易验证 $\left|\sum_{i=1}^{2024} z_i\right| \leq 1012$, 且可以取等. 下设 $z_1 \neq 0, \pm 1, \pm i$, 则复数列 $\{z_n\}$ 中不会出现 $0, \pm 1, \pm i$.

**引理 1** 复平面内存在单位正方形 $ABCD$ 使 $\{z_n\}$ 所有值均为 $A, B, C, D$ 中的某一个.

证明 知以 $1, i, -1, -i$ 四个点为圆心, 1 为半径的四个圆必能覆盖单位圆, 故对于任意复数 $w$ 满足 $|w| \leq 1$, 有

$$\min\{|w+1|, |w-1|, |w+i|, |w-i|\} \leq 1,$$

即对于 $z \in T(w)$, $|z| \leq 1$.

因此, 由 $|z_1| \leq 1$ 知 $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $|z_n| \leq 1$. 又 $z_n = z_1 + k + li$, $k, l \in \mathbb{Z}$, 由 $z_1 \neq 0, \pm 1, \pm i$ 知 $\{z_1 + k + li \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ 与单位闭圆盘之交必包含于以 $z_1$ 为顶点且覆盖原点的单位正方形 $ABCD$ 的四个顶点构成的集合, 从而引理 1 得证.

设正方形 $ABCD$ 中心为 $O$, $X$ 为复平面原点, 则 $X$ 在 $ABCD$ 内部或边界上, 设 $AB$ 中点为 $M$, $BC$ 中点为 $N$. 由对称性, 不妨设 $X$ 在 $\triangle OMB$ 内部或边界上. 此时有 $XB \leq XA \leq XC \leq XD$, 如图 3. 1.

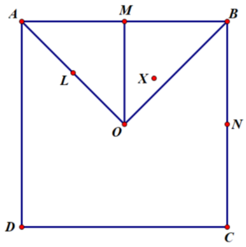



图 3.1

**引理 2** 对于复数列 $\{z_n\}$ 中任意连续四项, 它们的和的模长不超过 2.

证明 对复数列中任意连续四项 $p, q, r, s$, 下证 $|p+q+r+s| \leq 2$.

若 $X = O$, 则 $XA = XB = XC = XD$. $p, q$ 与 $r, s$ 均为正方形相邻的顶点, 故 $p+q, r+s$ 均为 $1, -1, i, -i$ 之一, 因此

$$|p+q+r+s| \leq |p+q| + |r+s| = 2,$$

且可以取等, 此时 $z_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$.

下设 $X \neq O$, 则 $XB \leq XA \leq XC \leq XD$, 且 $XD > XB$.

① $p, q, r, s$ 中出现 $D$.

由 $XD > XB$ 知 $A, C$ 的下一项不可能是 $D$, 也就是 $p = D$. 因此 $r = B$, $q, s \in \{A, C\}$.

I. 若 $(q,s)=(A,C)$. 则

$$|p+q+r+s|=\left|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}\right|=4|\overrightarrow{XO}|,$$

只需证 $XO<\frac{1}{2}$. 由于 $s=C$, 这表明 $XA=XC$, 即 $X$ 在线段 $BO$ 上, 所以 $XO=XD-OD\le 1-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{2}$, 无法取等.

II. 若 $q=s=A$. 则

$$|p+q+r+s|=\left|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XB}\right|=2|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XO}|=4|\overrightarrow{XL}|,$$

其中 $L$ 为 $OA$ 中点. 只需证 $XL<\frac{1}{2}$. 设 $\odot(D,DA)$ 交 $BD$ 于 $E$. 由于 $|XD|\le 1$, 故 $X$ 只能在图 3.2 中的阴影部分中. 由图知 $\odot(L,LE)$ 覆盖阴影部分, 因此

$$XL\le LE=\sqrt{OE^2+OL^2}=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}<\frac{1}{2},$$

无法取等.

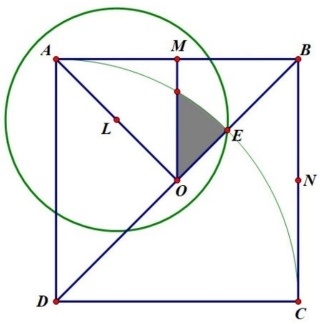



图 3.2

III. 若 $q=s=C$. 同I 可知 $X$ 在线段 $BO$ 上. 此时整个图形关于直线 $BD$ 轴对称, 因此

$$|p+q+r+s|=\left|\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right|=\left|\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XA}\right|,$$

化归为 II 的情形.

② $p,q,r,s$ 中无 $D$.

I. 若 $p,q,r,s$ 中无 $C$. 则

$$|p+q+r+s|=2|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|=4|\overrightarrow{XM}|\le 4|\overrightarrow{BM}|=2,$$

取等时 $X=B$, 即 $z_1=0,-1,-i$ (均舍去).

II. 若 $p,q,r,s$ 中含 $C$. 若 $(p,q,r,s)=(C,B,A,B)$, 则

$$|p+q|=2|\overrightarrow{XN}|,\ |r+s|=2|\overrightarrow{XM}|.$$

而 $|\overrightarrow{XN}|+|\overrightarrow{XM}|\le|\overrightarrow{BN}|+|\overrightarrow{BM}|=1$, 因此 $|p+q+r+s|\le 2$.

若 $(p,q,r,s)\neq(C,B,A,B)$, 则 $C$ 必在 $q,r,s$ 中出现, 从而 $X$ 在线段 $BO$ 上. 由对称性, $|p+q|=|r+s|=2|\overrightarrow{XM}|$, 从而

$$|p+q+r+s|\leq|p+q|+|r+s|=4|\overrightarrow{XM}|\leq 2,$$

取等时 $X=B$, 即 $z_1=0,-1,-i$ (均舍去).

从而引理 2 得证.

由引理 2 及模不等式知 $\left|\sum\limits_{i=1}^{2024}z_i\right|\leq\frac{2024}{4}\times 2=1012$, 容易验证 $z_1=0,\pm1,\pm i,\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i,-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$ 时均可取得等号.

综上所述, $C_{\min}=1012$, 取等时 $z_1=0,\pm1,\pm i,\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i,-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$. □

**评注** 本题本质上不难的. 在尝试之后发现复数列中只有极少量的取值, 并且这些取值有一定联系, 把过程写清楚即可. 由本题亦可看出, 当下数学竞赛对考生的严谨、规范的书写过程提出了较高的要求, 因此在平时要有意识的培养这种能力.

**6.** 求最小的正整数 $d$, 使得存在 $d$ 次整系数多项式 $P(x)$, 满足对任意奇数 $n$, 有 $P(n)^3\equiv n\pmod{2024}$.

**解** $d_{\min}=15$.

一方面, 有 $2024=2^3\times11\times23$, 故题述性质等价于对任意奇数 $n$,

$$\begin{cases}P(n)^3\equiv n\pmod 8\\ P(n)^3\equiv n\pmod{11}\\ P(n)^3\equiv n\pmod{23}\end{cases}\qquad(*)$$

成立. 分别取 $x=1,3,\cdots,45$, 得 $\forall x\in\mathbb{Z}_{23}$, $P(x^3)\equiv x\pmod{23}$. 由费马小定理,

$$(x^{15})^3\equiv x^{22}\cdot x^{23}\equiv x^{22}\cdot x\equiv x\pmod{23},$$

故 $(P(x))^3\equiv(x^{15})^3\pmod{23}$.

**引理** 对于素数 $p\equiv5\pmod 6$, $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\not\equiv b\pmod p$, 有 $a^3\not\equiv b^3\pmod p$.

证明 反证法. 若 $a\not\equiv b\pmod p$, $a^3\equiv b^3\pmod p$, 显然 $p\nmid a$, $p\nmid b$, (否则 $a\equiv b\equiv0\pmod p$), 由 $p\equiv-1\pmod 3$ 知 $2p\equiv1\pmod 3$, 从而

$$(a^3)^{\frac{2p-1}{3}}\equiv(b^3)^{\frac{2p-1}{3}}\pmod p,$$

即 $a^{2(p-1)+1}\equiv b^{2(p-1)+1}\pmod p$. 由费马小定理, $a\equiv b\pmod p$, 矛盾! 从而引理得证.

回到原题, 由 $23\equiv5\pmod 6$ 及引理知 $P(x)\equiv x^{15}\pmod{23}$, $\forall x\in\mathbb{Z}_{23}$, 若 $\deg P\leq14$, 则 15 次多项式 $x^{15}-P(x)$ 在 $\mathbb{Z}_{23}$ 下有 23 个根, 与 Lagrange 定理相

违! 因此 $\deg P \geq 15$, 即 $d \geq 15$.

另一方面, 取

$$P(x) = 1496x^{15} + 1288x^7 + 1265x = 8 \cdot 11 \cdot 17x^{15} + 8 \cdot 7 \cdot 23x^7 + 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot x.$$

则对于奇数 $n$, 由费马小定理,

$$P(n)^3 \equiv n^3 \equiv n \pmod 8,$$

$$P(n)^3 \equiv (n^7)^3 \equiv n^{21} \equiv n \pmod{11},$$

$$P(n)^3 \equiv (n^{15})^3 \equiv n^{45} \equiv n \pmod{23}.$$

即 $(*)$ 成立, 从而 $P(x)$ 符合题述要求.

综上所述, $d_{\min} = 15$. □

**评注** 本题是一个简单题. 将 2024 质因数分解之后, 对每个素因子稍加分析, 本题便一目了然. 这道题启发着我们去寻找"多项式版本的中国剩余定理", 即多项式模整数意义下的同余方程组, 但它的本质依旧是一些关于系数的同余方程组.

事实上, 解答中的引理有推广形式:

对于 $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $(n, \varphi(m)) = 1$, 在 $x$ 遍历模 $m$ 既约剩余系时, $x^n$ 遍历模 $m$ 既约剩余系.

它的证明是类似的.

**7.** 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC$, $\omega$ 为外接圆, $BC$ 的中点为 $M$. 点 $D$ 在线段 $BM$ 上(不包括端点), $AD$ 与 $\omega$ 交于另一点 $P$, $\triangle ADM$ 的外接圆与 $\omega$ 交于另一点 $K$. 设 $\omega$ 在 $K$ 处的切线与 $PB$ 交于点 $X$, 过 $K$ 作 $AK$ 的垂线交 $AB$ 于点 $Z$, $XZ$ 与 $AC$ 交于点 $Y$. 求证: $PA$ 平分 $\angle YPZ$.

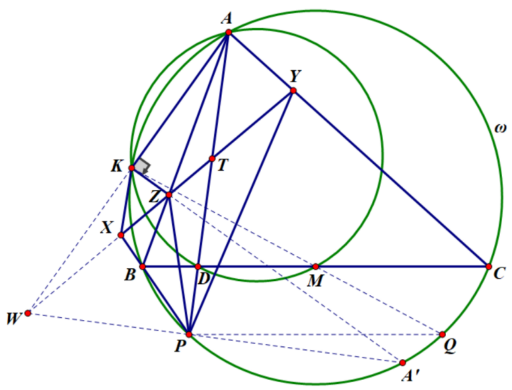



图 4

**证明** 取 $A$ 关于 $\omega$ 的对径点 $A'$, $AK, A'P$ 交于 $W$, 延长 $KM$ 交 $\omega$ 于 $Q$, $AP, YZ$ 交于 $T$, 如图 4. 由 $\angle AKZ = 90^\circ = \angle AKA'$ 知 $K, Z, A'$ 共线.

因为 $\angle KMD = \angle KAP = \angle KQP$, 所以 $PQ \parallel BC$. 所以 $\widehat{BP} = \widehat{CQ}$, 即 $\angle BKP = \angle CKM$. 所以四边形 $KBPC$ 为调和四边形.

所以 $AK, AP; AB, AC$ 为调和线束.

对六边形 $KKA'PBA$ 运用 Pascal 定理, 知 $W, X, Z$ 共线.

所以 $W, T; Z, Y$ 为调和点列, 进而 $PW, PT; PZ, PY$ 为调和线束.

又 $AA'$ 为直径, 故 $PW \perp PA$, 由调和线束的性质知 $PA$ 平分 $\angle YPZ$. □

**评注** 利用 Pascal 定理消去 $X$ 是自然的. 注意 $PA \perp PW$, 只需 $W, T; Z, Y$ 为调和点列. 剩余部分就容易了. 当然, 倒调和有很多方式, 此处只展示一种.

**8.** 设 $n$ 是正整数, 称一个由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的 $2n-1$ 项序列为优美的, 如果在序列中,

(1) 对 $1 \le i \le n-1$, 第一个 $i$ 在第一个 $i+1$ 之前, 且至少有一个 $n$;

(2) 相邻的数不相同;

(3) 任何一对数相邻的次数为偶数.

求优美的序列的个数.

**解** :所求数量为 $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ .

设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1}$ 为优美序列.

构造图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$, $E = \{a_i a_{i+1} | 1 \le i \le 2n-2\}$ 去重边, 由条件(2) 知 $G$ 为简单图; 由条件(1) 知 $G$ 为连通图, 故 $|E| \ge n-1$; 由条件(3) 知 $G$ 中每条边至少对应 $\{a_i\}$ 中两组相邻项, 故 $|E| \le \frac{1}{2}(2n-2) = n-1$; 从而 $|E| = n-1$, $G$ 为一棵树, 序列 $\{a_i\}$ 可看作在树 $G$ 上的一个游走 $a_1 - a_2 - \cdots - a_{2n-1}$ 恰经过每条边两次.

将编号为 1 的结点视作 $G$ 的根结点. 由 $G$ 为树知从 1 开始的游走每一次到达 $i$ 之后, 应先将以 $i$ 为根的子树中的边均遍历 2 次后再第二次经过 $i$ 到 $i$ 的父亲结点的边. 也就是说, 这个游走就是对树 $G$ 的深度优先搜索的过程, 序列 $\{a_i\}$ 即为欧拉序. 在欧拉序确定后, 树 $G$ 亦唯一确定. 因此, 区分兄弟结点顺序的 $n$ 阶有根树与 $2n-1$ 项的优美序列一一对应.

在深度优先搜索的过程中, 从深度小到深度大的移动记为左括号, 从深度大到深度小的移动记为右括号, 则可将该搜索转换为长为 $2(n-1)$ 的括号序列, 如图 5. 另一方面, 对于长为 $2(n-1)$ 的括号序列, 从左至右将括号序列扫一遍, 从根结点

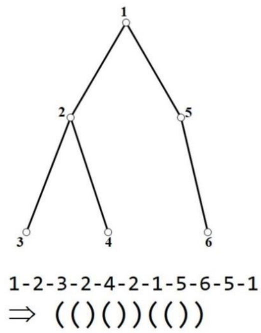



图 5

1 开始, 若为左括号则生成一个儿子结点, 在其兄弟中排名最后, 并跳转到这个结点上; 若为右括号则跳转到父亲结点上, 将新生成的点按时间顺序顺次标号, 即可得到树 $G$. 故括号序列确定后, 树 $G$ 唯一确定. 因此, 区分兄弟顺序的 $n$ 阶有根树与长为 $2(n-1)$ 的括号序列一一对应.

熟知, 长为 $2(n-1)$ 的括号序列的数量为 $C_{n-1}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ (Catalan 数). 因此, 优美序列的数量亦为 $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ . $\square$

**评注** $2n-1$ 项序列中每对数的相邻次数为偶数, 直觉上每对数出现的次数会有较小的上界. 将问题转化为图论问题之后, 其本质一目了然. 有信息基础的考生对这题会有更深刻的理解.