CSIE 5432 — Machine Learning Foundations

Name: 李吉昌 **Homework 2**
Student Number: r08922a27 **Due Date:** November 6 2020, 13:00

Perceptrons

1. Answer: [c]

由 Lecture 7 slides 的第 12 頁可得, 若 data sample 和 bias 項 ($x_0 = 1$) 構成的矩陣為 X。令 X 為 d 筆資料, 給定任一 label $y \in \{-1, +1\}^d$。若 X 可逆, 則一定找得到一組參數 w 使得 $Xw = y$。$Xw = y$ 成立則 $\text{sign}(Xw) = y$ 必成立, 即該組 data sample 必定可以被 shatter。選項中僅有 [c] 為可逆方陣, 得 [c] 的 data sample 可以被 shatter。

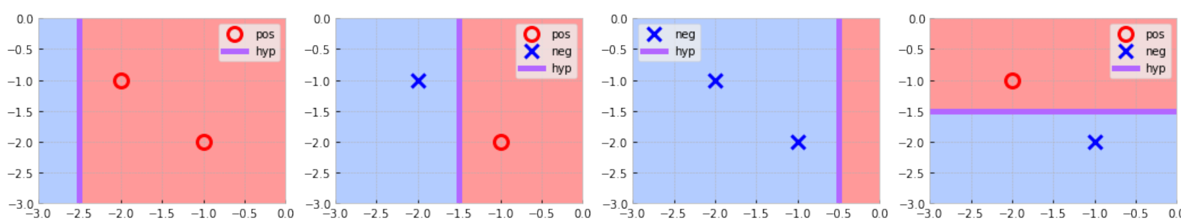
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 15 & 16 & 17 \\ 1 & 21 & 23 & 25 \end{pmatrix}, \; X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{8} & \frac{7}{8} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-11}{8} & \frac{11}{8} & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Answer: [d]

因為平行 x 和 y 軸的 hypothesis 的結果互相獨立, 在不討論全為 positive/negative 的情況下, growth function 可以看成是各軸 decision stump 的 growth function 的疊加, 各軸為 $2N - 2$, 共 $4N - 4$, 加上全為 positive/negative 的 2 種情況, 答案是 $4N - 2$。

3. Answer: [c]

Stage 1:
由下圖所示, 在 $N = 2$, 可以找到一組被 shatter 的 sample 組合, 得 $d_{vc} \geq 2$。



Stage 2:
令三個 sample 為 $\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3} \in \mathbb{R}^2$, 向量之間 pairwise independent(若沒有該性質則兩相依 sample 的 hypothesis 結果差別為乘上 scalar, 考量可否 shatter 的情況, 兩個相依 sample 會出現的結果只會被一個 sample 決定, 等價於討論 $N = 2$ 的 shatter 情況, 由上述已知 $N = 2$ 可找到被 shatter 的情況, 無須再考慮 $N = 2$ 可否被 shatter), 三個 sample 包含 bias 項構成矩陣為 $X = \begin{pmatrix} 1, & -\mathbf{x1}^T- \\ 1, & -\mathbf{x2}^T- \\ 1, & -\mathbf{x3}^T- \end{pmatrix}_{3\times 4}$, X 的 row vector 線性獨立; 令 $\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^2$ 為 2D-perceptron 的 weight, bias 為一 scalar w_0, 構成參數向量 $w = \begin{pmatrix} w_0 \\ \mathbf{w}' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 則 hypothesis 預測結果分別為 $\text{sign}(w_0 + \mathbf{w}'^T \mathbf{x_1})$, $\text{sign}(w_0 + \mathbf{w}'^T \mathbf{x_2})$, $\text{sign}(w_0 + \mathbf{w}'^T \mathbf{x_3})$。

由於 $\mathbb{R}^2$ 空間維度為 2, 三個向量必為線性相依, 一定可以找到一組系數 α, β 使得 $\mathbf{x_3} = \alpha \cdot \mathbf{x_1} + \beta \cdot \mathbf{x_2}$。在 $\alpha \cdot \mathbf{w'}^T \mathbf{x_1} > 0, \beta \cdot \mathbf{w'}^T \mathbf{x_2} > 0$ 的情況下, 則 $\mathbf{w'}^T \mathbf{x_3} = \alpha \cdot \mathbf{w'}^T \mathbf{x_1} + \beta \cdot \mathbf{w'}^T \mathbf{x_2} > 0$, 配合題意 $w_0 > 0$, 得 $\mathbf{w'}^T \mathbf{x_3} + w_0 > 0$, 可推得 $\text{sign}(\mathbf{w'}^T \mathbf{x_3} + w_0) > 0$, 綜上述可得知 x_3 在 $\mathbf{w'}^T \mathbf{x_1}, \mathbf{w'}^T \mathbf{x_2}$ 和 α, β 同號時已被決定結果, 必定不能被 shatter, 故 $d_{vc} \leq 2$。

由 Stage 1 和 Stage 2 結果得 $d_{vc} = 2$。

Ring Hypothesis Set

4. Answer: [b]

將座標進行球座標轉換, 令 $\begin{cases} x_1 = \rho \sin\theta \cos\phi \\ x_2 = \rho \sin\theta \sin\phi \\ x_3 = \rho \cos\theta \end{cases}$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2$, 得 $a \leq \rho^2 \leq b$, 條件限制與球座標角度無關, 等同於在求取區間為 $\sqrt{a}$ 至 $\sqrt{b}$, 以 ρ 為數線軸的 Positive Intervals 問題, growth function 和 Positive Intervals 的一樣。

5. Answer: [b]

同上題所述, Positive Intervals 的 VC dimension 為 2, 得 ring hypothesis set 為 2。

Deviation from Optimal Hypothesis

6. Answer: [d]

令 $\Delta = \sqrt{\frac{8}{N} \ln(\frac{4m_{\mathcal{H}}(2N)}{\delta})}$, 由 Lecture 7 slides 的第 24 頁可得, 對任意 $h \in \mathcal{H}$, 皆成立 $E_{in}(h) - \Delta \leq E_{out}(h) \leq E_{in}(h) + \Delta$, 將 g 和 g^* 代入:

$$\begin{cases} E_{in}(g) - \Delta \leq E_{out}(g) \leq E_{in}(g) + \Delta \\ E_{in}(g^*) - \Delta \leq E_{out}(g^*) \leq E_{in}(g^*) + \Delta \end{cases}$$

下式同乘負號可得, $-E_{in}(g^*) - \Delta \leq -E_{out}(g^*) \leq -E_{in}(g^*) + \Delta$, 兩式相加合併可得下面結果,

$$(E_{in}(g) - E_{in}(g^*)) - 2 \cdot \Delta \leq E_{out}(g) - E_{out}(g^*) \leq (E_{in}(g) - E_{in}(g^*)) + 2 \cdot \Delta, \tag{1}$$

因為 $E_{in}(g) \leq E_{in}(g^*)$, 得 $(E_{in}(g) - E_{in}(g^*)) \leq 0$, 則 $(E_{in}(g) - E_{in}(g^*)) + 2 \cdot \Delta \leq 2 \cdot \Delta$,

得 $E_{out}(g) - E_{out}(g^*) \leq 2\Delta = 2\sqrt{\frac{8}{N} \ln(\frac{4m_{\mathcal{H}}(2N)}{\delta})}$

The VC Dimension

7. Answer: [d]

在二元分類中, VC dimension 為 d_{vc}, 表示一定存在 d_{vc} 個 sample 可以被 shatter, 則表示 $\mathcal{H}$ 至少具備 $2^{d_{vc}}$ 種 dichotomy, 則 $|\mathcal{H}| \geq 2^{d_{vc}}$。 因為 d_{vc} 為整數, 兩邊取對數後, 以 floor 求取符合不等式最大整數, 代入 $|\mathcal{H}| = M$, 可得 $d_{vc} \leq \lfloor \log_2 M \rfloor$。

8. Answer: [d]

令輸入數量為 N 種, 當 $N \leq k+1$ 時, 可以選擇 sample 出 0 至 N 個 1 的數量的不同輸入, 這個情況 hypothesis 可以一對一給出其對應的 label, 故一定可以被 shatter, 得 $d_{vc} \geq k+1$; 當 $N > k+1$ 時, 必然存在兩種以上具備一樣 1 數量的輸入的情況, 一樣 1 數量的輸入對應的 label 被限制只能有一種, 因此一定沒辦法 shatter 其同類型輸入不同 label 的情況, 得 $d_{vc} \leq k+1$, 綜上述可歸納出 $d_{vc} = k+1$。

9. Answer: [c]

根據 Lecture 7 slides 的第 5 頁的描述, d_{vc} 為 d, 表示在 $\mathcal{H}$ 內必存在 d 個 distinct input 可以被 shatter, 但不一定適用所有 d 個 distinct input 的情況, 且 d 為 distinct input 可以被 shatter 的最大數量, 亦即超過 d 個 distinct input 一定不能被 shatter。 綜上所述, 「d_{vc} 為 d」 發生時必發生 「some set of d distinct inputs is shattered by $\mathcal{H}$」 以及 「any/some set of d + 1 distinct inputs is not shattered by $\mathcal{H}$」。

10. Answer: [c]

答案為 [c], 證明如下:

令待 shatter 的 data sample pair 為 $\{(\mathbf{x_i}, y_i) | i = 1, 2, ..., N\}$, 其中 $\mathbf{x_i} = 2\pi 10^{-i}$, $y_i \in \{-1, +1\}$ 為 $\mathbf{x_i}$ 對應的 label, 並將 α 令為 $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1-y_i}{2} 10^i) = \frac{1}{2}(1 + \sum_{i:y_i=-1} 10^i)$。 證明方法為分別討論 label y_i 分別為 -1 或 $+1$ 的時候, 當 y_i 為 -1 而 $\sin(\alpha \cdot \mathbf{x_i})$ 永遠為負且 y_i 為 $+1$ 而 $\sin(\alpha \cdot \mathbf{x_i})$ 永遠為正時, 表示 h_α 永遠可以 shatter 所有情況, 則其 VC dimension 為 ∞。

Stage 1:
任一 sample x_j 的 $y_j = -1$, 則:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot x_j &= \frac{1}{2}(1 + \sum_{i:y_i=-1} 10^i) \cdot 2\pi 10^{-j} \\
&= \pi(10^{-j} + \sum_{i:y_i=-1} 10^{i-j}) \\
&= \pi(10^{-j} + 1 + \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i>j}} 10^{i-j} + \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i<j}} 10^{i-j}), \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i>j}} 10^{i-j} \text{ 為 2 倍數的正整數, 令為 } 2k, \\
&= \pi(10^{-j} + 1 + \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i<j}} 10^{i-j}) + 2k\pi
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i<j}} 10^{i-j} < \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} - 1 = \frac{1}{1-0.1} - 1 = \frac{1}{9}$ 且 $10^{-j} \leq 10^{-1} = \frac{1}{10}$,
令 $10^{-j} + \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i<j}} 10^{i-j}$ 為 ϵ, 由上述可得 ϵ 範圍, $0 < \epsilon < \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{19}{90} < 1$,
由於 $\sin(\alpha \cdot x_j) = \sin(\pi(1+\epsilon) + 2k\pi) = \sin(\pi(1+\epsilon))$, 僅需討論 $\pi(1+\epsilon)$ 的範圍, 由上述可得, $\pi < \pi(1+\epsilon) < 2\pi$, 在該區間內 $\sin(\pi(1+\epsilon)) < 0$, 當 y_j 為 -1 的情況永遠可以預測正確。

Stage 2:
任一 sample x_j 的 $y_j = +1$, 則:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot x_j &= \pi(10^{-j} + \sum_{i:y_i=-1} 10^{i-j}) \\
&= \pi(10^{-j} + \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i>j}} 10^{i-j} + \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i<j}} 10^{i-j}), \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i>j}} 10^{i-j} \text{ 為 2 倍數的正整數, 令為 } 2k, \\
&= \pi(10^{-j} + \sum_{\substack{i:y_i=-1 \\ i<j}} 10^{i-j}) + 2k\pi,
\end{aligned} \tag{3}$$

代入 $\epsilon = 10^{-j} + \sum_{\substack{i:y_i=-1\\i<j}} 10^{i-j}$, 則 $\alpha \cdot x_j = \pi \cdot \epsilon + 2k\pi$,
由於 $\sin(\alpha \cdot x_j) = \sin(\pi \cdot \epsilon + 2k\pi) = \sin(\pi \cdot \epsilon)$, 僅需討論 $\pi \cdot \epsilon$ 的範圍, 由 Stage 1 可得 $0 < \epsilon < 1$, 則 $0 < \pi \cdot \epsilon < \pi$, 在該區間内 $\sin(\pi \cdot) > 0$, 當 y_j 為 $+1$ 的情況永遠可以預測正確。

綜合 Stage 1 和 Stage 2, 在 label 不同的條件下, 在 $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1-y_i}{2} 10^i)$ 時必能將所有情況預測正確, 將其 shatter。

Noise and Error

11. Answer: [d]

在 τ 機率干擾下, 看到 $[\![h(\mathbf{x}) \neq y)]\!]$ 發生有可能來自兩種情況, 分別是 y 沒被 flip 且 $h(\mathbf{x})$ 答錯以及 y 被 flip 且 $h(\mathbf{x})$ 答對的情況, 因此, $E_{out}(h, \tau)$ 可以拆成兩情況的疊加, 如下式:

$$
\begin{aligned}
&E_{out}(h,\tau) = (1-\tau) \cdot \mathbb{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}_0}[\![h(\mathbf{x}) \neq y)]\!] + \tau \cdot \mathbb{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}_0}[\![h(\mathbf{x}) = y)]\!],\\
&\text{代入 } \mathbb{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}_0}[\![h(\mathbf{x}) = y)]\!] = 1 - \mathbb{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}_0}[\![h(\mathbf{x}) \neq y)]\!] \text{ 以及 } E_{out}(h,0) = \mathbb{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}_0}[\![h(\mathbf{x}) \neq y)]\!],\\
&E_{out}(h,\tau) = (1-\tau) \cdot E_{out}(h,0) + \tau \cdot (1 - E_{out}(h,0)),\\
&\text{經移項整理可得 } E_{out}(h,0) = \frac{E_{out}(h,\tau) - \tau}{1-2\tau}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

12. Answer: [b]

所有 x, y 產生的 $err(f(\mathbf{x}), y)$ 需要分成 $f(\mathbf{x}) = 1$, $f(\mathbf{x}) = 2$ 和 $f(\mathbf{x}) = 3$ 三種情況討論, 如下式:

$$
\begin{aligned}
&E_{out}(f) = \mathcal{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}}[err(f(\mathbf{x}),y)] =\\
&\mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 1] \cdot \mathcal{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}|f(\mathbf{x})=1}[err(f(\mathbf{x}),y)](= 0.1 \cdot (1-2)^2 + 0.2 \cdot (1-3)^2 = 0.9)\\
+&\mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 2] \cdot \mathcal{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}|f(\mathbf{x})=2}[err(f(\mathbf{x}),y)](= 0.1 \cdot (2-3)^2 + 0.2 \cdot (2-1)^2 = 0.3)\\
+&\mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 3] \cdot \mathcal{E}_{(\mathbf{x},y)\sim\mathcal{P}|f(\mathbf{x})=3}[err(f(\mathbf{x}),y)](= 0.1 \cdot (3-1)^2 + 0.2 \cdot (3-2)^2 = 0.6)\\
&x \text{ 為平均分布, 因此 } f(\mathbf{x}) \text{ 亦為平均分布, 代入 } \mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 1] = \mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 2] = \mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 3] = \frac{1}{3},\\
&\text{可得 } E_{out}(f) = \frac{1}{3} \cdot 0.9 + \frac{1}{3} \cdot 0.3 + \frac{1}{3} \cdot 0.6 = 0.6
\end{aligned}
\tag{5}
$$

13. Answer: [b]

同上題所述, 需分段討論在 $f(\mathbf{x})$ 不同的情況下對應的 $f_*(\mathbf{x})$ 和機率:

當 $f(\mathbf{x}) = 1$ 時: $P(y|\mathbf{x}) = \begin{cases} 0.7, y = 1 \\ 0.1, y = 2 \\ 0.2, y = 3 \end{cases}$ 得 $f_*(\mathbf{x}) = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 = 1.5$

當 $f(\mathbf{x}) = 2$ 時: $P(y|\mathbf{x}) = \begin{cases} 0.2, y = 1 \\ 0.7, y = 2 \\ 0.1, y = 3 \end{cases}$ 得 $f_*(\mathbf{x}) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.7 + 3 \cdot 0.1 = 1.9$

當 $f(\mathbf{x}) = 3$ 時: $P(y|\mathbf{x}) = \begin{cases} 0.1, y = 1 \\ 0.2, y = 2 \\ 0.7, y = 3 \end{cases}$ 得 $f_*(\mathbf{x}) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.7 = 2.6$

$$
\begin{aligned}
\Delta(f, f_*) &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim P(\mathbf{x})}(f(\mathbf{x}) - f_*(\mathbf{x}))^2 \\
&= \mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 1] \cdot \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim P(\mathbf{x}|f(\mathbf{x})=1)}(f(\mathbf{x}) - f_*(\mathbf{x}))^2 \\
&+ \mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 2] \cdot \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim P(\mathbf{x}|f(\mathbf{x})=2)}(f(\mathbf{x}) - f_*(\mathbf{x}))^2 \\
&+ \mathbb{P}[f(\mathbf{x}) = 3] \cdot \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim P(\mathbf{x}|f(\mathbf{x})=3)}(f(\mathbf{x}) - f_*(\mathbf{x}))^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot (1 - 1.5)^2 + \frac{1}{3} \cdot (2 - 1.9)^2 + \frac{1}{3} \cdot (3 - 2.6)^2 = 0.14
\end{aligned} \tag{6}
$$

Decision Stump

14. Answer: [d]

由 Lecture 7 slides 的第 4 頁可得 $\delta = 4m_{\mathcal{H}}(2N)\exp\left(-\frac{1}{8}\epsilon^2 N\right)$, 代入 $m_{\mathcal{H}}(2N) = 2(2N) = 4N$, $\epsilon = 0.1$ 以及 $\delta = 0.1$, 得 $0.1 = 16 \cdot N \cdot exp(-0.00125 \cdot N)$。

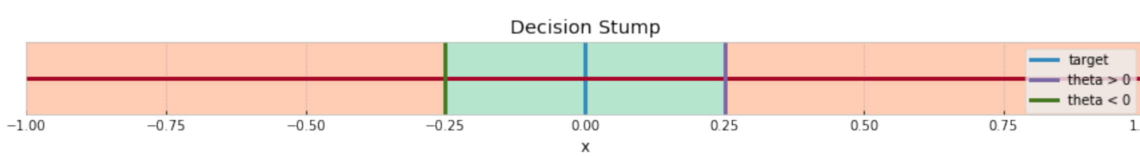
$$
16 \cdot N \cdot exp(-0.00125 \cdot N) \approx \begin{cases} 53.096(> \delta), N = 6000 \\ 5.8112(> \delta), N = 8000 \\ 0.5963(> \delta), N = 10000 \\ 0.0587(< \delta), N = 12000 \\ 0.0056(< \delta), N = 14000 \end{cases}
$$

, 得 $N = 12000$ 時為滿足條件最小值。

15. Answer: [b]

須分成 $\theta > 0$ 和 $\theta \leq 0$ 的兩種情形討論, 如下式:

$$
\begin{aligned}
&E_{out}(h_{+1,\theta}, 0) = \mathbb{P}[\theta > 0] \cdot \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\mathcal{P}}[\![x \in (0, \theta]|\theta > 0]\!] + \mathbb{P}[\theta \leq 0] \cdot \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\mathcal{P}}[\![x \in [\theta, 0)|\theta \leq 0]\!] \\
&\text{因為 } \mathbf{x} \text{ 為平均分布, 則 } \theta \sim \mathcal{P}_\theta \text{ 亦為平均分布, 得 } \mathbb{P}[\theta > 0] = \mathbb{P}[\theta \leq 0] = \frac{1}{2}, \\
&\text{由下圖所示, 右半和左半邊綠色區塊和整個定義域 } [-1, +1] \text{ 的比例即為不同情況下發生錯誤的機率,} \\
&\text{當 } \theta > 0\text{, 右半邊綠色區塊的機率為 } \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\mathcal{P}}[\![x \in (0, \theta]|\theta > 0]\!] = \frac{1}{2} \cdot \theta = \frac{1}{2}|\theta|, \\
&\text{當 } \theta \leq 0\text{, 左半邊綠色區塊的機率為 } \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\mathcal{P}}[\![x \in [\theta, 0)|\theta \leq 0]\!] = \frac{1}{2} \cdot (-\theta) = \frac{1}{2}|\theta|, \\
&\text{得 } E_{out}(h_{+1,\theta}, 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|\theta| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|\theta| = \frac{1}{2}|\theta|
\end{aligned} \tag{7}
$$



Experiment

程式碼實作細節如下, 可以透過 parser 的 –model 參數決定要用 closed form 還是 simulation 求得 $E_{out}(h_{s,\theta}, \tau)$:

```
python code.py --mode closedform
python code.py --mode simulate
```

```python
import numpy as np
import random
from scipy.stats import bernoulli
import argparse

'''
Define Function
'''


def generate_data(size, tau):
    x = np.sort(np.random.uniform(-1, 1, size))
    y = np.zeros(size).astype(int)
    y[x > 0] = 1
    y[x <= 0] = -1

    noisy_idx = bernoulli.rvs(tau, size=size) > 0
    y[noisy_idx] = -y[noisy_idx]

    return x, y


def get_g_Ein(x, y):
    theta_set = ([-1] + list(((x[1:] + x[:-1]) / 2))) * 2
    s_set = [-1] * len(x) + [1] * len(x)
    hypothesis_set = np.array(
        sorted(tuple(zip(s_set, theta_set)), key=lambda x: x[0] + x[1]))
    g, Ein = (-1, -1), 1

    for hypothesis in hypothesis_set:
        err = get_err(hypothesis, x, y)
        if Ein > err:
            g, Ein = hypothesis, err
        if Ein == 0:
            break
    return g, Ein


def get_err(hypothesis, x, y):
    s, theta = hypothesis
    pred = np.ones(len(y)).astype(int)

    if s > 0:
        pred[x <= theta] = -1
    else:
        pred[x > theta] = -1

    return (y != pred).sum() / len(y)
```

```python
def get_Eout(hypothesis, tau, IsSimulate=False):
    if IsSimulate:
        x_tst, y_tst = generate_data(100000, tau)
        Eout = get_err(hypothesis, x_tst, y_tst)
        return Eout
    else:
        s, theta = hypothesis
        Eout = 0.5 * np.abs(theta) if s > 0 else 1 - 0.5 * np.abs(theta)
        return (1 - 2 * tau) * Eout + tau


def get_answer(exp_num, size, tau, IsSimulate=False):
    ans = []

    for _ in range(exp_num):
        random.seed(random.randint(1, 10000))
        x_tra, y_tra = generate_data(size, tau)

        g, Ein = get_g_Ein(x_tra, y_tra)
        Eout = get_Eout(g, tau, IsSimulate)
        ans.append(Eout - Ein)

    return np.mean(ans)


def main():
    '''
    Parsing
    '''
    parser = argparse.ArgumentParser(
        description='Argument Parser for MLF HW1.')
    parser.add_argument('--mode', default='closedform',
                        choices=['closedform', 'simulate'])
    args = parser.parse_args()
    if args.mode == 'simulate':
        is_simulate = True
        print("Tesing by simulation!")
    elif args.mode == 'closedform':
        is_simulate = False
        print("Tesing by closed form!")

    '''
    Answer questions
    '''

    print('RUNNING Q16...')
    print('Answer of Q16 : {:.4f}\n'.format(get_answer(
        exp_num=10000, size=2, tau=0, IsSimulate=is_simulate)))

    print('RUNNING Q17...')
    print('Answer of Q17 : {:.4f}\n'.format(get_answer(
```

```python
        exp_num=10000, size=20, tau=0, IsSimulate=is_simulate)))

    print('RUNNING Q18...')
    print('Answer of Q18 : {:.4f}\n'.format(get_answer(
        exp_num=10000, size=2, tau=0.1, IsSimulate=is_simulate)))

    print('RUNNING Q19...')
    print('Answer of Q19 : {:.4f}\n'.format(get_answer(
        exp_num=10000, size=20, tau=0.1, IsSimulate=is_simulate)))

    print('RUNNING Q20...')
    print('Answer of Q20 : {:.4f}\n'.format(get_answer(
        exp_num=10000, size=200, tau=0.1, IsSimulate=is_simulate)))


if __name__ == "__main__":
    main()
```

16. Answer: [d]	17. Answer: [b]	18. Answer: [e]	19. Answer: [c]	20. Answer: [a]
0.2930	0.0243	0.3671	0.0519	0.0051