

# 上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

## 四旋翼无人机的飞行轨迹规划与控制



组长姓名: 王昌浩

组员姓名: 陈诗元、王一帆、张旭、杨林聪

指导教师: 丁烨、彭志科

学院(系): 机械与动力工程学院

## 摘要

随着四旋翼无人机的不断发展，无人机的轨迹规划与控制越来越成为人们所关注的焦点，本文的研究内容主要是基于非均匀有理 B 样条曲线（NURBS）来实现四旋翼飞机飞行路径的轨迹规划和速度规划与姿态规划，并且对其进行加速度和跃度约束，再实现对其姿态规划。问题的主要步骤为：根据已知数据点，确定控制点，生成 B 样条曲线。再进行速度规划，以最短时间完成巡航，增加加速度和跃度约束，提高系统的稳定性，再通过 SE3 插值实现姿态规划。以上成果最终都通过 GUI 界面进行展示。

**关键词:** 四旋翼 B 样条 速度规划 姿态规划 SE3 GUI

## Abstract

With the development of the quadrotor, people become more and more interested in the trajectory planning and motion control of it. This paper is primarily concerned with the trajectory and motion control of the quadrotor with the help of NURBS. We use the limitation of the acceleration and jerk to optimize the velocity of the UAV and then control its motion. The procedure for this paper is: based on the navigation waypoints to get the control points and the base of the NURBS, and then generate the B-Spline. And then we optimize the velocity of the quadrotor in order to make the quadrotor to pass the path efficiently. In the end we use the method to interpolation on SE3 to get the motion of the quadrotor. We also program a GUI in order to show our results.

**Key Words:** quadrotor、B-Spline、velocity planning、motion planning、SE3、GUI

## 目录

1	第一章 前言 .....	5
1.1	四旋翼无人机 .....	5
1.2	B 样条曲线 .....	5
1.3	轨迹规划与姿态控制 .....	6
2	第二章 NURBS 曲线生成： .....	6
2.1	无人机轨迹拟合 .....	6
2.2	非均匀 B 样条 .....	7
2.3	B 样条函数的性质 .....	8
2.4	B 样条曲线的算法 .....	9
2.4.1	节点向量 $U$ .....	9
2.4.2	B 样条基函数 $N_i, p$ .....	10
2.4.3	路径控制点 $P_i$ .....	11
2.5	基于非均匀 B 样条的路径平滑 .....	12
2.6	NURBS 曲线展示 .....	13
3	第三章 无跃度约束下的最优速度规划 .....	14
3.1	求导函数 .....	14
3.2	速度约束 .....	15
3.3	弓高误差约束 .....	16
3.4	加速度约束 .....	17
3.5	完整的速度规划约束 .....	17
3.6	无跃度约束结果 .....	18
4	第四章 有跃度约束下的最优速度规划 .....	19
4.1	跃度约束的必要性 .....	19
4.2	端点区间的约束 .....	20
4.3	跃度约束结果小结 .....	21
5	第五章 无人机姿态规划 .....	23
5.1	无人机动力学模型 .....	23

5.1.1	模型假设	23
5.1.2	无人机飞行原理与基本运动	23
5.1.3	无人机模型建立	24
5.1.4	常用运动参数	25
5.1.5	运动方程的建立	26
5.2	特殊欧式群中 ( $SE(3)$ ) 的插值	28
5.2.1	特殊正交群中( $SO(3)$ )的插值计算	28
5.2.2	线性空间中的插值计算	30
6	第六章 无人机 Simulink 建模与 MATLAB 模拟	30
6.1	Simulink 建模	31
6.2	MATLAB 无人机仿真	32
7	第七章 GUI 界面的编写	34
7.1	GUI 界面概述	34
7.2	GUI 功能简述	35
7.3	GUI 界面编写	35
7.4	基本功能介绍：	36
8	第八章 课题成果与分工安排	37
8.1	课题成果与组长感想	37
8.2	分工安排	38
9	第九章 MATLAB 程序及其使用说明	38
10	参考文献	39

## 1 第一章 前言

### 1.1 四旋翼无人机

四旋翼无人机飞行器 (Unmanned Aerial Vehicle, UAV) 是一种具有四个控制输入和六个控制输出的欠驱动动力学旋翼式直升机。它固联在刚性十字交叉结构上, 通过 4 个独立的直流无刷电机来驱动螺旋桨。该系统由锂电池供电, 续航时间由电池容量和承载共同决定, 飞行时间一般在 20 分钟左右。具有垂直起降, 悬停、倒飞及侧飞能力, 且螺旋桨小, 飞行安全, 结构简单, 造价低廉, 具有较好的可维护性和可操作性。相对于传统直升机, 小型四旋翼飞行器在结构上更为简洁, 不需要专门的反扭矩桨, 仅通过四个旋翼之间便可相互抵消反扭矩。且具有更简洁的控制方式, 仅通过调整四个旋翼的相对转速即可对姿态和位置进行控制。

飞行器的轨迹规划是指在满足飞行器性能指标和特定的约束条件下, 寻找一条从起始点到目标点的最优或者次优的飞行轨迹, 它是飞行器任务规划系统 (Mission Planning System) 的核心技术之一, 也是飞行器实现自主巡航的技术保障。准确地说, 飞行器轨迹规划就是在综合考虑飞行器到达时间、油耗、威胁、过载、环境约束及自身性能约束等因素的前提下, 为飞行器规划出一条最优, 或者是满意的飞行轨迹, 以保证飞行任务的圆满完成。



图 1-1 大疆 “晓” SPARK 无人机

### 1.2 B 样条曲线

B 样条最初的应用是在 CAD/CAM 的几何造型中。并一度是该领域的核心算法和研究热点。从 Schoenberg 于 40 年代中提出以来, 已经积累了相当多的成果和结论。进入 90 年代尤其是最近几年以来, 由于机器人研究的迅速发展以及对更加快速和精确的轨迹规划算法的要求, B 样条被越来越多的用在机器人关

节控制及运动规划等领域, 由于具有可进行局部修改、更加逼近特征多边形、阶次与特征多边形顶点无关等特点, 因此, B 样条曲线在曲线、曲面的造型与加工中得到了广泛的应用。

### 1.3 轨迹规划与姿态控制

我们在本文中主要的工作就是基于 B 样条的无人机轨迹规划与姿态控制, 随着四旋翼无人飞行器的不断普及, 对于无人机自动驾驶的需求也在不断的上涨, 所以一套较为通用的、效率高的且鲁棒性好的轨迹规划算法与姿态控制理论是非常重要的, 本文所主要研究的轨迹规划部分可以主要应用在无人机的地面站的软件中, 它可以根据用户所给定的几个航迹点自动的生成比较合理的飞行轨迹并且指导无人机飞行。而姿态控制部分则可以主要对无人机实际飞行过程中的姿态进行实时的控制, 以使其可以平稳的通过设置的路径。

## 2 第二章 NURBS 曲线生成：

### 2.1 无人机轨迹拟合

在无人机实际飞行中, 通常需要使无人机通过根据具体任务确定的一系列目标航点。目前, 对于无人机的研究主要采用三类轨迹生成方法来保障无人机连续通过这类航点: 1) 直线连接; 2) 分段参数多项式拟合; 3) 样条曲线拟合。

相较而言, 直线连接简洁明了, 便于实施, 但该方法只是简单的进行离散点追踪, 整个飞行过程等同于追踪多个阶跃信号, 并且与飞行器动力学性能不能相容, 会降低系统性能甚至引起系统不稳定; 分段参数多项式与样条曲线类似, 都在保证飞行轨迹在与动力学相容的条件下, 以一定性能作为指标, 生成参考轨迹。但是, 参数多项式的方法一般会先建立相邻航点间的参数多项式表达式, 然后对每一航点施加端点约束, 并进行时间规划。如果要获取全局的最优轨迹, 通常计算时间比较长, 步骤繁琐, 不利于工程实施。样条曲线的拟合既能够满足飞行轨迹与动力学模型相容的条件, 也能够极大限度的降低运算难度, 所以在研究中常采用样条曲线拟合作为无人机飞行轨迹获得的主要方式。

我们首先基于给定巡航点反向求解 NURBS 曲线的控制点, 从而获得满足一定阶次连续的飞行轨迹。然后, 基于二阶泰勒展开, 实时插补获取轨迹的时变函数。为使飞行过程时间最优, 在之后引入速度、加速度、跃度约束的情况下建立线性规划, 实现对于无人机最优速度序列的求解。

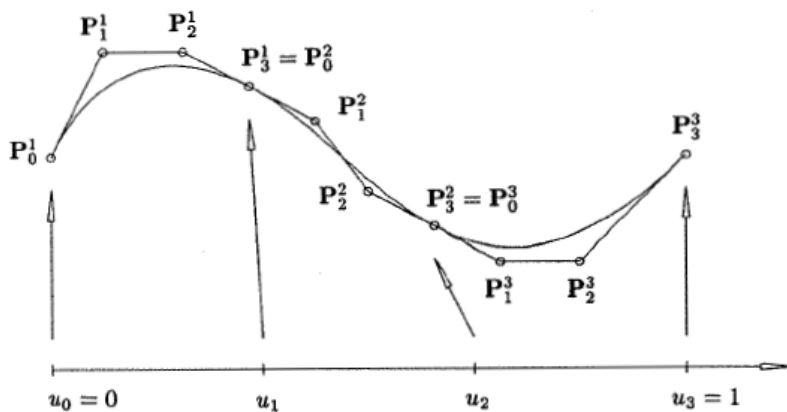


图 2-1 B 样条曲线

## 2.2 非均匀 B 样条

我们采用 NURBS 曲线作为本次实验的样条曲线，该曲线由节点向量  $U$ ，控制点集  $\{P_i\}$ ，权重向量  $\omega_i$  与曲线阶数  $p$  所决定。当控制总点数为  $n+1$  时，其中节点向量为<sup>[1]</sup>

$$U = \left\{ u_0, u_1, \dots, u_{m=n+p} \right\} = \left\{ \underbrace{0 \cdot \cdot \cdot 0}_{p+1}, u_{p+1} \cdots u_{n-1}, \underbrace{1 \cdot \cdot \cdot 1}_{p+1} \right\}$$

这意味着，要生成  $p$  阶 NURBS 曲线，控制点数不得少于  $P$  个。节点向量确定后，可使用递推式获得 NUBRS 曲线基函数如下

$$N_{i,p}(u) = \begin{cases} 1 & \text{若 } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i,p-1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

曲线被节点向量分为  $n-p+1$  个区间，其中  $u \in [0,1]$  是曲线参数，根据其在节点向量的区间情况，决定基函数的取值问题。 $N_{i,p}(u)$  表示第  $i$  个  $p$  次 ( $p+1$  阶) B 样条基函数，并且规定，当基函数的系数出现  $0/0$  形式的商时，规定其比值为 0。

在节点向量和基函数确定之后，NUBRS 曲线可以根据下式确定：

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i, \quad 0 \leq u < 1$$

其中权重向量表示控制点对曲线的影响程度，不失一般性的，由于我们在本课题所研究的问题中并不存在需要对每一个航点都指定其影响因子，所以我们默认其均为 1，表示权重不影响曲线，每一个点对于曲线的贡献度是一样的。 $\{P_i\}$  是控制点集，为人为添加的设计用于调整最终生成轨迹的中间点。根据轨迹生成方法的不同，飞行器可能经过，也可能不经过控制点。在进行简化后，我们可以将上面的 NUBRS 曲线函数写成了 B 样条函数的基本形式：

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i, \quad a \leq u \leq b$$

## 2.3 B 样条函数的性质

B 样条基函数的性质：在一个节点支撑内部， $N_{i,p}(u)$  的所有  $p-1$  阶导数存在。在一个节点处， $N_{i,p}(u)$  是  $p-k$  次连续可微的，此处  $k$  是该节点的重数。

基函数的求导公式为

$$N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

反复对上式求导，得到一般的求导公式：

$$N^{(k)}_{i,p}(u) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+1,p-k}(u)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 1 \\ a_{k,0} &= \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1} - u_i} \\ a_{k,j} &= \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p-k+1} - u_{i+j}}, j = 1, 2, \dots, k-1 \\ a_{k,k} &= \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}} \end{aligned}$$



令  $C^{(k)}(u)$  为 B 样条曲线  $C(k)$  的  $k$  阶导矢，B 样条曲线的导矢为

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) \mathbf{P}_i$$

B 样条曲线具有仿射不变性。对 B 样条的仿射变换是通过变换其控制点组来实现的。

B 样条曲线  $C(k)$  的  $k$  阶导数的符号曲率为

$$\kappa(u) = \frac{C^{(1)}(u) \times C^{(2)}(u)}{\|C^{(1)}(u)\|^3}$$

曲率变化率为

$$\kappa^{(1)}(u) = \frac{v(u)}{\|C^{(1)}(u)\|^5}$$

由上述定义可知：当 B 样条的结点为一单调增序列时，3 次及 3 次以上样条函数在其节点定义区间内存在连续 2 阶导，因此样条函数的曲率函数为连续函数。在满足曲率连续需求的同时，为了简化求解，本文采用了 3 次 B 样条。

## 2.4 B 样条曲线的算法

NURBS 曲线的获得主要依赖于节点向量以及控制点的选取。在实际飞行中，我们往往是在获得无人机的路径点后，求取目标集合参考轨迹。因此，针对无人机飞行轨迹规划，我们首先应该根据给定的路径进行函数区间的划分，得到相应的节点向量  $\{U\}$ ；B 样条基函数的获取根据其支撑区间——节点向量；接着基于 NURBS 曲线的性质利用最小二乘法求取控制点，最后由控制点，根据 B 样条的式子得到连续飞行轨迹。

### 2.4.1 节点向量 $\{U\}$

节点向量的选取在 B 样条中起着举足轻重的作用，如果不能很好的选取节点向量，则产生的曲线会在某些地方摆动，膨胀或扁平，同时，它的选取也直接影响到最后方程组是否有解，所以，节点向量的选取满足以下两个条件：1). 节点向量的变化尽量反映插值数值点的分布，达到这一要求，插值曲线才会十分光滑。插值点已经通过反映弦长变化的参数化处理，因为节点向

量可以通过反映参数化后的插值点来满足这一条件。2). 需使插值点在参数空间所对应的参数分布在不同的节点向量段中, 即任何两个节点向量之间, 不能有两个或者两个以上的插值点。

在节点向量的求解过程中, 有很多数据的参数化法, 如等距参数化法, 弦长参数化法, 向心参数化法等, 考虑到简便性和有效性, 我们这里采用弦长参数化法。

$$\text{取} \quad U_0 = 0, \quad U_i = U_{i-1} + |\Delta P_{i-1}| \quad i = 1, 2, 3 \cdots N-1$$

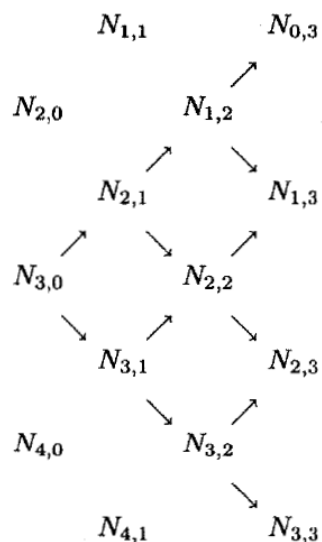
其中弦线矢量  $\Delta P_i$  是向前差分矢量, 即  $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ , 其中  $p$  为插值点。这种参数化法如实反映了数据点按照弦长的分布情况, 是一种被广泛采用的参数化法。

## 2.4.2 B 样条基函数 $N_{i,p}$

基函数决定着 B 样条函数的形态, 在采用此函数后, 样条逼近逼近特征多边形的精度更高, 并且能够使多边形的边数与基函数的次数无关, 使其具有局部修改性。因为在任意给定的节点区间  $[u_j, u_{j+1}]$  中, 最多  $p+1$  个  $N_{i,p}$  是非零的, 所以我们首先需要关注的便是  $u$  所在的节点区间系数, 其次根据基函数的定义得到第一个非零  $N_{i,1}$ , 并利用基函数的递推关系得到剩余的系数  $N_{i,p}$ 。

采用循环的方法求得  $u$  所在区间后, 我们可以将基函数递推的情况简化成下面的原理:

其中每一个系数都是根据前面两个系数得到, 在用箭头相连的倒三角以外的系数均为 0, 这种方法也是我们所采取的求解办法。同时, 为了避免基



函数前面系数出现 0/0 的情况，我们在程序中规定其为 0。

图 2-2 B 样条基函数求解思路

### 2.4.3 路径控制点 $P_i$

B 样条函数是由 B 样条基函数的线性组合而成，其中控制点是基函数相应的系数。B 样条函数根据控制点不同而有不同的性质。在无人机的飞行中，我们认为基于目标控制点集  $P$  所生成的路径点为  $Q$ ，假设控制点数量与巡航点数量相等，可得如下关系<sup>[3]</sup>

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{0,p}(u_0) & N_{1,p}(u_0) & \dots & N_{n,p}(u_0) \\ N_{0,p}(u_1) & N_{1,p}(u_1) & \dots & N_{n,p}(u_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(u_n) & N_{1,p}(u_n) & \dots & N_{n,p}(u_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

在这个公式中，可以将控制点当作未知量进行求解。最开始采用

$P = N \backslash Q$  的方法直接求解，发现在更改路径点之后，很容易便会出现错误情况。于是我们采用课程中学习的另一种方法进行求救：在已知巡航点  $\{Q_i^*\}$  的情况下，将上述曲线生成的点与目标巡航点之间的距离作为优化对象，距离  $e = Q^* - Q$ ，将其转换成为目标函数

$$\min J = \frac{1}{2} (Q^* - Q)^T (Q^* - Q) = \frac{1}{2} (Q^* - \Phi P)^T (Q^* - \Phi P)$$

使用最小二乘法，得到该函数的结果：

$$P = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Q$$

另外由于这种方法在求解控制点的时候可能会出现奇异的可能性，我们通过 Levenberg-Marquardt 对上述公式进行了优化，L-M 方法的进步优化思路为：引入了  $\lambda$  因子，避免了奇异的情况：

$$\Delta = -(J_f^T J_f + \lambda I)^{-1} J_f^T f$$

算法流程为：

```

begin
     $\mathbf{x}_{\text{new}} := \mathbf{x}; \quad \text{method} := \text{L-M}$ 
    Solve  $(\mathbf{J}(\mathbf{x})^\top \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{I}) \mathbf{h}_{\text{lm}} = -\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ 
    if  $\|\mathbf{h}_{\text{lm}}\| \leq \varepsilon_2 (\|\mathbf{x}\| + \varepsilon_2)$ 
        found := true
    else
         $\mathbf{x}_{\text{new}} := \mathbf{x} + \mathbf{h}_{\text{lm}}$ 
         $\varrho := (F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_{\text{new}})) / (L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{h}_{\text{lm}}))$ 
        if  $\varrho > 0$ 
            better := true; found := ( $\|\mathbf{F}'(\mathbf{x}_{\text{new}})\|_\infty \leq \varepsilon_1$ )
            if  $\|\mathbf{F}'(\mathbf{x}_{\text{new}})\|_\infty < 0.02 * F(\mathbf{x}_{\text{new}})$ 
                count := count + 1
                if count = 3
                    method := Q-N
            else
                count := 0
        else
            count := 0; better := false
    end
end

```

图 2-3 Levenberg-Marquardt 优化算法

## 2.5 基于非均匀 B 样条的路径平滑

在图 1 中，直线段  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$  为待平滑的路径，采用 3 次 B 样条对其进行平滑处理，给出其节点及控制点选取方法，使得到的路径符合无人机的运动特性。

假设  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{n-2}, \mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n$  为 B 样条互不重复的控制点。则：当  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  共线时，B 样条在  $\mathbf{P}_0$  处曲率为 0；当  $\mathbf{P}_{n-2}, \mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n$  共线是，B 样条在  $\mathbf{P}_n$  处曲率为 0。

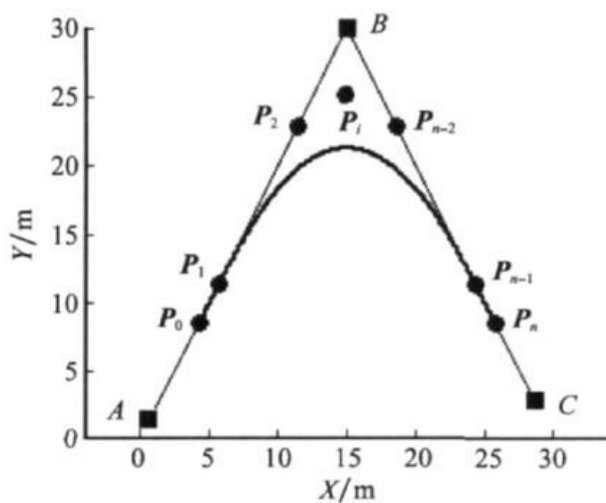
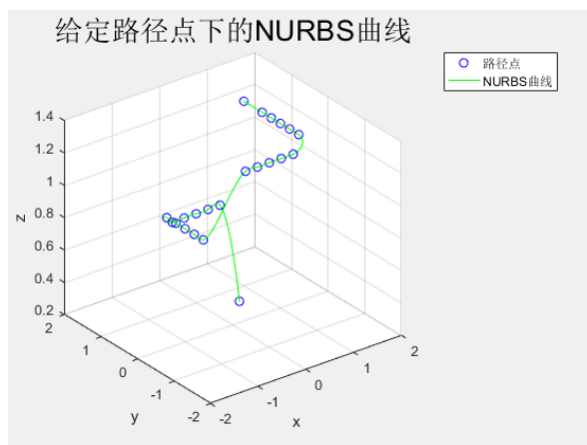
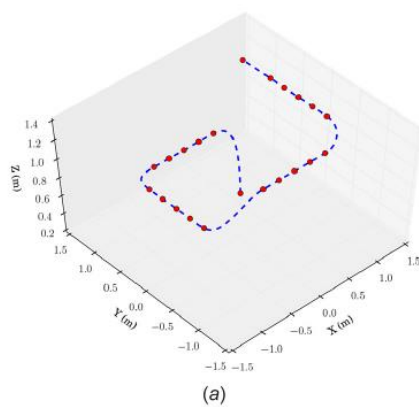
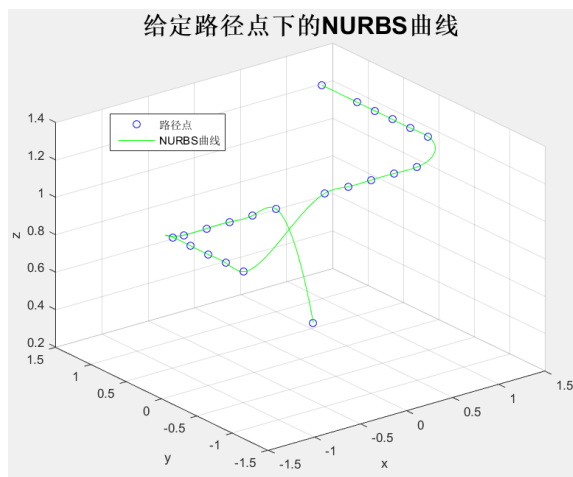


图 2-4 3 次样条的平滑处理

## 2.6 NURBS 曲线展示



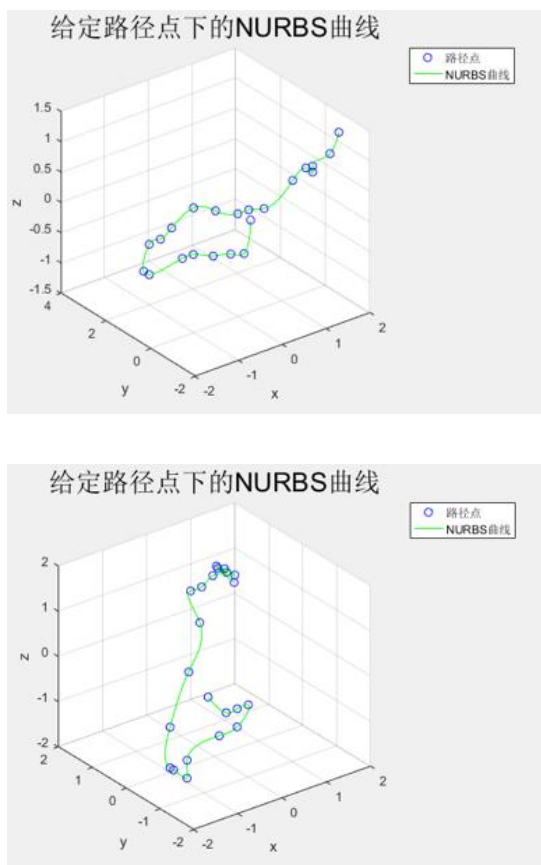


图 2-5 不同的航点下得到的 NURBS 曲线

我们可以看到在我们指定不同的航点的情况下我们都可以迅速的、有效的得到平滑的 NURBS 曲线。所以应用新的优化方法后并不会出现奇异点的情况。

### 3 第三章 无跃度约束下的最优速度规划

#### 3.1 求导函数

B 样条基函数的求导公式为

$$N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

反复对上式求导，得到一般的求导公式：

$$N^{(k)}_{i,p}(u) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j,p-k}$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_{0,0} &= 1 \\
 a_{k,0} &= \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1} - u_i} \\
 a_{k,j} &= \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1} - u_{i+j}}, j = 1, 2, \dots, k-1 \\
 a_{k,k} &= \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}}
 \end{aligned}$$

令  $C^{(k)}(u)$  为 B 样条曲线  $C(u)$  的  $k$  阶导矢, B 样条曲线的导矢为

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) \mathbf{P}_i$$

### 3.2 速度约束

最优速度规划的核心就是将飞行轨迹离散化, 在一定的条件下对每一段赋予一个速度值, 使之能以最短时间通过所有飞行轨迹点, 即使  $\int \frac{dx_i}{vi}$  有最小值。此式可等效为使飞行器在每一点拥有一个最大速度值, 即

$$\begin{aligned}
 \max J &= \sum_{i=1}^{T_N} \beta_i \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T, \beta_i = V^2(u_i) \\
 \text{s. t.} \quad &A\boldsymbol{\beta} \leq b, \beta_i \geq 0
 \end{aligned}$$

其中  $T_N$  为飞行轨迹离散化后被分割的段数。

记  $k = \sqrt{x_u(u)^2 + y_u(u)^2 + z_u(u)^2}$ , 其中  $(\cdot)_u$  为对应变量相对于  $u$  的导数, 则有

$$\left\| \frac{dC(u)}{du} \right\| = \left\| \frac{dC(u)}{ds} \frac{ds}{du} \right\| = k$$

由此, 式(6-10) 可重写为以下形式

$$\frac{du}{dt} = \frac{V(u)}{k}$$

### 3.3 弓高误差约束

在实际的轨迹追踪过程中，提高飞行速度会引起追踪误差的增加。通常轨迹追踪过程中的弓高误差可按式估计<sup>[2]</sup>

$$\epsilon_i = \rho_i - \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{V(u_i)T_s}{2}\right)^2}$$

若给定最高弓高误差  $\epsilon_{\max}$ ，则飞行速度应作如下限定

$$V(u_i) \leq 2\sqrt{\rho^2 - (\rho_i - \epsilon_{\max})^2}/T_s$$

忽略二阶小项，上式可简化为

$$V(u_i) \leq 2\sqrt{2\rho_i\epsilon_{\max}}/T_s$$

或

$$V^2(u_i) \leq 8\rho_i\epsilon_{\max}/T_s^2$$

其中曲率半径的计算式为

$$\rho = \frac{\|C_u(u)\|^3}{\|C_u(u) \times C_{uu}(u)\|}$$

按  $x, y, z$  展开得

$$\rho = \frac{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)^{3/2}}{\left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_{uu} & x_{uu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_{uu} & y_{uu} \end{vmatrix}\right)^{1/2}}$$

故对于离散后的每一段区间，速度的上限为  $\min(V_{\max}^2, 8\rho_i\epsilon_{\max}/T_s^2)$



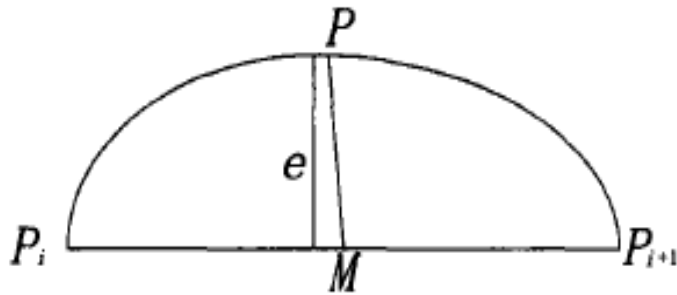


图 3-1 弓高误差

### 3.4 加速度约束

$\ddot{u}$ 进而可表示为

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d(V(u)/k)}{dt} = \frac{a(u)}{k}$$

其中

$$a(u) = \frac{dV(u)}{du} = \frac{d\left(\frac{V(u)}{k}\right)^2}{du}$$

写成离散形式 (\*)

$$a^\mu(u_i) = C_{uu}^\mu(u_i) \left(\frac{V(u_i)}{k(u_i)}\right)^2 + \frac{C_u^\mu(u_i) \left( \left(\frac{V(u_{i+1})}{k(u_{i+1})}\right)^2 - \left(\frac{V(u_{i-1})}{k(u_{i-1})}\right)^2 \right)}{2(u_{i+1} - u_{i-1})}$$

加速度约束即  $-A_{max} \leq a(u_i) \leq A_{max}$ 。

编程分别对三个方向进行约束, 即每个方向上的加速度都在上述区间内。

### 3.5 完整的速度规划约束

对  $C_u(u)$  的每一个分量, 记为  $C^\mu (\mu \in \{x, y, z\})$ , 其速度与加速度为

$$\begin{cases} V^\mu(u) = \frac{dC^\mu(u)}{dt} = C_u^\mu \frac{du}{dt} = C_u^\mu \frac{V(u)}{k} \\ A^\mu(u) = \frac{dV^\mu(u)}{dt} = C_{uu}^\mu \left(\frac{V(u)}{k}\right)^2 + C_u^\mu a(u) \end{cases}$$

现在，我们可以列出完整的速度规划约束

$$\begin{aligned} \max J &= \sum_{i=1}^{T_N} \beta_i \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T, \quad \beta_i = V^2(u_i) \\ \text{s. t.} \quad &0 \leq \beta_i \leq \min\{V_{\max}^2, 8\rho_i\epsilon_{\max}/T_s^2\} \quad ; \quad \beta_1 = \beta_{T_N} = 0 \\ &-A_{\max} \leq C_{uu}^\mu(u_i) \frac{\beta_i}{k^2(u_i)} + \frac{C_u^\mu(u_i) \left( \frac{\beta_{i+1}}{k^2(u_{i+1})} - \frac{\beta_{i-1}}{k^2(u_{i-1})} \right)}{2(u_{i+1} - u_{i-1})} \leq A_{\max} \end{aligned}$$

### 3.6 无跃度约束结果

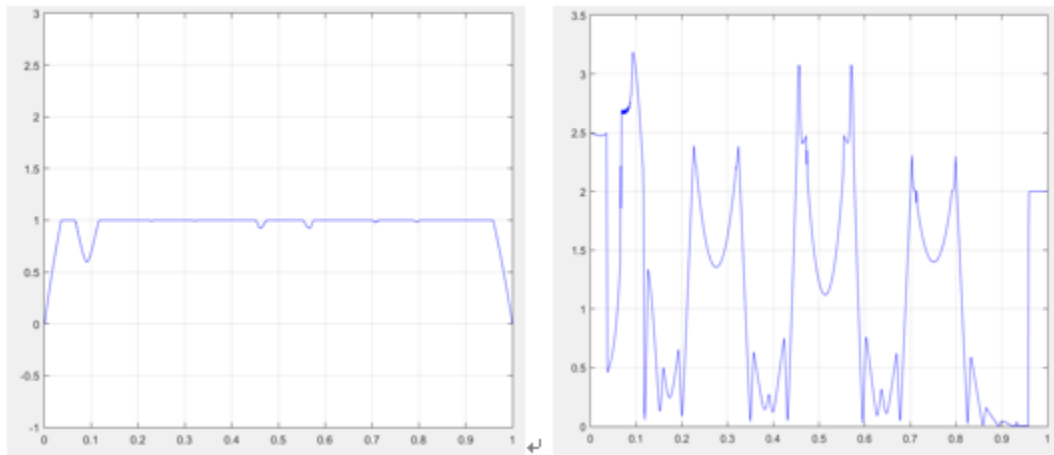


图 3-2 无跃度约束下的速度曲线与加速度曲线（对应轨迹 1）

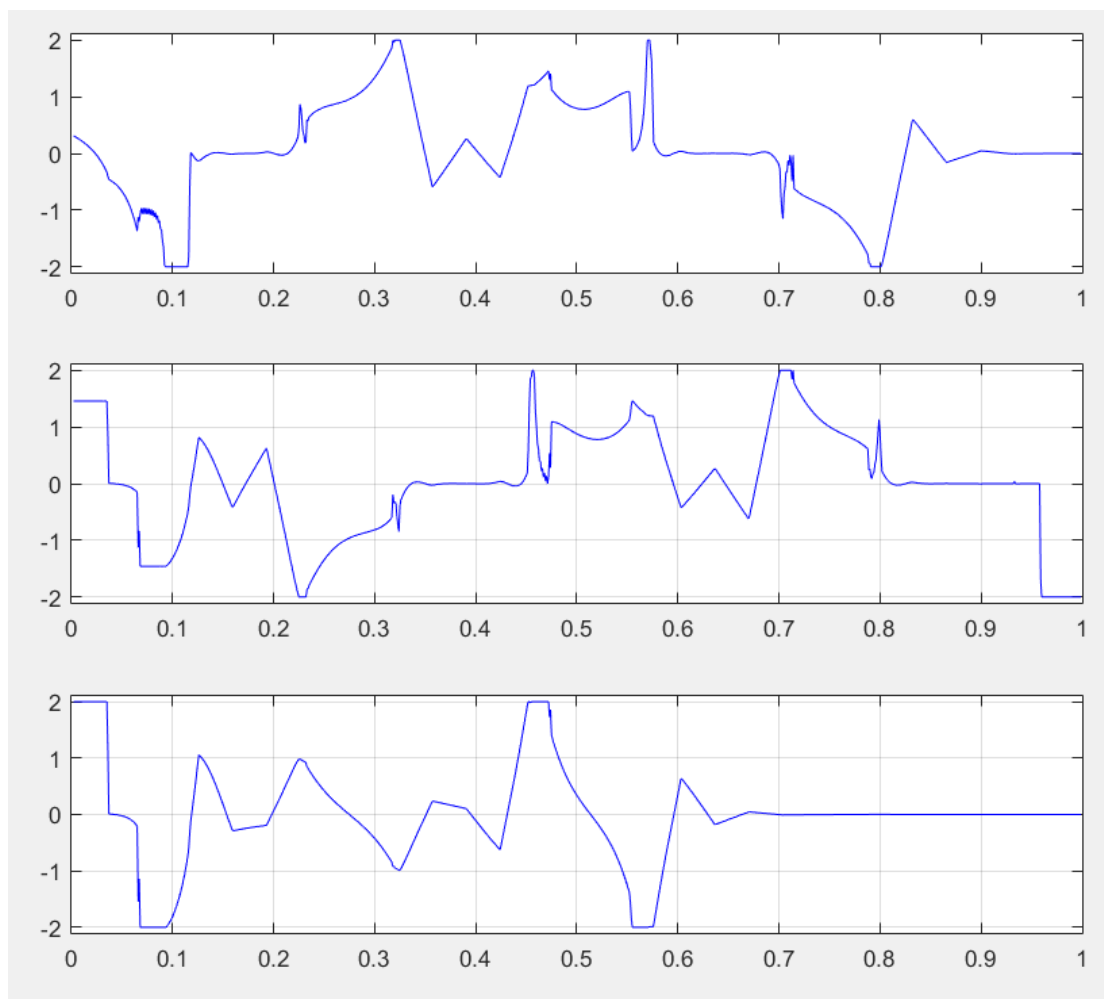


图 3-3 X、Y、Z 轴方向上加速度曲线

分析：速度基本约束在  $V_{\max}=1\text{m/s}$  里，而各个方向上的加速度也约束在  $A_{\max}=2\text{m/s}^2$  内，速度及加速度变化与参考论文里的结果基本一致。

## 4 第四章 有跃度约束下的最优速度规划

### 4.1 跃度约束的必要性

在上述进行约束后，各处的速度、加速度、弓高误差都得到了限制，而对于现实中的飞行器，还有一个限制因素是加速度对时间的导数绝对值不能过大，会影响系统稳定性，即加速度的变化不能太剧烈。速度对时间的导数称为跃度：

$$J^\mu(u) = \dot{A}^\mu(u) = \left( C_{uuu}^\mu q + \frac{3C_{uu}^\mu}{2} q_u + \frac{C_u^\mu}{2} q_{uu} \right) \sqrt{q}$$

在引入跃度约束的过程中，将各处的跃度  $J$  限制在  $J_{max}$  以内。同时，出于实时生成轨迹对运算效率的要求，同样需要将非线性约束适当转换成相应的线性约束。在这线性化过程中，可以利用前面速度规划的结果。

## 4.2 端点区间的约束

记  $q(u) = \frac{v^2(u)}{\kappa^2}$ ，将  $q(u)$  简写为  $q$ ， $q(u_i)$  简写为  $q_i$ 。由此，初步得到的最优速度序列可转化为  $q_i^*$ 。

则跃度如下表示：

$$J^\mu(u) = \dot{A}^\mu(u) = (C_{uuu}^\mu q + \frac{3C_{uu}^\mu}{2} q_u + \frac{C_u^\mu}{2} q_{uu}) \sqrt{q}$$

记  $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ ，对上式进行离散处理，引入跃度约束，得到

$$|(\alpha_i^\mu q_{i-1} + \beta_i^\mu q_i + \gamma_i^\mu q_{i+1})| \sqrt{q_i} \leq J_{max}$$

$$\text{其中, } \alpha_i^\mu = \frac{C_u^\mu(u_i)}{2(\Delta u)^2} - \frac{3C_{uu}^\mu(u_i)}{4\Delta u}, \beta_i^\mu = C_{uuu}^\mu(u_i) - \frac{C_u^\mu(u_i)}{(\Delta u)^2}, \gamma_i^\mu = \frac{C_u^\mu(u_i)}{2(\Delta u)^2} + \frac{3C_{uu}^\mu(u_i)}{4\Delta u}$$

这种约束为非线性约束，不能直接应用 MATLAB 命令 `linprog` 进行优化。为将其线性化，不等式两端同时乘以  $\sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}}$  得到

$$|(\sqrt{q_i^*} \alpha_i^\mu q_{i-1} + \sqrt{q_i^*} \beta_i^\mu q_i + \sqrt{q_i^*} \gamma_i^\mu q_{i+1})| \sqrt{q_i} \leq J_{max} \sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}}$$

由不等式  $1 \leq \frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*} \leq \sqrt{\frac{q_i^*}{q_i}}$ ，适当放宽约束，得到

$$|(\sqrt{q_i^*} \alpha_i^\mu q_{i-1} + \sqrt{q_i^*} \beta_i^\mu q_i + \sqrt{q_i^*} \gamma_i^\mu q_{i+1})| \sqrt{q_i} \leq J_{max} (\frac{3}{2} - \frac{q_i}{2q_i^*})$$

由于  $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ ，显然起止点的跃度约束关系无法由上式得到，应该进行如下计算

$$j^\mu = \frac{da^\mu}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(a^\mu)^2}{dv}$$

$$|j_1^\mu| = \left| \frac{(a_1^\mu)^2 - (a_0^\mu)^2}{2v_1^\mu - 2v_0^\mu} \right| = \left| \frac{(a_1^\mu)^2}{2C_u^\mu \sqrt{q_1}} \right| = \left| \frac{T_N^2 (C_u^\mu(u_2))^2 \sqrt{q_1 q_2}}{8C_u^\mu(u_1)} \right|$$

$$|j_{T_N}^\mu| = \left| \frac{T_N^2 (C_u^\mu(u_{N-2}))^2 \sqrt{q_{N-1} q_{N-2}}}{8C_u^\mu(u_{N-1})} \right|$$

对起止点跃度约束适当放宽，可得线性化后的约束表示方式：

$$\left| \frac{T_N^2 (C_u^\mu(u_2))^2 \sqrt{q_1 q_2}}{8C_u^\mu(u_1)} \right| \leq J_{\max} \left( \frac{3}{2} - \frac{q_1}{2q_1^*} \right)$$

$$\left| \frac{T_N^2 (C_u^\mu(u_{N-2}))^2 \sqrt{q_{N-1} q_{N-2}}}{8C_u^\mu(u_{N-1})} \right| \leq J_{\max} \left( \frac{3}{2} - \frac{q_{N-1}}{2q_{N-1}^*} \right)$$

### 4.3 跃度约束结果小结

跃度约束的两部分同时进行，在最后 linprog 的规划中，将其综合成为一个参数，并在前面速度规划的基础施加加速度约束获得最终速度规划。

将运行结果与参考文献做对比，如下。

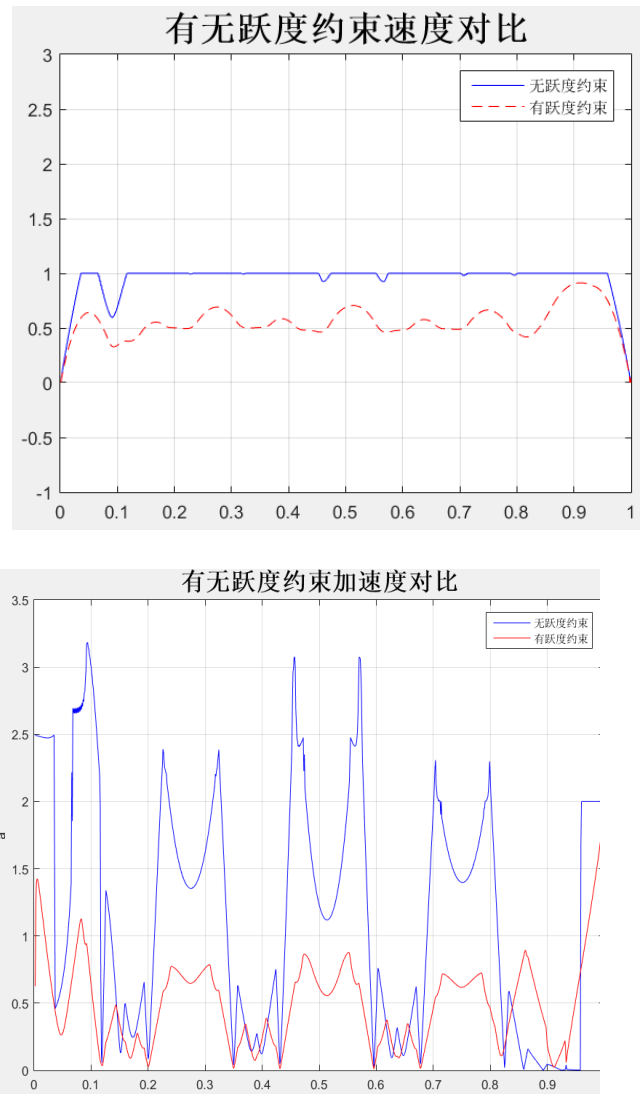
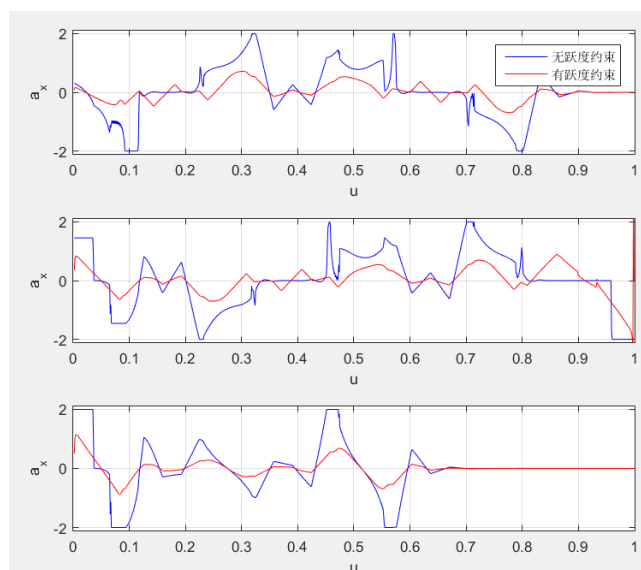


图 4-1 有跃度约束下的飞机速度、加速度曲线对比（对于轨迹 1）



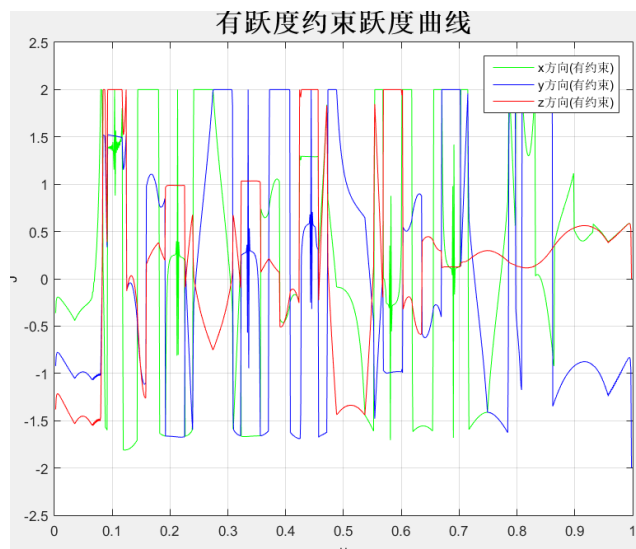


图 4-2 有无跃度约束下的 XYZ 方向的速度、加速度对比（针对轨迹 1）

分析：可以看出，除了在某些拐角处本文得到的曲线有些突变，基本趋势及约束后改善仍是很明显，突变可能的原因是本文插值或其他方面的疏忽，未作平滑处理等。

## 5 第五章 无人机姿态规划

在上文我们讨论无人机的点轨迹规划，在这一章中我们主要来探讨无人机的姿态。在之前我们所探讨的时候都是基于无人机是一个有质量的质点这个假设来进行研究的，但是实际情况中我们并不能够简单的把无人机当作一个质点来看待，所以在这一章中我们将引入无人机的动力学模型，并且对其进行基于轨迹的插值计算。

### 5.1 无人机动力学模型

#### 5.1.1 模型假设

- 1、飞机视为刚体，运动过程中不发生弹性形变。
- 2、四个电机电流稳定，提供升力相同。
- 3、四根机翼正交安装，无人机重心位于几何重心。
- 4、飞行环境无风，无较大气流扰动，忽略空气阻力影响。飞行原理：

#### 5.1.2 无人机飞行原理与基本运动

### 1. 飞行原理：

调节四个电机旋翼转速，实现升力的变化，从而控制飞行器的姿态。四旋翼飞行器的电机 1 和电机 3 逆时针旋转的同时，电机 2 和电机 4 顺时针旋转，消除陀螺效应和空气动力扭矩效应飞行状态。

### 2. 基本运动：

(1) 垂直运动：同时增加四个电机的输出功率，旋翼转速增加使得总的拉力增大，克服整机体重力使四旋翼飞行器离地垂直上升；反之，同时降低旋翼转速，四旋翼飞行器则垂直下降。当外界扰动量为零时，在旋翼产生的升力等于飞行器的自重时，飞行器保持悬停状态。

(2) 俯仰运动：提高电机 1 的转速，降低电机 3 的，电机 2、电机 4 的转速保持不变。

(3) 翻转运动：改变电机 2 和电机 4 的转速，保持电机 1 和电机 3 的转速不变。

(4) 转向运动：保证对角线上的两个旋翼转动方向相同。当四个电机转速相同时，四旋翼飞行器不发生转动；当四个电机转速不完全相同时，引起四旋翼飞行器转动。

(5) 前后运动：提高电机 3 转速，相应减小电机 1 转速，同时保持其它两个电机转速不变。

(6) 侧向运动：提高电机 2 或 4 的转速，相应减小电机 4 或 2 的转速，同时保持其它两个电机转速不变。

## 5.1.3 无人机模型建立

### 1. 地面坐标系的建立：

地面坐标系原点 A 固定在地面的某点，铅垂轴向上 AZ 为正，横轴 AX 与纵轴 AY 水平面内互相垂直。用  $x$  表示航程、 $y$  表示侧向偏离(向右为正)、 $z$  表示飞行高度。



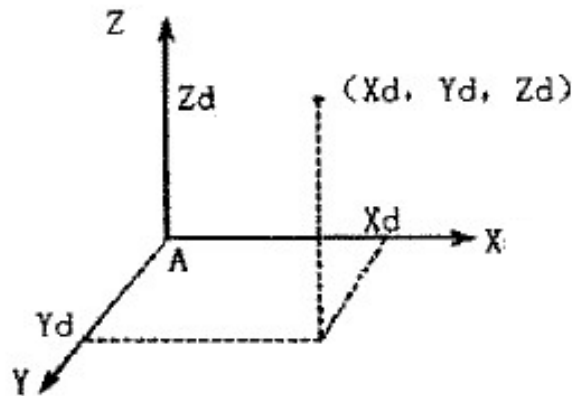


图 5-1 地面坐标系的建立

## 2. 机体坐标系的建立

机体中心为坐标原点，GPS 箭头所指方向为正前方，为  $x$  轴方向， $x$  轴顺时针旋转 90 度方向为  $y$  轴方向，与  $xy$  平面垂直，并与  $x$  轴  $y$  轴成右手直角坐标系的方向为  $z$  轴方向。

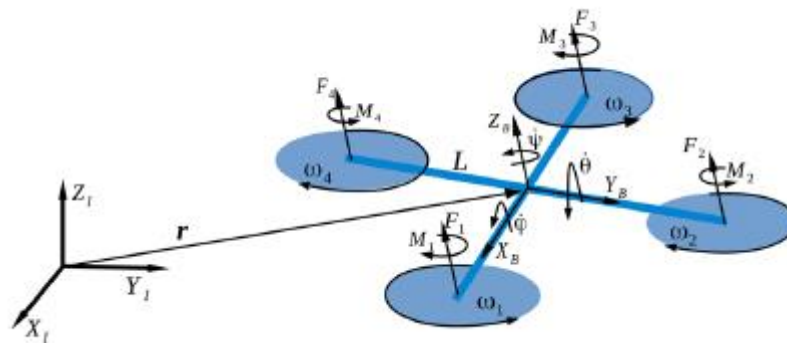


图 5-2 无人机机体坐标系

### 5.1.4 常用运动参数

- 1) 偏航角  $\psi$ ：机体坐标系内  $B_x$  轴在水平面  $EXY$  上的投影与  $EX$  轴的夹角。
- 2) 俯仰角  $\theta$ ：机体坐标系内  $Byz$  面与水平面  $EXY$  的夹角。
- 3) 滚转角：机体坐标系内  $Bxz$  面与水平面  $EXY$  的夹角。
- 4) 螺旋桨推力  $T$ 。
- 5) 空气阻力  $F$ 。
- 6) 螺旋桨转矩  $M$  阻力矩。

7) 螺旋桨推力系数。

8) 螺旋桨转速

9) 空气阻力系数

10) 线速度  $S$

11) 螺旋桨转矩系数

12) 空气的阻力矩系数

13) 角速度

### 5.1.5 运动方程的建立

螺旋桨满足以下方程<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} T = K_T \Omega^2 \\ f = K_f S \\ M = K_M \Omega^2 \\ \tau = K_\tau \dot{\zeta} \end{cases} \quad (1)$$

机体坐标系下无人机受到的升力为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_B = [F_x, F_y, F_z]^T = [0, 0, U_1]^T \\ U_1 = \sum_{i=1}^4 T_i \\ T_i = K_T \Omega_i^2 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $i$  表示对应旋翼编号。

地面坐标系到机体坐标系的转换矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C\theta C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ C\theta C\psi & S\phi S\theta C\psi + C\phi S\psi & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi \\ -S\theta & S\phi C\theta & C\phi C\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

地面坐标系下  $\mathbf{F}_B$

$$\mathbf{F}_E = [F_X, F_Y, F_Z]^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} (C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi)U_1 \\ (C\phi S\theta C\psi - S\phi C\psi)U_1 \\ C\phi C\theta U_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中  $\sin$  函数、 $\cos$  函数分别用 S、C 表示。

地面坐标系下飞机受力情况

$$\begin{cases} \mathbf{f}_E = \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{fX}\dot{x} \\ K_{fY}\dot{y} \\ K_{fZ}\dot{z} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_E = [0 \quad 0 \quad mg]^T \end{cases} \quad (5)$$

利用牛顿第二定律并结合 (4)、(5) 式得

$$m[\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}]^T = \mathbf{F}_E - \mathbf{f}_E - \mathbf{G}_E \quad (6)$$

设  $I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$  机体绕三轴的转动惯性， $p$ 、 $q$ 、 $r$  表示机体坐标系下无人机旋转角速度。 $\tau_x$ 、 $\tau_y$ 、 $\tau_z$  表示无人机三轴方向上空气的阻力矩。 $L$  表示无人机的重心与四个旋翼的几何中心的距离，有下方程。

$$\begin{cases} I_x \dot{p} = U_2 L + (I_x - I_z)qr - \tau_x \\ I_y \dot{q} = U_3 L + (I_x - I_z)pr - \tau_y \\ I_z \dot{r} = U_4 L + (I_x - I_y)pq - \tau_z \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} U_2 = (T_4 - T_2)L \\ U_3 = (T_3 - T_1)L \\ U_4 = K_M(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{小角度情况下可近似认为 } [p, q, r]^T = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \quad (10)$$

由(7)、(9)得地面坐标系下角加速度 $[\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}]^T$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = [U_2 + (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} - K_{\phi x} \dot{\phi}] / I_x \\ \ddot{\theta} = [U_3 + (I_x - I_z) \dot{\phi} \dot{\psi} - K_{\theta y} \dot{\theta}] / I_y \\ \ddot{\psi} = [U_4 + (I_x - I_y) \dot{\phi} \dot{\theta} - K_{\psi z} \dot{\psi}] / I_z \end{cases} \quad (11)$$

由模型假设条件可得无人机运动数学模型

$$\begin{cases} \ddot{x} = [(C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi)U_1 - K_{fx}\dot{x}] / m \\ \ddot{y} = [(C\phi S\theta C\psi - S\phi S\psi)U_1 - K_{fy}\dot{y}] / m \\ \ddot{z} = [(C\phi C\theta U_1 - K_{fz}\dot{z} - mg] / m \\ \ddot{\phi} (U_2 - K_{\phi x} \dot{\phi}) / I_x \\ \ddot{\theta} (U_3 - K_{\theta y} \dot{\theta}) / I_y \\ \ddot{\psi} (U_4 - K_{\psi z} \dot{\psi}) / I_z \end{cases} \quad (12)$$

通过得到无人机的动力学方程以后我们就可以根据其机体限制以及之前计算出的轨迹来求解无人机的姿态矩阵了。

## 5.2 特殊欧氏群中 (SE(3)) 的插值

通过上面所得到的无人机模型，无人机在各个时刻的姿态我们都可以通过一个齐次变换矩阵来表示：

$$T = \begin{pmatrix} R & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以如果我们想得到在每一个时刻对应的飞机的姿态就需要对齐次变换矩阵 T 进行适当的插值计算，所以这样的插值计算并不是在线性空间中的计算，而是在特殊欧氏群 SE(3) 中的计算，下面我们将主要介绍在 SE(3) 中插值的计算方法。

### 5.2.1 特殊正交群中(SO(3))的插值计算

由于在特殊欧氏群中插值计算的复杂性，并且根据其并不具有双不变 (bi-invariant) 的特性，所以我们将其简化为在特殊正交群以及在线性空间中插值的两个子问题来分别求解<sup>[5]</sup>。其中在三维空间中的插值就是我们之前几章中所介绍的，所以我们在这一部分主要解决在特殊欧氏群中对旋转矩阵 R 的插值计算。

**P.S.** 接下来介绍的所有函数我们都自己编写了相应 MATLAB 程序进行了实现。

1. 首先我们可以用欧拉角的方式将旋转矩阵  $R$  表示出来：

$$\begin{aligned} R &= R_z(\varphi)R_y(\theta)R_x(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以旋转矩阵  $R$  中就包含了无人机姿态的所有角度 Roll、Yaw、Pitch 的信息。

2. 接下来我们来介绍几个基本的矩阵计算公式<sup>[7]</sup>

(1) 向量  $r$  对应的反对称矩阵为：

$$[r] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 反对称矩阵的指数形式为：

$$e^{[r]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} + \frac{\sin \|r\|}{\|r\|} [r] + \frac{1 - \cos \|r\|}{\|r\|^2} [r]^2.$$

(3) 反对称矩阵的对数形式为：

$$\log \mathbf{R} = \frac{\phi}{2 \sin \phi} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^\top),$$

特别的，当角度  $\phi$  满足  $1 + 2 \cos \phi = \text{tr}(\mathbf{R})$  时有：

$$\log \mathbf{R} = \pm \pi [\hat{v}],$$

其中单位向量  $v$  满足其本征值为 1

3. 特殊欧式群中的插值计算

我们首先通过上一部分得到的无人机动力学方程以及前几章中得到的轨迹计算出无人机在 $t_i$ 时刻的角速度 $\omega_0$ （我们在这里假定飞机 Yaw 的值始终始终为 0）以及在 $t_{i+1}$ 时刻的角速度 $\omega_1$ ：

角速度基于轨迹的计算公式为<sup>[6]</sup>：

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \\ \dot{\omega}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r})\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}),\end{aligned}$$

其中  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  的计算公式在下文介绍。

接着我们指定合理的无人机初始与末端姿态矩阵 $\mathbf{R}_0$ 与 $\mathbf{R}_1$ 。我们就可以通过上面介绍的矩阵指数来将特殊欧式群映射到  $3 \times 1$  的线性空间中，计算公式为：

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 e^{[\mathbf{a}_3 t^3 + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_1 t]},$$

其中：

$$\mathbf{a}_1 = \omega_0;$$

$$\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1;$$

$$3\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r}_1)\omega_1$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} - \frac{1 - \cos \|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|^2} [\mathbf{r}] + \frac{\|\mathbf{r}\| - \sin \|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|^3} [\mathbf{r}]^2,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\mathbf{r}\| - \sin \|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|^3} \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ &- \frac{2 \cos \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{r}\| \sin \|\mathbf{r}\| - 2}{\|\mathbf{r}\|^4} \mathbf{r}^\top \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ &+ \frac{3 \sin \|\mathbf{r}\| - \|\mathbf{r}\| \cos \|\mathbf{r}\| - 2\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|^5} \mathbf{r}^\top \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})).\end{aligned}$$

### 5.2.2 线性空间中的插值计算

这一部分的内容在之前的第二章中已经介绍过了，所以就不在这里再一次展开了。

最终我们通过将特殊欧氏群中的的插值在特殊欧氏群中与线性空间中分别计算，从而得到了每一个时间下的齐次变换矩阵  $\mathbf{T}$ 。

## 6 第六章 无人机 Simulink 建模与 MATLAB 模拟

## 6.1 Simulink 建模

本小组采用了 MATLAB 的 simulink 模块 (借助了 Robotics 工具箱<sup>[8]</sup>的一些自带函数) 对无人机进行了建模, Simulink 是 MATLAB 中的一种可视化仿真工具, 是一种基于 MATLAB 的框图设计环境, 是实现动态系统建模、仿真和分析的一个软件包, 被广泛应用于线性系统、非线性系统、数字控制及数字信号处理的建模和仿真中。Simulink 可以用连续采样时间、离散采样时间或两种混合的采样时间进行建模, 它也支持多速率系统, 也就是系统中的不同部分具有不同的采样速率。为了创建动态系统模型, Simulink 提供了一个建立模型方块图的图形用户接口, 这个创建过程只需单击和拖动鼠标操作就能完成, 它提供了一种更快捷、直接明了的方式, 而且用户可以立即看到系统的仿真结果。(图 6-1 为 simulink 无人机建模结果, 图 6-2 为模拟测试结果)

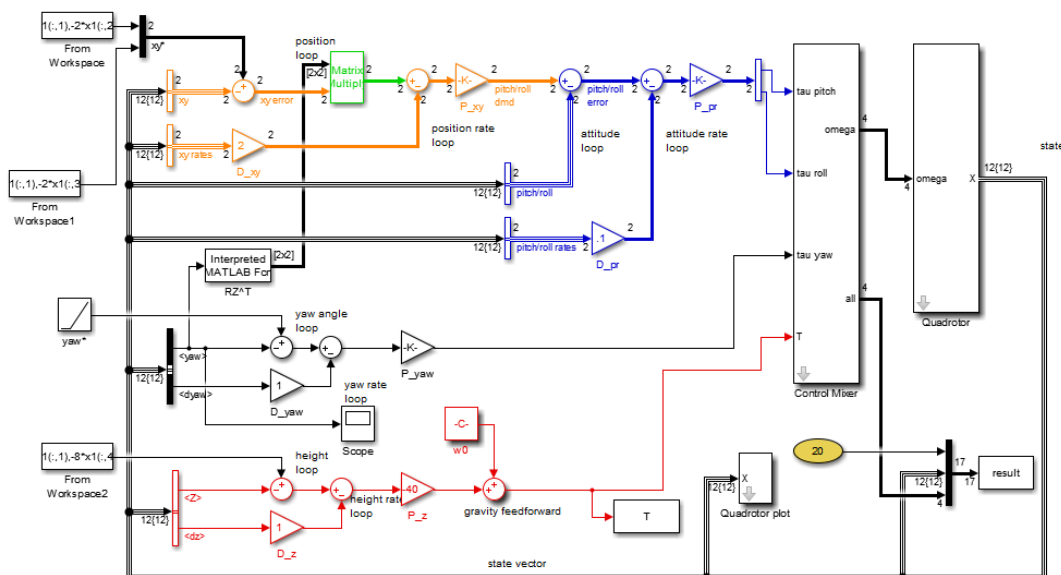


图 6-1 Simulink 无人机建模结果

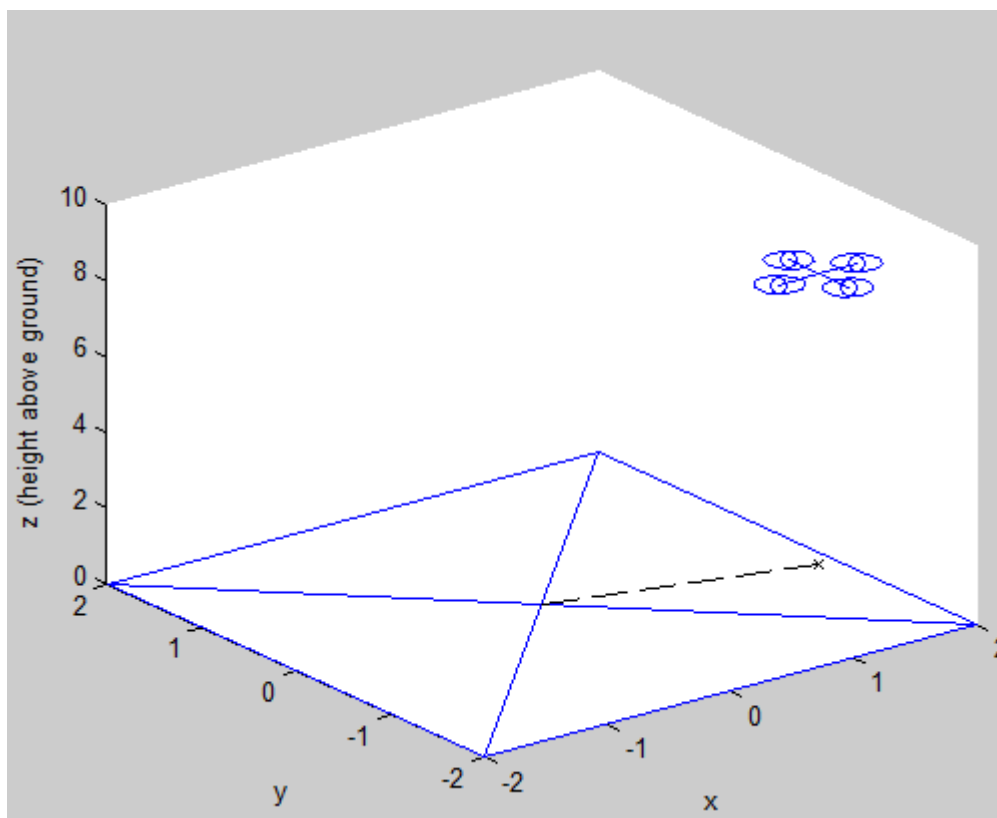


图 6-2 模拟测试结果

## 6.2 MATLAB 无人机仿真

由于实际条件的限制, 本小组最终得到的轨迹规划以及姿态控制实时算法并没有在实际无人机上进行测试, 但是我们通过了 MATLAB 中的地面站程序 `asbcopterTool` 与飞行仿真程序 `asbcopterStart` (这两个函数需要在 MATLAB2017 版本才能运行), 将我们得到的 B 样条曲线输入, 最终进行了飞行的仿真, 仿真动画显示我们所得到的无人机轨迹是可以保证无人机飞行的平稳性与效率的。



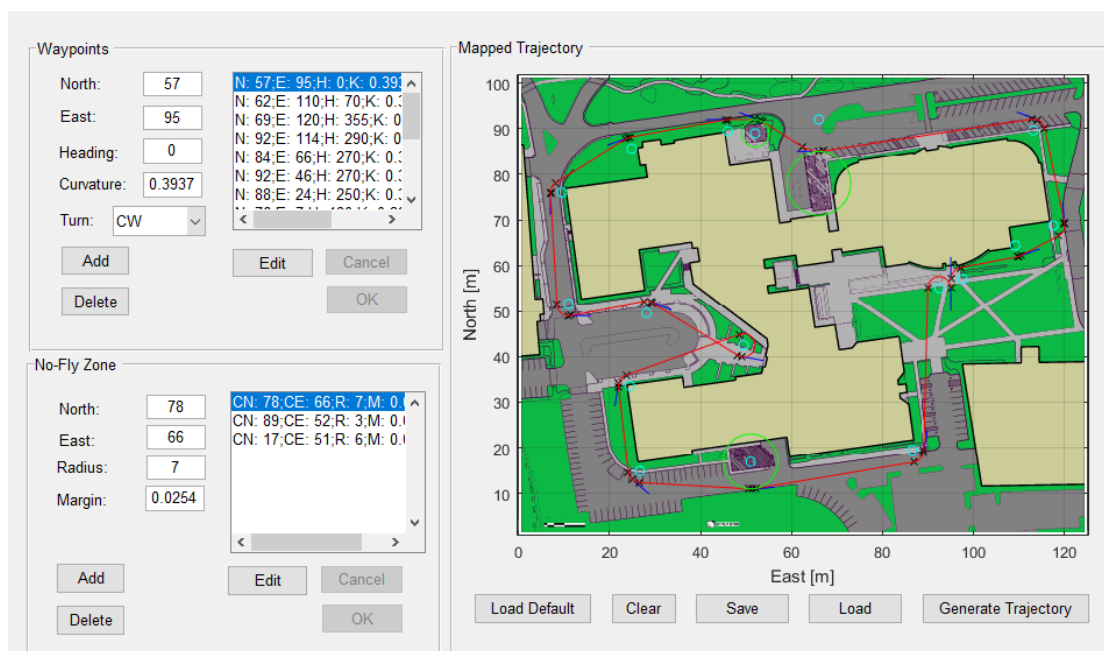


图 6-3 MATLAB 地面站程序

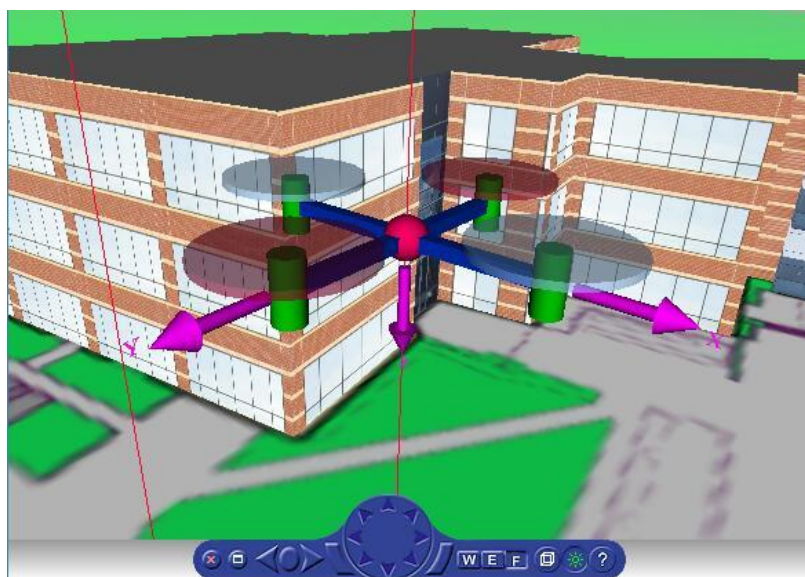


图 6-4 MATLAB 无人机仿真

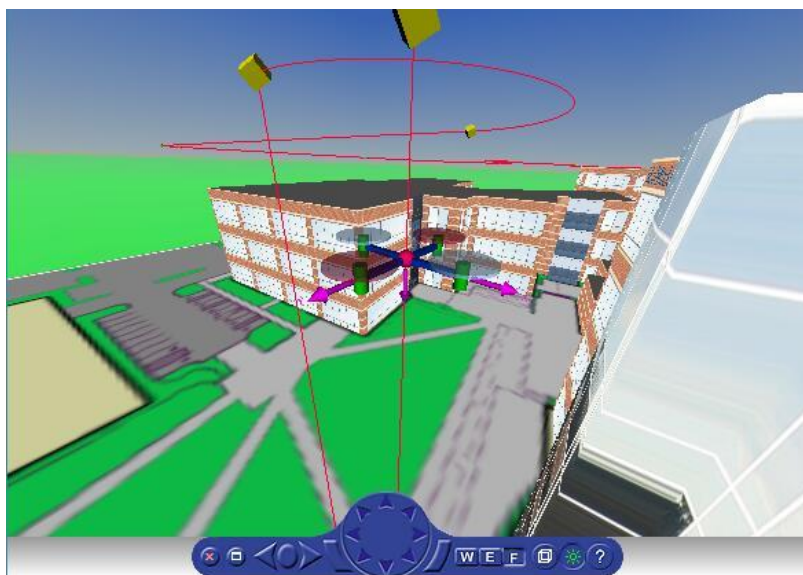


图 6-5 MATLAB 无人机仿真轨迹输入

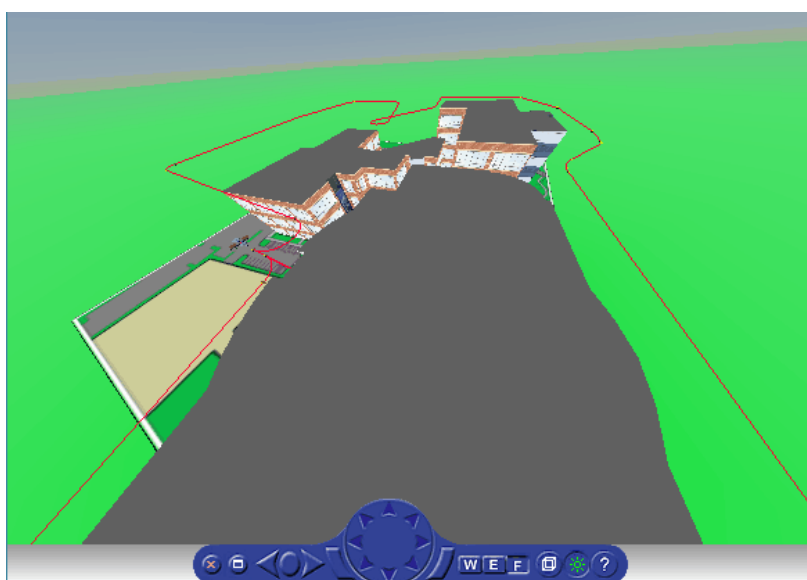


图 6-6 MATLAB 无人机仿真轨迹

## 7 第七章 GUI 界面的编写

### 7.1 GUI 界面概述

图形用户界面（Graphical User Interface，简称 GUI，又称图形用户接口）是指采用图形方式显示的计算机操作用户界面。

以某种方式选择或激活这些对象时，通常会引起动作或者发生变化。一个设计优秀的 GUI 能够非常直观的让用户知道如何操作 MATLAB 界面，并且了解设计者开发意图。MATLAB 的 GUI 为开发者提供了一个不脱离 MATLAB 的开发环境，有助于 MATLAB 程序的 GUI 集成。这样可以使开发者不必理会一大堆烦杂的代码，简化程序，但是同样可以实现向决策者提供图文并茂的界面，甚至达到多媒体的效果。可以说 MATLAB 提供了一个简便的开发环境，可以让开发者快速上手，提高了开发者的工作效率。

GUIDE 把 GUI 设计的内容保存在两个文件中，它们在第一次保存或运行时生成。一个是 FIG 文件，扩展名为 . Fig，它包含对 GUI 和 GUI 组件的完整描述；另外一个 M 文件，扩展名为 . M，它包含控制 GUI 的代码和组件的回调事件代码。这两个文件与 GUI 显示和编程任务相对应。在版面设计器中创建 GUI 时，内容保存在 FIG 文件中；对 GUI 编程时，内容保存在 M 文件中。通常情况下在版面设计器工具栏上单击图标可以打开 M 文件编辑器。

## 7.2 GUI 功能简述

GUI 界面中主要有以下几个控件：1.静态文本（Static Text）2.编辑框（Edit Text）控件 3.列表框（Listbox）控件 4.滚动条（Slider）控件 5.按钮（Push Button）控件 6.开关按钮（Toggle Button）控件 7.单选按钮（Radio Button）控件 8.按钮组（Button Group）控件 9.检查框（Check Box）控件 10.列表框（Listbox）控件 11.弹出式菜单（Popup Menu）控件 12.坐标轴（Axes）控件 13.面板（Panel）控件。



图 7-1 GUI 控件

## 7.3 GUI 界面编写

在本次大作业中，我们实现了对于无人机的点轨迹规划，速度规划，加速度

约束，跃度约束以及基于 SO3 插值的姿态规划。表现在结果上，是要生成 NURBS 曲线，有无跃度约束速度对比，有无跃度加速度对比，有跃度约束跃度曲线，无跃度约束跃度曲线和无人机位姿图 6 张图。

在 GUI 界面编写时，用到了以下控件：静态文本控件，按钮控件，单选按钮，坐标轴控件。实现的功能是对数据点的录入和处理，选择要绘制的图像并且在坐标轴控件中展现出来。

## 7.4 基本功能介绍：

- (1) “录入数据”按钮：点击后实现数据的录入并且进行前期处理，完成后在编辑框控件中显示“录入数据完成”的字样。
- (2) “绘制 NURBS 曲线”按钮：点击后实现在坐标轴控件 1 中实现绘制 NURBS 曲线图。(其中包含：“有无跃度约束速度对比”，“有无跃度加速度对比”，“有跃度约束跃度曲线”，“无跃度约束跃度曲线”单选按钮实现选择其中一个选项时，在坐标轴控件 2 中实现绘制选项对应的图像。)
- (3) “SO3 插值”按钮：点击后实现绘制无人机位姿图像。
- (4) “退出”按钮：点击后实现退出界面。

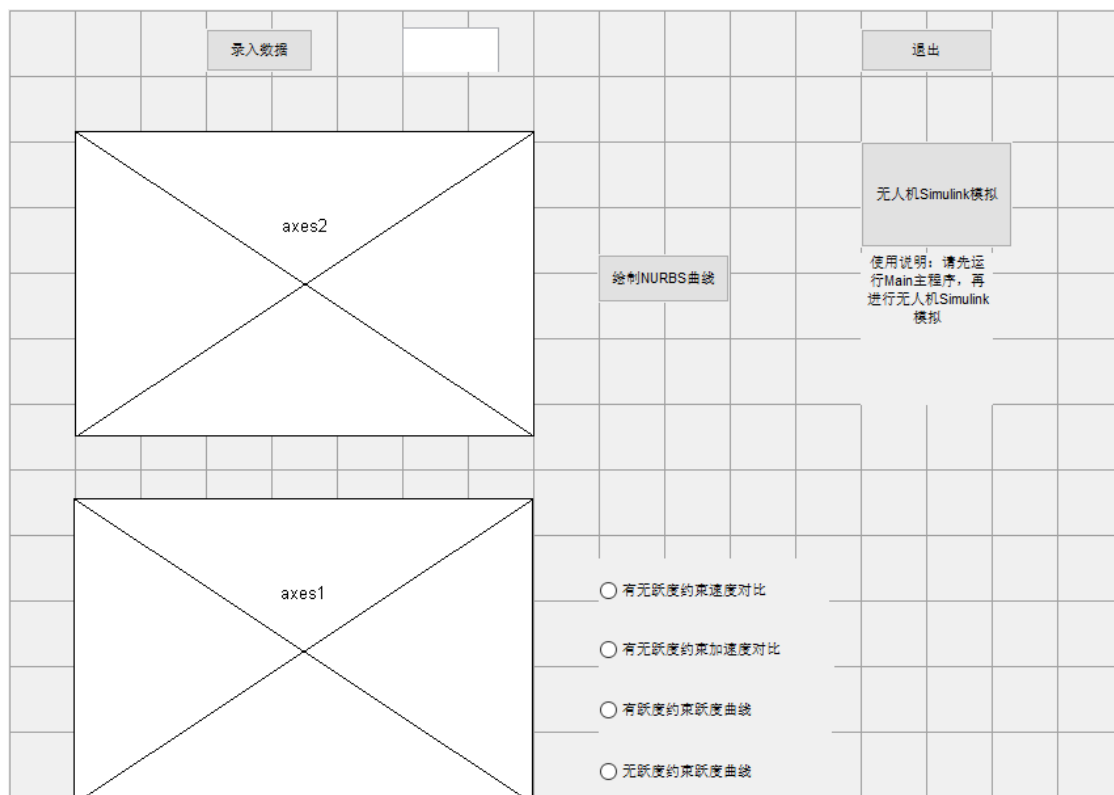


图 7-2 GUI 界面编辑图

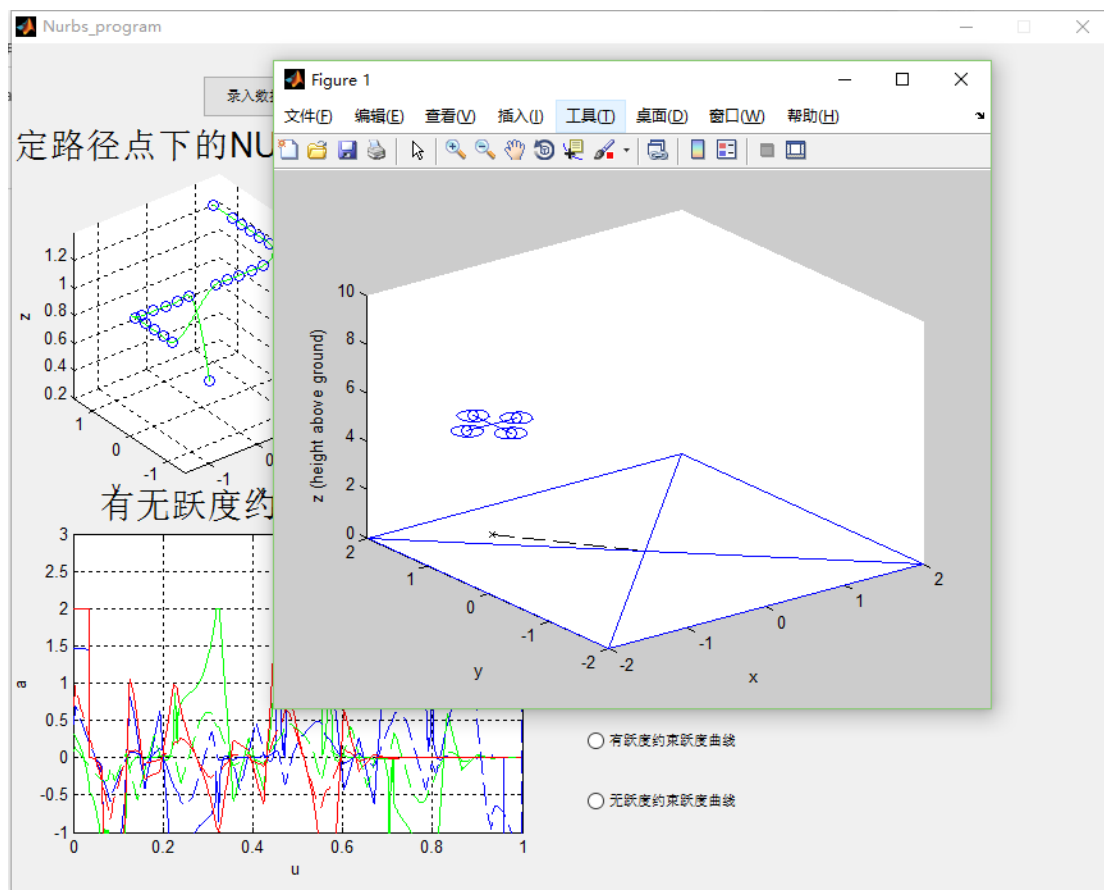


图 7-3 GUI 界面完成图

## 8 第八章 课题成果与分工安排

### 8.1 课题成果与组长感想

本小组较为成功的完成了从指定无人机需要通过的航点开始, 对其生成平滑的 B 样条曲线以及速度、加速度、跃度的优化, 以及最终姿态的控制的大部分任务, 并且所用代码绝大部分均由自己独立编写。

并且应用 Simulink 以及 MATLAB 的地面站程序以及 3D 模拟程序对所得到的结果进行了仿真、验证。

在最后一次课堂上答辩的时候也有其他组的同学对我们的一组图像提出了一些问题, 经过我们课后反复的讨论以及校核最终发现是我们在弓高误差与最大速度限制的判据上除了一个小问题, 最终我们也将其改正。所以我们也非常感谢其他组同学的批评与意见。

我也非常感谢丁老师与助教能够非常细致的为我们授课, 将我们带入到这样一个非常神奇的算法世界, 也通过这个过程让我们的各种能力都有所提高。非常

感谢老师们这一个学期的教导，以及为我们提供了这样一个科研的平台。谢谢。

作为组长非常开心能和小组里的每一个同学共同完成这样一个很有挑战性的任务，其中的每一个人都为之付出了很多，也都非常尽心尽责的完成了我分配给他们的任务，并且通过大家的积极讨论也纠正了我的一些错误，最终让我们的项目非常出色的、有效率的完成了。在这里我还想感谢每一位组员，感谢他们的辛勤付出：

陈诗元同学对这个课题所付出的非常多，他也非常出色的完成了甚至超出了小组安排的共组，在这里我非常想要着重感谢他。

杨林聪同学也对本次大作业非常上心，他也非常出色的完成了有关 NURBS 曲线的去多工作。

王一帆同学也很用心的对我们的 GUI 程序进行了反复的编写与修改，也为每一次报告以及讨论付出了很多。

张旭同学也非常的尽责，他很出色的完成了每一次我给他分配的工作，从最开始的文献讨论到最终汇报的汇总，他都付出了非常多的劳动。

## 8.2 分工安排

组员姓名	个人工作	贡献度
王昌浩	NURBS 曲线优化、姿态规划部分 (SE3 计算、矩阵计算函数)、Simulink 无人机建模与模拟仿真、asbcopter 仿真、大报告撰写	25%
陈诗元	NURBS 曲线 (反求控制点与得到 B 样条基函数)、最优速度优化、在有跃度约束下的速度优化	25%
王一帆	GUI 界面编写、最终程序调试与修改	17%
张旭	优化部分知识研究、asbcopter 仿真数据导入、所有报告 PPT 制作	17%
杨林聪	与陈诗元同学一起完成了 NURBS 曲线与优化部分、并且对编写的程序进行了修改与优化	16%

## 9 第九章 MATLAB 程序及其使用说明

附件中提供的 MATLAB 程序中包含了主程序 MAIN.m 以及 GUI 界面程序 Nurbs\_program.m 两个主要的程序，其都可以单独运行。另外包含的是一些主程



序中调用的我们独立完成的函数体, 以及无人机仿真中我们所建模的 Simulink 模型, 这些均不能单独执行。

需要注意的是 GUI 程序中的无人机 Simulink 模拟部分需要先运行主程序 MAIN 之后再在 GUI 界面上点击相应按钮才能运行, 另外由于 Simulink 建模中调用的一些模块是在 MATLAB 的 Robotics 工具箱中的模块以及函数, 所以如果为安装 Robotics 工具箱可能无法运行 Simulink 仿真。

另外第四章中姿态控制中的旋转矩阵  $R$  的求解结果需要在 MATLAB 命令窗口中输入  $R(t)$ , (其中  $t$  为从 0 到 1 的参数化时间)才能查看相应的结果。

第七章中所提到的 MATLAB 仿真部分我们依赖的是 MATLAB 的自带无人机地面站程序以及无人机模拟程序进行测试的, 其中无人机地面站程序的启动代码为 :asbcopterTool, 模拟程序启动代码为 :asvcopterStart。测试时只需在地面站程序中输入我们得到的 NURBS 曲线中的一下特征点, 再在模拟程序中运行即可看到无人机实时的飞行动画。但是需要注意的是该程序需要在 MATLAB2017 版本中才能实现。

## 10 参考文献

- [1] Tiller W, Tiller W. The NURBS book[M]. Springer-Verlag, 1995.
- [2] Dong W, Ding Y, Huang J, et al. An Efficient Approach of Time-optimal Trajectory Generation for the Fully Autonomous Navigation of the Quadrotor[J]. 2017.
- [3] 王凌云. 三次 B 样条反求控制点[J]. 泰山学院学报, 2010, 32(3):40-43.
- [4] Mellinger D, Kumar V. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2011:2520-2525.
- [5] Park F C, Ravani B. Smooth invariant interpolation of rotations[J]. Acm Transactions on Graphics, 1997, 16(3):277-295.
- [6] Nguyen H, Pham Q C. Time-Optimal Path Parameterization of Rigid-Body Motions: Applications to Spacecraft Reorientation[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2016, 39(7):1-5.
- [7] Goodarzi F A, Lee D, Lee T. Geometric Adaptive Tracking Control of a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle on SE(3) for Agile Maneuvers[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement & Control, 2015, 137(9):393-398.
- [8] Corke P. Robotics toolbox for MATLAB, release 9 [Software][J]. Robotics Toolbox for Matlab, 2011.