《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2019 年 6 月

本试卷满分 100 分，共七题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一.（30 分）

(1) 什么是 Church-Turing Thesis? 你拥护吗?

(2) 什么是通用 Turing 机?

(3) 什么是部分递归函数?

(4) 什么是 $\lambda\beta$ 系统的 CR 性质?

(5) 什么是配对函数组?

(6) 什么是停机问题?

二.（20 分）设 A 表示 $\mathcal{EF}$，B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$，$C$ 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$，$D$ 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) Ackermann 函数。

(3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n\le 100\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(4) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m)=\begin{cases}0, & \text{若存在 } M\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner \text{ 且 } M \text{ 呈形 } \lambda v.vv\cdots v\text{，这里 } v \text{ 为变元}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(5) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M,N\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner\text{，} n=\ulcorner N\urcorner\text{，且 } M\neq_\beta N\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(6) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor n!\cdot 2^n\cdot\sqrt{e}\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使得 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(8) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n,m)=\left.n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n^n}}}}}\right\}$ 共 $m+1$ 个 n。

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor a_n\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整，$\{a_n\}$ 为单调递增数列且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\pi$。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三. （10 分） 设 $\mathcal{K}, \mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ 是可判定的（decidable），证明

(1) $\mathbb{N} - \mathcal{S}$ 是可判定的;

(2) $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}$ 是可判定的;

(3) $\mathcal{K} \cup \mathcal{S}$ 是可判定的。

四. （10 分） 证明：数论函数 $f(n) = \left\lfloor (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n \right\rfloor$ 为初等函数。

五.（10 分） 若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \mathbf{I} = \mathbf{K}$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

六.（10 分） 构造机器计算函数 $f(x) = x^3$;
(注：构造时可利用已有机器)

七.（10 分）

Let $f(n)$ be the n-th digit in the decimal expansion of the real number $\frac{e^2+1}{2e}$. For example, suppose that $\frac{e^2+1}{2e} = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, then $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\cdots$. Prove that function f is Turing-computable. Furthermore, prove that it is elementary.

令 $f(n)$ 为实数 $\frac{e^2+1}{2e}$ 的十进制展开式中的第 n 位数字。例如，假设 $\frac{e^2+1}{2e} = a_0.a_1a_2a_3\cdots$，那么 $f(0) = a_0$，$f(1) = a_1$，$f(2) = a_2$，$\cdots$。证明函数 f 是 Turing 可计算的。进而，证明 f 是初等函数。