《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2016 年 6 月

本试卷满分 100 分，共六题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一.（30 分）

(1) 什么是 Turing 机?

(2) 什么是 Church-Turing Thesis?

(3) 为什么算法和 Turing 机概念在可以构成“思维机器”的现代观点中占有如此核心的地位？是否在原则上存在一个算法可达到绝对极限呢?

二.（30 分） 设 A 表示 $\mathcal{EF}$, B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$, C 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$, D 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为偶数}\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(3) Ackermann 函数。

(4) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,0)=m$$
$$f(m,n+1)=n+f(m^2,n)$$

(5) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor\log_{10} n\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

(6) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M,N\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner, n=\ulcorner N\urcorner \text{ 且 } M=_\beta N\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\pi$的十进制展开式中的第 n 个数字。

(8) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\left.2^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(n+2)}}}}}}\right\}n+1$ 层高。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
D	D	C	A	A	E	A	E	A	B

三. （10 分） 构造 ADD $\in \Lambda^{\circ}$ 使 ADD λ–定义数论函数 add

$$\mathrm{add}(x, 0) = x$$
$$\mathrm{add}(x, y+1) = \mathrm{suc}(\mathrm{add}(x, y))$$

这里 suc 为后继函数。

解：$\because \ulcorner \mathrm{add}(x,y) \urcorner = \ulcorner \mathrm{Suc}^{y}(x) \urcorner = \ulcorner y \urcorner\, \mathrm{SUC}\, \ulcorner x \urcorner$

$= \underline{(\lambda uv.\, v\, \mathrm{SUC}\, u)} \ulcorner x \urcorner \ulcorner y \urcorner$, where

SUC λ-defines suc

$\therefore$ Take ADD $\equiv \lambda uv.\, v\, \mathrm{SUC}\, u$. $\square$

解

$\because \ulcorner x+y \urcorner \equiv \lambda uv\ u^{x+y} v$

$\equiv \lambda uv.\, u^{x}(u^{y} v)$

$\equiv \lambda uv.\, \underline{u^{x}(\ulcorner y \urcorner uv)}$

$\equiv \lambda uv\ \ulcorner x \urcorner u (\ulcorner y \urcorner uv)$

$\equiv \lambda abuv.\, au(buv) \ulcorner x \urcorner \ulcorner y \urcorner$

$\therefore$ 取 ADD $\equiv$ ∼∼ 即可

$\square$

四. （10 分） 若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \lambda x.x = \lambda x.xx$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

证：$\lambda x.x = \lambda x.xx$

$\Rightarrow (\lambda x.x)K = (\lambda x.xx)K$

$\Rightarrow K = KK$

$\Rightarrow KM = KKM$

$\Rightarrow KM = K$

$\Rightarrow KMK = KK$

$\Rightarrow M = KK$

同理 $N = KK$

故 $M = N$

$\square$

五.（10 分） 设 M 为如下定义的 Turing 机:

	0	1
1	$0R8$	$0R2$
2	$0R3$	$1R2$
3	$1R4$	$1R3$
4	$1R5$	
5	$1L6$	
6	$0L7$	$1L6$
7	$0R1$	$1L7$
8		

输入: $(2,1) : 0\underset{\uparrow}{1}^n 0\cdots$，这里 $n \in \mathbb{N}^+$。求输出。(只需要写出结果。)

答 $(n+3, 8)$: $0^{n+2}\underset{\uparrow}{1}^{3n}0\cdots$

六.（10 分） 设 Turing 机 M 计算函数 $f(x) = 2x$，试求 Turing 机 P 其计算函数 $g(x) = 2^x$。（只需要写出构造 P 的思想。）