《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2018 年 6 月

本试卷满分 100 分，共七题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一.（30 分）

(1) 什么是 Turing 机？

(2) 什么是 Church-Turing Thesis？你拥护吗？

(3) 什么是 Turing 机的通用性 (universality)？

(4) 什么是一般递归函数？

(5) 什么是 $\lambda\beta$ 系统的 CR 性质？

二.（20 分） 设 A 表示 $\mathcal{EF}$, B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$, C 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$, D 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) Ackermann 函数。

(3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为奇数}\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(4) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m)=\begin{cases}0, & \text{若存在 } M\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner \text{ 且 } M \text{ 呈形 } x_1x_2\cdots x_n\text{，这里 } x_i \text{ 为变元}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(5) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M,N\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner, n=\ulcorner N\urcorner \text{ 且 } M=_\beta N\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(6) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor n!\cdot\cos(1)\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使得 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(8) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n,m)=\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^n}}}}}\right\}$ 共 $m+1$ 个 3。

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\left\lfloor\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三. （10 分） 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为一元函数，其定义如下：

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0, \\
f(1) &= 1, \\
f(n+2) &= (n+2)\left(f(n+1)+f(n)\right).
\end{aligned}
$$

证明：

1. $f(n) \le (n+1)!$
2. $f(0)=0,\ f(n+1)=(n+2)f(n)+(-1)^n$
3. $f(n)=(n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!}$
4. $f\in\mathcal{EF}$

三(4)证：

$$f(n)=(n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{(n+1)!}{i}\right]\mathrm{N}\,\mathrm{rs}(i,2)$$

$$\dot{-}\ (n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\frac{\mathrm{rs}(i,2)}{i}$$

四.（10 分） 若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \lambda x.x = \lambda x.xxx$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

五.（10 分） 构造机器 M 使得其满足

输入 $s : 0\underset{\uparrow}{1}{}^{n}01^{m}0\cdots$ 时，输出 $t : 0\cdots0\underset{\uparrow}{1}{}^{2m}01^{2n}0\cdots$

(注：构造时可利用已有机器)

六.（10 分）（谨以此题向 Alan Turing 先生致敬！）
设 $\mathcal{L}$ 为某个给定的程序设计语言。对于每一个 $\mathcal{L}$-程序 P，假设我们已经构造了程序 P 的 Gödel 编码 $\sharp P$，且由 $\sharp P$ 可能行地重构 P。证明: 若定义数论谓词 $H(x,y)$ 为 "编码为 y 的程序 P 对于输入 x 停机"，则 $H(x,y)$ 不可判定；即不存在一般递归函数 h 使得

$$h(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } H(x,y) \text{ 真} \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$$

七.（10 分） Let $f(n)$ be the n-th digit in the decimal expansion of the real number sinh(1), where $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ is the hyperbolic sine function. For example, suppose that $\sinh(1) = a_0.a_1a_2\cdots$, then $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\cdots$. Prove that function f is Turing-computable. Furthermore, prove that it is elementary.

令 $f(n)$ 为实数 sinh(1) 的十进制展开式中的第 n 位数字，其中 $\sinh(x)$ 为双曲正弦函数。例如, 假设 $\sinh(1) = a_0.a_1a_2\cdots$, 那么 $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\cdots$。证明函数 f 是 Turing 可计算的。进而，证明 f 是初等函数。