

## 1 Cut

### 1.1 Min-Cut

---

**Algorithm 1** Karger's min cut algorithm

---

**Input:** multigraph  $G(V, E)$

**Output:** a cut

```
while  $|V| > 2$  do
    choose a uniform  $e \in E$ 
    contract( $e$ )
end while
return remaining edges
```

---

该算法以不低于  $\frac{2}{n(n-1)}$  的概率返回最小割，重复该算法  $\frac{n(n-1)}{2}$  次，得不到最小割的概率满足：

$$\Pr[\text{fail}] \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} < \frac{1}{e}$$

算法分析见课件或者讲义.

\* **推论:**  $n$  节点的图中独立最小割的个数至多是  $\frac{n(n-1)}{2}$

---

**Algorithm 2** Fast Min Cut

---

**Input:**  $G$

```
if  $|V| \leq 6$  then
    return a min-cut by brute force
else
    set  $t = \lceil 1 + \frac{n}{\sqrt{2}} \rceil$ 
     $G_1 = \text{Contract}(G, t)$ 
     $G_2 = \text{Contract}(G, t)$ 
    return  $\min(\text{FastCut}(G_1), \text{FastCut}(G_2))$ 
end if
```

---

\* **定理:** FastCut runs in time  $O(n^2 \log n)$  and returns a min-cut with probability  $\Omega(\frac{1}{\log n})$  分析见课件

## 1.2 Max-Cut

---

**Algorithm 3** Greedy

---

```
S=T=∅  
for i=1,2...n do  
     $v_i$  joins one of S,T to maximize current  $E(S,T)$   
end for
```

---

\* **结论:** 贪心算法的近似率为  $\frac{1}{2}$

---

**Algorithm 4** Random

---

```
S=T=∅  
for i=1,2...n do  
     $v_i$  joins one of S,T  
end for
```

---

\* **结论:** 随机算法的近似率为  $\frac{1}{2}$

\* **重点:** 随机算法可以 Derandomization 成贪心算法. 见作业

## 2 Chernoff Bound

### 2.1 Balls into Bins

$m$  个小球随机独立的投入到  $n$  个桶中:

\* 每个球所在的桶只有它自己一个球的概率 (生日问题)

对于  $m = \sqrt{2n \ln \frac{1}{\epsilon}}$ ,  $\Pr[\text{no bin with more than two balls}] = \epsilon$

\* 没有空桶的概率 (收集问题)

**定理 \*** 设  $X$  为投入  $n$  个桶直到没有空桶所需要的球的个数,  $E[X] = nH(n)$ . ( $n$  为调和级数)

\* 桶中球的最大个数 (负载均衡问题)

-  $m = \theta(n)$ , the max load is  $O(\frac{\log n}{\log \log n})$  whp.

-  $m = n$ , the max load is  $O(\log \log n)$  whp.

### 2.2 Tail inequality

\* Markov 不等式:  $\Pr[X \geq t] \leq \frac{E[X]}{t}$

\* Markov 一般形式:  $\Pr[f(X) \geq t] \leq \frac{E[f(X)]}{t}$

\* Chebyshev 不等式:  $\Pr[|X - E[X]| \geq t] \leq \frac{Var[X]}{t^2}$

\* Chernoff Bound 一般形式:

对于一系列独立随机变量  $X_1, X_2 \cdots X_n \in \{0, 1\}$ , 令  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\mu = E[X]$ , 那么有:

$$\forall \delta > 0, \Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{(1 + \delta)}}\right)^\mu$$

$$\forall 0 < \delta < 1, \Pr[X \leq (1 - \delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{(1 - \delta)}}\right)^\mu$$

\* Chernoff Bound 实用形式:

对于一系列独立随机变量  $X_1, X_2 \cdots X_n \in \{0, 1\}$ , 令  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\mu = E[X]$ , 那么有:

$$\forall 0 < \delta < 1$$

$$\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq \exp\left(-\frac{\mu\delta^2}{3}\right)$$

$$\Pr[X \leq (1 - \delta)\mu] \leq \exp\left(-\frac{\mu\delta^2}{2}\right)$$

$$\text{for } t \geq 2e\mu$$

$$\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$$

\* Hoeffding 不等式

对于一系列独立随机变量  $X_1, X_2 \cdots X_n, X_i \in [a_i, b_i]$ , 令  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , 那么有:

$$\forall t > 0$$

$$\Pr[X \geq E[X] + t] \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

$$\Pr[X \leq E[X] - t] \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

\* Hoeffding 实用形式:

对于一系列独立随机变量  $X_1, X_2 \cdots X_n, X_i \in \{0, 1\}$ , 令  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , 那么有:

$$\forall t > 0$$

$$\Pr[X \geq E[X] + t] \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{n}\right)$$

$$\Pr[X \leq E[X] - t] \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{n}\right)$$

\* Hoeffding lemma:

对于任意随机变量  $X \in [a, b]$ , 若  $E[X] = 0$ , 有:

$$E[e^{\lambda X}] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2(b - a)^2}{8}\right)$$

## 3 Martingale

### 3.1 条件概率和条件期望

\*  $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \wedge B]}{\Pr[B]}$

$$* E[X|A] = \sum_x x \cdot \Pr[X = x|A]$$

$$* E[Y] = E[E[Y|X]]$$

$$* E[Y|Z] = E[E[Y|X, Z]|Z]$$

$$* E[E[f(X)g(X, Y)|X]] = E[f(X)E[g(X, Y)|X]]$$

### 3.2 Martingales 的定义

一系列随机变量  $X_0, X_1 \cdots$  是一个 Martingale, 如果满足:

$$E[X_i | X_0, X_1 \cdots X_{i-1}] = X_{i-1}$$

### 3.3 Azuma 不等式

设  $X_0, X_1 \cdots$  是一个 martingale, 且满足对于任意  $k \geq 1$ , 有:

$$|X_k - X_{k-1}| \leq c_k$$

则:

$$\Pr[|X_n - X_0| \geq t] \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$$

### 3.4 广义的 Martingale

一系列随机变量  $Y_0, Y_1 \cdots$  是关于序列  $X_0, X_1 \cdots$  的 martingale, 如果满足:

$$\forall i \geq 0$$

$$* Y_i \text{ is a function of } X_0, X_1 \cdots X_i$$

$$* E[Y_{i+1} | X_0, X_1 \cdots X_i] = Y_i$$

### 3.5 广义的 Azuma 不等式

设  $Y_0, Y_1 \cdots$  是关于  $X_0, X_1 \cdots$  的 martingale, 且满足对于任意的  $k \geq 1$ :

$$|Y_k - Y_{k-1}| \leq c_k$$

则有:

$$P(|Y_n - Y_0| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$$

### 3.6 Doob Sequence

一个和序列  $X_1 \cdots X_n$  有关的函数  $f$  的 Doob Sequence 是:

$$Y_i = E[f(X_1 \cdots X_n) | X_1, \cdots, X_i]$$

特别的,  $Y_0 = E[f(X_1, \cdots, X_n)], Y_n = f(X_1, \cdots, X_n)$

### 3.7 Doob Martingale

一个函数  $f$  的 Doob Sequence 是一个 martingale，就是说：

$$E[Y_i | X_1, \dots, X_{i-1}] = Y_{i-1}$$

## 4 Fingerprinting

### 4.1 有限域理论

Let  $S$  be a set, closed under binary operations  $+$  (addition) and  $\cdot$  (multiplication). It gives us the following algebraic structures if the corresponding set of axioms are satisfied.

Structures							Axioms	Operations
field	commutative ring	ring	abelian group	group	monoid	semigroup	1. Addition is associative: $\forall x, y, z \in S, (x + y) + z = x + (y + z)$ .	+
							2. Existence of additive identity 0: $\forall x \in S, x + 0 = 0 + x = x$ .	
							3. Everyone has an additive inverse: $\forall x \in S, \exists -x \in S$ , s.t. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ .	
							4. Addition is commutative: $\forall x, y \in S, x + y = y + x$ .	+, ·
							5. Multiplication distributes over addition: $\forall x, y, z \in S, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ and $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ .	
							6. Multiplication is associative: $\forall x, y, z \in S, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ .	
							7. Existence of multiplicative identity 1: $\forall x \in S, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ .	·
							8. Multiplication is commutative: $\forall x, y \in S, x \cdot y = y \cdot x$ .	
							9. Every non-zero element has a multiplicative inverse: $\forall x \in S \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in S$ , s.t. $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ .	

图 1: 有限域理论

### 4.2 典型的域

- 无限域:  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- 有限域:

\* Prime Field  $\mathbb{Z}_p$ : 对于所有大于 1 的整数  $n$ ,  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  在模  $p$  的意义下构成了 commutative ring, 若  $p$  是素数, 则  $\mathbb{Z}_p$  是一个域。

\* Boolean arithmetics  $GF(2)$ :  $\{0, 1\}$  在“异或”作为加法, “与”作为乘法时, 构成域

### 4.3 多项式

设  $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  是域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  变量的多项式构成的环。那么对于  $f \in \mathbb{F}$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

多项式  $f$  的度 (degree) 为: 满足  $a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \neq 0$  的最大的  $i_1 + i_2 + \dots + i_n$

### 4.4 Polynomial Identity Testing(PIT)

问题, 能否判定一个多项式是否恒为 0?

- 输入:  $f \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  of degree  $d$ .
- 输出:  $f \equiv 0$ ?

## 4.5 Schwartz-Zippel 定理

针对 PIT 问题, 有 Schwartz-Zippel 定理:

$$f \neq 0 \implies \forall S \subset \mathbb{F}, \Pr[f(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0] \leq \frac{\text{degree}(f)}{|S|}$$

## 4.6 Fingerprinting 问题定义

我们希望有这样的函数  $\text{FING}$ , 它满足:

- 若  $X = Y$ , 则  $\text{FING}(X) = \text{FING}(Y)$
- 若  $X \neq Y$ , 我们希望  $\Pr[\text{FING}(X) = \text{FING}(Y)]$  尽量小

那么可以将问题转化为 PIT 问题, 并使用 Schwartz-Zippel 定理。

# 5 Hashing

## 5.1 估计集合大小

- 输入: 一个序列  $x_1, x_2 \dots x_n \in \Omega$  (有重复元素)
- 输出:  $z = |\{x_1, x_2 \dots x_n\}|$  的估计值

假设有  $k$  个独立哈希函数  $h_1, h_2 \dots h_k : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , 设  $Y_j = \min_{1 \leq i \leq n} h_j(x_i)$ 。设  $\bar{Y} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y_j$ 。使用  $\hat{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} - 1$  作为估计值。

可以证明 (见课件):

$$\Pr[\hat{Z} > (1 + \epsilon)z \text{ or } \hat{Z} < (1 - \epsilon)z] \leq \frac{4}{\epsilon^2 k} \leq \delta, \quad (\text{choose } k = \frac{4}{\epsilon^2 \delta})$$

## 5.2 其他应用

详情见课件

- Frequency Estimation
- Bloom Filters
- Heavy Hitters
- Count-Min Sketch

# 6 Nearest Neighbor Search(NNS)

## 6.1 Johnson-Lindenstrauss Theorem (JLT)

JLT 的原始描述: 对于任意的  $\epsilon$ , 对于任意的  $d$  维空间的大小为  $n$  的点集  $S, S \in \mathbb{R}^d, |S| = n$ , 都有一个降维函数  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k, k = O(\epsilon^{-2} \log n)$ , 满足:

$$\forall x, y \in S, (1 - \epsilon)\|x - y\|_2^2 \leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_2^2 \leq (1 + \epsilon)\|x - y\|_2^2$$

JLT 的另一种描述方式: 对于任意的  $\epsilon$ , 对于任意的  $d$  维空间的大小为  $n$  的点集  $S, S \in \mathbb{R}^d, |S| = n$ , 都存在一个矩阵  $A \in \mathbb{R}^{k \times d}, k = O(\epsilon^{-2} \log n)$ , 满足:

$$\forall x, y \in S, (1 - \epsilon)\|x - y\|_2^2 \leq \|Ax - Ay\|_2^2 \leq (1 + \epsilon)\|x - y\|_2^2$$

JLT 的 Probabilistic method 描述: 对于一个随机的  $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$

$$\Pr[\forall x, y \in S, (1 - \epsilon)\|x - y\|_2^2 \leq \|Ax - Ay\|_2^2 \leq (1 + \epsilon)\|x - y\|_2^2] \geq 1 - O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (w.h.p)$$

JLT 的两种证明方法:

- 根据高斯分布来采样出  $A$ , 证明  $\forall$  unit vector  $u \in \mathbb{R}^d, \Pr[\|Au\|_2^2 - 1 \geq \epsilon] < \frac{1}{n^3}$
- Projection

## 6.2 NNS 的问题定义

发现最近邻在高维空间很难, 考虑两种方法:

- 寻找近似近邻
- 使用 Local Sensitive Hash 进行降维

## 7 Greedy Algorithm

几个例子

- Set Cover
- Vertex Cover
- Scheduling
- Longest Processing Time(LPT)
- Online Scheduling

## 8 Dynamic Programming(DP)

3 个例子:

- 背包问题
- Bin-Packing
- Scheduling

近似求解的思想:

- Scaling and Rounding: 对原始数据进行粗化, 得到新数据, 新数据一般规模较小, 可以求出新数据的最优解来近似原始数据的最优解.
- Grouping and Rounding: 和 Scaling and Rounding 类似.

## 9 Linear Programming(LP)

想法, 整数线性规划是 NP-Hard, 实数上的线性规划可以高效求解。所以可以进行 Relaxation and Rounding。

## 10 Prime Dual

理解强对偶性: 对偶问题的上界是原问题的下界。例子: Metric Facility Location

## 11 Semidefinite Programming(SDP) & Sum of Square(SOS)

非线性约束的问题可以将变量从标量放到矢量, 再 Rounding 到原始的空间中。

## 12 Lovasz Local Lemma(LL)

### 12.1 LL

LL 的直观理解: 定义一组坏事件, 如果这些坏事件的独立性满足一些条件, 那么如果每个坏事件单独发生的概率不高于一个量, 这些坏事件以非 0 的概率都不发生。

LL 版本 1:

$m$  bad events  $A_1, A_2 \dots A_m$ , every  $A_i$  is independent of all but  $\leq d$  other bad events

$$\forall i: \Pr[A_i] \leq \frac{1}{4d} \implies \Pr[\bigwedge_{i=1}^m \bar{A}_i] > 0$$

LL 版本 2:

$m$  bad events  $A_1, A_2 \dots A_m$ , every  $A_i$  is independent of all but  $\leq d$  other bad events

$$\forall i: \Pr[A_i] \leq \frac{1}{e(d+1)} \implies \Pr[\bigwedge_{i=1}^m \bar{A}_i] > 0$$

注意: 这里的独立应该是如果每个坏事件都由一些变量来定义, 那么独立就意味着不共享任何的变量。

### 12.2 Moser-Tardos Algorithm Framework

这是一种随机算法设计框架:

---

**Algorithm 5** Moser-Tardos Algorithm

---

```
sample all  $X_1, \dots, X_n$ 
while  $\exists$  an occurring bad event  $A_i$ : do
    resample all  $X_j \in \text{vbl}(A_i)$ 
end while
```

---

结论 \*:

- 如果  $\forall i: \Pr[A_i] \leq \frac{1}{4d}$ , 则期望意义上经过  $m/(2d-1)$  次重新采样后, 会得到一个满足的解。
- 如果  $\forall i: \Pr[A_i] \leq \frac{1}{e(d+1)}$ , 则期望意义上经过  $m/d$  次重新采样后, 会得到一个满足的解。