计算模型导引

习题课（二）

南京大学 计算机科学与技术系

2019/04/10

P48，习题 1.13

设:$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(1) &= 1, \\ f(x+2) &= f(x)+f(x+1) \end{aligned}$$

证明：
（1）$f\in\mathcal{PRF}$;
（2）$f\in\mathcal{EF}$
证：令

$$[a_0,a_1,\cdots,a_n]=\prod_{i=0}^{n} p_i^{a_i}$$

, 这里 p_i 为第 i 个素数，比如（$p_0=2,p_1=3,p_2=5$)
例如 $([a_0,a_1,a_2]=2^{a_0}\cdot 3^{a_1}\cdot 5^{a_2})$
$ep_i(a)$ =a 的素因子分解式中第 i 个素数的指数。易见

$$ep_i[a_0,a_1,\cdots,a_n]=\begin{cases} a_i, & i\le n \\ 0, & i>n \end{cases}$$

令 $F(n) = [f(n), f(n+1)]$，从而
$F(0) = [f(0), f(1)] = 2^1 \cdot 3^1 = 6$

$$\begin{aligned} F(n+1) &= [f(n+1), f(n+2)] \\ &= [f(n+1), f(n+1) + f(n)] \\ &= [ep_1 F(n), ep_1 F(n) + ep_0 F(n)] \\ &= H(F(n)) \end{aligned}$$

这里 $H(x) = [ep_1 x, ep_1 x + ep_0 x]$
$\because H(x) = [ep_1 x, ep_1 x + ep_0 x] = 2^{ep_1 x} \cdot 3^{ep_1 x} \cdot 3^{ep_0 x}$
$\therefore H(x)$ 是初等的。
又 $\because F(0) = 6, F(n+1) = H(F(n))$，以及 H 为原始递归函数，
$\therefore F(n)$ 为原始递归函数，
又 $\because f(n) = ep_0 F(n)$，
$\therefore f(n)$ 为原始递归函数。

P48, 习题 1.13 续 2

下证 $f(n)$ 是初等的
证法一：首先有 $f(n) \leq 2^n$，归纳证明如下：
当 $n = 0, 1$ 时，$f(0) = 1 \leq 2^0, f(1) = 1 \leq 2^1$
归纳假设：$\forall k \leq n.\ f(k) \leq 2^k$
归纳步骤：当 $n < 2$ 时，$f(n) \leq 2^n$ 为真
当 $n \geq 2$ 时，
$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \leq 2^{n-1} + 2^{n-2} = 2^{n-2} \cdot 3 \leq 2^{n-2} \cdot 4 = 2^n$
还有 $F(n) \leq G(n)$, 这里 $G(n) = 2^{2^n} \cdot 3^{2^{n+1}}$ 且 $G(n)$ 是初等的。
证：$F(n) = [f(n), f(n+1)] = 2^{f(n)} \cdot 3^{f(n+1)} \leq 2^{2^n} \cdot 3^{2^{n+1}} = G(n)$,
易见 $G(n)$ 的初等性。
令

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= [F(0), \ldots F(n)] \\ &\leq [G(0), \ldots G(n)] \\ &= \prod_{i=0}^{n} p_i^{G(i)} \leq \prod_{i=0}^{n} p_n^{2^{2^n} \cdot 3^{2^{n+1}}} = (n+1)\, p_n^{2^{2^n} \cdot 3^{2^{n+1}}} = \beta(n) \end{aligned}$$

易见 $\beta(n)$ 为初等函数。

P48, 习题 1.13 续 3

因为

$$
\begin{aligned}
\alpha(n) &= \mu x \leq \beta(n) \,.\, (ep_0 x = F(0)) \wedge \forall i < n \,.\, ep_{i+1} x = H(ep_i x)) \\
&= \mu x \leq \beta(n) \,.\, [ep_0 x = 6 \wedge \forall i < n(ep_{i+1} x \dot{-} H(ep_i x) = 0)] \\
&= \mu x \leq \beta(n) \,.\, \left[(ep_0 x \dot{-} 6) + (\sum_{i \to n \dot{-} 1} (ep_{i+1} x \dot{-} H(ep_i x)))N^2 n\right] \\
&= \mu x \leq \beta(n) \,.\, \gamma(n)
\end{aligned}
$$

易见 $\gamma(n)$ 是初等的，所以 $\alpha(n)$ 是初等的。
因为 $f(n) = ep_0(F(n)) = ep_0(ep_n(\alpha(n)))$，所以 $f(n)$ 是初等的。

证法二：

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$$

（该公式的证明见 Kolman B, Busby R C, Ross S. Discrete mathematical structures. Prentice-Hall, Inc., 1996(3rd).)

$$=\frac{1}{2^{\mathrm{n}+1}\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}\right]$$
$$=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}[\sum_{i\to n+1}C_{n+1}^{\ i}(\sqrt{5})^{i}-\sum_{i\to n+1}C_{n+1}^{\ i}(-\sqrt{5})^{i}]$$
$$=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}[\sum_{i\to n+1}C_{n+1}^{\ i}2(\sqrt{5})^{i}N^2rs(i,2)]$$
$$=\frac{1}{2^n}[\sum_{i\to n+1}C_{n+1}^{\ i}5^{[\frac{i}{2}]}N^2rs(i,2)]$$
$$=[\frac{\sum_{i\to n+1}C_{n+1}^{\ i}5^{[\frac{i}{2}]}N^2rs(i,2)}{2^n}]$$

P48, 习题 1.14

设数论谓词 $Q(x, y, z, v)$ 定义为

$$Q(x, y, z, v) \equiv p(\langle x, y, z\rangle)|v,$$

其中 $p(n)$ 表示第 n 个素数，$\langle x, y, z\rangle$ 是 x, y, z 的 Gödel 编码，证明：$Q(x, y, z, v)$ 是初等的。

证：

$\because \langle x, y, z\rangle = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \in \mathcal{EF},$

又 $Q(x, y, z, v)$ 的特征函数为：

$$N^2 rs\left(p\left(\langle x, y, z\rangle\right), v\right)$$

$\therefore Q \in \mathcal{EF}$

设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f(1) &= 4,\\
f(2) &= 6,\\
f(x+3) &= f(x)+(f(x+1))^2+(f(x+2))^3,
\end{aligned}
$$

证明：$f\in\mathcal{PRF}$.

证:

令 $g(x)=\langle f(x),f(x+1),f(x+2)\rangle, f(x)=(g(x))_1$,

$g(0)=\langle 1,4,6\rangle$,

$g(x+1)=\langle (g(x))_2,(g(x))_3,(g(x))_1+(g(x))_2^2+(g(x))_3^3\rangle = B(g(x))$

这里 $B(z)=\langle (z)_2,(z)_3,(z)_1+((z)_2)^2+((z)_3)^3\rangle\in\mathcal{PRF}$,

故 $g\in\mathcal{PRF}$, 从而 $f\in\mathcal{PRF}$.

P49, 习题 1.17

设 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\in\mathcal{PRF}, f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$, 满足

$$f(x,0)=g(x),$$
$$f(x,y+1)=f(f(...f(f(x,y),y-1),...),0),$$

证明：$f\in\mathcal{PRF}$.

证：

证明 $f(x,y)$ 呈形 $g^{a(y)}(x)$

Basis: $y=0, f(x,y)=f(x,0)=g(x), a(0)=1$

假设 $f(x,y)=g^{a(y)}(x)$

那么

$$\begin{aligned} f(x,y+1) &= f(f(...(f(x,y),y-1)...1),0) \\ &= g^{a(0)}(f(...f(f(x,y),y-1)...),1) \\ &= g^{a(0)+a(1)}(f(...f(f(x,y),y-1)...),2) \\ &= g^{a(0)+a(1)+...a(y)}(x) \end{aligned}$$

从而，$a(0)=1, a(y+1)=a(0)+...+a(y)$,

易见 $a(y)\in\mathcal{PRF}$. 故 $f(x,y)=g^{a(y)}(x)$

令 $h(x,y)=g^{y}(x)$

P49, 习题 1.17 续

$\because$

$$\begin{cases} h(x,0) = x \\ h(x,y+1) = g(h(x,y)) \end{cases}$$

$\therefore h \in \mathcal{PRF}$

$\because f(x,y) = h(x,a(y))$,

$\therefore f \in \mathcal{PRF}$

P49, 习题 1.18

设 $k \in \mathbb{N}^+$, 函数$f:\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$和$g:\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$仅在有穷个点取不同值
证明：f 为递归函数当且仅当 g 为递归函数.

证： 充分性

设 f 与 g 在有穷个点取不同值，从而有$S=\{S_0,S_1,\ldots S_k\}$,$x \in S$时，$f(x)=g(x)$,

从而，

$$f(x) = \begin{cases} f(x), \text{若 } x \in S \\ g(x), \text{若 } \underline{x \notin S} \end{cases}$$

令

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), \text{若 } x \in S \\ 0, \text{若 } \underline{x \notin S} \end{cases}$$

易见 $f' \in \mathcal{PRF}$.

$f(x)=\sum_{i=0}^{k} f'(x)N(eq(S_i,x))+\sum_{i=0}^{k} g(x)N^2(eq(S_i,x))$

易见 $g \in \mathcal{PRF} \Rightarrow f \in \mathcal{PRF}$

同理, $f \in \mathcal{PRF} \Rightarrow g \in \mathcal{PRF}$.

P49, 习题 1.20

证明：$Ack(4,n) = \mathcal{PRF} - \mathcal{EF}$, 其中$Ack(x,y)$是$Ackermann$函数.
证：
令 $f(n) = A(4,n)$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= A(4,0) = A(3,1) = f_3(1) = 2^{1+3} - 3 = 13 \\
f(n+1) &= A(4,n+1) \\
&= A(3,A(4,n)) = A(3,f(n)) = 2^{f(n)+3} \dot{-} 3
\end{aligned}
$$

令 $g(n) = f(n) + 3$，
从而 $g(0) = 16 = 2^4, g(n+1) = 2^{g(n)}$
因此 $g(n) = 2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \}n+3$ 个 2
从而 $A(4,n) = 2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \dot{-} 3 \in \mathcal{PRF}$.

$$
\because \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}} \}k\text{个}2}{g(n)} = 0
$$
$$
\therefore g \notin \mathcal{EF}
$$

从而 $f \notin \mathcal{EF}$

P49, 习题 1.21

设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f$ 为单射 (1-1) 且满射 (onto), 证明：
$f\in\mathcal{GRF}\Leftrightarrow f^{-1}\in\mathcal{GRF}$.
证：设 f 位单射且满射，令 $g(x)=f^{-1}(x)$, 从而

$$y=g(x)\ \textit{iff}\ f(y)=x\ \textit{iff}\ y=\mu z.\ f(z)=x$$

从而

$$g(x)=\mu z.\ (f(z)\dot{-}x)$$

因此

$$g\in\mathcal{GRF}\Leftarrow f\in\mathcal{GRF}$$

同理

$$f\in\mathcal{GRF}\Leftarrow g\in\mathcal{GRF}.$$

P49, 习题 1.22

设 $p(x)$ 为整系数多项式，令 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为 $f(a) = p(x) - a$ 对于 x 的非负整数根，证明：$f \in \mathcal{RF}$.

证：

$$f(n) = \mu x.\ (p(x) = n)$$

$\because$ $p(x)$ 为整系数多项式

$\therefore$ 存在正整系数多项式 $s(x)$ 与 $t(x)$ 使 $p(x) = s(x) - t(x)$

从而

$$f(n) = \mu x.\ (s(x) \mathbin{\dot{\dot{-}}} (n + t(x)))$$

易见 $s(x), t(x) \in \mathcal{PRF}$

$$\text{故 } f \in \mathcal{RF}$$

P49, 习题 1.23

设

$$f(x) = \begin{cases} x/y, & \text{若} y \neq 0 \text{且} y|x, \\ \uparrow, & \text{否则}. \end{cases}$$

证明:$f \in \mathcal{RF}$.

证:

$$f(x) = \mu z.\ (zy = x)\text{且}(y \neq 0) = \mu z.\ (x \dot{-} zy) \cdot Ny$$

P50, 习题 1.24

设 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足

$$
\begin{aligned}
g(0) &= 0,\\
g(1) &= 1,\\
g(n+2) &= rs((2002g(n+1)+2003g(n)),2005),
\end{aligned}
$$

（1）试求 $g(2006)$

（2）证明 $g\in\mathcal{EF}$

证：

(1) 令 $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ 如下，

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 0,\\
h(1) &= 1,\\
h(n+2) &= -3h(n+1)-2h(n)
\end{aligned}
$$

易见 $g(n)=rs(h(n),2005)$

$h(n)$ 的特征方程为 $\lambda^2=-3\lambda-2$, 其根为 $-1,-2$，从而

$h(n)$ 呈形 $a(-1)^n+b(-2)^n$, 由于 $h(0)=0, h(1)=1$, 故得

$a=1, b=-1$，因此 $h(n)=(-1)^n-(-2)^n=(-1)^{n+1}(2^n\dot{-}1)$

P50, 习题 1.24 续

从而

$g(n) = IF\ n$偶$\ THEN\ 2005 \dot{-} rs(2^n \dot{-} 1, 2005)\ \ ELSE\ rs(2^n \dot{-} 1, 2005)$

$\quad = (2005 \dot{-} rs(2^n \dot{-} 1, 2005))Nrs(n,2) + rs(2^n \dot{-} 1, 2005)N^2 rs(n,2)$

故 $g \in \mathcal{EF}$

(2) 以下计算 $g(2006)$

$\because 2005 = 5 \cdot 401, 5, 401$ 为素数

$\therefore$ 由$Fermat's\ little\ theorem$(费马小定理: 假如 p 是质数，且 $(a,p)=1$，那么 $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$)知

$2^4 \equiv 1(5), 2^{400} \equiv 1(401)$, 从而 $2^{400} \equiv 1(5)$ 且 $2^{400} \equiv 1(401)$

$\because (5, 401) = 1 \therefore 2^{400} \equiv 1(5 \cdot 401)$ 即 $rs(2^{400}, 2005) = 1$

从而, $g(n+400) = g(n), g$ 的周期为 400

故 $g(2006) = g(6) = rs(h(6), 2005) = 2005 - rs(2^6 - 1, 2005) = 2005 - 2^6 + 1 = 1942$

P50, 习题 1.25

设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为

$$f(n) = \pi\text{的十进制展开式中第 n 位数字.}$$

例如 $f(0) = 3, f(1) = 1, f(2) = 4$，证明: $f \in \mathcal{GRF}$

证：

$$\because \frac{1}{1+x^2} = (\sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^{2i}) + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

$$\therefore arctan\ x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_0^x t^{2i} dt + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2} t^{2n+2} dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}}{1+t^2} t^{2n+2} dt \cdots (*)$$

由 Hutton's Formula 知

$$\frac{\pi}{4}=2arctan(\frac{1}{3})+arctan(\frac{1}{7}) \text{ 从而 } \pi=8arctan(\frac{1}{3})+4arctan(\frac{1}{7})$$

在 (*) 中取 $n=2k+1$，这是使余项为正且估计更精确

$$\pi=8\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i\frac{1}{(2i+1)3^{2i+1}}+8\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{t^{4k+4}}{1+t^2}dt$$

$$+4\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i\frac{1}{(2i+1)7^{2i+1}}+4\int_0^{\frac{1}{7}}\frac{t^{4k+4}}{1+t^2}dt$$

令

$$t_k=8\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i\frac{1}{(2i+1)}(\frac{1}{3^{2i+1}}+\frac{1}{2\cdot 7^{2i+1}})$$

$$r_k=8\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{t^{4k+4}}{1+t^2}dt+4\int_0^{\frac{1}{7}}\frac{t^{4k+4}}{1+t^2}dt$$

$$\mathrm{r}_k = 8\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{t}^{4k+4}}{1+t^2}dt + 4\int_0^{\frac{1}{7}} \frac{t^{4k+4}}{1+t^2}dt$$

$$\leq 8\int_0^{\frac{1}{3}} \mathrm{t}^{4k+4}dt + 4\int_0^{\frac{1}{7}} t^{4k+4}dt$$

$$\leq 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{4k+4}} + 4\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^{4k+4}} \leq \frac{1}{3^{4k}} \leq \frac{1}{80^k}$$

因此 $\pi = t_k + r_k$，且 $0 < r_k < \frac{1}{80^k}$

t 为有理数，设 t_k 的十进制展开式为

$$t_k = a_{k0}a_{k1}a_{k2}\cdots a_{kn}\cdots$$

对于 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $l\geq n+1$ 使在 t_l 中并非

$a_{l,n+1}, a_{l,n+2}, \cdots a_{l,l}$ 皆为 9

若不然，对任何 $l\geq n+1, a_l, a_{l,n+1}, a_{l,n+2}, \cdots, a_{l,l}$ 皆为 9

$\because 10^l\pi = 10^l t_l + 10^l r_l \therefore 10^l t_l < 10^l\pi < 10^l t_l + \frac{1}{8^l}$

这样在 π 的展开式中，从某位起皆为 9，从而 π 为有理数

令 $l = l(n) = \mu l.\ (l \geq n+1$且在$a_{l,n+1}, \cdots, a_{l,l}$中并非皆为 9)

$\because a(l,i) = a_{l,i} = t_l$ 展开式的第 i 个数字 $\in \mathcal{EF}$

$$\therefore l(n) = \mu l.\ ((l \geq n+1) \wedge \prod_{i=n+1}^{l} ((a_{l,i} \dot{-} 9) \neq 0)) \in \mathcal{GRF}.$$

{注，若知道 π 展开式中连续 9 的个数有上界，则 $l(n) \in \mathcal{EF}$}

我们有 $t_k < \pi < t_l + \frac{1}{80^l}$

对于 $n \in \mathbb{N}$，取 $l = l(n)$

$\because a_{l,n+1}, \cdots a_{l,l}$ 并非皆为 9，

$\therefore$ 设 $a_{l,m} < 9$

这里 $n+1 \leq m \leq l$，设 $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2\cdots$

从而 $t_l < \pi < t_l + \frac{1}{80^m}$

$10^m t_l < 10^m\pi < 10^m t_l + \frac{1}{8^m}$

从而

$$
\begin{aligned}
& a_{l0}\, a_{l1}\, a_{l2} \dots a_{ln}\, a_{\overline{ln+1}} \dots a_{lm} . a_{\overline{lm+1}} \dots \\
& < \pi_0 \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n \pi_{n+1} \dots \pi_m . \pi_{m+1} \dots \\
& < a_{l0}\, a_{l1}\, a_{l2} \dots a_{\ln}\, a_{\overline{ln+1}} \dots a_{lm} . a_{\overline{lm+1}} \dots + \frac{1}{8^m} (m \geq 1) \\
& < a_{l0}\, a_{l1}\, a_{l2} \dots a_{\ln}\, a_{\overline{ln+1}} \dots (a_{lm} + 1) . a_{\overline{lm+1}} \dots
\end{aligned}
$$

因此,

$$a_{l0}\, a_{l1} \dots a_{ln} a_{\overline{ln+1}} \dots a_{lm} \leq \pi_0 \pi_1 \dots \pi_n \pi_{n+1} \dots \pi_m \leq a_{l0}\, a_{l1} \dots a_{\ln}\, a_{\overline{ln+1}} \dots (a_{lm} + 1)$$

$\because m \geq n+1 \therefore \pi_n = a_{ln}$

因此，$f(n) = \pi_n = a(l(n), n) \in \mathcal{GRF}$

感谢观看！