计算模型导引

习题课（一）

南京大学 计算机科学与技术系

2019/04/10

P47, 习题 1.1

证明：对于固定的 k，一元数论函数 $x+k \in BF$

证：

$$\because f_k(x) = x + k = S^k(x)$$

$$\therefore f_k(x) \in BF$$

证明：对任意 $k \in \mathbb{N}^+$ $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, 若 $f \in BF$, 则存在 h，使得

$$f(\vec{x}) < \|\vec{x}\| + h$$

其中

$$\|\vec{x}\| \equiv \max\{x_i : 1 \le i \le k\}$$

（参看定义 1.9，我们分两种情况：本原函数和复合）

证：设 $f \in BF$

Case 1: 如果 f 为零函数 Z，后继函数 S，或投影函数 ${P_i}^n$ 之一。

$$Z(x) < x + 1, \quad S(x) < x + 2, \quad {p_i}^n(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + 1$$

显然存在这样的 h

Case 2: 设 $f(\vec{x}) = g(g_1(\vec{x}), ..., g_m(\vec{x})))$

设 $g(\vec{y}) < ||\vec{y}|| + h_0$, $g_i(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + h_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., m)$

$$\begin{aligned} \text{从而 } f(\vec{x}) &< \max_{1 \le i \le m} g_i(\vec{x}) + h_0 \\ &< \max_{1 \le i \le m} (||\vec{x}|| + h_i) + h_0 \\ &< ||\vec{x}|| + h_0 + h_1 + h_2 + ... + h_m \end{aligned}$$

取 h 为 $h_0 + h_1 + h_2 + ... + h_m$ 即可

P47，习题 1.3

证明：二元数论函数 $x + y \notin BF$
证：反设 $x + y \in BF$，从而有 h 使得 $x + y < max(x, y) + h$ （习题 1.2 的结论）
取 $x = y = h + 1$，从而，$2h + 2 < 2h + 1$ 矛盾！

P47, 习题 1.4

证明：二元数论函数 $x \dot{-} y \notin BF$

证：反设 $x \dot{-} y \in BF$, 从而 $x \dot{-} 1 \in BF$

$\therefore \quad x \dot{-} 1 \in BF$

然而, $f(x) \in BF$ 时，$f(x) \geq x$ 或 $= 0$，矛盾！

P47, 习题 1.5

设 $pg(x,y) = 2^x(2y+1) \dot{-} 1$，证明：存在初等函数 $K(x)$ 和 $L(x)$ 使得

$$K(pg(x,y)) = x$$
$$L(pg(x,y)) = y$$
$$pg(K(z), L(z)) = z$$

证：$z = 2^x(2y+1) \dot{-} 1$

iff $z+1 = 2^x(2y+1)$

iff $x = ep_0(z+1)$ 且 $2y+1 = \frac{z+1}{2^x}$

代入 x，得 $2y+1 = \left[\frac{z+1}{2^{ep_0(z+1)}}\right]$

iff $x = K(z)$ 且 $y = L(z)$

这里 $K(z) = ep_0(z+1)$

$$L(z) = \left[\frac{\left[\frac{z+1}{2^{ep_0(z+1)}}\right] \dot{-} 1}{2}\right]$$

P47，习题 1.6

设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 证明:$f$ 可以作为配对函数的左函数当且仅当对任何 $i\in\mathbb{N}$,

$$|\{\mathrm{x}\in\mathbb{N}: f(x)=i\}|=\aleph_0$$

关于 $\aleph_0$ 的通俗解释，可以参考视频“怎样数到无限之后？”：
http://www.bilibili.com/video/av4369007/
证：“$\Rightarrow$” 设 f 为配对函数 $pg(x,y)$ 的左函数，
$\because f(pg(i,j))=i$ for all j
从而对任何 $i\in\mathbb{N}$, $\therefore \{x|f(x)=i\}\supseteq\{pg(i,j)|j\in\mathbb{N}\}$
$\sim\ \{j|j\in\mathbb{N}\}\ \sim\ \mathbb{N}$
因此，$\{x|f(x)=i\}$ 无穷。

P47, 习题 1.6 续

"$\Leftarrow$", 设任何 $i \in \mathbb{N}$, $f^{-1}[\{i\}]$ 无穷

$\because \mathbb{N}$ 良序，

$\therefore$ 可设 $f^{-1}[\{i\}] = \{a_{ij} | j \in \mathbb{N}\}$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义如下： $g(x) = \begin{cases} j, & if\ x = a_{ij} \\ 0, & else \end{cases}$

从而对任何 $i, j \in \mathbb{N}$

$f(a_{ij}) = i, g(a_{ij}) = j$, 令 $pg(i, j) = a_{ij}$

f 即为左函数

P47，习题 1.7

证明：从本原函数出发，经复合和算子 $\prod_{i=n}^{m}[\cdot]$ 可以生成所有的初等函数，这里

$$\prod_{i=n}^{m}[f(i)] = \begin{cases} f(n)\cdot f(n+1)\cdots f(m), if\ m \geq n, \\ 1, if\ m < n \end{cases}$$

证：只需证 $\sum_{i=0}^{n}$，$\prod_{i=0}^{n}$ 和函数 $\dot{-}$ 可表示出。

（1）$\prod_{i=0}^{m}$ 为 $\prod_{i=n}^{m}$ 的特例。

（2）$x^y = \prod_{i=1}^{y} P_1^1(x)$，从而 $2^y = \prod_{i=1}^{y} SSZ(i)$

（3）$N(\mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{x} Z(i)$

（4）$leq(x,y) = \prod_{i=x}^{y} Z(i) = \begin{cases} 0, if\ x \leq y \\ 1, if\ x > y \end{cases}$

P47, 习题 1.7 续

（5）$geq(x,\ y) = \prod_{i=y}^{x} Z(i) = \begin{cases} 0, \mathit{if}\ x \geq y \\ 1, \mathit{if}\ x < y \end{cases}$

（6）$\mathrm{eq}(x, y) = leq(x, y)^{Ngeq(x,y)} = \begin{cases} 0, \mathit{if}\ x = y \\ 1, \mathit{if}\ x \neq y \end{cases}$

（7）$\log(x) = \prod_{i=0}^{x} i^{Neq(2^i, x)}$

注意 $\log(2^y) = \prod_{i=0}^{2^y} i^{Neq(2^i, 2^y)}$

（8）$\sum_{i=n}^{m} f(i, \overrightarrow{x}) = log(2^{\sum_{i=n}^{m} f(i, \overrightarrow{x})}) = log(\prod_{i=n}^{m} 2^{f(i, \overrightarrow{x})})$

（9）$x \cdot y = \sum_{i=1}^{x} p_1^1(y)$

（10）$x + y = \log(2^x \cdot 2^y)$

（11）$x \dot{-} y = (\sum_{i=y+1}^{x} SZ(i)) + (\sum_{i=x+1}^{y} SZ(i))$

P47，习题 1.8

设：

$$M(x) = \begin{cases} M(M(x+11)), & \textit{if } \mathrm{x} \leq 100, \\ x-10, & \textit{if } x > 100, \end{cases}$$

证明：

$$M(x) = \begin{cases} 91, & \textit{if } \mathrm{x} \leq 100, \\ x-10, & \textit{else} \end{cases}$$

证：只需证，当 $0 \leq x \leq 100$ 时，$M(x) = 91$

（1）$M(90) = M^2(101) = M(91) = M(92) = ... = M(100) = MM(111) = M(101) = 91$

（2）当 $0 \leq x \leq 100$ 时，存在 k 使得 $90 \leq x + 11k \leq 100$ 从而 $M(x) = M^2(x + 1 * 11) = M^{k+1}(x + 11k) = M^k M(x + 11k) = M^k(91) = 91$

P47, 习题 1.9

证明：

$\min x \le n.[f(x, \vec{y})] = n \dot{-} \max x \le n.[f(n \dot{-} x, \vec{y})]$

$\max x \le n.[f(x, \vec{y})] = n \dot{-} \min x \le n.[f(n \dot{-} x, \vec{y})]$

证：

Case 1. $f(x)$ 在 $[0, n]$ 中有零点。

设 $\min x \le n. f(x) = k.$

故, $f(k) = 0$, 从而 $f(n \dot{-} (n \dot{-} k)) = 0$

$n \dot{-} k$ 为 $g(x) = f(n \dot{-} x)$ 的零点。

当 k 为 $f(x)$ 的最小零点时，$n \dot{-} k$ 为 $g(x)$ 的最大零点，从而

$n \dot{-} k = \max x \le n.\ f(n \dot{-} x)$

因此，$k = n \dot{-} \max x \le n. f(n \dot{-} x)$

Case 2. $f(x)$ 在 $[0, n]$ 中无零点，等式两边相等。

同理，可证 $\max x \le n.[f(x, \vec{y})] = n \dot{-} \min x \le n.[f(n \dot{-} x, \vec{y})]$

P48, 习题 1.10

证明：εF 对有界 $max-$ 算子封闭。
证：$\because max\ x \leq n.f(x, \overrightarrow{y}) = n \dot{-} min\ x \leq n.f(n \dot{-} x, \overrightarrow{y})$
$\therefore \varepsilon F$ 对 $max-$ 算子封闭

P48, 习题 1.11

Euler 函数, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为
$\varphi(n) = |x : 0 < x \leq n \wedge gcd(x, n) = 1|$
即 $\varphi(n)$ 表示小于等于 n 且与 n 互素的正整数个数，例如
$\varphi(1) = 1$, 因为 1 与其本身互素；$\varphi(9) = 6$, 因为 9 与 $1, 2, 4, 5, 7, 8$ 互素。证明:$\varphi \in \varepsilon F$.
证：我们有

$$\varphi(n) = \sum_{x=1}^{n} N(\gcd(x,n) - 1)$$

$$\gcd(x,y) = \max\{z : (z|x) \wedge (z|y)\}$$

$$= \max z \leq x. F(z,x,y)$$

$$F(z,x,y) = rs(x,z) + rs(y,z)$$

设 $h(x)$ 为 x 的最大素因子的下标，约定 $h(0)=0, h(1)=0$, 例如 $h(88)=4$，因为 $88=2^3\times 11$ 的最大素因子 11 是第 4 个素数 p_4，其下标为 4. 证明：$h\in\varepsilon F$.

证：$h(0)=h(1)=0$, 当 $x\geq 2$ 时。

$$\because h(x) = max\ y\leq x.\ ep_y(x)\geq 1$$
$$= max\ y\leq x.\ 1\dot{-}ep_y(x)$$
$$\therefore h\in\varepsilon F$$

设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 1, \\ f(2) &= 2^2, \\ f(3) &= 3^{3^3}, \\ &\cdots \cdots\cdots\cdots \\ f(n) &= \underbrace{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}_{n\text{个}n} \end{aligned}$$

证明:$f \in PRF - \varepsilon F$

证: 令 $g(m,n) = n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}} \}m\text{个}n$

$\begin{cases} g(0,n) = N^2 n \\ g(m+1,n) = n^{g(m,n)} \end{cases}$，从而 $f(n) = g(n,n)$

$\because g \in PRF$

$\therefore f \in PRF$

以下证 $f \notin \varepsilon F$, 若不然，则 $f \in \varepsilon F$，从而

P49, 习题 1.16 续

$$\exists k \forall n.\ f(n) < \left.2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}\right\}k\text{个}2$$

取 $n = k + 2$, 从而

$$\left.(k+2)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(k+2)}}}}\right\}k+2\text{个} < \left.2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{(k+2)}}}}}\right\}k\text{个}2\text{矛盾}$$

P49，习题 1.19

证明：

$f(n) = \left\lfloor (\frac{\sqrt{5}+1}{2})n \right\rfloor$，为初等函数

证：

$$\begin{aligned} f(n) &= max\ x \le 2n.\ x \le \tfrac{\sqrt{5}+1}{2} n \\ &= max\ x \le 2n.\ 2x \le \sqrt{5}n + n \\ &= max\ x \le 2n.\ 2x \dot{-} n \le \sqrt{5}n \\ &= max\ x \le 2n.\ (2x \dot{-} n)^2 \le 5n^2 \\ &= max\ x \le 2n.\ 4x^2 \le 4n^2 + 4xn \\ &= max\ x \le 2n.\ x^2 \dot{-} (n^2 + xn) \end{aligned}$$

感谢观看！