《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系 2019 年 12 月

本试卷满分100分, 共七题。考试时间2小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一. (30分)

- (1) 什么是 Church-Turing Thesis? 你拥护吗?
- (2) 什么是通用 Turing 机?
- (3) 什么是部分递归函数?
- (4) 什么是 $\lambda\beta$ 系统的 CR 性质?
- (5) 什么是配对函数组?
- (6) 什么是停机问题?

- 二. $(20\, \mathcal{G})$ 设 A 表示 $\mathcal{E}F$, B 表示 $\mathcal{P}\mathcal{R}F \mathcal{E}F$, C 表示 $\mathcal{G}\mathcal{R}F \mathcal{P}\mathcal{R}F$, D 表示 $\mathcal{R}F \mathcal{G}\mathcal{R}F$, E 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数 类,选择 A、B、C、D、E 之一,填在题后的表格中。
 - (1) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。
 - (2) Ackermann 函数。
 - (3) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \text{ 呈形 } m^m \\ \text{无定义}, & \text{否则} \end{cases}$$

(4) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为

$$f(m) = \begin{cases} 0, & \text{若存在 } M \in \Lambda \text{ 使得 } \lceil m \rceil = \lceil M \rceil \text{ 且 } M \text{ 呈形 } \lambda vu.\,vuvu\cdots vu, \text{ 这里 } v,u \text{ 为变元} \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$$

(5) $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{若存在 } M, N \in \Lambda \text{ 使得 } \lceil m \rceil = \lceil M \rceil, & \lceil n \rceil = \lceil N \rceil, & \text{且 } M \neq_{\beta} N \\ 2, & \text{否则} \end{cases}$$

- (6) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为 $f(n) = \left| (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n \right|$,这里 [x] 为对 x 向下取整。
- (7) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{若存在 Turing } \text{机 } M \text{ 使得 } n = \sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机} \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$$

- (9) Gödel 的 β -函数。
- (10) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为 $f(n) = \lfloor a_n \rfloor$, 这里 $\lfloor x \rfloor$ 为对 x 向下取整, $\{a_n\}$ 为单调 递减数列且 $\lim_{n \to \infty} a_n = \pi$ 。

对于上述各函数,判定其所属函数类,选择 A、B、C、D、E之一,填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

- 三. (10 分) 设 $K, S \subseteq \mathbb{N}$ 是可判定的 (decidable),证明
 - N S 是可判定的;
 - (2) *K*∩*S* 是可判定的;
 - (3) $\mathcal{K} \cup \mathcal{S}$ 是可判定的。

- 四. (10 分) 设数论函数 $f(n) = \lfloor (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{2n} \rfloor$,
 - (1) 计算 f(3) 的值;
 - (2) 证明 f(n) 为初等函数.

五. (10 分) 若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star)$$
 $\mathbf{I} = \mathbf{S}$

作为额外公理,则对任何的 $M,N\in\Lambda$, $\lambda\beta+(\star)$ \vdash M=N。

六. $(10 \, \text{分})$ 构造机器计算函数 $f(x) = x^4$; (注:构造时可利用已有机器)

七. (10分)

Let f(n) be the n-th digit in the decimal expansion of the real number e. For example, suppose that $e=a_0.a_1a_2a_3\cdots$, then $f(0)=a_0,\,f(1)=a_1,\,f(2)=a_2,\,\cdots$. Prove that function f is Turing-computable. Furthermore, prove that it is elementary.

令 f(n) 为实数 e 的十进制展开式中的第 n 位数字。例如,假设 $e=a_0.a_1a_2a_3\cdots$,那么 $f(0)=a_0$, $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, \cdots 。证明函数 f 是 Turing 可计算的。进而,证明 f 是初等函数。