第五次习题课讲义

中国科学技术大学

2025 春　杨金榜

陈鉴 & 申长硕 & 武熙川

本次习题课助教：申长硕

第十七次作业答案

时间：4/22 第九周/周二

5.39 求下列齐次线性方程组的基础解系与通解

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

对基础解系的定义是：**线性方程组解空间的一组基**

将上述方程组对应的增广矩阵化简为行阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -11 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 14 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程 rank 为 2，故而方程组解的维数为 $4-2=2$，引入两个自由变量 $x_3 = s, x_4 = t$ 可有：

$$x = s\begin{pmatrix} -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.45 V 是数域 F 上 n 阶对称方阵的全体，定义加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘。证明：V 是线性空间，并求 V 的一组基及维数。

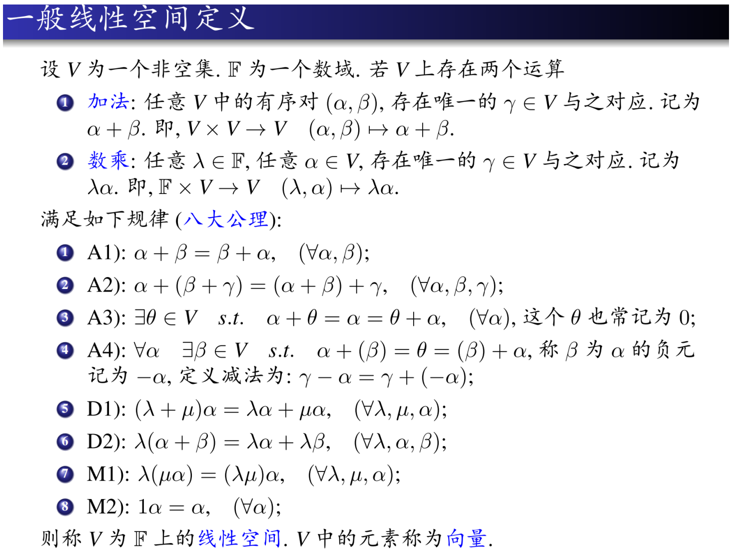


图 1: 线性空间定义

这里 2、5、6、7、8 直接由这个集合是 $\mathbb{F}^n$ 的子集而被赋予、我们主要验证**封闭性**、**零元和逆元存在**

(a) 封闭性：已有 $\forall A_1, A_2 \in V$，满足 $A_1 - A_1^\top, A_2 = A_2^\top$ 故而 $(A_1+A_2)^\top = A_1^\top + A_2^\top = A_1 + A_2$ 得 $A_1 + A_2 \in V$，对加法封闭；同时 $(cA_1)^\top = cA_1^\top = cA_1$ 得 $cA_1 \in V$，对数乘封闭

(b) 零元：$O^\top = O$ 故而有零元

(c) 逆元：$\forall A \in V, (-A)^\top = -A^\top = -A$，故而 $-A \in V$

考虑对称矩阵的约束：$a_{ij} = a_{ji}$，故而起自由度为 $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$，对应对角线和上三角部分的元素（下三角部分与上三角相同）

5.46 给定矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵的全体。证明：V 在矩阵加法与数乘下构成实数域上的线性空间，并求 V 的一组基与维数。

同 $T45$，这里我们依然考虑封闭性、零元、负元存在性：

(a) 封闭性：

$$\forall B_1, B_2 \in V : AB_1 = B_1A, AB_2 = B_2 \tag{1}$$

$$AA(B_1+B_2) = AB_1 + AB_2 = B_1A + B_2A = (B_1+B_2)A \tag{2}$$

故而对加法封闭；又

$$A(cB_1) = c(AB_1) = cB_1A$$

故而对数乘封闭

(b) 零元存在：$AO = O = OA$

(c) 负元存在，将数乘封闭性中的数换成-1 即可验证

下面根据 $AB = BA$，我们有：

$$AB = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 4b_{11} - 2b_{21} + b_{31} & 4b_{12} - 2b_{22} + b_{32} & 4b_{13} - 2b_{23} + b_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= BA = \begin{pmatrix} b_{12} + 4b_{13} & -2b_{13} & b_{11} + b_{13} \\ b_{22} + 4b_{23} & -2b_{23} & b_{21} + b_{23} \\ b_{32} + 4b_{33} & -2b_{33} & b_{31} + b_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

对比两式对应位置元素，我们可以得到：

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{32} + b_{33} & 2b_{32} + b_{31} & -\frac{1}{2}b_{32} \\ \frac{1}{2}b_{32} + \frac{1}{2}b_{31} & \frac{9}{2}b_{32} + b_{33} + 2b_{31} & -b_{32} - \frac{1}{2}b_{31} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= b_{31}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b_{32}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b_{33}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

5.47 $V = F^{n\times n}$ 是数域 F 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间，令 W 是数域 F 上所有满足 $\mathrm{Tr}(A) = 0$ 的 n 阶矩阵的全体。证明：W 是 V 的线性子空间，并求 W 的一组基与维数。

同上，我们来验证封闭性、零元存在和逆元存在性：

(a) 封闭性：由 Trace 对矩阵加法和数乘满足线性性质，不难验证 W 满足封闭性

(b) 零元存在：$Tr(O) = 0$

(c) 逆元存在：在数乘封闭性中取常数为 -1

再考虑约束，Trace=0 只在对角线上引入一个约束，使其自由度减 1，其余位置无影响，故而 W 的维度为 $n^2 - 1$，我们可以将其基写作：

$$\{E_{ij}(\forall i, j \in [n], i \neq j), E_{ii} - E_{nn}(\forall i \in [n-1])\}$$

5.49 证明：有限维线性空间的任何子空间都有补空间。

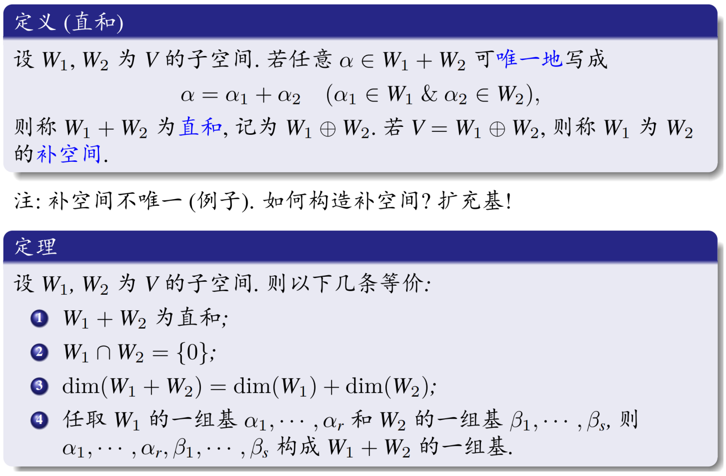


图 2: 直和与补空间定义

设 V 是有限维线性空间，其维数为 $\dim(V) = n$，U 是 V 的一个子空间，其维数为 $\dim(U) = k$。我们需要证明存在 V 的一个子空间 W，使得：

$$V = U \oplus W,$$

即 V 中的任意向量 $v \in V$ 可以唯一分解为 $v = u + w$，其中 $u \in U$ 且 $w \in W$。

设 U 的一组基为：$\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ 由于 $U \subseteq V$，可以将 U 的基扩展为 V 的一组基。设扩展后的基为：$\{u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}\}$

定义 W 为由 $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}\}$ 张成的子空间：$W = \mathrm{span}\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}\}$ 显然，$\dim(W) = n - k$，且 W 是 V 的一个子空间。

之后我们来验证 $V = U \oplus W$：

(a) $V = U + W$ 由于 $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}\}$ 是 V 的一组基，V 中任意向量 $v \in V$ 都可以表示为：

$$v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k + d_1w_1 + d_2w_2 + \cdots + d_{n-k}w_{n-k},$$

其中 $c_i, d_j \in \mathbb{F}$（数域）。令 $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k \in U$，$w = d_1w_1 + d_2w_2 + \cdots + d_{n-k}w_{n-k} \in W$，则显然有：

$$v = u + w, \quad u \in U, w \in W.$$

因此 $V = U + W$。

(b) $U \cap W = \{0\}$: 假设 $x \in U \cap W$，则 $x \in U$ 且 $x \in W$。根据 U 和 W 的基的定义，x 可以唯一表示为：

$$x = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k \quad (\text{因} x \in U),$$

同时：

$$x = d_1w_1 + d_2w_2 + \cdots + d_{n-k}w_{n-k} \quad (\text{因} x \in W).$$

由于 $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}\}$ 是 V 的一组线性无关基，上述两个表示式同时成立的唯一可能是：

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0, \quad d_1 = d_2 = \cdots = d_{n-k} = 0.$$

因此 $x = 0$，即 $U \cap W = \{0\}$。

5.50 令 $F_n[x]$ 是数域 F 上次数不超过 n 的多项式全体接多项式的加法与数乘构成的线性空间，W_1 是 $F_n[x]$ 的偶多项式（满足 $f(-x) = f(x)$）全体，W_2 是 $F_n[x]$ 奇多项式（满足 $f(-x) = -f(x)$）全体。证明：W_1, W_2 是 $F_n[x]$ 的子空间，且 $F_n[x] = W_1 \oplus W_2$。

这里我们需要证明两个命题，一个是 W_1, W_2 是 $F_n[x]$ 的子空间，一个是互为补空间

(a) W_1 是子空间：零多项式 $f(x) = 0$ 满足 $f(-x) = f(x)$，因此 $0 \in W_1$。若 $f(x), g(x) \in W_1$，则 $f(-x) = f(x)$ 且 $g(-x) = g(x)$。对于任意 $c_1, c_2 \in F$，有：

$$(c_1f + c_2g)(-x) = c_1f(-x) + c_2g(-x) = c_1f(x) + c_2g(x) = (c_1f + c_2g)(x).$$

因此 $c_1f + c_2g \in W_1$。所以 W_1 是 $F_n[x]$ 的子空间。

(b) W_2 是子空间：零多项式 $f(x) = 0$ 满足 $f(-x) = -f(x)$，因此 $0 \in W_2$。若 $f(x), g(x) \in W_2$，则 $f(-x) = -f(x)$ 且 $g(-x) = -g(x)$。对于任意 $c_1, c_2 \in F$，有：

$$(c_1f + c_2g)(-x) = c_1f(-x) + c_2g(-x) = -c_1f(x) - c_2g(x) = -(c_1f + c_2g)(x).$$

因此 $c_1f + c_2g \in W_2$。所以 W_2 是 $F_n[x]$ 的子空间。

(c) $F_n[x] = W_1 + W_2$ 任意多项式 $f(x) \in F_n[x]$ 都可以唯一表示为偶多项式部分和奇多项式部分的和：

$$f(x) = f_{\text{even}}(x) + f_{\text{odd}}(x),$$

其中偶多项式部分为:

$$f_{\text{even}}(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad \text{满足}f_{\text{even}}(-x)=f_{\text{even}}(x),$$

奇多项式部分为:

$$f_{\text{odd}}(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\quad \text{满足}f_{\text{odd}}(-x)=-f_{\text{odd}}(x).$$

显然，$f_{\text{even}}(x)\in W_1$ 且 $f_{\text{odd}}(x)\in W_2$，因此 $f(x)\in W_1+W_2$，即 $F_n[x]=W_1+W_2$。

(d) $W_1\cap W_2=\{0\}$ 如果 $f(x)\in W_1\cap W_2$，则 $f(x)$ 同时满足:

$$f(-x)=f(x)\quad \text{和}\quad f(-x)=-f(x).$$

由此得到 $f(x)=0$。因此 $W_1\cap W_2=\{0\}$。

第十八次作业答案

时间：4/24 第九周/周四

6.1 判断下面所定义的变换 $\mathcal{A}$，哪些是线性的，哪些不是线性的

(a) 在 $\mathbb{R}^2$ 中，$\mathcal{A}(x,y)^T = (x+y, x^2)^T$；

取 $a = (1,1)^T, b = (1,1)^T$，则 $\mathcal{A}(a+b) = (2,4)^T \neq \mathcal{A}a + \mathcal{A}b = (2,2)^T$，故不是线性变换

(b) 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$\mathcal{A}(x,y,z)^T = (3x-2y+z, 0, x+2y)^T$；

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

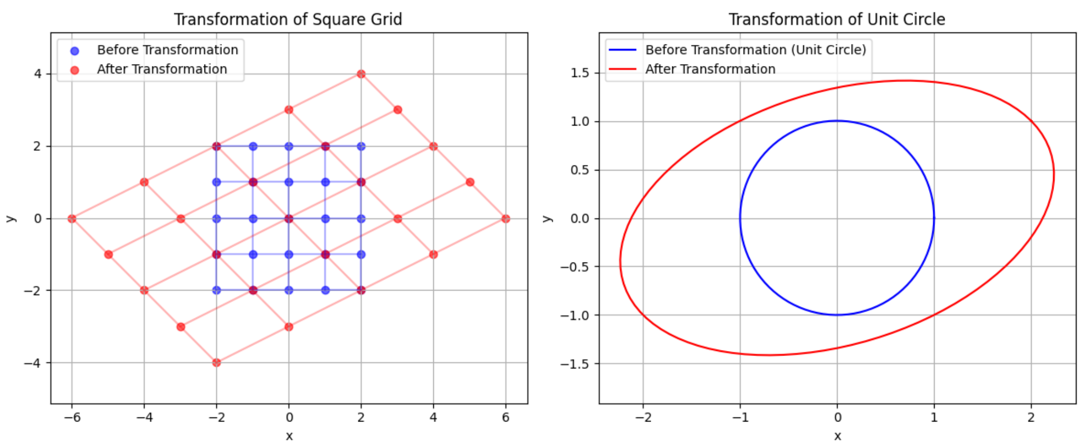
该变换可以直接写作矩阵形式，自然为线性变换

(c) 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$\mathcal{A}(x,y,z)^T = (x-y, z, x+1)^T$。

取 $a = (0,0,0)^T, b = (0,0,0)^T$，则 $(A)(a+b) = (0,0,1)^T \neq (0,0,2)^T = (A)a + (A)b$ 故而不是线性变换

6.2 给定 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathcal{A}(x,y)^T = (2x-y, x+y)^T$。绘制图形，观察 $\mathcal{A}$ 将四边形网格变成什么图形？将单位圆变为什么图形？

$$\mathcal{A}(x,y)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



6.7 在三维几何空间的直角坐标系中，求关于直线 $z = 2y = 3x$ 的对称变换。

这个直线可以表示为 $\vec{v}=t(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7})^T$，关于直线的对称变换，我们可以将其分解为在直线方向上不变和在该直线法平面上投影取反：

$$proj_u(P)=(\vec{u}\cdot P)\vec{u}=(\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z)(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7})^T \tag{7}$$

$$proj_\perp(P)=P-proj_u(P) \tag{8}$$

变换结果：

$$P'=proj_u(P)-proj_\perp(P)=2proj_u(P)-P=2u^\top Pu-IP=(2uu^T-I)P$$

这个变换为：

$$2\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\ \frac{3}{7}\\ \frac{6}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7}\end{pmatrix}-I=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-41 & 12 & 24\\ 12 & -31 & 36\\ 24 & 36 & 23\end{pmatrix}$$

6.8 在三维几何空间的直角坐标系中，求绕单位向量 $\mathbf{e}=(1,-1,1)^T$ 逆时针旋转 $30°$ 角的变换。

首先归一化旋转轴：

$$\|\mathbf{e}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3},\quad \mathbf{u}=\frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

旋转角度 $\theta=30°=\frac{\pi}{6}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$。

根据罗德里格斯旋转公式，绕单位向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 旋转 θ 的矩阵为：

$$R=I+\sin\theta K+(1-\cos\theta)K^2,$$

其中 $K=\begin{pmatrix}0 & -u_3 & u_2\\ u_3 & 0 & -u_1\\ -u_2 & u_1 & 0\end{pmatrix}$。

代入 $\mathbf{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$：

$$K=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}.$$

计算 K^2:

$$K^2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

代入公式:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

合并后:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{3}+1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{3}+1}{3} \end{pmatrix}.$$

Rmk: 记原坐标为 X，新坐标为 X'，即求旋转矩阵 R 满足 $X' = RX$。关于旋转矩阵，我们可以通过罗德里格斯旋转公式（Rodrigues' Rotation Formula）来计算. 引理：将单位向量 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 视为旋转轴，则绕 u 逆时针旋转 θ 角的旋转矩阵为 $R = I + \sin\theta K + (1-\cos\theta)K^2$，其中 $K = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$

6.9 求 $\mathbb{R}^3$ 中如下线性变换 $\mathcal{A}$：$\mathcal{A}$ 沿方向 $(1,1,0)$ 拉伸 2 倍，沿方向 $(1,-1,1)$ 压缩 2 倍，沿方向 $(1,-1,-2)$ 拉伸 3 倍。

设基向量为 $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,-2)$。验证线性无关性（直接行化简即可得到）：因此 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性无关，构成 $\mathbb{R}^3$ 的基。

变换 $\mathcal{A}$ 定义为:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1, \quad \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2, \quad \mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = 3\mathbf{v}_3.$$

在基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 下，$\mathcal{A}$ 的矩阵为:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

基变换矩阵 $P=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}$。标准基下矩阵为：

$$A=PDP^{-1}.$$

计算 P^{-1}：

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

计算 A:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{5}{6}\\\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&\frac{5}{6}\\-\frac{5}{6}&\frac{5}{6}&\frac{13}{6}\end{pmatrix}.$$

带入检验，可视化：

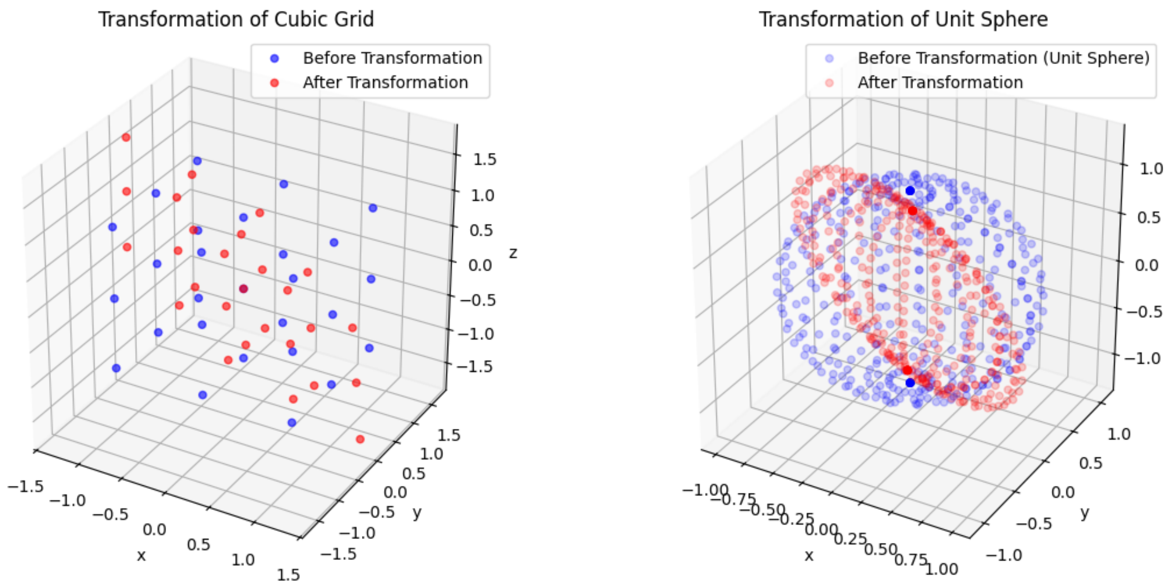


图 3: 线性变换 6.9

6.11 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}(x,y,z)^T=(2x+y-z,x+2y+z,4x+5y+z)^T$。求 $\mathcal{A}$ 的像空间与核空间的维数及一组基。

线性变换 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示为：

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\4&5&1\end{pmatrix}.$$

像空间为 A 的列空间。行简化 A:

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-3\\0&-3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

秩为 2, 故像空间维数为 $\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}))=2$。主元列为第 1、2 列, 因此 A 的列 $\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ 构成像空间的一组基。

核空间为 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解空间。从简化矩阵解方程:

$$\begin{cases}x-z=0,\\y+z=0.\end{cases}$$

设 $z=t$，则 $x=t, y=-t$，解为:

$$\mathbf{x}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

核空间维数为 $\dim(\ker(\mathcal{A}))=1$，一组基为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

6.35 判断下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是线性的。

(a) 取定 $A,B\in M_n(F)$，对每个 $\mathbf{x}\in M_n(F)$，$\mathcal{A}(\mathbf{x})=A\mathbf{x}-\mathbf{x}B$；是线性变换

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2)&=A(c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2)-(c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2)B &(9)\\&=c_1A\mathbf{x}_1+c_2A\mathbf{x}_2-c_1\mathbf{x}_1B-c_2\mathbf{x}_2B &(10)\\&=c_1(A\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1B)+c_2(A\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_2B) &(11)\\&=c_1\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+c_2\mathcal{A}(\mathbf{x}_2). &(12)\end{aligned}$$

(b) 在线性空间 V 中，$\mathcal{A}(\mathbf{x})=\alpha$，其中 α 为 V 中的一个固定的向量。

非线性变换

$$\mathcal{A}(c\mathbf{x}) = \alpha \neq c\alpha = c\mathcal{A}(\mathbf{x}) \quad (\text{除非}\alpha = 0 \text{ 或}c = 1).$$

6.37 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换

$$\mathcal{A}(x, y, z)^T = (x + 2y, x - 3z, 2y - z)^T.$$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ 下的矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

第十九次作业答案

时间：4/29 第十周/周二

6.36 求下列线性变换在指定基下的矩阵

- 在 $F_n[\lambda]$ 中，$\mathscr{P}(x) = P'(x)$，在基 $e_0 = 1, e_1 = x, \cdots, e_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 下；
  已知 $e_i' = e_{i-1}$ 故而这个变换可以直接写作：

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 以四个线性无关的函数

$$\alpha_1 = e^{ax}\cos bx \qquad \alpha_2 = e^{ax}\sin bx$$
$$\alpha_3 = xe^{ax}\cos bx \qquad \alpha_4 = xe^{ax}\sin bx$$

  为基的四维空间中，线性变换为微分变换；
  四个基分别求微分：
  最终得变换矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

- 给定 2 阶实矩阵 A，求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(x) = Ax - xA$ 在基

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  下的矩阵；
  取 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 则有

$$A(e_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

从而 A 的第一列为:

$$A_1 = (0, -b, c, 0)^T$$

同理可得其他列。最终有:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

6.37 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}(x, y, z)^T = (x + 2y, x - 3z, 2y - z)^T.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$ 下的矩阵;

可直接得到结果为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

6.38 设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 的

$$\alpha_1 = (0, 0, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$$

变换到

$$\beta_1 = (2, 3, 5)^T, \quad \beta_2 = (1, 0, 0)^T, \quad \beta_3 = (0, 1, -1)^T.$$

求 $\mathscr{A}$ 在自然基和 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵;

该变换满足:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

于是有:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

此为该线性变换在自然基下的坐标、对应的其在 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下的矩阵为:

$$A_\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} A_e (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.41 给定两组基：

$$\alpha_1=(1,0,1)^T,\quad \alpha_2=(2,1,0)^T,\quad \alpha_3=(1,1,1)^T$$
$$\beta_1=(2,3,1)^T,\quad \beta_2=(7,9,5)^T,\quad \beta_3=(3,4,3)^T.$$

求 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 下的矩阵；

先看这个变换在自然基下的矩阵为 A_e，有：

$$A_e(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

从而有：

$$A_e=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$$

进而，在另外两组基下的坐标为：

$$A_\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}A_e(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$A_\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{-1}A_e(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

最终，两组基下这个变换的矩阵均为：

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -3 & -1\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ \frac{5}{2} & 8 & 4\end{pmatrix}$$

6.42 设 V 为 n 维线性空间，$\mathscr{A}:V\to V$ 为线性变换，若存在 $\alpha\in V$，使得 $\mathscr{A}^{n-1}\alpha\neq 0$，但是 $\mathscr{A}^n(\alpha)=0$，证明：$\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

取基底 $(\alpha,A(\alpha),A^2(\alpha),\dots,A^{n-1}(\alpha))$，首先说明这里能做一组基，我们来说明上述各个向量线性无关，反证：若线性相关，则存在不全为零的 $c_0,c_1,\dots,c_{n-1}$，使得

$$c_0\alpha+c_1\mathscr{A}(\alpha)+\cdots+c_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}(\alpha)=0.$$

设 k 为最小的下标使得 $c_k \neq 0$，则

$$c_k\mathscr{A}^k(\alpha) + c_{k+1}\mathscr{A}^{k+1}(\alpha) + \cdots + c_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}(\alpha) = 0.$$

令 $\beta = c_k\alpha + c_{k+1}\mathscr{A}(\alpha) + \cdots + c_{n-1}\mathscr{A}^{n-1-k}(\alpha)$，则 $\mathscr{A}^k(\beta) = 0$。计算 $\mathscr{A}^{n-1}(\beta)$:

$$\mathscr{A}^{n-1}(\beta) = c_k\mathscr{A}^{n-1}(\alpha) + c_{k+1}\mathscr{A}^n(\alpha) + \cdots = c_k\mathscr{A}^{n-1}(\alpha),$$

因为 $\mathscr{A}^n(\alpha) = 0$。又 $\mathscr{A}^{n-1}(\beta) = \mathscr{A}^{n-1-k}(\mathscr{A}^k(\beta)) = 0$，所以 $c_k\mathscr{A}^{n-1}(\alpha) = 0$。由 $\mathscr{A}^{n-1}(\alpha) \neq 0$，得 $c_k = 0$，矛盾。因此，$(\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \ldots, \mathscr{A}^{n-1}(\alpha))$ 线性无关，构成基。

在这组基下，该线性变换可写作矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

期中考试

判断

2.1 对任意 $m \times n$ 矩阵 A，总存在 $n \times m$ 矩阵 B，满足 $ABA = A$。

$\operatorname{rank}(A) = r$，则存在可逆矩阵 P, Q，使得 $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$。取 $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ 即可。

2.2 考虑两个 $m \times n$ 矩阵 A 和 B，若 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 B 的列向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价，则 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$。

考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，此时 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价，而 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 2, \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 3$。

2.3 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则向量组 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 8\alpha_3, -\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3, 3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 7\alpha_3$ 也线性无关。

$\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 8\alpha_3, \beta_2 = -\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3, \beta_3 = 3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 7\alpha_3$。

则 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T$。

由 $|T| = 0$，可知 $\operatorname{rank}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \operatorname{rank}(T) < 3$，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关。

2.4 已知 A 为 m 阶非零实矩阵，满足 $A^* = -A^T$，则 $|A| = 1$。

由 $A^* = A^T$ 得 $A^TA = A^*A = |A|I_n$，零点两边同时求行列式，得 $|A| = 0$ 或 $|A| > 0$。

观察矩阵 A^TA 为主对角线上的元素，可知 $|A| \neq 0$。

若 $|A| = 0$，则 $\operatorname{rank}(A) \leq 3$。

当 $\operatorname{rank}(A) < 3$ 时，$A^* = 0, \because A^T = A^* = 0$，这与已知条件 $A \neq 0$ 矛盾。

当 $\operatorname{rank}(A) = 3$ 时，$\operatorname{rank}(A^*) = 1$，而 $\operatorname{rank}(A^T) = 3$，与已知条件 $A^* = -A^T$ 矛盾，$\because |A| \neq 0$。

大题

3 考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=3 \\ x_1+ax_2-2x_3=2 \\ 2x_1+5x_2+ax_3=5 \end{cases}$

(1) 问 a 为何值时，该方程组无解？有唯一解？有无穷多解？

(2) 在有解的情况下，给出方程组的通解。

解：记 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$，计算 $|A|=(a-3)(3-9)$，

Case 1：当 $a\neq 3$ 时，$a\neq 9$ 时，方程组有唯一解，

利用 Cramer 法则：可求得唯一解 $\begin{pmatrix} \frac{3a-20}{a-9} & \frac{1}{9-a} & \frac{1}{9-a} \end{pmatrix}^T$，

Case 2：当 $a=3$ 时，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 初等行变换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

方程组有无穷多解，通解为 $\begin{pmatrix} 5-19t \\ -1+7t \\ t \end{pmatrix}$，$(t\in\mathbb{R})$

Case 3：当 $a=9$ 时，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 初等行变换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，方程组无解，

4 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & 1+x_1^4 \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & 1+x_2^4 \\ 1+x_3 & 1+x_3^2 & 1+x_3^3 & 1+x_3^4 \\ 1+x_4 & 1+x_4^2 & 1+x_4^3 & 1+x_4^4 \end{vmatrix}$

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & 1+x_1^4 \\ 0 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & 1+x_2^4 \\ 0 & 1+x_3 & 1+x_3^2 & 1+x_3^3 & 1+x_3^4 \\ 0 & 1+x_4 & 1+x_4^2 & 1+x_4^3 & 1+x_4^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ -1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ -1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ -1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 0 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 0 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 0 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix} = D_1 - D_2$$

对 D_1 和 D_2 分别使用 Vander Monde 行列式的结论，可得

$D_1 = 2x_1x_2x_3x_4 \prod_{1\le i<j\le 4}(x_j - x_i)$

$D_2 = (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1) \prod_{1\le i<j\le 4}(x_j - x_i)$

$\therefore D = [2x_1x_2x_3x_4 - (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1)] \prod_{1\le i<j\le 4}(x_j - x_i)$

5 考虑矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

(1) 求 $\operatorname{rank}(A)$，写出 A 的列向量组的一个极大线性无关组。

(2) 记 $V = \{X \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid AX = 0\}$，证明 V 是 $\mathbb{R}^{4\times 4}$ 的一个子空间。

(3) 求 $\dim V$，写出 V 的一组基。

计算可得 $\operatorname{rank}(A) = 2$。所以任取 A 的两列都是它的列向量组的一个极大线性无关组。

解空间 V 是 $\mathbb{R}^{4\times 4}$ 的一个子空间。

(2) 证明需要说明三点：V 非空；V 对加法运算封闭；V 对数乘运算封闭

(3) 注意到以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间 V_A 有一组基

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

记 $X = (\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4)$，则 $X \in V \iff \gamma_i \in V_A \iff \gamma_i = t_1\xi_1 + t_2\xi_2$

$\cdots(\xi_1\ 0\ 0\ 0), (\xi_2\ 0\ 0\ 0), (0\ \xi_1\ 0\ 0), (0\ \xi_2\ 0\ 0), (0\ 0\ \xi_1\ 0), (0\ 0\ \xi_2\ 0), (0\ 0\ 0\ \xi_1), (0\ 0\ 0\ \xi_2)$ 是 V 的一组基，

$\dim V = 8$

6 考虑 n 阶实矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中 $n \ge 2$。

(1) 证明：若对每个 $1 \le i \le n$ 都有 $2|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$，则 $\det(A) \ne 0$。

(2) 证明：若对每个 $1 \le i \le n$ 都有 $2a_{ii} > \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$，则 $\det(A) > 0$。

(1) (反证) 假设 $\det(A)=0$，考虑 A 的列向量分块 $A=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，

则 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性相关。从而存在全不全为 0 的 $k_1,\cdots,k_n$，使得 $k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=0$。

不妨设 $|k_1|,\cdots,|k_n|$ 中最大者为 $|k_t|$，其中 $1\le t\le n$。由不全为 0，有 $|k_t|\neq 0$。

考虑列向量 $\sum k_j\beta_j=0$ 中的第 t 个分量，得到 $\sum_{j=1}^n k_ja_{tj}=0$，

从而 $a_{tt}=-\sum_{j\neq t}\frac{k_j}{k_t}a_{tj}$，于是，

$|a_{tt}|=\left|\sum_{j\neq t}\frac{k_j}{k_t}a_{tj}\right|\le\sum_{j\neq t}\left|\frac{k_j}{k_t}a_{tj}\right|\le\sum_{j\neq t}|a_{tj}|$。

证明，$2|a_{tt}|\le\sum_{j=1}^n|a_{tj}|$。与条件矛盾。

因此，$\det(A)\neq 0$ 得证。

(2) 注意满条件 (2) 的条件，则自然满条件 (1) 的条件。由条件 (1) 的结论已知 $\det(A)\neq 0$。

(反证) 假设 $\det(A)<0$。考虑方程 $A(x)=0$ 下定义 x 序列；将 A 中非对角元素系数都换成 x，

对值被定义不变。令 $f(x)=\det(A(x))$，设其本不 x 的多项式，则 $f(0)=a_{11}\cdots a_{nn}>0$。

而由反证法假设，$f(1)=\det(A)<0$。从而，有 $x_0<1$ 使得 $f(x_0)=\det(A(x_0))=0$。

而新的方程 $A(x_0)$ 也具备题中的条件，由第 (1) 问结论应设有对应行列式非零。矛盾。

因此，$\det(A)>0$ 得证。