第二次习题课讲义

中国科学技术大学

2025 春　杨金榜

陈鉴 & 申长硕 & 武熙川

本次习题课助教：申长硕

第五次作业答案

时间：3/11 第三周/周二

4.6 举例求满足条件的 2 阶实方阵 A，若无法找到满足条件的矩阵 A，请说明理由:

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 解方程的角度:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  可得方程组:

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=1 \\ ac+dc=1 \\ bc+d^2=0 \end{cases}$$

  可以得到:

$$\begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$$

  得到 $a=b=c=d=0$
  与 $(a+d)\cdot b=1$ 矛盾，故不存在

- 线性变换的角度:
  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示矩阵 A 作用两次的结果是沿着直线 $y=x$ 翻转，但这是两次 A 作用的结果，在实数矩阵中找不到这样的 A 。因此，**此矩阵不存在**。

- 此矩阵行列式为-1 小于 0，也可以得其在实数域上无解。

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- 解方程的角度

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的方程组为：

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=1 \\ ac+dc=-1 \\ bc+d^2=0 \end{cases}$$

- 线性变换的角度

  矩阵 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个旋转矩阵，经过两次 A 变换，向量顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}+2k\pi$，将这个旋转分解为两个相同的变换，对应的是每一个顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}+k\pi$，对应的矩阵有：

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(3) $A^3=I$ 且$A\neq I$

- 线性方程组的角度

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

  再计算 A^3：

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

  计算结果为：

$$A^3=\begin{pmatrix} a(a^2+bc)+b(ac+dc) & a(ab+bd)+b(bc+d^2) \\ c(a^2+bc)+d(ac+dc) & c(ab+bd)+d(bc+d^2) \end{pmatrix}$$

  将 $A^3=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，得到以下方程组：

$$\begin{cases} a(a^2+bc)+b(ac+dc)=1 \\ a(ab+bd)+b(bc+d^2)=0 \\ c(a^2+bc)+d(ac+dc)=0 \\ c(ab+bd)+d(bc+d^2)=1 \end{cases}$$

- 线性变换的角度

  矩阵 $A^3 = I$ 是一个旋转矩阵，经过三次 A 变换，向量旋转 $2\pi + 2k\pi$（即 $360°$）。将这个旋转分解为三个相同的变换，对应的就是每次旋转 $120°$ 或 $240°$ 或 $360°$（即 $\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$ 或 2π ）。在实数域上，满足该条件的矩阵有：

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  这两个矩阵分别对应顺时针旋转 $120°$ 和 $240°$ 的旋转变换。

  于此同时，与上述三个矩阵相似的矩阵也均可满足条件

4.7 计算下列方阵的 k 次方幂，其中 k 为正整数:

(1)（没有布置，但是用来做提示）$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 使用归纳法，证明

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

首先对于 $n = 1$ 时显然成立，直接带入验证即可，假设对 $n = k$ 成立，则 $n = k + 1$ 时：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k+1\theta & \sin k+1\theta \\ -\sin k+1\theta & \cos k+1\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

归纳得证

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

这里参考上一题的思路，观察矩阵中两列向量正交且同模，我们将其转换为旋转矩阵和标量的乘积：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

这时候就需要分情况讨论了，对 $a^2 + b^2$ 是否为 0 进行讨论：

i. $a^2+b^2\neq 0$，此时就可以直接套用上面的结果，令 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，有：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

ii. $a^2+b^2=0$，此时我们需要引入复数，$b=\pm ia$，则利用归纳法可证

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n = a^n\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}^n = a^n\begin{pmatrix} 2^{n-1} & \pm 2^{n-1}i \\ \mp 2^{n-1}i & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

注：这里没有注明是实方阵，需要考虑复数情况。

(4) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}_{n\times n}$

先来看一个特殊矩阵：

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

我们可以证明：

$$J_n^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix}_{n*n} & (k<n) \\ 0_n \quad (k\geq n) \end{cases}$$

从而，原式可写作：

$$(I_n+J_n)^k = \sum_{i=0}^{k} a^{k-i} J_n^i \tbinom{k}{i}$$

得：

$$b_{ij} = \begin{cases} i \quad (i>j) \\ a^{k-j+i}\tbinom{k}{j-i} \end{cases}$$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

同上，原式可写作：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + J_3 + J_3^2$$

则

$$\begin{aligned}(I_3 + J_3 + J_3^2)^k &= \binom{k}{k} I_3 + \binom{k}{k-1}\binom{1}{1} J_3 + (\binom{k}{k-2}\binom{2}{2} + \binom{k}{k-1}\binom{1}{1}) J_3^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(6) $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$

记 $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots a_n)^T, \mathbf{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 则：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} &= (\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}(\mathbf{BA})^{k-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}(\sum_{i=1}^n a_ib_i)\mathbf{B} = (\sum_{i=1}^n a_ib_i)\mathbf{AB} \\ &= (\sum_{i=1}^n a_ib_i)\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4.9 设 A 为 n 阶实对称方阵且 $A^2 = O$，证明：$A = O$。

我们首先回顾向量模长的定义。对于任意列向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$，其模长为

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^\top \mathbf{v}}.$$

显然，向量 $\|\mathbf{v}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{v}^\top\mathbf{v} = 0$。这一点可以通过将 $\mathbf{v}$ 表示为分量形式直接验证。

回到本题。设 A 的列向量为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$，即：

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n), \quad \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n.$$

A 是对称矩阵，由题设，我们有：

$$A^2 = A^\top A = O.$$

矩阵 $A^\top A$ 的对角线元素为列向量的模长平方，因此对于每个列向量 $\mathbf{v}_i$，有：

$$\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_i = 0, \quad \text{即}\|\mathbf{v}_i\|^2 = 0.$$

由模长为零的性质可知，$\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$，即矩阵 A 的每一列均为零向量。

因此，矩阵 $A = O$。

4.14 设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 都是 n 阶可逆方阵。证明：$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$。直接套逆矩阵的定义：$AA^{-1} = A^{-1}A = I$，我们直接带入：

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= (A_1A_2\cdots A_k)(A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}) \\ &= A_1\big(A_2\big(\cdots\big(A_kA_k^{-1}\big)\cdots A_2^{-1}\big)A_1^{-1}\big)(\text{矩阵乘法满足结合律}) \\ &\vdots \\ &= I \end{aligned}$$

4.15 设方阵 A 满足 $A^k = O$，k 为正整数。证明：$I + A$ 可逆，并求 $(I + A)^{-1}$。我们需要证明存在矩阵 B，使得：

$$(I + A)B = B(I + A) = I.$$

考虑 A 的性质，由题设 $A^k = O$，

定义矩阵：

$$B = I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}.$$

我们验证 B 是 $(I + A)$ 的逆矩阵。

计算 $(I + A)B$：

$$(I + A)B = \big(I + A\big)\big(I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}\big).$$

利用分配律展开：

$$(I+A)B = I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1} + A - A^2 + A^3 - \cdots + (-1)^{k-1}A^k.$$

注意到 $A^k = O$，因此 $(-1)^{k-1}A^k = O$，并且每一项 $A, -A, A^2, -A^2, \ldots$ 都两两抵消，最终得到：

$$(I+A)B = I.$$

同理，可以验证 $B(I+A) = I$

4.16 设方阵 A 满足 $I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O$。证明：$I - A$ 可逆，并求 $(I-A)^{-1}$。

由题得：

$$\begin{aligned}
I &= 2I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 \\
&= 2I - 2A - 3A^2 + 3A^3 + A^3 - A^4 + 6A^4 - 6A^5 \\
&= (I-A)(2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4) \\
&= (2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4)(I-A).
\end{aligned}$$

从而 $I - A$ 可逆，且

$$(I-A)^{-1} = 2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4.$$

第六次作业答案

时间：3/13 第三周/周四

4.19 求所有满足 $A^2=O, B^2=I, \overline{C}^T C=I$ 的 2 阶复方阵 A,B,C。

(a) 设

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

根据 $A^2=O$，有

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

因此，$A^2=O$ 等价于：

$$\begin{cases} a^2+bc=0, \\ ab+bd=0, \\ ac+dc=0, \\ bc+d^2=0. \end{cases}$$

分类讨论 $a+d=0$ 和 $a+d\neq 0$ 的情况：

- 若 $a+d=0$，则只需满足 $a^2+bc=0$。解可表示为：

$$\begin{cases} a=t_1, \\ b=t_2, \\ c=-\frac{t_1^2}{t_2}, \\ d=-t_1, \end{cases} \qquad (t_2\neq 0),$$

或者

$$\begin{cases} a=t_1, \\ b=-\frac{t_1^2}{t_2}, \\ c=t_2, \\ d=-t_1, \end{cases} \qquad (t_2\neq 0).$$

- 若 $a+d\neq 0$，则 $b=c=0$，矛盾！因此，解如上所示。

(b) 由 $B^2 = I$ 可得:

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = I.$$

因此，$B^2 = I$ 等价于:

$$\begin{cases} a^2+bc=1, \\ ab+bd=0, \\ ac+dc=0, \\ bc+d^2=1. \end{cases}$$

分类讨论 $a+d=0$ 和 $a+d\neq 0$ 的情况:

- 若 $a+d=0$，则只需满足 $a^2+bc=1$。解可表示为:

$$\begin{cases} a=t_1, \\ b=t_2, \\ c=\frac{1-t_1^2}{t_2}, \\ d=-t_1, \end{cases} \qquad (t_2\neq 0),$$

或者

$$\begin{cases} a=t_1, \\ b=\frac{1-t_1^2}{t_2}, \\ c=t_2, \\ d=-t_1, \end{cases} \qquad (t_2\neq 0).$$

- 若 $a+d\neq 0$，则 $b=c=0$，从而 $a=\pm1, d=\pm1$。

(c) 由 $\overline{C}^T C = I$，有:

$$\overline{C}^T C = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2+|c|^2 & \overline{a}b+\overline{c}d \\ \overline{b}a+\overline{d}c & |b|^2+|d|^2 \end{pmatrix} = I.$$

因此，$\overline{C}^T C = I$ 等价于:

$$\begin{cases} |a|^2+|c|^2=1, \\ |b|^2+|d|^2=1, \\ \overline{a}b+\overline{c}d=0. \end{cases}$$

记 $a=re^{i\theta_1}, b=\sqrt{1-r^2}e^{i\theta_2}$，$c=\sqrt{1-r^2}e^{i\theta_3}, d=re^{i\theta_4}$，则由 $\overline{a}b+\overline{c}d=0$ 可

得：

$$e^{i(\theta_2-\theta_1)} = e^{i(\pi+\theta_4-\theta_3)}.$$

从而

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3 + \pi \pmod{2\pi}.$$

C 的解即为满足上述条件的复方阵。

4.20 证明：不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$。

我们先来证明矩阵迹的一个性质：$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$，即矩阵乘积的迹与乘积顺序无关。

设 $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij})$，则

$$(XY)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}, \quad (YX)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} y_{ik}x_{kj}.$$

矩阵乘积的迹为主对角线元素之和，因此

$$\operatorname{tr}(XY) = \sum_{i=1}^{n}(XY)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{ki}.$$

类似地，

$$\operatorname{tr}(YX) = \sum_{i=1}^{n}(YX)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ik}x_{ki}.$$

而标量乘法和加法顺序可交换，则：

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX).$$

回到这道题：假设存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$，则取两边的迹：

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I_n).$$

从而，有：

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = n$$

这与我们上面证明的 $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ 性质矛盾，故不成立。

4.21 证明：可逆上（下）三角、准对角、对称、反对称方阵的逆矩阵仍然分别是上（下）三角、准对角、对称、反对称的。

(a) 上（下）三角情况：仅证明上三角，下三角同理

法 1：假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为可逆上三角矩阵，$B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为 A 的逆矩阵。则由 $BA=I$ 知：

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}=\delta_{ij}.$$

取 $i=j=1$，得到 $a_{11}b_{11}=1$，从而 $a_{11}\neq 0$。

于是取 $j=1, i\geq 2$ 时可得：

$$a_{i1}b_{11}=0 \implies b_{i1}=0 \quad \forall i\geq 2.$$

取 $i=j=2$ 时可得：

$$a_{22}b_{22}=1, \quad a_{22}\neq 0.$$

取 $j=2, i\geq 3$ 时可得：

$$a_{i2}b_{22}=0 \implies b_{i2}=0 \quad \forall i\geq 3.$$

类似地，可证明对于任意 $1\leq i<j\leq n$ 有 $b_{ij}=0$。于是 B 为上三角矩阵。

法 2：利用分块加归纳法，对 A 的阶数 n 归纳。当 $n=1$ 时，显然成立。假设 $n=k$ 时成立，$n=k+1$ 时记

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & c \\ 0 & A_k \end{pmatrix}, \quad A_k\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

对 A 的逆矩阵 B 记为

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & d \\ 0 & B_k \end{pmatrix}, \quad B_k\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

由 $AB=BA=I$ 得：

$$\begin{cases} a_1b_1+cd_2=1=b_1a_1, \\ a_1d_1+cB_k=0=b_1c+dA_k, \\ A_kd_2=0=d_2A_k, \\ A_kB_k=I_k=B_kA_k. \end{cases}$$

从而得到 $A_k^{-1}=B_k$ 且 $d_2=0$。由归纳假设知 B_k 为上三角，结合 $d_2=0$ 知 B 为上三角。从而 $n=k+1$ 时结论成立，证毕。

(b) 准对角情况记 $A=\operatorname{diag}(A_1,\ldots,A_k)$ 为块对角矩阵，其中 $A_i\in\mathbb{F}^{m_i\times m_i}$。假设

每个 A_i 存在逆矩阵（即 A_i 是非奇异矩阵），则

$$\operatorname{rank}(A) = \sum_i \operatorname{rank}(A_i) \le \sum_i \min\{m_i, m_i\} = n.$$

从而与 A 可逆矛盾，于是每个 A_i 均为可逆方阵，从而

$$A^{-1} = \operatorname{diag}(A_1^{-1}, \ldots, A_k^{-1}).$$

为准对角矩阵。

(c) 对称情况假设对称矩阵 $A = A^T$，则

$$A^{-1}A = I \implies (A^{-1}A)^T = I \implies A^T(A^{-1})^T = I \implies A^{-1} = (A^{-1})^T.$$

从而 A^{-1} 也是对称矩阵。

(d) 反对称情况假设反对称矩阵 $A = -A^T$，则

$$A^{-1}A = I \implies (A^{-1}A)^T = I \implies A^T(A^{-1})^T = I.$$

由 $A = -A^T$，得

$$(-A^T)(A^{-1})^T = I \implies (A^{-1})^T = -A^{-1}.$$

从而 A^{-1} 也是反对称矩阵。

4.30 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。计算 A^n 及 A^{-1}。

这个问题是下一个问题的一个 case study。将上述 A 写作分块的形式，先有：

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_1 \end{pmatrix} \ where\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = I$$

直接根据下一题的结论，我们有：

$$A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & 0 \\ nA_1^{n-1}B & A_1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^n & 0 \\ nA_1^{n-1} & A_1^n \end{pmatrix}$$

因此，计算 A^n 时的关键是求 A_1^n。由于 A_1 是一个上三角矩阵，通过直接计算可

得：

$$A_1^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

带入得：

$$A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & 0 \\ nA_1^{n-1}A_2 & A_1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

再看逆矩阵：则其逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.31 设 A, B 为同阶方阵，且满足 $AB = BA$。计算 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n$。

利用 $AB = BA$ 和零矩阵的性质，可以得到：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{pmatrix}.$$

该结论可以通过归纳法证明：

(a) **基例**：当 $n = 1$ 时，结论显然成立；

(b) **归纳假设**：假设当 $n = k$ 时，结论成立，即：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ O & A^k \end{pmatrix}.$$

(c) **归纳推导**：当 $n=k+1$ 时，有：

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^{k} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ O & A^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}. \\
&= \begin{pmatrix} A^kA + kA^{k-1}B & A^kB + kA^{k-1}BA \\ O & A^kA \end{pmatrix}. \\
&= \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^kB + kA^{k-1}AB \\ O & A^{k+1} \end{pmatrix} (\text{由} AB=BA) \\
&= \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^kB \\ O & A^{k+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此，当 $n=k+1$ 时，结论成立。

4.32 设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^3=I_n$。计算 $\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024}$。

设

$$M = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}.$$

计算 M^2：

$$M^2 = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

由于 M^2 是对角分块矩阵，且满足：

$$M^{2k} = (M^2)^k = \begin{pmatrix} A^k & O \\ O & A^k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

于是有：

$$M^{2024} = (M^2)^{1012} = \begin{pmatrix} A^{1012} & O \\ O & A^{1012} \end{pmatrix}.$$

由于 $A^3=I_n$，可得 $A^{1012} = A^{3\times 337+1} = (A^3)^{337} \cdot A = I_n \cdot A = A$。

因此：

$$M^{2024} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}.$$

第七次作业答案

时间：3/18 第一周/周二

求行列式最基本的思路：**让矩阵中出现尽可能多的 0**

1.2 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -1\left(4\det\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= -20 \end{aligned}$$

2 将如下行列式展开为 x 的多项式：

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

我们尝试使用递归公式来解：

$$D_n = (x-2)D_{n-1} - D_{n-2}$$

其中

$$D_1 = (x-2), D_2 = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$$

进而可得:

$$
\begin{aligned}
D_3 &= (x-2)D_2 - D_1 = (x-2)((x-2)^2-1) - (x-2) = (x-2)^3 - 2(x-2) \\
D_4 &= (x-2)D_3 - D_2 = (x-2)((x-2)^3 - 2(x-2)) - ((x-2)^2-1) = \\
&= (x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16) + (-3x^2 + 12x - 12) + 1 \\
&= x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5
\end{aligned}
$$

5 证明:

$$
\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}
$$

这实际上是行列式的积公式的一个具体形式,一般来说为 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$
\begin{aligned}
LHS :&= \big(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\big)\big(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\big) - \big(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\big)\big(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\big) \\
&= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\
&\quad - \big(a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} + a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}\big) \\
&= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \\
&= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= RHS
\end{aligned}
$$

8 在平面直角系中，$A = (0,0)$，$B = (3,-1)$，$C = (2,1)$，$D = (1,1)$。求四边形 $ABCD$ 的面积。

$$
\begin{aligned}
2S &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 + 5 + 1 + 0 = 6
\end{aligned}
$$

故而面积 $S = 3$

9 在三维空间直角坐标系中，已知点 A, B, C, D 的坐标分别是 $(1,1,0)$，$(3,1,2)$，$(0,1,3)$，$(2,2,4)$。求四面体 $ABCD$ 的体积及各个面的面积。由各点坐标可得各向:

$$
\vec{AB} = (2,0,2), \vec{AC} =
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

各面面积：

$$
\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|\right| = norm\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4
$$

$$
\Delta ABD = \frac{1}{2}\left|\left|\vec{AB}\times\vec{AD}\right|\right| = norm\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \sqrt{11}
$$

$$
\Delta ACD = \frac{1}{2}\left|\left|\vec{AC}\times\vec{AD}\right|\right| = norm\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{59}}{2}
$$

$$
\Delta BCD = \frac{1}{2}\left|\left|\vec{BC}\times\vec{BD}\right|\right| = norm\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{35}}{2}
$$

10 设二阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式非零。令：

$$
x' = a_{11}x + a_{12}y, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y
$$

是坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 到坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 的变换。证明：A 将单位正方形映射为平行四边形，且平行四边形的面积为 $|\det(A)|$。

单位正方形定义为：

$$
S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1\}
$$

线性变换对应矩阵表示为:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

正方形的四个顶点:

$$(0,0)^T, \quad (1,0)^T, \quad (0,1)^T, \quad (1,1)^T$$

将其带入上述变换

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}$$

这四个点组成的图形是平行四边形，其面积为:

$$||(a_{11}, a_{21}, 0)^T \times (a_{21}, a_{22}, 0)^T|| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

注：线性变换将直线映为直线

19.1 计算下面 2n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$$

对于这一题，我们可以通过基本行/列变换将其分为 n 个 2×2 的小矩阵组成的对

角阵:

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} a_2 & & & & & b_2 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & & & & \ddots & \\ c_2 & & & & & d_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$= \vdots \tag{2}$$

$$= \Pi_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i) \tag{3}$$

第八次作业答案

时间：3/20 第一周/周四

1 计算下列行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

开始打洞，我们把第一列的 -1 倍和 4 倍分别加到第三列和第四列：

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} (\text{按第一行展开}) \\ &= -3\det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 6\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= -40 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} x & x & x \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x & x \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y & y & y \\ z & z & z \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4(b-a)(a-c)(c-b) \end{aligned}$$

3 设 A 为 n 阶矩阵，λ 为常数，证明：

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

带入行列式的定义：

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

其中 S_n 表示对 n 个元素的全排列集合

则

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \lambda a_{i,\sigma(i)} \\ &= \lambda^n \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \\ &= \lambda^n \det(A) \end{aligned}$$

7 设 a, b, c, d 为 4 维数组向量，证明：

$$\det(2a-b, -a+2b-c, -b+2c-d, -c+2d) = 5\det(a,b,c,d).$$

$$\begin{aligned}\det(2a-b, -a+2b-c, -b+2c-d, -c+2d) &= \det\left((a,b,c,d)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\right)\\ &= \det(a,b,c,d)\det\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\\ &= \vdots\\ &= 5\det(a,b,c,d)\end{aligned}$$

11 求以下排列的逆序数，并指出其奇偶性：

对于排列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，如果 a_i 后面有 $f(i)$ 个数字比 a_i 小，那么遍历 i 对 f 求和即可。

(1) $(6, 8, 1, 4, 7, 5, 3, 2, 9)$

$$\sum_i f(i) = 5+6+0+2+3+2+1+0 = 19$$

奇置换

(2) $(6, 4, 2, 1, 9, 7, 3, 5, 8)$

$$\sum_i f(i) = 5+3+1+0+4+2+0+0+0 = 15$$

奇置换

(3) $(7, 5, 2, 3, 9, 8, 1, 6, 4)$

$$\sum_i f(i) = 6+4+1+1+1+4+3+0+1+0 = 20$$

偶置换

15 写出四阶行列式的完全展开式。

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{4} a_{i,\sigma(i)}$$

其中 S_4 表示 4 个元素的全排列，σ 表示该排列下的逆序数，具体为：

$$\begin{aligned} \det(A) = &+ a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \\ &+ a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ &- a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\ &+ a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\ &- a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{aligned}$$

第二次习题课拓展内容

注：以下部分题目取自往年题，选取过程中参考了杨老师班 23 年线性代数 (B1) 助教们（陈鉴、苏煜庭、夏小凡助教）的习题课讲义，特此鸣谢！

1. 线性相关和线性无关：线性相关的直观理解就是向量组的某些向量可以写成其他向量的线性组合。相关的题一半都是直接套定义，进而得到一个线性方程组并用高斯消元法求解。

2. 复数和数域：复数的正常表示 (a+bi) 比较方便进行加减运算，而复数的三角表示 $z = re^{i\theta}$ 则会对乘除运算带来巨大的简便。

   - 计算 $z^4 = -16, z \in \mathbb{C}$ 这里使用复数的三角表示，将问题转化为解决：

   $$r^4 = 16$$
   $$4\theta = \pi + 2k\pi$$

   最后的解记得控制 $\theta \in [0, 2\pi], r > 0$，最终得到这题的解为：

   $$z = 2e^{i\theta}, \theta \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]$$

   - 现在已知 $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$，请尝试借助这个式子计算 $\sum_{k=1}^{n}\sin(kt)$、$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$、$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)dx$
   这里就开始展示复数这种表示方法的好处了，我们直接考虑：

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = \sum_{k+1}^{n}(\cos(kt) + i\sin(kt)) &= \frac{e^{it} - e^{it(n+1)}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)t/2}(e^{-int/2} - e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} \\ &= \frac{e^{i(n+1)t/2}\sin(nt/2)}{sin(t/2)}\end{aligned}$$

   这之后再分实部和虚部就可以了，注意这里利用了 $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
   而对于上面的积分，常用方式是使用分部积分，同时考虑 $\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)dx$，我们这里直接借助复数：

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ax}e^{ibx}dx &= \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)dx + i\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)dx \\
&= \frac{e^{(ib-a)x}}{ib-1}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{1}{ib-a} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

- 很多时候会给出**实矩阵**这样的关键词，若无，请多考虑复数域上相应问题。同时，复数的模是 $z\bar{z}$ 而不是 z^2

3. B,C,D 均为 n 阶方阵，其中 B,C 均可逆，求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的逆

设逆矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$，由逆矩阵定义，我们有：

$$
\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}
$$

从而有：

$$
\begin{cases}
BA_2 = I_n \\
BA_4 = 0 \\
CA_1 + DA_2 = 0 \\
CA_3 + DA_4 = I_n
\end{cases}
$$

前两式先得 $A_2 = B^{-1}, A_4 = 0$，代入后式得到 $A_1 = -C^{-1}DB^{-1}, A_3 = C^{-1}$，从而可得逆矩阵为：

$$
\begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & B^{-1} \\ C^{-1} & 0 \end{pmatrix}
$$

4. 已知实矩阵 A 满足 $A(A+A^T) = 0$，证明 $A + A^T = 0$（考虑 Trace 的性质）

$$
Tr((A+A^T)(A+A^T)^T) = Tr(AA^T) + Tr(AA) + Tr(A^TA^T) + Tr(A^TA)
$$

其中

$$
Tr(AA + AA^T) = Tr(A(A+A^T)) = 0
$$

再结合 $Tr(B) = Tr(B^T), Tr(BC) = Tr(CB)$ 可得：

$$Tr(A^TA^T) + Tr(A^TA) = Tr(AA + AA^T) = 0$$

所以

$$Tr((A + A^T)(A + A^T)^T) = 0 \Rightarrow A = 0$$

5. 尝试对行列式加边，比如将求解 A 的行列式转化为求解 $\begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 的行列是，其中 $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ 可以任取进而引入新的辅助：

- 求矩阵 A 的行列式，其中 A 满足 $(a \neq 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

按照上面的思路，我们有：

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & a \\ 0 & 1 & a & a & a \\ 0 & a & 1 & a & a \\ 0 & a & a & 1 & a \\ 0 & a & a & a & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & a \\ -1 & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1+\frac{4a}{1-a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \\
&= (1+3a)(1-a)^3
\end{aligned}$$

- （2015 春 T4）求矩阵 A 的行列式和逆，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$$

（这个和上题思路相似，可以先自己思考一下）

我们依然加边来处理：

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

又是三对角，类似上一问我们可以将后面每列的 $\frac{1}{i+1}$ 加到第一列，最终得：

$$\det(A) = (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})n!$$

这一题还可以转换为全 1 矩阵和一个对角阵的和，

- (某年考试压轴)已知 $rank(A) = 1, c = tr(A)$,证明 $A^2 = cA$,并计算 $\det(I+A)$

由 $rank(A) = 1$ 我们可以将 A 写作如下形式：

$$A = ab^T$$

从而有：

$$A^2 = ab^T ab^T = cab^T, c = b^T a \in F$$

以及：

$$
\begin{aligned}
\det(I+A) &= \det\begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ 0 & a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&= 1+b^Ta
\end{aligned}
$$

- （某年 T4）矩阵 A 的对角元和对角元上方元素全是 1, 对角线下方元素全是-1, 求其行列式和逆（不用加边，倒像是加边的后续操作?）

  这题直接将第一行加到后面每一行中，得到

$$
\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1}
$$

  当然，这一个我们还可以再从下面左初等变换得到单位阵（写增广矩阵一同做行变换比较容易求得这个矩阵的逆元）