第二十四次作业答案

时间：5/27 第十四周/周二

7.1 已知 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$, $\alpha_2=(2,3,1,-1)$, $\alpha_3=(-1,-1,-2,2)$.

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的长度及彼此间的夹角.

$$
\begin{aligned}
|\alpha_1| &= \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+4+1+1} = \sqrt{7} \\
|\alpha_2| &= \sqrt{2^2+3^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{4+9+1+1} = \sqrt{15} \\
|\alpha_3| &= \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{1+1+4+4} = \sqrt{10} \\
(\alpha_1,\alpha_2) &= 1\cdot 2+2\cdot 3+(-1)\cdot 1+1\cdot(-1) = 2+6-1-1 = 6 \\
(\alpha_1,\alpha_3) &= 1\cdot(-1)+2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+1\cdot 2 = -1-2+2+2 = 1 \\
(\alpha_2,\alpha_3) &= 2\cdot(-1)+3\cdot(-1)+1\cdot(-2)+(-1)\cdot 2 = -2-3-2-2 = -9
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_{12} &= \frac{6}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{15}} = \frac{6}{\sqrt{105}} \\
\cos\theta_{13} &= \frac{1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{70}} \\
\cos\theta_{23} &= \frac{-9}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}} = \frac{-9}{5\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

(2) 求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的向量.

这个问题转化为解线性方程组：

$$
\begin{cases}
x+2y-z+w=0 \\
2x+3y+z-w=0 \\
-x-y-2z+2w=0
\end{cases}
$$

最终可取 $\alpha_4=(5,-3,0,1)$

7.2 设 x,y,z 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量, 证明以下不等式:

(1) $|x-y| \geq |x|-|y|$;

$$\begin{aligned}LHS^2 &= |x-y|^2 = (x-y,x-y) = |x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 \\ RHS^2 &= (|x|-|y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式 $|(x,y)| \leq |x||y|$ 我们有

$$|x-y|^2 \geq (|x|-|y|)^2$$

再 LHS 非负，故原不等式成立

(2) $|x-y|+|y-z| \geq |x-z|$.

$$RHS = |(x-y)+(y-z)|$$

其余流程和上面一样，或者直接借助向量的“三角不等式”也可直接说明

7.3 设 x, y 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个向量, 它们之间的夹角为 θ. 证明:

(1) (余弦定理) $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta$.

$$|x-y|^2 = (x-y,x-y) = |x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\theta$$

(2) (平行四边形定理) $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

$$\begin{aligned}|x+y|^2 + |x-y|^2 &= (x+y,x+y) + (x-y,x-y) \\ &= |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 + |x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 \\ &= 2|x|^2 + 2|y|^2\end{aligned}$$

(2) (菱形对角线定理) 若 $|x| = |y|$, $\quad (x+y) \perp (x-y)$.

$$\begin{aligned}(x+y,x-y) &= (x,x) - (x,y) + (y,x) - (y,y) \\ &= |x|^2 - (x,y) + (y,x) - |y|^2 \\ &= |x|^2 - |y|^2 = 0\end{aligned}$$

7.4 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$a \in \mathbb{R}^n$. 证明：$a = 0$ 当且仅当 $(a, a_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ 若 $a = 0$，则 $(a, a_i) = (0, a_i) = 0$，对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立

$\Leftarrow$ 若 $(a, a_i) = 0$ 对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立，由于 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，

a 可表示为 $a = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$，其中 c_i 为标量，取内积：

$$(a, a_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i a_i, a_j \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i (a_i, a_j)$$

因为 $\{a_i\}$ 是基，$(a_i, a_j) = 0$ 当 $i \neq j$，且 $(a_i, a_i) = |a_i|^2 \neq 0$，因此：

$$(a, a_j) = c_j |a_j|^2$$

由题设 $(a, a_j) = 0$，得 $c_j |a_j|^2 = 0$，由于 $|a_j|^2 \neq 0$，故 $c_j = 0$，对所有 j 成立。因此，$a = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i = 0$，即 $a = 0$

7.9 知 b 与 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都正交，证明：b 与 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的任意线性组合也正交。

b 与每个 a_i 正交，即 $(b, a_i) = 0$，$i = 1, 2, \ldots, n$。任意线性组合为 $c = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$，其中 k_i 为实数

$$(b, c) = \left(b, \sum_{i=1}^{n} k_i a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} k_i (b, a_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot 0 = 0$$

第二十五次作业答案

时间：5/29 第十四周/周四

7.5 用 Schmidt 正交化方法将基标准化为正交向量：

(1) $(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$;

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = (0,0,1) \\
u_2 &= (0,1,1) - (0,0,1) = (0,1,0) \\
u_3 &= (1,1,1) - (0,0,1) - (0,1,0) = (1,0,0)
\end{aligned}
$$

(2) $(1,1,1,2),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)$.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right) \\
u_1 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{3}{\sqrt{21}}\right) \\
u_1 &= \left(-\frac{4}{\sqrt{186}}, -\frac{7}{\sqrt{186}}, -\frac{11}{\sqrt{186}}, 0\right)
\end{aligned}
$$

7.6 设在 $\mathbb{R}^3$ 中，基 a_1,a_2,a_3 的度量矩阵是

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

试求 $\mathbb{R}^3$ 中由 a_1,a_2,a_3 表示的一组标准正交基。

度量矩阵定义：度量矩阵 G 的元素为 $G_{ij} = (a_i, a_j)$，于是我们有：

$$
(a_1,a_1)=1, \quad (a_1,a_2)=0, \quad (a_1,a_3)=-1, \quad (a_2,a_2)=2, \quad (a_2,a_3)=0, \quad (a_3,a_3)=2
$$

所以：

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_1 \\
u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} a_2
\end{aligned}
$$

$$
u_3 = a_1 + a_3
$$

7.7 证明：n 维向量空间中若任何一个正交向量组都能扩展为一组正交基。

设 V 是一个 n 维欧氏向量空间，$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ 是一个正交向量组，其中 $k \leq n$，且 $v_i \neq 0$，$(v_i, v_j) = 0$ 对所有 $i \neq j$。

若 $k = n$，则 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 已是 V 的一组基（因为 $k = n$，且向量线性无关），只需标准化为正交基：令 $e_i = \frac{v_i}{|v_i|}$，则 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是一组标准正交基。

若 $k < n$，需扩展 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ 为一组正交基：

- 由 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ 生成的子空间 $S = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$，其维数为 k。
- 由于 V 的维数为 n，存在 S 的补空间 $S^\perp$（正交补），且 $\dim(S^\perp) = n - k$。
- 在 $S^\perp$ 中取一组基 $\{w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots, w_n\}$（共 $n - k$ 个向量）。由于 $w_i \in S^\perp$，$(w_i, v_j) = 0$ 对所有 $i = k+1, \ldots, n$ 和 $j = 1, \ldots, k$。
- 对 $\{w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots, w_n\}$ 施密特正交化，得到正交向量组 $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$，使得 $(v_i, v_j) = 0$ 对所有 $i \neq j$（包括之前的 $v_1, \ldots, v_k$）。
- 现在 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ 是 V 中的一组正交向量组，共有 n 个线性无关向量，故为一组正交基。

最后标准化：对每个 v_i，令 $e_i = \frac{v_i}{|v_i|}$，则 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是一组标准正交基。因此，任何正交向量组都能扩展为一组正交基，命题得证。

7.8 验证下列各组向量是正交的，并将基向量改写为标准正交基：

(a) $(2, 1, 2), (1, 2, -2)$;

添加一个 $(-2, 2, 1)$，然后标准化：

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{3}(2, 1, 2) \\
u_2 &= \frac{1}{3}(1, 2, -2) \\
u_3 &= \frac{1}{3}(-2, 2, 1)
\end{aligned}
$$

(b) $(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3)$.

添加向量 $(-5, 1, 2, 1), (6, -57, 41, 5)$ 然后标准化：

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, 1, 2) \\
u_2 &= \frac{1}{\sqrt{23}}(1, 2, 3, -3) \\
u_3 &= \frac{1}{\sqrt{31}}(-5, 1, 2, 1) \\
u_4 &= \frac{1}{\sqrt{4991}}(6, -57, 41, 5)
\end{aligned}
$$

7.10 设 e_1, e_2, e_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，令

$$a_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3),$$

$$a_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3),$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 - 2e_3),$$

证明 a_1, a_2, a_3 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。

过渡矩阵为：

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

由于 $AA^\top = I$ 故而 A 是正交阵。再 e_1, e_2, e_3 是一组标准正交基，故而 a_1, a_2, a_3 也是一组标准正交基

7.11 设 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，$x_1, x_2, \ldots, x_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意 k 个向量，试证明 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 两两正交的充分必要条件是：

$$\sum_{s=1}^{n}(x_i, e_s)(x_j, e_s) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k,\ i \neq j$$

首先，空间中任意向量都可表示成这一组标准正交基的线性组合，组合系数为内积：

$$x_i = \sum_{s=1}^{n}(x_i, e_s)e_s$$

则两向量内积可表示为：

$$\begin{aligned}(x_i, x_j) &= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}((x_i, e_s)e_s, (x_j, e_t), e_t) \\ &= \sum_{s=1}^{n}((x_i, e_s)e_s, (x_j, e_s), e_s) \\ &= \sum_{s=1}^{n}(x_i, e_s)(x_j, e_s)\end{aligned}$$

则 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 两两正交等价于任意两个之间内积为 0，也即：

$$\sum_{s=1}^{n}(x_i, e_s)(x_j, e_s) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k,\ i \neq j$$

7.12 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。证明：

(1) 对于任意 $a, b \in \mathbb{R}^n$，$(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(a, a_i)(b, a_i)$. 同上，空间中任意向量都可表示成这一组标准正交基的线性组合，组合系数为内积：

$$a_i = \sum_{s=1}^{n}(x_i, e_s)e_s$$

则两向量内积可表示为：

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}((a, e_s)e_s, (b, e_t), e_t) \\
&= \sum_{s=1}^{n}((a, e_s)e_s, (b, e_s), e_s) \\
&= \sum_{s=1}^{n}(a, e_s)(b, e_s)
\end{aligned}$$

(2) 对于任意 $a \in \mathbb{R}^n$，$|a|^2 = \sum_{i=1}^{n}(a, a_i)^2$.

将上式的 a 换成 b 即可

第二十六次作业答案

时间：2/25 第十五周/周二

7.13 证明二阶正交矩阵取下列两种形式之一：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad -\pi \le \theta < \pi$$

设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，则：

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

得：

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \\ \det(A)=ad-bc=\pm 1 \end{cases}$$

由 $a^2+c^2=1$，设：

$$a=\cos\theta, \quad c=\sin\theta, \quad -\pi \le \theta < \pi.$$

则：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & b \\ \sin\theta & d \end{pmatrix}.$$

再由 $b^2+d^2=1$ 和 $\cos\theta\cdot b+\sin\theta\cdot d=0$，向量 (b,d) 与 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 正交。则 (b,d) 可取 $-\sin\theta,\cos\theta)$ 或 $(\sin\theta,-\cos\theta)$ 分别对应第一类和第二类变换

7.14 写出所有 3 阶正交矩阵，它们的元素是 0 或 1。

此处正交矩阵的每一行/每一列的模长均为 1，又元素之能事 0 或 1，则每一列郡只有一个 1，则所有的满足条件的正交矩阵共有 $3!=6$ 种，分别为对单位矩阵做不同的交换两列的变换：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

7.15 如果一个正交矩阵中每个元素都是 $\pm\frac{1}{4}$，这个正交矩阵是几阶的?

n-阶正交矩阵 A 满足 $A^TA=I$，则其每一行和每一列的模长为 1，直接拿第一行出来进行讨论就可得到 $n=16$

7.16 若 a 是 $\mathbb{R}^n$ 的单位向量，证明：$Q=I_n-2aa^T$ 是一个正交阵。当 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ 时，具体求出 Q。

由 a 是单位向量，即 $a^Ta=1$。我们需要证明 $Q^TQ=I_n$，计算其转置：

$$Q^T=(I_n-2aa^T)^T=I_n^T-2(aa^T)^T=I_n-2aa^T$$

于是：

$$\begin{aligned}QQ^T&=(I_n-2aa^T)(I_n-2aa^T)\\&=I_n-2aa^T-2aa^T+4aa^Taa^T\\&=I_n-2aa^T-2aa^T+4a(a^Ta)a^T\\&=I_n-2aa^T-2aa^T+4aa^T\\&=I_n\end{aligned}$$

当 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$

$$aa^T=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$Q=I_3-2aa^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

7.17 在什么条件下，对角矩阵是正交矩阵?

一个对角矩阵 D 是正交矩阵，当且仅当其所有对角元素 d_{ii} 满足 $d_{ii}=\pm1$，对于所有 $i=1,2,\ldots,n$，其中 n 是矩阵的阶数

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

其转置 $D^T=D$，因为对角矩阵首先是对称矩阵，于是有：

$$D^TD=DD=\begin{pmatrix} d_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^2 \end{pmatrix}=I_n$$

要求：

$$d_{ii}^2=1 \quad \text{对于所有}\, i=1,2,\ldots,n$$

7.18 设 A,B 都为 n 阶正交矩阵，证明：

(1) A 的伴随矩阵 A^* 也是正交矩阵；

由伴随矩阵的性质，$AA^*=\det(A)I_n$。因为 A 是正交矩阵，满足 $A^TA=I_n$，且 $\det(A)=\pm1$。又 $A^{-1}=A^T$，而伴随矩阵定义为 $A^*=\det(A)A^{-1}$，所以：

$$A^*=\det(A)A^T=\pm A^T$$

由于 A^T 是正交矩阵（因为 $(A^T)^TA^T=AA^T=I_n$），检查 A^* 的正交性：

$$(A^*)^TA^*=(\pm A^T)^T(\pm A^T)=AA^T=I_n$$

因此，A^* 是正交矩阵。

(2) AB 也为正交矩阵；

A 和 B 均为正交矩阵，即 $A^TA=I_n$，$B^TB=I_n$。验证 AB 的正交性：

$$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TI_nB=B^TB=I_n$$

因此，AB 是正交矩阵。

(3) A^{-1} 也为正交矩阵；

A 是正交矩阵，$A^TA = I_n$，故 $A^{-1} = A^T$, 验证 A^{-1} 的正交性：

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^T = AA^T = I_n$$

因此，A^{-1} 是正交矩阵。

(4) A 的行列式为 ± 1。

由正交矩阵定义 $A^TA = I_n$，取行列式：

$$\det(A^TA) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2 = \det(I_n) = 1$$

因此，$\det(A)^2 = 1$，即 $\det(A) = \pm 1$。

7.19 给定三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 的 QR 分解。

先做 Schmidt 正交化：

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)^T \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{105}}(8,5,-4)^T \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{21}}(-2,4,1)^T \end{aligned}$$

则分解出的正交矩阵为：

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{105}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{105}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{105}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$

对应的上三角阵为：

$$R = Q^TA = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{\frac{21}{5}} & \frac{6}{\sqrt{105}} \\ 0 & 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$

第二十七次作业答案

时间：2/27 第十五周/周四

7.26 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。由此求 A^k，k 是自然数。

这里 A 是实对称矩阵，一定可相似对角化，求特征方程：

$$\det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0$$

得：

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

则特征方程的解为：

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$$

对于 $\lambda_1 = -1$：

$$(I + A)v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

得 $v_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T$

对于 $\lambda_2 = 2$:

$$(2I - A)v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} v_2 = 0$$

得 $v_2 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)^T$

对于 $\lambda_3 = 5$：

$$(5I - A)v_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} v_3 = 0$$

得 $v_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T$

于是有:

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = P^TAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

进而:

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^T)^k = PD^kP^T \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2(-1)^k & 2^{k+1} & 5^k \\ 2(-1)^k & -2^k & -2(5^k) \\ (-1)^k & -2^{k+1} & 2(5^k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4(-1)^k + 2^{k+2} + 5^k & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.27 证明:下列三个条件中只要有两个成立,另一个也成立。

(1) A 是对称的;

(2) A 是正交的;

(3) $A^2 = I$.

- $(1) + (2) \Rightarrow (3)$
  A 是对称的于是有 $A^T = A$,再由 A 是正交的有 $A^TA = A^2 = I$
- $(1) + (3) \Rightarrow (2)$
  A 是对称的于是有 $A^T = A$,从而 $A^2 = A^TA = I$ 得 A 是正交的
- $(2) + (3) \Rightarrow (1)$
  A 是正交的得 $A^TA = I$,又 $A^2 = I$,根据 $det(A^TA) = det(A)^2 = 1 \neq 0$ 故而 A 可逆,于是有 $A = A^T$

7.28 求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

解特征方程：

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$，对应的特征向量分别是 $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ 和 $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

进而此处的 T 为：

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

且满足：

$$T^TAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解特征方程：

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

7.29 设 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $A^2 = A$。证明：存在正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(I_r, O)$。这里 $r = \mathrm{rank}(A)$

舍 A 的对应于特征值 λ 的特征向量为 x，于是有 $Ax = \lambda x$，再结合 $A^2 = A$，故而：

$$A^2x = Ax \Rightarrow \lambda^2 x = \lambda x \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)x = 0$$

而 $x \neq 0$，从而 $\lambda = 0$或1

结合定理,实对称矩阵必可相似对角化,故而 A 最终可正交相似对角化为 $\mathrm{diag}(I_k, O)$，再两边 rank 相等，故 $k = r$

7.30 设 A 为 n 阶实对称矩阵。证明：$\max_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{x^TAx}{x^Tx} = \lambda_{\max}$，这里 $\lambda_{\max}$ 是 A 的最大特征值

这里可以先将表达式进行化简，鉴于 $x^Tx = ||x||^2$，我们可以用分母对分子的两个

向量进行归一化，化简后的表达式可写作，证明：

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n,||x||=1} x^T A x = \lambda_{\max}$$

我们将当前的这个向量 x 在 A 的各特征向量组成的基下进行展开，具体的，存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = \Lambda$，其中 Λ 为矩阵 A 的特征值组成的对角元素，且按照绝对值大小降序排列，对应的单位正交特征向量为 $q_1, q_2, \ldots, q_n$

现在将这个向量在单位正交特征向量基底下进行展开：

$$x = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_n q_n, \sum_{i=1}^{n} c_i = 1$$

则此时 $x^T A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^n c_i^2$，等号成立当且仅当 $x = q_1$

7.32 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组向量。定义其 Gram 矩阵 $G = ((\alpha_i, \alpha_j)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$。

(1) 证明：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 构成 V 的一组基当且仅当 $\det(G) \neq 0$。

若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关，则存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$，使得 $\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j = 0$。考虑二次型：

$$\mathbf{c}^\top G \mathbf{c} = \sum_{i,j=1}^{n} c_i (\alpha_i, \alpha_j) c_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j \right) = \| \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i \|^2 = 0,$$

其中 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \neq \mathbf{0}$。由于 G 是实对称且半正定（因为 $\mathbf{x}^\top G \mathbf{x} = \| \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \|^2 \geq 0$ 对所有 $\mathbf{x}$ 成立），且 $\mathbf{c}^\top G \mathbf{c} = 0$ 且 $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$，则 $G\mathbf{c} = \mathbf{0}$（因为半正定矩阵满足 $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = 0$ 蕴含 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$）。因此，G 奇异，$\det(G) = 0$。

若 $\det(G) = 0$，则 G 奇异，存在 $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ 使得 $G\mathbf{c} = \mathbf{0}$。设 $\beta = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j$，则：

$$(G\mathbf{c})_i = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i, \alpha_j) c_j = (\alpha_i, \beta) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

由于 β 是 α_j 的线性组合，$\beta \in \mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$，且 $(\alpha_i, \beta) = 0$ 对所有 i 成立，则 $(\beta, \beta) = 0$，故 $\beta = 0$。因此，$\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j = 0$ 且 $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$，即 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关。

因此，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关当且仅当 $\det(G) \neq 0$。由于 V 是 n 维空间，且 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 n 个向量，线性无关当且仅当构成 V 的一组基。故 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 构成基当且仅当 $\det(G) \neq 0$。

(2) 设 α_i 在一组标准正交基下的坐标为 x_i，$i = 1, 2, \ldots, n$。设 $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{N \times N}$，则 $\det(G) = \det(X)^2$。

由于基是标准正交的，内积 (α_i, α_j) 等于坐标向量的点积：

$$(\alpha_i, \alpha_j) = x_i^\top x_j.$$

于是：

$$\det(G) = \det(X^\top X) = \det(X^\top) \det(X) = \det(X) \cdot \det(X) = \det(X)^2$$

7.33 设 $\mathbb{R}_n[x]$ 是 n 次幂不超过 n 次的实系数多项式全体在内积 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ 下的欧氏空间。令

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right), \quad n \geq 1.$$

证明：$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ 构成 $\mathbb{R}_n[x]$ 的一组正交基，称 $P_n(x)$ 为 Legendre 多项式。

定义 $u_k(x) = (x^2 - 1)^k$，则 $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} u_k^{(k)}(x)$，其中 $u_k^{(k)}$ 表示 u_k 的 k 阶导数。需证：

(a) 当 $m \neq n$ 时，$(P_m, P_n) = 0$（正交性）

考虑内积：

$$(P_m, P_n) = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^m m! 2^n n!} \int_{-1}^{1} u_m^{(m)}(x) u_n^{(n)}(x) dx.$$

假设 $m < n$（若 $n < m$，证明类似）。对积分 $\int_{-1}^{1} u_m^{(m)} u_n^{(n)} dx$ 进行 m 次分部积分。

第一次分部积分：

$$\int_{-1}^{1} u_m^{(m)} u_n^{(n)} dx = \left[u_m^{(m)} u_n^{(n-1)} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u_m^{(m+1)} u_n^{(n-1)} dx.$$

由于 $u_n(x) = (x^2 - 1)^n$ 在 $x = \pm 1$ 处有 n 重根，其直到 $n - 1$ 阶导数在端点为零，故 $u_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0$，边界项为零：

$$\int_{-1}^{1} u_m^{(m)} u_n^{(n)} dx = -\int_{-1}^{1} u_m^{(m+1)} u_n^{(n-1)} dx.$$

第二次分部积分：

$$\int_{-1}^{1} u_m^{(m+1)} u_n^{(n-1)} dx = \left[u_m^{(m+1)} u_n^{(n-2)}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u_m^{(m+2)} u_n^{(n-2)} dx.$$

边界项 $u_n^{(n-2)}(\pm 1) = 0$，故：

$$\int_{-1}^{1} u_m^{(m+1)} u_n^{(n-1)} dx = -\int_{-1}^{1} u_m^{(m+2)} u_n^{(n-2)} dx.$$

代入得：

$$\int_{-1}^{1} u_m^{(m)} u_n^{(n)} dx = -\left(-\int_{-1}^{1} u_m^{(m+2)} u_n^{(n-2)} dx\right) = \int_{-1}^{1} u_m^{(m+2)} u_n^{(n-2)} dx.$$

继续此过程，经 m 次分部积分后：

$$\int_{-1}^{1} u_m^{(m)} u_n^{(n)} dx = (-1)^m \int_{-1}^{1} u_m^{(2m)} u_n^{(n-m)} dx.$$

由于 $u_m(x) = (x^2-1)^m$ 是 $2m$ 次多项式，其 $2m$ 阶导数为常数：$u_m^{(2m)}(x) = (2m)!$。故：

$$\int_{-1}^{1} u_m^{(m)} u_n^{(n)} dx = (-1)^m (2m)! \int_{-1}^{1} u_n^{(n-m)}(x) dx.$$

积分 $\int_{-1}^{1} u_n^{(n-m)}(x) dx = \left[u_n^{(n-m-1)}(x)\right]_{-1}^{1}$。由于 $n-m-1 < n$，有 $u_n^{(n-m-1)}(\pm 1) = 0$，故：

$$\int_{-1}^{1} u_n^{(n-m)}(x) dx = 0.$$

因此：

$$\int_{-1}^{1} u_m^{(m)} u_n^{(n)} dx = 0 \implies (P_m, P_n) = 0.$$

当 $n < m$ 时，同理可证 $(P_m, P_n) = 0$。故当 $m \neq n$ 时，正交性成立

(b) 每个 $P_k \neq 0$（非零）

计算 (P_n, P_n)：

$$(P_n, P_n) = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^{1} [u_n^{(n)}(x)]^2 dx.$$

记 $I_n = \int_{-1}^{1} [u_n^{(n)}(x)]^2 dx$。对 I_n 进行 n 次分部积分：- 经 n 次分部积分后：

$$I_n = (-1)^n \int_{-1}^{1} u_n^{(2n)} u_n^{(0)}(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} u_n^{(2n)} u_n(x) dx.$$

由于 $u_n(x)=(x^2-1)^n$ 是 $2n$ 次多项式，其 $2n$ 阶导数为常数：$u_n^{(2n)}(x)=(2n)!$。故：

$$I_n=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx.$$

计算积分 $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$。令 $x=\cos\theta$，则 $dx=-\sin\theta d\theta$，当 $x=-1$ 时 $\theta=\pi$，当 $x=1$ 时 $\theta=0$：

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx=\int_{\pi}^{0}(\cos^2\theta-1)^n(-\sin\theta)d\theta=\int_{0}^{\pi}(-1)^n\sin^{2n}\theta\cdot\sin\theta d\theta=(-1)^n\int_{0}^{\pi}\sin^{2n+1}\theta d\theta$$

利用 $\int_0^\pi\sin^k\theta d\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^k\theta d\theta$ 和公式 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta d\theta=\frac{2\cdot4\cdots2n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}=\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}$，其中 $(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$，故：

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta d\theta=\frac{2^n n!\cdot2^n n!}{(2n+1)!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

因此：

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\theta d\theta=2\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!},$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx=(-1)^n\cdot2\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

代入 I_n：

$$I_n=(-1)^n(2n)!\cdot(-1)^n\cdot2\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}=(2n)!\cdot2\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

于是：

$$(P_n,P_n)=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}>0.$$

故 $P_n\neq0$。

因此，$P_0(x),P_1(x),\ldots,P_n(x)$ 构成 $\mathbb{R}_n[x]$ 的一组正交基。

7.34 设 $\mathbb{R}_n[x]$ 是 n 次幂不超过 n 次的实系数多项式全体在内积 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 下的欧氏空间。令

$$T_0(x)=1,\quad T_n(x)=\cos(n\arccos(x)),\quad x\in[-1,1],n\geq1.$$

证明：$T_0(x),T_1(x),\ldots,T_n(x)$ 构成 $\mathbb{R}_n[x]$ 的一组正交基，称 $T_n(x)$ 为 Chebyshev 多项式。

依然证明两两正交以及均非 0:

(a) 两两正交:

考虑内积:

$$(T_m, T_n) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

作变量代换 $x = \cos\theta$，则 $dx = -\sin\theta d\theta$，且当 $x = -1$ 时 $\theta = \pi$，当 $x = 1$ 时 $\theta = 0$。由于 $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$（因为 $\theta \in [0, \pi]$ 时 $\sin\theta \geq 0$)，代入得:

$$(T_m, T_n) = \int_{\pi}^{0} \frac{T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\sin\theta)d\theta = \int_{0}^{\pi} T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta)d\theta.$$

由定义 $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$，故:

$$(T_m, T_n) = \int_{0}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta.$$

利用三角恒等式:

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)],$$

有:

$$(T_m, T_n) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta)]d\theta.$$

当 $m \neq n$ 时，$m+n$ 和 $|m-n|$ 均为非零整数，则:

$$\int_{0}^{\pi} \cos(k\theta)d\theta = \left[\frac{\sin(k\theta)}{k}\right]_{0}^{\pi} = \frac{\sin(k\pi)}{k} - \frac{\sin(0)}{k} = 0, \quad k \neq 0.$$

(b) 每个非零: 当 $m = n$ 时:

$$(T_n, T_n) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\cos(2n\theta) + \cos(0)]d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\cos(2n\theta) + 1]d\theta.$$

计算积分:

$$\int_{0}^{\pi} \cos(2n\theta)d\theta = \left[\frac{\sin(2n\theta)}{2n}\right]_{0}^{\pi} = 0, \quad \int_{0}^{\pi} 1d\theta = \pi.$$

所以:

$$(T_n, T_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} 2d\theta = \pi, & n = 0, \\ \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} 1d\theta = \frac{\pi}{2}, & n \geq 1. \end{cases} > 0.$$

故 $T_n \neq 0$

因此，$T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ 构成 $\mathbb{R}_n[x]$ 的一组正交基。

补充内容

1. 设 $n \geq 2$，$\mathbf{V} = \mathbb{F}^{n\times n}$，定义 $\mathbf{V}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}^T$，求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量，并判断 $\mathcal{A}$ 是否可对角化

   考虑线性变换 $\mathcal{A}(X) = X^T$，其中 $X \in \mathbf{V}$ 是 $n \times n$ 矩阵。$\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量可以通过求解 $\mathcal{A}(X) = \lambda X$ 得到，即：

   $$X^T = \lambda X$$

   转置两边：

   $$(X^T)^T = (\lambda X)^T \implies X = \lambda X^T$$

   代入 $\mathcal{A}(X) = X^T$，得：

   $$X^T = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

   因此，特征方程为 $\lambda^2 = 1$，解得 $\lambda = \pm 1$：

   - 对于 $\lambda = 1$，$X^T = X$，即 X 是对称矩阵。对称矩阵的集合构成 $\mathbf{V}$ 的子空间，维度为 $\frac{n(n+1)}{2}$。
   - 对于 $\lambda = -1$，$X^T = -X$，即 X 是反对称矩阵（对角元素为 0）。反对称矩阵的维度为 $\frac{n(n-1)}{2}$。

   总维度：

   $$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2 = \dim \mathbf{V}$$

   因此，$\{\lambda = 1, -1\}$ 的特征空间张成整个 $\mathbf{V}$，$\mathcal{A}$ 可对角化（可对角化当且仅当其不同特征值构成的特征空间的直和是整个空间）

2. 设 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 是 $\mathbf{V}$ 上的线性变换，其中 $\mathbf{V}$ 中任意非零向量均为 $\mathcal{A}$ 的特征向量，证明 $\mathcal{A}$ 是标量变换（对应的矩阵是数量阵）

   设 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ 是任意非零向量，且 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$，其中 $\lambda_{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}$ 取决于 $\mathbf{v}$。取基 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$，对于每个基向量 e_i，$\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i$。因为 $\mathbf{V}$ 是 n 维，$\mathcal{A}$ 的矩阵在该基下为对角矩阵 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$。由于任意非零向量 $\mathbf{v} = \sum c_i e_i$ 都是特征向量，$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$ 应为单一 μ。考虑 $\mathbf{v} = e_1 + e_2$，$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \mu(e_1 + e_2)$，则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$。推广到所有 e_i，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \mu$。故 $A = \mu I_n$，$\mathcal{A}$ 是标量变换。

3. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ 为两个列向量，定义内积为：

   $$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^*\mathbf{y}$$

其中 $\mathbf{x}^*$ 是 $\mathbf{x}$ 的共轭转置。内积满足以下性质：

- 非负定性：$(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$，且 $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。
- 共轭对称性：
$$(x,y) = \overline{(y,x)}$$
- 线性和共轭对称性：对于任意标量 $a, b \in \mathbb{C}$ 和向量 $\mathbf{z}$，有
$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \overline{a}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \overline{b}(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$
$$(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a(\mathbf{x},\mathbf{y}) + b(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$
- 线性变换的内积性质：对于线性变换 A，有 $(A\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$，其中 A^* 是 A 的共轭转置。

证明以下命题

(a) 实对称矩阵的特征值全为实数。

设 A 为实对称矩阵（$A = A^T$，且元素为实数），λ 为其特征值，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 为对应特征向量，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$。根据内积性质，$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} > 0$（因为 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$）。由于 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，有
$$(A\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$
又因 $A = A^T$，
$$(A\mathbf{x},\mathbf{x}) = (A^T\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x}),$$
因为 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^T$，且 $(\mathbf{x},\mathbf{x})$ 为实数。比较两式实部，$\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x})$，由于 $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \neq 0$，得 $\lambda = \overline{\lambda}$，故 λ 为实数。

(b) 正交矩阵的特征值模为 1。

设 A 为正交矩阵（$A^TA = I$），λ 为其特征值，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 为对应特征向量。由于 $A^TA = I$，对任意向量 $\mathbf{x}$，有 $(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})$。特别地，$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，则
$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x})^*(\lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda}\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}) = |\lambda|^2(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$
由 $A^TA = I$，$|\lambda|^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})$。由于 $(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$，得 $|\lambda|^2 = 1$，即 $|\lambda| = 1$。

(c) 实反对称矩阵的特征值全是纯虚数或 0

设 A 为实反对称矩阵（$A^T = -A$，且元素为实数），λ 为其特征值，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 为对应特征向量，$\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$（允许复特征向量）。因为 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，有
$$(A\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

又因 $A^T=-A$，

$$(A\mathbf{x},\mathbf{x})=(A^T\mathbf{x},\mathbf{x})=(-A\mathbf{x},\mathbf{x})=-(\mathbf{x},A\mathbf{x})=-(\mathbf{x},\lambda\mathbf{x})=-\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

比较两式，$\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x})=-\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x})$。如果 $(\mathbf{x},\mathbf{x})\neq 0$，则 $2\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$，得 $\lambda=0$。若 $\lambda\neq 0$，则 $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$，但 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 矛盾，除非考虑复特征向量。设 $\mathbf{x}=\mathbf{u}+i\mathbf{v}$（$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$），代入 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$，并利用 $A^T=-A$，取内积得 $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ 暗示 λ 纯虚。具体地，若 $\lambda=a+bi$（$a,b\in\mathbb{R}$），则 $a(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$，故 $a=0$，$\lambda=bi$（纯虚数或 0）。

4. 有关（半）正定矩阵的几个不等式：

- 设 A 为半正定矩阵，则存在半正定矩阵 B 使得 $B^2=A$，记 $B=A^{\frac{1}{2}}$

  设 A 为半正定矩阵，$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$ 为其特征值，存在正交矩阵 P 使得

  $$A=P^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)P.$$

  设 $B=A^{\frac{1}{2}}$，则

  $$B=P^T\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n})P,$$

  且 $B^2=A$。

- **Cauchy-Schwarz 不等式及广义 Cauchy-Schwarz 不等式**设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n$ 为两个列向量，G 为正定矩阵，证明

  $$(\alpha^T\beta)^2\leq(\alpha^TG^{-1}\alpha)(\beta^TG\beta).$$

  考虑 G 的平方根 $G^{\frac{1}{2}}$，由于 G 正定，存在正交矩阵 P 和对角矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$（$\lambda_i>0$）使得 $G=P^T\Lambda P$。设 $\tilde{\alpha}=G^{-\frac{1}{2}}\alpha$, $\tilde{\beta}=G^{\frac{1}{2}}\beta$。则

  $$(\alpha^T\beta)^2=((\tilde{\alpha})^T\tilde{\beta})^2\leq((\tilde{\alpha})^T\tilde{\alpha})((\tilde{\beta})^T\tilde{\beta}),$$

  由标准 Cauchy-Schwarz 不等式 $(\mathbf{u}^T\mathbf{v})^2\leq(\mathbf{u}^T\mathbf{u})(\mathbf{v}^T\mathbf{v})$ 成立。代入定义，得

  $$(\tilde{\alpha})^T\tilde{\alpha}=\alpha^T(G^{-\frac{1}{2}})^TG^{-\frac{1}{2}}\alpha=\alpha^TG^{-1}\alpha,\quad(\tilde{\beta})^T\tilde{\beta}=\beta^TG^{\frac{1}{2}}(G^{\frac{1}{2}})^T\beta=\beta^TG\beta,$$

  故 $(\alpha^T\beta)^2\leq(\alpha^TG^{-1}\alpha)(\beta^TG\beta)$。特别地，若 $\alpha=cG\beta$（$c\in\mathbb{R}$），则 $\alpha^T\beta=c\beta^TG\beta$，$\alpha^TG^{-1}\alpha=c^2\beta^TG\beta$，等号成立。

- **正定矩阵的 Rayleigh 商/单位球面上一类二次型的极值**设 A 为 $n\times n$ 正定

矩阵，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ 为其特征值，证明

$$\frac{\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} = \lambda_1, \quad \frac{\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} = \lambda_n.$$

设 $A = P^T\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)P$, 其中 P 为正交矩阵, λ_i 为特征值, $P^TP = I$。对于任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 设 $\mathbf{y} = P\mathbf{x}$, 则 $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^TP^TP\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$。因此, $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$。由于 $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_i \geq \lambda_n$, 最大值 $\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^TA\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$ 由 $\mathbf{x}$ 沿 λ_1 对应特征向量方向取得, 此时 $\mathbf{y} = (y_1, 0, \ldots, 0)^T$, $y_1 = 1$, $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \lambda_1$。最小值 $\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^TA\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$ 由 $\mathbf{x}$ 沿 λ_n 方向取得, $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \lambda_n$。故 $\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^TA\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1$, $\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^TA\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_n$。特别地，若 $\mathbf{y} = (1, 0, \ldots, 0)^T$, $\mathbf{x} = P^T\mathbf{y}$ 沿 λ_1 特征向量，$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \lambda_1$。

Corollary: 设 G_1, G_2 为正定矩阵，$\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别为 $G_2^{-1}G_1G_2^{-1}$ 的最大和最小特征值，则

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=0} \frac{\mathbf{x}^TG_1\mathbf{x}}{\mathbf{x}^TG_2\mathbf{x}} = \lambda_{\max}, \quad \min_{\|\mathbf{x}\|=0} \frac{\mathbf{x}^TG_1\mathbf{x}}{\mathbf{x}^TG_2\mathbf{x}} = \lambda_{\min}.$$

Proof: 设 $\mathbf{y} = G_2^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$，则 $\mathbf{x}^TG_2\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{y}$。因此，$\frac{\mathbf{x}^TG_1\mathbf{x}}{\mathbf{x}^TG_2\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{y}^TG_2^{-\frac{1}{2}}G_1G_2^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$。由于 $G_2^{-\frac{1}{2}}G_1G_2^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值即为 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$，由 Rayleigh 商性质，最大值和最小值分别对应 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$。特别地，当 $\mathbf{y}$ 沿最大特征向量方向时，商取 $\lambda_{\max}$。

5. n 阶矩阵对称矩阵 A 满足 $A^2 = I$，证明：

   (a) A 可以正交相似到对角元至多出现 1 或者 -1 的对角阵

   设 A 为对称矩阵且 $A^2 = I$。由于 A 对称, 存在正交矩阵 P 使得 $A = PDP^T$, 其中 D 为对角矩阵, 元素为 A 的特征值。因为 $A^2 = I$, 有 $PDP^T \cdot PDP^T = PD^2P^T = I$。由于 P 正交，$P^TP = I$，因此 $D^2 = P^TIP = I$。设 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，则 $D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = I$。故 $\lambda_i^2 = 1$ 对所有 i 成立，$\lambda_i = \pm 1$，因此 A 的特征值全为 ± 1。

   (b) 存在实对称的 B 满足 $I + A = B^2$

   根据第一问的结果，存在正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $A = PDP^T$，$D = \mathrm{diag}(I_r, -I_{n-r})$，证明 $I + A = P(I + D)P^T = P\mathrm{diag}(2I_r, O_{n-r})P^T$ 即可，
   设 $B = (I + A)^{\frac{1}{2}}$，由于 $I + A$ 的特征值为 2（对应 I_r）和 0（对应 O_{n-r}），直接取 $B = P\mathrm{diag}(\sqrt{2}I_r, O_{n-r})P^T$ 即可

6. 设 A 和 B 都是 $n \times n$ 的矩阵，证明 $\det(A)\det(B) \leq (\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(AB))^n$。

   如果从特征值的角度来看，这里其实就是矩阵 AB 的特征值的算术平均值大于等于几何平均值，不过还有一个前提就是说明 AB 的特征值都是正数，这个就需要根据两个矩阵都是正定矩阵并结合内积来进行说明了

A 和 B 均为正定矩阵，即对任意非零向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}>0$ 和 $\mathbf{x}^TB\mathbf{x}>0$ 成立。由于 A 和 B 正定，可定义内积 $(\mathbf{x},\mathbf{y})_A=\mathbf{x}^TA\mathbf{y}$ 和 $(\mathbf{x},\mathbf{y})_B=\mathbf{x}^TB\mathbf{y}$，两者均满足非负定性。考虑 AB，任取一个特征值 λ，存在非零向量 $\mathbf{x}$ 满足 $AB\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$。两边左乘矩阵 $\mathbf{x}^TB^T$，得

$$\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}^TB^T\mathbf{x}$$

由于 B 对称（假设 $B=B^T$，正定矩阵通常对称），$\mathbf{x}^TB^T\mathbf{x}=\mathbf{x}^TB\mathbf{x}>0$（因 $\mathbf{x}\neq 0$）。设 $k=\lambda\frac{\mathbf{x}^TB\mathbf{x}}{\mathbf{x}^TB\mathbf{x}}$，则 $\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}=k\mathbf{x}^TB\mathbf{x}$。由于 A 和 B 均为正定，B^TAB 也是正定矩阵（通过内积 $\mathbf{x}^T(B^TAB)\mathbf{x}=(B\mathbf{x})^TA(B\mathbf{x})>0$），故 $\mathbf{x}^TB^TAB\mathbf{x}>0$，从而 $k>0$，$\lambda>0$。因此 AB 的所有特征值 $\lambda_i>0$。

之后直接结合 n 个正数的算术平均大于其几何平均来说明即可

7. 矩阵 A 是正定矩阵，d_{n-1} 是 A 的 n-1 阶顺序主子式，证明 $\det(A)\leq a_{nn}d_{n-1}$

由于 A 是正定矩阵，其所有顺序主子式均为正，$d_{n-1}>0$。考虑 A 的分块形式：

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \mathbf{a}\\ \mathbf{a}^T & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & \mathbf{a}\\ 0 & a_{nn}-a^TA_{11}^{-1}a\end{pmatrix}$$

其中 A_{11} 是 $n-1\times n-1$ 的子矩阵，$\mathbf{a}$ 是 $n-1$ 维列向量，a_{nn} 是 A 的 (n,n) 元素。于是有：

$$\det(A)=\det(A_{11})\cdot(a_{nn}-\mathbf{a}^TA_{11}^{-1}\mathbf{a})$$

由于 A 正定，A_{11} 也是正定矩阵，可逆，且 A_{11}^{-1} 存在。设 $\mathbf{x}=A_{11}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{a}$，则 $\mathbf{a}^TA_{11}^{-1}\mathbf{a}=\mathbf{x}^T\mathbf{x}\geq 0$（由内积性质）。因此，$a_{nn}-\mathbf{a}^TA_{11}^{-1}\mathbf{a}\leq a_{nn}$，且因为 A 正定，$a_{nn}-\mathbf{a}^TA_{11}^{-1}\mathbf{a}>0$（否则 $\det(A)\leq 0$ 矛盾）。于是：

$$\det(A)=\det(A_{11})\cdot(a_{nn}-\mathbf{a}^TA_{11}^{-1}\mathbf{a})\leq\det(A_{11})\cdot a_{nn}.$$

由于 $\det(A_{11})=d_{n-1}$，有 $\det(A)\leq a_{nn}d_{n-1}$。当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时，等号成立（即 A 为分块对角矩阵）。

8. 已知 A 是实对称矩阵并且 $A^2+3A+2I=0$，请写出 A 所有可能的特征值，并且证明如果 n 是奇数，那么 A 的伴随矩阵是正定的

由矩阵满足的方程可得特征值方程：

$$\lambda^2+3\lambda+2=0.$$

解该二次方程：$\lambda=-1$ 或 $\lambda=-2$。由于 A 是实对称矩阵，其特征值均为实数，A 的所有可能的特征值为 -1 和 -2

设 A 的伴随矩阵为 A^* 则满足：

$$AA^* = \det(A)I$$

对 A 做正交相似对角化（实对称）：

$$A = P\mathrm{diag}(-I_r, -2I_{n-r})P^T \Rightarrow A^{-1} = P\mathrm{diag}(-I_r, -\frac{1}{2}I_{n-r})P^T$$

于是有：

$$A^* = \frac{1}{\det A}P\mathrm{diag}(-I_r, -\frac{1}{2}I_{n-r})P^T$$

若 n 为奇数，则 $\det(A)$ 为特征值乘积为负数，从而得到其伴随是正定的

9. 已知 A 是 n 阶正定矩阵，$\{\mathbf{a}_i\}$ 是 s 个非零向量，并且满足 $\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_j = 0$，证明 $\{\mathbf{a}_i\}$ 线性无关。

这里直接上线性相关/无关的定义：假设 $\{\mathbf{a}_i\}$ 线性相关，存在不全为零的标量 $k_1, k_2, \ldots, k_s$，使得：

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_s\mathbf{a}_s = \mathbf{0}.$$

取内积两边与 A 相关联，左乘 $\mathbf{a}_i^T A$，得：

$$\mathbf{a}_i^T A(k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_s\mathbf{a}_s) = \mathbf{a}_i^T A\mathbf{0} = 0.$$

展开：

$$\mathbf{a}_i^T A(k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_s\mathbf{a}_s) = k_1\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_2 + \cdots + k_s\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_s.$$

由于 $\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_j = 0$ 当 $i \neq j$，且 $\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_i > 0$（因 A 正定且 $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$），故：

$$k_1\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_1 + \cdots + k_s\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_s = k_i\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_i.$$

因此方程变为：

$$k_i\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_i = 0 \quad 对所有 i = 1, 2, \ldots, s.$$

由于 $\mathbf{a}_i^T A\mathbf{a}_i > 0$，必须有 $k_i = 0$ 对所有 i。因此，$\{k_1, k_2, \ldots, k_s\} = \mathbf{0}$，矛盾初始假设 $\{\mathbf{a}_i\}$ 线性相关。故 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\}$ 线性无关。

补充内容（仅试题）

1. 设 $n \geq 2$，$\mathbf{V} = \mathbb{F}^{n\times n}$，定义 $\mathbf{V}$ 上的线性变换 $\mathcal{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^T$，求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量，并判断 $\mathcal{A}$ 是否可对角化

2. 设 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 是 $\mathbf{V}$ 上的线性变换，其中 $\mathbf{V}$ 中任意非零向量均为 $\mathcal{A}$ 的特征向量，证明 $\mathcal{A}$ 是标量变换（对应的矩阵是数量阵）

3. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ 为两个列向量，定义内积为：

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$$

其中 $\mathbf{x}^*$ 是 $\mathbf{x}$ 的共轭转置。内积满足以下性质：

- 非负定性：$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$，且 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。
- 共轭对称性：
$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$
- 线性和共轭对称性：对于任意标量 $a, b \in \mathbb{C}$ 和向量 $\mathbf{z}$，有
$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \overline{a}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \overline{b}(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$
$$(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$
- 线性变换的内积性质：对于线性变换 A，有 $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$，其中 A^* 是 A 的共轭转置。

证明以下命题

(a) 实对称矩阵的特征值全为实数。

(b) 正交矩阵的特征值模为 1。

(c) 实反对称矩阵的特征值全是纯虚数或 0

4. 有关（半）正定矩阵的几个不等式：

- 设 A 为半正定矩阵，则存在半正定矩阵 B 使得 $B^2 = A$，记 $B = A^{\frac{1}{2}}$
- **Cauchy-Schwarz 不等式及广义 Cauchy-Schwarz 不等式**设 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ 为两个列向量，G 为正定矩阵，证明
$$(\alpha^T\beta)^2 \leq (\alpha^T G^{-1}\alpha)(\beta^T G\beta).$$

- **正定矩阵的 Rayleigh 商/单位球面上一类二次型的极值**设 A 为 $n\times n$ 正定矩阵，$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n>0$ 为其特征值，证明

$$\frac{\max_{\|\mathbf{x}\|=1}\mathbf{x}^TA\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}=\lambda_1,\quad \frac{\min_{\|\mathbf{x}\|=1}\mathbf{x}^TA\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}=\lambda_n.$$

5. n 阶矩阵对称矩阵 A 满足 $A^2=I$，证明：
   (a) A 可以正交相似到对角元至多出现 1 或者 -1 的对角阵
   (b) 存在实对称的 B 满足 $I+A=B^2$
6. 设 A 和 B 都是 $n\times n$ 的矩阵，证明 $\det(A)\det(B)\leq(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(AB))^n$。
7. 矩阵 A 是正定矩阵，d_{n-1} 是 A 的 n-1 阶顺序主子式，证明 $\det(A)\leq a_{nn}d_{n-1}$
8. 已知 A 是实对称矩阵并且 $A^2+3A+2I=0$，请写出 A 所有可能的特征值，并且证明如果 n 是奇数，那么 A 的伴随矩阵是正定的
9. 已知 A 是 n 阶正定矩阵，$\{\mathbf{a}_i\}$ 是 s 个非零向量，并且满足 $\mathbf{a}_i^TA\mathbf{a}_j=0$，证明 $\{\mathbf{a}_i\}$ 线性无关。