离散数学（2024 秋）作业七

截止时间：1 月 5 日下午 3 点

第 3、5、6、9 题助教会批改计分，其余题目供大家复习使用。

1. 考虑 100 个顶点的完全图 K_{100}，对它的边进行红蓝染色使得每个顶点有偶数条 (可能为零) 邻边为红色，证明其中有三个顶点，他们红色邻边的数量相同。

2. 给出 K_8 的一种红蓝染色方案使得其中既没有红色 K_4 也没有蓝色 K_3。

3. (15pt) 记 $r(a,b)$ 为最小的正整数 n（如果这样的正整数存在的话）使得对 K_n 进行红蓝染色则其中或者有红色 K_a 或者有蓝色 K_b。

   证明 $r(a,b) \le r(a-1,b) + r(a,b-1)$，

   证明 $r(a,b) \le \binom{a+b-2}{a-1}$。

4. 证明任何简单无向图中总存在顶点度数相同的两个顶点。

5. (15pt) 考虑连通简单无向图 $G=(V,E)$，令 $\delta = \min_{x\in V} \deg(x)$ 为图 G 中最小的顶点度数，若 $|V| > 2\delta$，则 G 包含长至少为 2δ 的 path。

6. (15pt) 一个无向图 $G=(V,E)$ 被称作二部图（bipartite graph）是指 V 可以分成两个不相交的子集 $V_1 \cup V_2$ 使得 E 中的每条边均有一个端点属于 V_1，另一个端点属于 V_2。

   (a) 证明无向图 G 是二部图等价于 G 中不存在长度为奇数的 cycle.

   (b) 若一个二部图 G 含有奇数个顶点，则 G 中不存在 Hamilton cycle。

7. 证明无向图 $G=(V,E)$ 有 Euler circuit 等价于 G 是连通的且 G 可以分解成若干个边不想交的 cycle 的并。

8. 一个(无向)图被称作林(Forest)是指该图没有 Cycle。对图 $G = (V, E)$，设 C 是 G 的连通分量的个数，证明 G 是林等价于 $|V| - C = |E|$。

9. (15pt) 设图 $G = (V, E)$ 是树，且 G 含有至少一条边，图 G 中一条 path 的长度是指这条 path 包含的边的个数。证明：

   (a) G 中最长的 path 的两个端点的度数都为 1.

   (b) G 中所有最长的 path 至少包含一个公共顶点。

   (c) 设 G 中最长 path 的长度为 $2k - 3$（$k \geq 3$），则 G 中含有至少 $|V| - k$ 条长度不小于 k 的 path.

10. 设图 $G = (V, E)$ 是平面图，设 F 是 G 中面的个数，C 是 G 中连通分量的个数。证明 $|V| - |E| + F = C + 1$。

11. 设图 $G = (V, E)$ 是简单二部连通平面图且 $|V| > 2$，证明 $|E| \leq 2|V| - 4$.