离散数学（2024 秋）作业一

截止日期：9 月 30 日 9.30

1. (20pt) 确定 n，使得在 1 到 200 中任选 n 个数中必有两个数互素。

   确定 n，使得在 1 到 200 中任选 n 个数中必有两个数不互素。

   （请让 n 尽可能的小，越小得分越高）

2. (15pt) 从 $1, 3, 5, \ldots, 299$ 共 150 个奇数中任选 n 个数，使得其中一定存在两个数满足其中一个整除另一个，问 n 最小可以是多少并证明。

3. (20pt) 考虑一个边长为 1 的等边三角形：

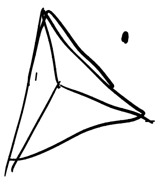
   证明在该三角形中任取五个点，则其中存在两点使其距离不大于 $1/2$；

   证明在该三角形中任取十个点，则其中存在两点使其距离不大于 $1/3$；

   确定 m_n，使得在该三角形中任取 m_n 个点，则其中存在两点使其距离不大于 $1/n$.（请让 m_n 尽可能的小，越小得分越高）.

4. (15 pt) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 为实数且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = A$, $\sum_{i=1}^{n} b_i = B$. 证明对于任意的整数 $k \in [n]$，存在 $i, j \in [n]$ 使得 $\sum_{\ell=0}^{k-1} a_{i+\ell} b_{j+\ell} \geq \frac{k}{n^2} AB$. ($[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，$a_{i+\ell} = a_{i+\ell-n}$ 如果 $i+\ell > n$, $b_{j+\ell} = b_{j+\ell-n}$ 如果 $j+\ell > n$).

5. (15 pt) 构造 n^2 个数的序列，使得其中不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列或递减子序列，并证明。



6. (15 pt) 确定 n，使得在平面上任取 n 个点（这 n 个点无三点共线且互不重合），则其中存在 4 个点构成凸四边形.

   （请让 n 尽可能的小，越小得分越高）.

7. (20pt) 证明在平面上任取 $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ 个点（这些点无三点共线且互不重合），总能找到其中 k 个点构成凸 k 边形。

   (你能找到比 $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ 更小的数使得上述成立么？)

$$\boxed{\underbrace{\binom{2k-4}{k-2}}_{(k,k)} \overset{1}{=} \underbrace{\binom{2k-5}{k-3}}_{(k-1,k)} + \underbrace{\binom{2k-5}{k-2}}_{(k,k-1)}}$$

n $\binom{m+n-4}{m-2}$

$h(m, n-1)$ $h(m-1, n)$ $\Rightarrow$ $h(m, n)$

1. (20pt) 确定 n，使得在 1 到 200 中任选 n 个数中必有两个数互素。

确定 n，使得在 1 到 200 中任选 n 个数中必有两个数不互素。

（请让 n 尽可能的小，越小得分越高）

1) 任取 n 个数中必有两个数互素

构造尽可能少的抽屉，抽屉内是互素的数.

① 相邻两数 $\{1,2\}$ $\{3,4\}$ $\cdots$ $\{199, 200\}$

此时 n 取 101.

反方向可以找到一个100且任两数均不互素的答案：所有偶数

则 n 应取 101.

2) 任取 n 个数中必有两个数不互素

此时构造的抽屉内部，任两数间不互素.

唯一分解/素因子分解

200以内有 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 | 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71
73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 | 127 131 137 139 149
151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 共46个质数.

以所有质数作为抽屉，将一个数作素因子分解后放入其所有的素因子中.

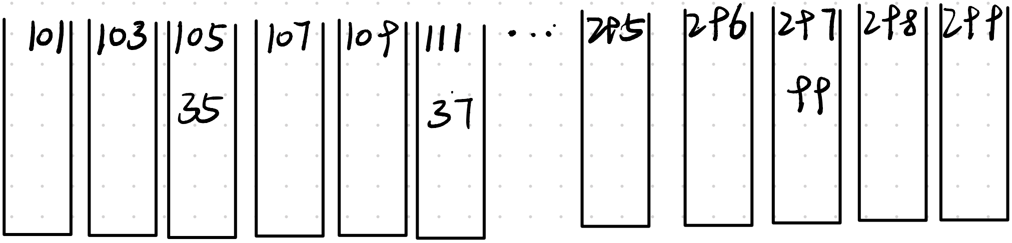
构造了 47 个抽屉（算上1单独作一个）

$n=48$

再构造 47 个：取所有质数和1. 两两互素. 故 $n>47$.

则 n 取 48

2. (15pt) 从 $1, 3, 5, \ldots, 299$ 共 150 个奇数中任选 n 个数，使得其中一定存在两个数满足其中一个整除另一个，问 n 最小可以是多少并证明。



n最小可以取101.

case 1: 100时

取 101 ~ 299 这100个数，任两个数之间均不存在整除关系

case 2: 101时:

构造 $a_i \cdot 3^i$. $i \in N^*$ 的抽屉可构造上图所示的100个抽屉

则任取101个数，一定有一个抽屉中存在2个数，则它们间存在整除关系

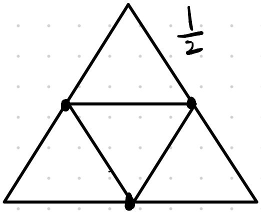
3. (20pt) 考虑一个边长为 1 的等边三角形：

1) 证明在该三角形中任取五个点，则其中存在两点使其距离不大于 1/2； 2^2+1

2) 证明在该三角形中任取十个点，则其中存在两点使其距离不大于 1/3； 3^2+1

3) 确定 m_n，使得在该三角形中任取 m_n 个点，则其中存在两点使其距离不大于 $1/n$.（请让 m_n 尽可能的小，越小得分越高）.

1)

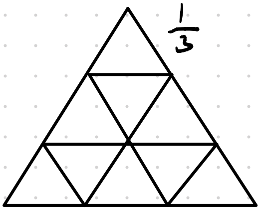


从中点出发构造如图 4个小三角形

则 任取5点，一定有一个小三角形中至少有2点

则其距离不大于 $\frac{1}{2}$

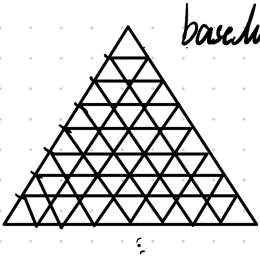
2)



同上理，从3等分点出发，构造9个小三角形

抽屉原理，一定有一小三角形中至少2点，其距离不大于 $\frac{1}{3}$

3)

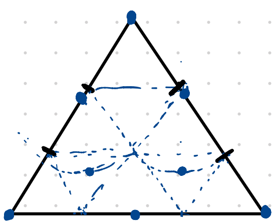


baseline：从三边n等分点出发，可构造 n^2 个边长为 $\frac{1}{n}$ 的小三角形

先取 $m_n = n^2+1$，同上理可得定存在两点 其距离不大于 $\frac{1}{n}$

尝试将 m_n 向下取.

open problem 但 $n=3$ 时 8个点有反例



4. (15 pt) $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为实数且 $\sum_{i=1}^n a_i = A$, $\sum_{i=1}^n b_i = B$. 证明对于任意的整数 $\boxed{k \in [n],}$ 存在 $i, j \in [n]$ 使得 $\sum_{\ell=0}^{k-1} a_{i+\ell} b_{j+\ell} \geq \frac{k}{n^2} AB$. ($[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{i+\ell} = a_{i+\ell-n}$ 如果 $i + \ell > n$, $b_{j+\ell} = b_{j+\ell-n}$ 如果 $j + \ell > n$).

任意长的乘积.

直接先列有情况乘积:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_{n-1} b_{n-1} & a_n b_n \\
a_1 b_2 & a_2 b_3 & \cdots & a_{n-1} b_n & a_n b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_1 b_{n-1} & a_2 b_n & \cdots & a_{n-1} b_{n-3} & a_n b_{n-2} \\
a_1 b_n & a_2 b_1 & \cdots & a_{n-1} b_{n-2} & a_n b_{n-1}
\end{array}
$$

来 k 遍?

$$
\begin{aligned}
\forall k: \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{i+\ell} b_{j+\ell} &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i+\ell} b_{j+\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left[a_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) \right] \right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i B \right) \\
&= kAB
\end{aligned}
$$

(i, j) 有 n^2 个, 即这 n^2 个 cases 求和为 kAB. 由强抽屉原理

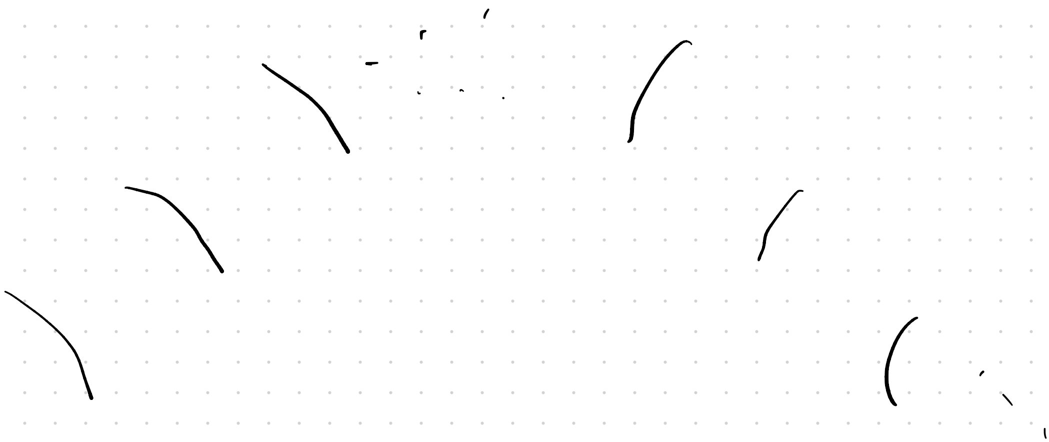
$$\exists (i, j) \text{ s.t. } \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{i+\ell} b_{j+\ell} \geq \frac{k}{n^2} AB$$

5. (15 pt) 构造 n^2 个数的序列，使得其中不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列或递减子序列，并证明。

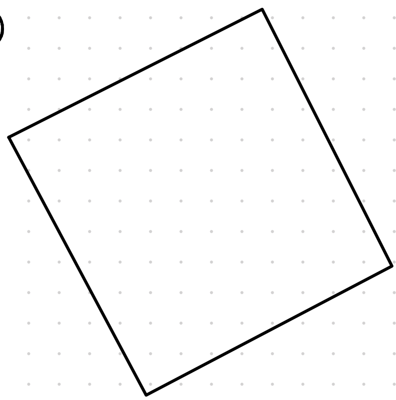
按增序排好 $\{a_n\}$ 用:

① $a_n \cdots a_1 \quad a_{2n} \cdots a_{n+1} \quad \cdots \quad a_{n^2} \cdots a_{n(n-1)+1}$

②

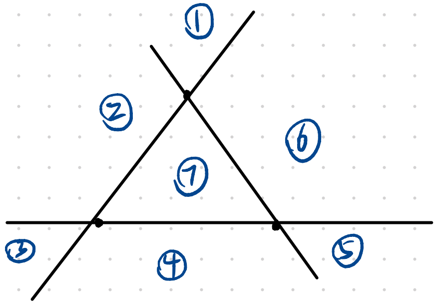


③



6. (15 pt) 确定 n，使得在平面上任取 n 个点（这 n 个点无三点共线且互不重合），则其中存在 4 个点构成凸四边形.

（请让 n 尽可能的小，越小得分越高）.



在 ②、④ ⑥ 出现时，则有了凸四边形

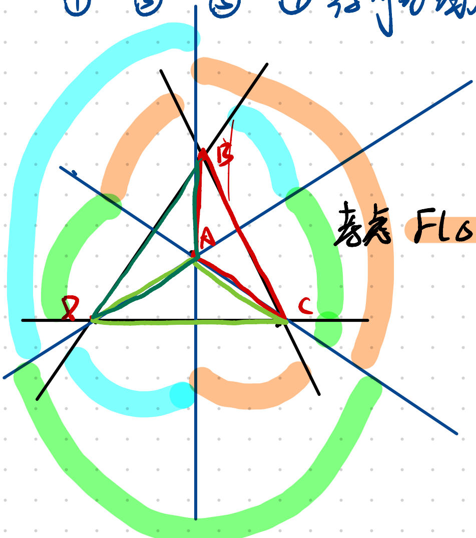
↓

将三角形ABC的 ② ④ ⑥ 区域称 F(△ABC)

feasible

往 ② ④ ⑥ 以外加点：

① ③ ⑤ ⑦ 得到的均为一点在另三点围成的三角形中



考虑 F(△ABC) ∪ F(△ACD) ∪ F(△ABD) ∪ F(△BCD)

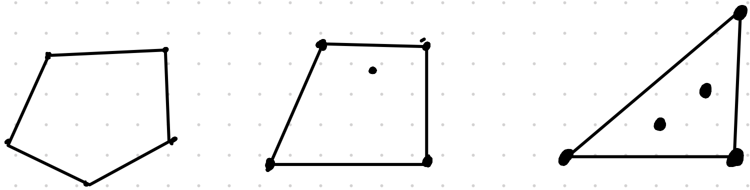
↓

故穷尽，可覆盖平面 ⇒ 再来一个点即可

法②（网友提供）

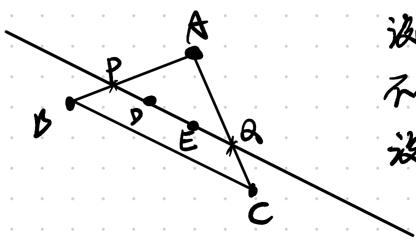
$n=4$时：在三角形内加一点可构造非凸四边形的方案

$n=5$时：先作5个点的凸包：（S为凸包则$\forall A,B\in S$，线段$AB\subset S$）



若凸包为五边形或四边形时，显然可以构成凸四边形.

若凸包为三角形.



设为$\triangle ABC$. 此时$D.E$位于其内部

不存在三点共线 $\Rightarrow$ 直线$D.E$与$\triangle ABC$交于两边（即AB AC

设交点为P. Q

则$BCED$为凸四边形.

7. (20pt) 证明在平面上任取 $\binom{2k-4}{k-2}+1$ 个点（这些点无三点共线且互不重合），总能找到其中 k 个点构成凸 k 边形。

（你能找到比 $\binom{2k-4}{k-2}+1$ 更小的数使得上述成立么？）

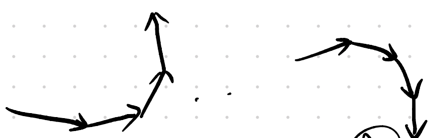
转化：考虑它们的斜率/幅角.

给定点集后可以选择x轴，使其不与这些点中任两点连线垂直.

则任两点的横坐标均不相同，⇒ 斜率均存在.

记 $g(a_1,a_2)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $h(3,m)$ $h(m,3)$. $m=\binom{\ }{\ }$

若可以找到 n 个点的序列 $a_1\cdots a_n$，其中相邻两点的斜率构成↑或↓序列



则这 n 个点显然构成凸 n 边形.

$h(m,m)$ $h(m,n)$

记对 $m,n\ge 3$，记 $h(m,n)$ 为最小的整数，→ 使得对 $h(m,n)+1$ 个点中必有一个长为 m 的凸序列 或 一个长为 n 的凹序列

目标 $\underset{}{h(m,m)\le\binom{2m-4}{m-2}}=\underbrace{\binom{2m-5}{m-3}}_{h(m,m-1)}+\underbrace{\binom{2m-5}{m-2}}_{h(m-1,m)}$

首先有 $h(n,3)=h(3,n)=n-1=\binom{n+3-4}{n-2}=\binom{n+3-4}{n-2}$

若 n 个点不满足 $x_1<x_2<\cdots<x_n$（构成凸数列），则其中必有某连续三项 x_i,x_{i+1},x_{i+2} 满足：$g(x_i,x_{i+1})\ge g(x_i,x_{i+2})$；另一也同理

若 $h(m,n)\le h(m,n-1)+h(m-1,n)$，则可以归纳得：

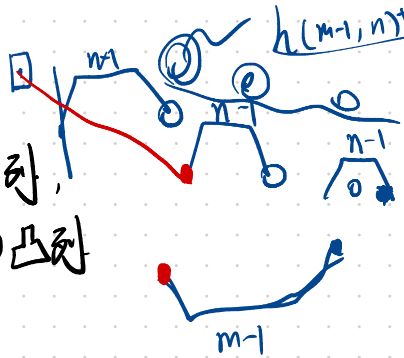
$h(m,n)\le\binom{m+n-4-1}{m-2}+\binom{m+n-4-1}{m-3}=\binom{m+n-4}{m-2}$ 从而得到 $h(n,n)\le\binom{2n-4}{n-2}$

则此时 $\binom{2n-4}{n-2}+1$ 个点中必存在长为n的凸序列或长为n的凹序列

下证明:

归纳假设: $h(m,n-1)=\binom{m+(n-1)-4}{m-2}$ $\quad h(m-1,n)=\binom{(m-1)+n-4}{(m-1)-2}$

反证,设h不成立. 即先设有一个 $h(m,n-1)+h(m-1,n)+1$ 个点的排布方案, 其中不存在长为 m 的凸列和长为n的凹列:



此时记此点集为 $S=h(m,n-1)+h(m-1,n)+1$ 个点,

其中 $\begin{cases} \text{从 } h(m,n-1)+1 \text{ 个点中可得一个长为 } n-1 \text{ 的凹列,} \\ \text{从 } h(m-1,n)+1 \text{ 个点中可得到一个长为 } m-1 \text{ 的凸列} \end{cases}$

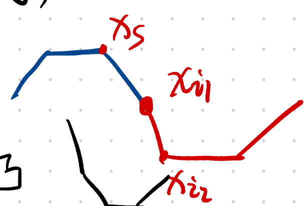
开始添项减项

取前 $h(m,n-1)+1$ 个点, 其中存在一个长为 $n-1$ 的凹列. l_1

去除 l_1 中最后一个点 再放入一个点, 可再得出 ～～ l_2

如此进行下去. 共可以得到 $h(m-1,n)+1$ 个不同的凹列 (尾一定相异)

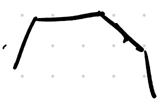
这 $h(m-1,n)+1$ 个尾中存在一个长为 $m-1$ 的凸列, 设为 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots x_{i\,h(m-1,n)+1}$



x_{i1} 是 l_1 的最后一项, 取前面凹列中 x_{i1} 前一个点

若 $g(x_s, x_{i1}) > g(x_{i1}, x_{i2})$ 则可拼出长为 m 的凸

若 $g(x_s, x_{i1}) < g(x_{i1}, x_{i2})$ 则可以 x_s 拼成 x_i 前的长为n的凹列.



$\Rightarrow h(m,n) \le h(m,n-1)+h(m-1,n)$ 毕