1. (10pt) 用 m 个不同的红宝石和 n 个不同的蓝宝石编成一串项链 ($m > n$)，要求任意两颗蓝宝石不能相邻，有多少种不同的编织方法?

(10pt) 用 m 个相同的红宝石和 n 个相同的蓝宝石编成一串项链 ($m > n$)，要求任意两颗蓝宝石不能相邻，有多少种不同的编织方法?（此问较困难，可只考虑 $m+n$ 为质数的情况。）

$$\text{线排列} \xrightarrow[n:1]{\text{旋转}} \text{圆排列} \xrightarrow[2:1\,(\text{若不对称})]{\text{翻转}} \text{项链数}$$

1) # m个红成一个圆 $= (m-1)!$

再从m个位置中取n个位置放蓝 $= \binom{m}{n} n!$

$\Rightarrow$ #总排列 $= \frac{1}{2}(m-1)!\,\frac{m!}{(m-n)!\,n!}\,n! = \frac{(m-1)!\,m!}{2\,(m-n)!}$

or: 此处可以直接/先定一颗确定的红宝石位于线排开头

接下来考虑m个间隔中插入n个蓝宝石 : $\binom{m}{n}$

红蓝宝石方案 各 $(m-1)!$ 和 $n!$

$\Rightarrow$ #总排列 $\frac{1}{2}\binom{m}{n}(m-1)!\,n!$

or: 线排 : #所有排列 − #首尾均是蓝:

$$A_m^m A_{m+1}^n - A_m^m A_n^2 A_{m-1}^{n-2} = m!\,\frac{(m+1)!}{(m+1-n)!} - m!\,\frac{n!}{(n-2)!}\,\frac{(m-1)!}{[m-1-(n-2)]!}$$

$$= m!\,\frac{(m-1)!}{(m+1-n)!}\,[(m+1)m - n(n-1)]$$

$$= m!\,\frac{(m-1)!}{(m-n)!}\,\frac{(m-n+1)(m+n)}{m+n-1}$$

$$= m!\,\frac{(m-1)!}{(m-n)!}(m+n)$$

再转为项链数 : $\frac{1}{2(m+n)} \cdot m!\,\frac{(m-1)!}{(m-n)!}(m+n) = \frac{m!\,(m-1)!}{2\,(m-n)!}$

(思路很多,有理即可.)

2) m+n为质数有什么用? 从一个圆排列任意位置断开形成的线排列均不同

or: 每个圆排列在旋转下没有"重合"的情况

$\downarrow$

$1 : (m+n)$

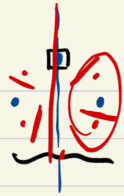
线排列: $\binom{m+1}{n} - \binom{m-1}{n-2}$

~~项链数~~: $\cancel{\dfrac{\binom{m+1}{n} - \binom{m-1}{n-2}}{2(m+n)}}$

见下一页

~~#项链数~~: $\cancel{\dfrac{\binom{m+1}{n}-\binom{m-1}{n-2}}{2(m+n)}}$

$m=4$
$n=3$



#圆排列 $\dfrac{\binom{m+1}{n}-\binom{m-1}{n-2}}{m+n}$ $\Rightarrow$ 哪些圆排列是对称的 ($\left[\frac{1}{m}\binom{m}{n}\right]$)

① m为奇数 (1:1) 对称: 对称轴上为红: $\binom{\frac{m-1}{2}\cancel{-1}}{\frac{n}{2}}$

(2:1) 不对称: $\dfrac{\binom{m+1}{n}-\binom{m-1}{n-2}}{m+n}-\binom{\frac{m-1}{2}\cancel{-1}}{\frac{n}{2}}$

#项链 $\binom{\frac{m-1}{2}-1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2}\left[\dfrac{\binom{m+1}{n}-\binom{m-1}{n-2}}{m+n}-\binom{\frac{m-1}{2}\cancel{-1}}{\frac{n}{2}}\right]$

② m为偶 对称: 对称轴上为蓝 $\binom{\frac{m}{2}-1}{\frac{n-1}{2}}$

不对称的: $\dfrac{\binom{m+1}{n}-\binom{m-1}{n-2}}{m+n}-\binom{\frac{m}{2}-1}{\frac{n-1}{2}}$

#项链 $=\binom{\frac{m}{2}-1}{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{2}\left[\dfrac{\binom{m+1}{n}-\binom{m-1}{n-2}}{m+n}-\binom{\frac{m}{2}-1}{\frac{n-1}{2}}\right]$

综上 #项链 $\begin{cases} \sim & m\text{为奇} \\ \sim & m\text{为偶} \end{cases}$

2. (5pt) 从整数 1 到 n 中**不重复**地取出 r 个数（这 r 个数两两不同）组成一个递增数列，有多少种不同的取法？

(10pt) 从整数 1 到 n 中**可重复**地取出 r 个数（这 r 个数可能有相同的）组成一个递增数列，有多少种不同的取法？(递增序列要求前一项不大于后一项。)

1) 取出后排序，那便与取的顺序无关，直接用组合数 $\binom{n}{r}$

2) 对应可重复取的组合数：用 x_i 表示取出的组合中 i 的个数

问题转化为不定方程 $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=r \\ x_i \ge 0 \end{cases}$ 结果 $\binom{n+r-1}{n-1}$

3. (10pt) 考虑一个凸 n 边形，其任意三条对角线不共点，求全部的对角线之间互相分割为多少线段。

转化为对角线交点的个数，每个交点将相交 2 线段分成 4 线段 ⇒ +2.

故即 # 总线段数 $= \frac{n(n-3)}{2} + 2\binom{n}{4}$

4. (15pt) 考虑方程 $x_1+x_2+x_3=17$，该方程满足 $x_1 \ge 0, x_2 \ge 1, x_3 \ge 2$ 的非负整数解有多少个？该方程满足 $x_1<x_2<x_3$ 的非负整数解又有多少个？

1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=17 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 1, \quad x_3 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+1)+x_2+(x_3-1)=17 \\ (x_1+1), \ x_2, \ (x_3-1) \ge 1 \end{cases}$

解的个数为：$\binom{17-1}{2} = \frac{16\times 15}{2} = 120$

2) $x_1<x_2<x_3$:

直接穷举：

$$\left.\begin{aligned}
x_1 = 0 &: 0 < x_2 \le \lfloor \tfrac{17-1}{2} \rfloor = 8 \quad \text{共 8 种} \\
1 &: 1 < x_2 \le \lfloor \tfrac{16-1}{2} \rfloor = 7 \quad \text{共 6 种} \\
2 &: 2 < x_2 \le \lfloor \tfrac{15-1}{2} \rfloor = 7 \quad \text{共 5 种} \\
3 &: 3 < x_2 \le \lfloor \tfrac{14-1}{2} \rfloor = 6 \quad \text{共 3 种} \\
4 &: 4 < x_2 \le \lfloor \tfrac{13-1}{2} \rfloor = 6 \quad \text{共 2 种}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{共 24 组解}$$

5 不可

or: # $x_1 \ne x_2 \ne x_3$ 的解 $= \binom{17+3-1}{3-1} - \binom{3}{2} \times 9 = 171-27 = 144$

$x_1<x_2<x_3$ 的解 $= \frac{\# x_1 \ne x_2 \ne x_3}{C_3^3} = \frac{144}{6} = 24$

5. (10pt) 考虑方程 $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$，其中 m,n 均为偶数且 $m>n$：

(a) (5pt) 求该方程非负偶数解 (x_i 全为偶数) 的个数。

(b) (5pt) 求该方程非负奇数解 (x_i 全为奇数) 的个数。

1) 全为偶: 直接: $\begin{cases} \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{2}=\frac{m}{2}, \\ \frac{x_i}{2}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \#解 = \binom{\frac{m}{2}+n-1}{n-1}$

2) 全为奇: 则: $\begin{cases} \frac{x_1-1}{2}+\cdots+\frac{x_n-1}{2}=\frac{m-n}{2} \\ \frac{x_i-1}{2}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \#解 = \binom{\frac{m-n}{2}+n-1}{n-1}$

$=$

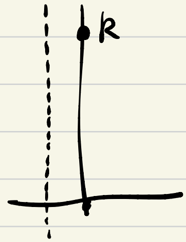
$\begin{cases} \frac{x_1+1}{2}+\frac{x_2+1}{2}+\cdots+\frac{x_n+1}{2}=\frac{m+n}{2} \\ \frac{x_i+1}{2}\geq 1. \end{cases} \Rightarrow \#解 = \binom{\frac{m+n}{2}-1}{n-1}$

6. (20pt) 平面上一支蚂蚁从原点出发，它每次向上、向右或向左走距离 1，经过 m 步后到达点 $(0,k)$。

(a) (3pt) 证明 $m-k$ 是偶数。

(b) (7pt) 求一共有多少种不同的走法?

(c) (10pt) 上述走法中不包含 $x=-1$ 这条线上的点的走法有多少种?

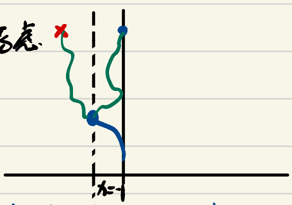


1) 向上U. 向右R. 向左L步 有 $\begin{cases} U+L+R=m \\ U=k \\ L=R \end{cases} \Rightarrow m-k=L+R=2L$ 为偶

2) 选 $\{a_i\}_{i\in[m]}$ 中每处是什么 action $\in\{U.R.L\}$，$\#走法 = \binom{m}{k}\binom{m-k}{\frac{m-k}{2}} = \frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{(m-k)!}{(\frac{m-k}{2})!(\frac{m-k}{2})!}$

$= \frac{m!}{k!\,(\frac{m-k}{2})!\,(\frac{m-k}{2})!}$

3) 考虑



若走到了 $x=-1$ 上，则此后走到 $(0,k)$ 和走到 $(-2,k)$ 的走法完全关于 $x=-1$ 对称，而之前走法相同.

也即: $\#\{(0,0)\to\{x=-1\}\to(0,k)\} = \#\{(0,0)\to(-2,k)\}$

故: 不走 $x=-1$ 的走法数: $\binom{m}{k}\binom{m-k}{\frac{m-k}{2}} - \binom{m}{k}\binom{m-k}{\frac{m-k}{2}-1}$

$= \binom{m}{k}\binom{m-k}{\frac{m-k}{2}}\frac{1}{\frac{m-k}{2}+1}$

or: 只走点 ±1, R: 该长走 $2n$ 步, 向左 n, 向右 n, 不包含 $x=-1$

$\Updownarrow$

x 始终非负, 为 Catalan数: $\dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$

$C_0=1.\quad C_{n+1}=\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \quad n\geq 0.$, 闭式公式: $C_n=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

7. (5pt) 使用二项式系数证明 $\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$,

(提示: 考虑 $\sum_{i=0}^{n}(1+x)^i$).

(5pt) 使用二项式系数证明 $\sum_{i=0}^{k+1}\binom{n-k-1+i}{i}=\binom{n+1}{k+1}$,

(提示: 考虑 $\sum_{i=0}^{n}x^i(1+x)^{(n-i)}$).

1) $\sum_{i=0}^{n}(1+x)^i=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^j \longrightarrow x^k$ 系数为 $\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}$

$\quad \| $

$\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{(1+x)-1}(x\neq 1)=\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{x}(x\neq 1)\longrightarrow x^k$ 系数为 $\binom{n+1}{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\Big(^{n+}$

2) $\sum_{i=0}^{n}x^i(1+x)^{(n-i)}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}x^{i+j}\longrightarrow x^{k+1}$ 系数为 $\sum_{j=0}^{k+1}\binom{n-(k+1-j)}{j}$

$\quad \|$

$\dfrac{(1+x)^n\left(1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{x}{1+x}}=(1+x)^{n+1}-x^{n+1}\longrightarrow x^{k+1}$ 系数为 $\binom{n+1}{k+1}$

$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k+1}\dfrac{n-(k+1-j)}{j}=\binom{n+1}{k+1}$

8. (20pt) 求解下列式子的结果并证明:

(a) (5pt) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}e^i$.

(b) (7pt) $\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}2^{2i}$.

(c) (8pt) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i^2$.

a) $(1+e)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}e^i$

b) 分奇偶

$$\begin{cases}(1+2)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}2^i = \sum_{i=0}^{n}\left[\binom{2n}{2i}2^{2i} + \binom{2n}{2i-1}2^{2i-1}\right] \\ (1-2)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}(-2)^i = \sum_{i=0}^{n}\left[\binom{2n}{2i}2^{2i} - \binom{2n}{2i-1}2^{2i-1}\right]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}2^{2i} = \frac{(1+2)^{2n}+(1-2)^{2n}}{2} = \frac{3^{2n}+1}{2}$$

c)

$$\begin{cases}(1-x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i x^i \\ -n(1-x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i i x^{i-1} \\ n(n-1)(1-x)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i i(i-1)x^{i-2}\end{cases}$$

求导

求导

$(n\geq 3)$

$$\Rightarrow -n(1-x)^{n-1} + n(n-1)x(1-x)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i i^2 x^{i-1}$$

取 $x=1$. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i i^2 = 0 \quad n\geq 3$

$$原式 = \begin{cases}0 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ 2 & n=2 \\ 0 & n\geq 3\end{cases}$$