

离散数学 (2024 秋) 作业六

截止日期: 1 月 3 日下午 6 点

1. (5pt) 求 1 到 420 中能被 3 和 5 整除, 但不能被 7 整除的整数的个数。
(5pt) 求 1 到 420 中能被 3 和 5 整除, 但不能被 6 整除的整数的个数。
2. (10pt) 从三个红球, 五个黄球, 六个蓝球中取出 9 个球, 共有多少种不同的取法。
3. (5pt) 有 n 名学生分别从 A, B 两门课程中选修至少一门课程, 其中至少有一名同时选修两门课程。求一共有多少种不同的选课方法?
(5pt) 有 n 名学生分别从 A, B, C 三门课程中选修至少一门, 至多两门课程, 且对于 A, B, C 中的任意两门课程, 都至少有一名同时选修了这两门课程。求一共有多少种不同的选课方法?
4. (15pt) 有 31 名学生分别从总共 10 门课程中选修至少 6 门课程, 证明存在两个学生, 他们至少选了 5 门一样的课程。
5. (5pt) 将 1 到 n 的整数排成一列, 其中恰好有两个位置上的数字等于其排位序号的排列方式有多少种?
(10pt) 将 1 到 n 的整数排成一列, 其中至少有两个位置上的数字等于其排位序号的排列方式有多少种?
6. (10pt) 使用组合含义证明恒等式 $\frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} = \binom{2n-k+1}{k} - \binom{2n-k-1}{k-2}$.
(考虑如下问题: $2n$ 个人围坐一桌, 从中选取 k 个人, 要求其中任意两人位置不相邻, 有多少种不同的选取方法。)
7. (15pt) 设 $S = \{0, 1\}^n$ 为所有长度为 n 的 0-1 字符串组成的集合。 S 的一个子集 A 被称为“坏的”, 如果 1 到 n 中存在某个位置 i 使得对于 A 中的每个字符串, 该字符串在第 i 个位置上恒为 0 或恒为 1; 反之子集 A 被称为“好的”, 求 S 的好子集的个数。

8. (15pt) f 和 g 为定义在正整数上的函数, 已知对任意 $n > 0$ 有

$$f(n) = \sum_{n|d} g(d),$$

证明对任意 $n > 0$, 有

$$g(n) = \sum_{n|d} g(d) \mu(d/n).$$

9. (15pt) 令 $F = \{f : [m] \rightarrow [k]\}$ 为所有 $[m]$ 到 $[k]$ 的函数的集合, σ 为 $[m]$ 到 $[m]$ 的一个置换。且 σ 可表示为如下轮换形式

$$(a_1, a_2, \dots, a_{i_1})(b_1, b_2, \dots, b_{i_2}) \dots (c_1, c_2, \dots, c_{i_t}), i_1 + i_2 + \dots + i_t = m.$$

即 $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{i_1}) = a_1, \sigma(b_1) = b_2, \sigma(b_2) = b_3, \dots, \sigma(b_{i_2}) = b_1, \dots, \sigma(c_1) = c_2, \sigma(c_2) = c_3, \dots, \sigma(c_{i_t}) = c_1.$

求有多少个 $f \in F$ 使得 $f \circ \sigma = f$.

10. (15pt) 用 n 颗宝石编成一串项链, 其中每颗宝石可以用红宝石或蓝宝石, 一共有多少种不同的编织方法?