1. (5pt) 求 1 到 420 中能被 3 和 5 整除，但不能被 7 整除的整数的个数。

(5pt) 求 1 到 420 中能被 3 和 5 整除，但不能被 6 整除的整数的个数。

1) $\begin{cases} 3|i,\ 5|i \Rightarrow lcm(3,5)|i \text{ 即 } 15|i & \Rightarrow \text{被 } 3,5 \text{ 整除的有 } \frac{420}{15}=28 \\ 3|i,\ 5|i,\ 7|i \Rightarrow 105|i & \Rightarrow \text{被 } 3,5,7 \text{ 整除的有 } \frac{420}{105}=4 \end{cases}$

$\Rightarrow \#\{i\in[420] \mid 3|i, 5|i, 7\nmid i\} = 28-4=24$

2) $3|i\ \ 5|i\ \ 6|i \Rightarrow 30|i \quad \Rightarrow$ 被 3、5、6 整除的有 $\frac{420}{30}=14$

$\Rightarrow \#\{i\in[420] \mid 3|i, 5|i, 6\nmid i\} = 28-14=14$

2. (10pt) 从三个红球，五个黄球，六个蓝球中取出 9 个球，共有多少种不同的取法。

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \\ 0\le x_1\le 3,\ 0\le x_2\le 5,\ 0\le x_3\le 6 \end{cases}$

容斥:

$\# = \{x_1\ge 0, x_2\ge 0\ x_3\ge 0\} \quad = \binom{9+3-1}{2}$

$-\{x_1\ge 4\}-\{x_2\ge 6\}-\{x_3\ge 7\} \quad - \binom{5+3-1}{2}-\binom{3+3-1}{2}-\binom{2+3-1}{2}$

$+\{x_1\ge 4, x_2\ge 6\}+\{x_1\ge 4, x_3\ge 7\}+\{x_2\ge 6, x_3\ge 7\} \quad +0+0+0$

$-\{x_1\ge 4, x_2\ge 6, x_3\ge 7\} \quad -0$

$= 55-21-10-6 = 18$

3. (5pt) 有 n 名学生分别从 A，B 两门课程中选修至少一门课程，其中至少有一名学生同时选修两门课程。求一共有多少种不同的选课方法?

(5pt) 有 n 名学生分别从 A，B，C 三门课程中选修至少一门，至多两门课程，且对于 A, B，C 中的任意两门课程，都至少有一名学生同时选修了这两门课程。求一共有多少种不同的选课方法?

$\{A \mid B \mid C \mid AB \mid BC \mid AC\}$

1) $\#$ = $\#$\{至少修一门\} − $\#$\{均只修一门\}

$= 3^n - 2^n$

2) $\#$ = $\#$\{至少一门至多两门\}

− $\#$\{无人选AB/AC/BC\}

+ $\#$\{无人选AB且无人选BC\} + ~ + ~

− $\#$\{全选一门\}

$= 6^n - 3\times 5^n + 3\times 4^n - 3^n$

4. (15pt) 有 31 名学生分别从总共 10 门课程中选修至少 6 门课程，证明存在两个学生，他们至少选了 5 门一样的课程。

设 S 为所有课程. S_i 为第 i 位同学选择课程的集合. 取 $T_i = S \setminus S_i$

其中 $|S_i| \ge 6$，为尽可能使重叠程度小，取 $|S_i| = 6$. $|T_i| = 4$.

俩学生选了5门一样的课程 $\Longleftrightarrow$ 他俩没选的课有3门

S 的三元子集个数为: $\binom{10}{3} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$ 其中 每个 T_i 包含 $\binom{4}{3} = 4$ 个三元子集

$31 \times 4 > 120$ 由抽屉原理 $\exists\, i \ne j$ 使 T_i 与 T_j 有相同的三元子集

$\Downarrow$

学生 i, j 没选的课有3门，故选了5门一样的课.

5. (5pt) 将 1 到 n 的整数排成一列，其中恰好有两个位置上的数字等于其排位序号的排列方式有多少种?

(10pt) 将 1 到 n 的整数排成一列，其中$\boxed{\text{至少}}$有两个位置上的数字等于其排位序号的排列方式有多少种?

错排公式：$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$

1) 两位置不变其余错排：$\binom{n}{2} D_{n-2}$

2) 全排列 − 全错排 − 1个错排：$n! - D_n - \binom{n}{1} D_{n-1}$

6. (10pt) 使用组合含义证明恒等式 $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} = \binom{2n-k+1}{k} - \binom{2n-k-1}{k-2}$.

(考虑如下问题：$2n$ 个人围坐一桌，从中选取 k 个人，要求其中任意两人位置不相邻，有多少种不同的选取方法。)

RHS: 2n个人排成一列，选k人互不相邻且首尾不同时取到 ： $\binom{2n-k+1}{k} - \binom{2n-k-1}{k-2}$

LHS: 2n人成圆，取k个人两两不相邻. $\longrightarrow$ 1圆排对应2n-k个线排.

$\downarrow$

强制取余下2n-k个人中的一个作为线排开头.

(即从2n个人中选定一人作线排开头，且强制不选这个人) $\Rightarrow$ 线排共 $\binom{2n}{1}\binom{2n-k}{k}$

从余下2n-1个人中选k个不相邻的为 $\binom{2n-1-k+1}{k}$

则选择的圆排共 $\frac{1}{2n-k}\binom{2n}{1}\binom{2n-k}{k} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$

7. (15pt) 设 $S=\{0,1\}^n$ 为所有长度为 n 的 0-1 字符串组成的集合。S 的一个子集 A 被称为“坏的”，如果 1 到 n 中存在某个位置 i 使得对于 A 中的每个字符串，该字符串在第 i 个位置上恒为 0 或恒为 1；反之子集 A 被称为“好的”，求 S 的好子集的个数。

C_i 表示第 i 个位置恒为 0 或恒为 1 的字符串的集合.

这种字符串的可能取值 $2\cdot 2^{n-1}$ $\Rightarrow |C_i| = 2\left(2^{2^{n-1}}-1\right)$ (非空)

且 $|C_i \cap C_j| = 2^2\left(2^{2^{n-2}}-1\right)$

答案: $\#\text{好} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 2^i \left(2^{2^{n-i}}-1\right)$

8. (15pt) f 和 g 为定义在正整数上的函数，已知对任意 $n>0$ 有

$$f(n)=\sum_{n\mid d} g(d),$$

证明对任意 $n>0$，有

$$g(n)=\sum_{n\mid d} f(d)\mu(d/n).$$

$$\begin{aligned}
RHS &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) f(kn) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \sum_{kn\mid d} g(d) \\
&= \sum_{n\mid d} g(d) \sum_{k\mid \frac{d}{n}} \mu(k) \\
&= \sum_{n\mid d} g(d)\, I\left(\tfrac{d}{n}=1\right) \\
&= g(n)
\end{aligned}$$

9. (15pt) 令 $F = \{f : [m] \to [k]\}$ 为所有 $[m]$ 到 $[k]$ 的函数的集合，σ 为 $[m]$ 到 $[m]$ 的一个置换。且 σ 可表示为如下轮换形式

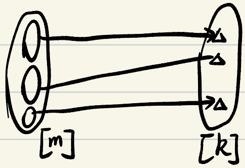
$$(a_1, a_2, \ldots, a_{i_1})(b_1, b_2, \ldots, b_{i_2}) \ldots (c_1, c_2, \ldots, c_{i_t}), i_1 + i_2 + \ldots + i_t = m.$$

即 $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3, \ldots$, $\sigma(a_{i_1}) = a_1$, $\sigma(b_1) = b_2$, $\sigma(b_2) = b_3, \ldots$, $\sigma(b_{i_2}) = b_1, \ldots, \sigma(c_1) = c_2$, $\sigma(c_2) = c_3, \ldots$, $\sigma(c_{i_t}) = c_1$.

求有多少个 $f \in F$ 使得 $f \circ \sigma = f$.

σ为[m]中分组置换.

f:



$f(\sigma(x)) = f(x)$ 则在分组置换下 x的像不变 (共t组)

$\Downarrow$

f中每一组对应[k]中的一个像.

$\Downarrow$

将[m]中元素按f作用下的像分组. σ为此分组下的置换. 则此时f对σ不变.

$\Downarrow$

分组可能性 k^t (共t组)

10. (15pt) 用 n 颗宝石编成一串项链，其中每颗宝石可以用红宝石或蓝宝石，一共有多少种不同的编织方法?

用Polya计数原理.

线排列 $|X| = 2^n$

考虑二面体群 $D_n = \{r_1, r_2, \cdots r_n, s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ r为旋转, s为对称

$$\begin{cases} O_{\vec a} = \{\sigma_i(a) \mid \sigma_i \in D_n\} & \text{轨道} \\ D_{\vec a} = \{\sigma_i \in D_n \mid \sigma_i(\vec a) = \vec a\} & \text{固定子群} \\ S_{\sigma_i} = \{\vec a \in X \mid \sigma_i(\vec a) = \vec a\} & \text{稳定子} \end{cases}$$

$$\#\text{轨道} = \sum_{\vec a \in X} \frac{1}{|O_{\vec a}|} = \sum_{\vec a \in X} \frac{|G_a|}{|G|} = \sum_{\sigma_i \in G} \frac{|S_{\sigma_i}|}{|G|} = \sum_{\sigma_i \in G} \frac{|S_{\sigma_i}|}{2n}$$

考虑旋转: 若一个排列在σ_k下保持不变, 则应具有周期性.

此时宝石的排列由长为 $d = \gcd(n, k)$ 的周期重复 $\frac{n}{d}$ 次得到

$\#$排列 $= 2^d = 2^{\gcd(n,k)}$

$$\#\text{圆排列} = \sum_{k=1}^{n} 2^{\gcd(n,k)} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) 2^d$$

有多少个k可以使 $\gcd(n,k) = d$ $\Rightarrow$ $\gcd\left(\frac{n}{d}, \frac{k}{d}\right) = 1$

考虑对称：n为奇：对称轴上有1个点，$\#\text{对称} = 2\times 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}}$ $\left(= 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)$

n为偶：对称轴上有2点或无点，$\#\text{对称} = \frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2^{\frac{n-2}{2}} + \frac{1}{2}\times 2^{\frac{n}{2}} = 3\times 2^{\frac{n}{2}-1}$

$$\Rightarrow \#\text{项链} = \frac{1}{2}(\#\text{圆排列} - \#\text{对称}) + \#\text{对称}$$

$$= \frac{1}{2}\#\text{圆排列} + \frac{1}{2}\#\text{对称}$$

$$\Rightarrow \#\text{项链} = \begin{cases} \frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)2^d + 2^{\frac{n-1}{2}} & n\text{为奇} \\ \frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)2^d + 3\times 2^{\frac{n}{2}-2} \end{cases}$$

(用莫反推圆排列：)

记$M(d)$为周期是d的圆排列个数 $(d|n)$ ：周期为d的圆排列对应 d个不同的线排列

首先有：

$$\sum_{d|n} d\,M(d) = 2^n$$

Mobius反演：

$$n\,M(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\,2^{\frac{n}{d}}$$

$$\#\text{圆排列} = \sum_{d|n} M(d) = \sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{l|d}\mu(l)\,2^{\frac{d}{l}}$$

$$= \sum_{d|n}\sum_{l|d,\,d|n}\frac{1}{d}\mu(l)\,2^{\frac{d}{l}}$$

$$\overset{d=il}{=\!=} \sum_{l|n}\sum_{i|\frac{n}{l}}\frac{1}{il}\mu(l)\,2^i$$

$$= \sum_{i|n}\sum_{l|\frac{n}{i}}\frac{1}{il}\mu(l)\,2^i$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i|n}2^i\sum_{l|\frac{n}{i}}\frac{1}{l}\mu(l)\frac{n}{i}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i|n}\varphi\left(\frac{n}{i}\right)2^i$$