

离散数学 (2024 秋) 作业五
截止时间 12 月 23 日上午 10 点

1. (10pt) 用 m 个不同的红宝石和 n 个不同的蓝宝石编成一串项链 ($m > n$)，要求任意两颗蓝宝石不能相邻，有多少种不同的编织方法?
(10pt) 用 m 个相同的红宝石和 n 个相同的蓝宝石编成一串项链 ($m > n$)，要求任意两颗蓝宝石不能相邻，有多少种不同的编织方法? (此问较困难，可只考虑 $m + n$ 为质数的情况。)
2. (5pt) 从整数 1 到 n 中不重复地取出 r 个数 (这 r 个数两两不同) 组成一个递增数列，有多少种不同的取法?
(10pt) 从整数 1 到 n 中可重复地取出 r 个数 (这 r 个数可能有相同的) 组成一个递增数列，有多少种不同的取法? (递增序列要求前一项不大于后一项。)
3. (10pt) 考虑一个凸 n 边形，其任意三条对角线不共点，求全部的对角线之间互相分割为多少线段。
4. (15pt) 考虑方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ ，该方程满足 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2$ 的非负整数解有多少个? 该方程满足 $x_1 < x_2 < x_3$ 的非负整数解又有多少个?
5. (10pt) 考虑方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ ，其中 m, n 均为偶数且 $m > n$:
 - (a) (5pt) 求该方程非负偶数解 (x_i 全为偶数) 的个数。
 - (b) (5pt) 求该方程非负奇数解 (x_i 全为奇数) 的个数。
6. (20pt) 平面上一支蚂蚁从原点出发，它每次向上、向右或向左走距离 1，经过 m 步后到达点 $(0, k)$ 。
 - (a) (3pt) 证明 $m - k$ 是偶数。
 - (b) (7pt) 求一共有多少种不同的走法?

(c) (10pt) 上述走法中不包含 $x = -1$ 这条线上的点的走法有多少种?

7. (5pt) 使用二项式系数证明 $\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,

(提示: 考虑 $\sum_{i=0}^n (1+x)^i$).

(5pt) 使用二项式系数证明 $\sum_{i=0}^{k+1} \binom{n-k-1+i}{i} = \binom{n+1}{k+1}$,

(提示: 考虑 $\sum_{i=0}^n x^i (1+x)^{(n-i)}$).

8. (20pt) 求解下列式子的结果并证明:

(a) (5pt) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e^i$.

(b) (7pt) $\sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} 2^{2i}$.

(c) (8pt) $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} i^2$.