第七次习题课讲义

王元叙

2025 年 1 月 3 日

目录

1 作业题目

Problem 3

首先我们证明 $R(k,l) \leq R(k-1,l)+R(k,l-1)$ ，令 $n=R(k-1,l)+R(k,l-1)$ ，下面我们想要证明 K_n 的 2 一边染色中存在一个红色的 K_k 或一个蓝色的 K_l . 考虑 K_n 的一个 2 一边染色，固定 K_n 中的一个点 x ，定义

$$A=\{y \in V\left(K_n\right) \backslash\{x\}: x y \text { blue }\}, B=\{y \in V\left(K_n\right) \backslash\{x\}: x y \text { red }\}$$

则 $|A|+|B|=n-1=R(k-1,l)+R(k,l-1)-1$ ，由鸽巢原理，要么 $|A| \geq R(k-1,l)$ ，要么 $|B| \geq R(k,l-1)$.

Case 1: 设 $|A| \geq R(k-1,l)$ ，考虑 A 上诱导出的完全图，以及其上的 2-边染色，由 $R(k-1,l)$ 的定义，一定存在一个蓝色的 K_{k-1} 或者一个红色的 K_l ，如果前者成立，我们将 x 加入 K_{k-1} 就得到了一个蓝色的 K_k ，因此 K_n 中存在一个蓝色的 K_k 或者一个红色的 K_l 。

Case 2: 设 $|B| \geq R(k,l-1)$ ，同上面的分析．因此 $R(k,l) \leq R(k-1,l)+R(k,l-1)$ 成立.

下面我们对 $k+l$ 用归纳法证明 $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$ ，首先

$$R(1,2)=R(2,1)=1 \leq \binom{1}{1}$$

假设待证不等式对 $k+l-1$ 成立，那么

$$R(k,l) \leq R(k-1,l)+R(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2}+\binom{k+l-3}{k-1}=\binom{k+l-2}{k-1}$$

从而得证.

Problem 5

使用记号 $N(v)=\{u: uv \in E(G)\}$ 表示 v 的邻居.

设 G 当中最长路为 $P=u_1 u_2 \cdots u_l$ ，并且 $l<|V|$.

那么 $N(u_1)$ 必然被 P 包含，否则设 $v \in N(u_1) \backslash P$ ，那么 $v u_1 u_2 \cdots u_l$ 就是一个更长的路. 从而 $\delta \leq d(u_1)=|N(u_1)| \leq l-1$. 同理 $N(u_l)$ 也被 P 包含，那么 $\delta \leq d(u_l)=|N(u_l)| \leq l-1$.

另一方面，$\{u_1, \cdots, u_l\}$ 当中不能包含一个长度为 l 的环，否则由 $l<|V|$ 必然存在一个点 $v \notin \{u_1, \cdots, u_l\}$ ，而 v 到 $\{u_1, \cdots, u_l\}$ 存在长度至少为 1 的路径，这诱导了一条长度至少为 $l+1$ 的路径。

那么，设 $u_i \in N(v_l)$ 那么 $u_{i+1} \notin N(u_1)$ ，否则 $u_1u_2 \cdots u_iu_lu_{l-1} \cdots u_{i+1}u_1$ 就是一个长度为 l 的环，这与上面的结论矛盾. 同理 $u_{i-1} \notin N(u_1)$. 但是我们又知道 $N(v_1)$ 和 $N(v_l)$ 完全包含于 P 并且大小分别至少为 δ，从而 P 至少包含 $2\delta + 1$ 个点，也就是长度至少 2δ.

Problem 6

1. 若 G 是二部图，显然不包含奇数圈。若不包含奇数圈，那么不妨假设 G 联通图。G 中任意两个顶点之间不能同时有奇数和偶数长度的路径，否则可以给出一个奇数圈。此时任取其中一个点 v ，并定义 A 为所有到 v 有奇数长度路径的顶点，定义 B 为所有到 v 有偶数长度路径的顶点。A, B 中的顶点必然两两不相连，否则与定义矛盾。从而 (A, B) 构成 G 的一个二部图划分。

2. 设 P 是 G 的 Halmilton 圈，那么在圈 P 中相邻的两个点必然分别属于 A, B 。这样必然有 $|A| = |B|$ ；否则不妨设 $|A| > |B|$ ，由鸽巢原理将 B 中元素看作隔板必定存在两个 A 相邻。从而 $|G| = |A| + |B|$ 是偶数。

Problem 9

1. 若 $P = u_1 \cdots u_l$ 且 $d(u_1) > 1$ ，则存在 $v \neq u_2$ 与 u_1 相邻。由于 G 是树，必然有 $v \notin P$ 。否则设 $v = u_i$, $vu_1 \cdots u_{i-1}v$ 构成一个圈与定义矛盾。从而 $vu_1 \cdots u_l$ 是一个更长的路径，与定义矛盾。

2. 设 P, Q 是两条没有公共点的最长路径，长度为 L。那么由于树是联通的，必定存在路 R 连接 P 和 Q ，长度 $L' \geq 1$。设 $P = u_1 \cdots u_L$ ，$Q = v_1 \cdots v_L$ ，R 连接 u_i 与 v_j 。那么 $u_1 \cdots u_i \cdots v_j \cdots v_L$ 和 $v_1 \cdots v_j \cdots u_i \cdots u_L$ 的总长度为 $2L + 2L' \geq 2L + 2$ ，从而两条中至少有一条长度比 L 大，这与最长路定义矛盾。

3. 不妨设这条路为 $P = v_1 \cdots v_{2k-2}$ 那么对于任意一个 P 外的顶点 u ，由联通性存在一条 u 到 P 的最短路径，设这条路的终点为 v_i 。

   如果 $i \leq k-1$ 那么 $u \cdots v_iv_{i+1} \cdots v_{2k-2}$ 是一个长度为 k 的路。如果 $i \geq k$ 那么 $u \cdots v_iv_{i-1} \cdots v_1$ 是一个长度为 k 的路。这样的到了 $|V| - (2k-2)$ 条路径。

   而另一方面在 P 上存在 $k-2$ 条长度为 k 的路径，这样总共就有 $|V| - k$ 条路径。

Problem 1

对 K_{100} 中任意一个顶点 v 记 $d(v)$ 为红色邻边的数量，则 $0 \le d(v) \le 99$ 。另外有 $d(v)$ 为偶数，从而共有 $0, 2, \cdots, 98$ 共 50 种取值。必定有 $d(1), \cdots, d(100) = 0, 0, 2, 2, \cdots, 98, 98$ 相差一个排列成立，否则由鸽巢原理必定存在三个点红色邻边数量相同。也说就是恰好存在两个点 a, b 与其他所有顶点没有红色边，同时存在两个点 c, d 满足 $d(c) = d(d) = 98$ 。但由于 a, b 与其他所有点都没有红色边，$d(c) \le 100 - 1 - 2 = 97$，这就产生了矛盾。

Problem 2

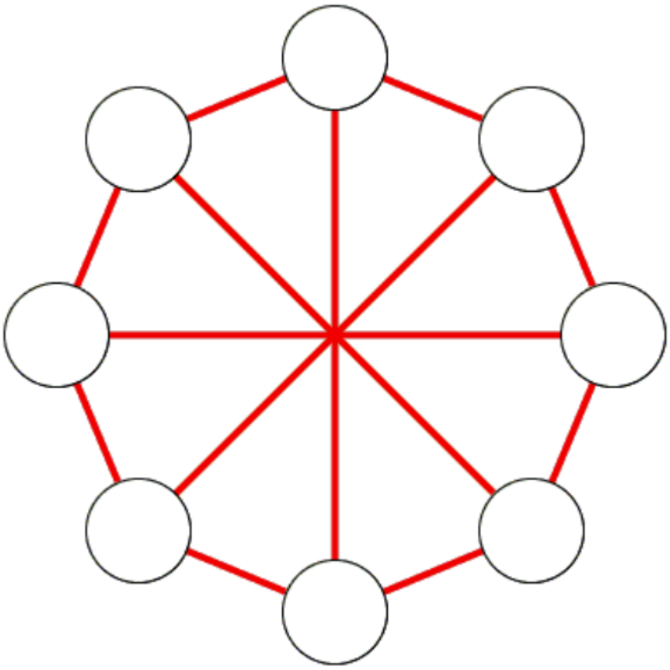

图 1: **红色边，对剩余的边染蓝色**

这样构造的图当中没有红色 K_3 和蓝色 K_4

Problem 4

使用鸽巢原理。若 n 个点的度数为 $\{d_1, \cdots, d_n\}$ 并且两两不同。那么由于 $0 \le d \le n-1$ ，必然有 $\{d_1, \cdots, d_n\} = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 。也就是说有一个点与剩下所有点有边，还有一个点与剩下所有点无边，这是矛盾的。

Problem 7

归纳证明：假设图 G 有 $n \ge 0$ 条边，且该命题对于所有边数小于 n 的图成立。

若 G 有多个连通分量，则该命题对于每个较小的分量成立，因此对于整个图 G 也成立。我们现在假设 G 是连通的。对于 $n=0$ 的情况显然成立，因此我们假设 $n>0$。

($\Rightarrow$)：假设 G 有一个欧拉回路 $v_0v_1v_2\dots v_n$，其中 $v_0=v_n$。考虑所有 (i,j)，满足 $0\le i<j\le n$ 且 $v_i=v_j$。这样的对一定存在，因为 $v_0=v_n$（且 $n>0$!）。从这些对中选择 (i,j)，使得 $j-i$ 最小。则 $v_iv_{i+1}\dots v_j$ 是一个简单回路 γ，而 $v_0\dots v_iv_{j+1}\dots v_n$ 则是图 $G':=G-\gamma$ 的一个欧拉回路。根据归纳假设，G' 可以被划分为互不相交的回路。与 γ 一起，我们就得到了 G 的一个互不相交回路的划分。

($\Leftarrow$)：假设图 G 可以划分为互不相交的回路。由于 $n>0$，这个划分中至少有一个回路。如果只有一个回路，那么它自动是一个欧拉回路，我们完成证明。否则，选择一个回路 $\gamma=v_0v_1\dots v_k$（其中 $k>0$ 且 $v_k=v_0$）。然后我们得到图 $G-\gamma$ 的一个互不相交回路的划分，因此根据归纳假设，$G-\gamma$ 的每个连通分量都是欧拉图。同时，γ 与 $G-\gamma$ 的每个连通分量至少共享一个顶点。构造 G 的一个欧拉回路的方法如下：从 γ 开始，并按以下方式扩展它：如果 G' 是 $G-\gamma$ 的一个连通分量，选择 $v\in G'$，使得 v 出现在 γ 中（因此也出现在目前已构造的欧拉回路中），然后将目前已构造的回路中第一次出现的 v 替换为 G' 的一个欧拉回路，该回路以 v 为起点和终点。经过所有分量 G' 的处理后，我们就得到了 G 的一个欧拉回路。

Problem 8

对于一个树我们有 $e=n-1$.

如果图 G 是由 C 个连通分量组成的，每个连通分量 $G_i=(V_i,E_i)$ 满足公式：

$$|V_i|-|E_i|=1$$

我们有 $|V|=\sum|V_i|,|E|=\sum|E_i|$，并且

$$\sum_{i=1}^{C}(|V_i|-|E_i|)=C$$

因此总有

$$|V|-C=|E|$$

Problem 10

先考虑 G 是一个连通图的情况。

我们对 G 的边数 $e(G)$ 使用数学归纳法. 若 $e(G)=n-1$ 并且 G 联通，则 G 是一颗树。此时我们有 $f=1,e=n-1$ ，从而 $n-e+f=2$ 成立。

若 $e(G) \geq n$ 且 G 联通, G 必然包含一个圈 C. 选取任意一条边 g 在 C 中. 令 $G' = G\backslash g$, 则 G' is 联通并且 $e(G') \geq n-1$. 由归纳假设对 G' 有

$$n' - e' + f' = 2$$

这里 $n' = n$ 且 $e' = e - 1$ 。这时删除 g 链接两个面, 从而 $f' = f - 1$. 因此,

$$n - e + f = 2$$

再来考虑 G 有多个联通分量的情况。

如果图 G 是由 C 个连通分量组成的，每个连通分量 $G_i = (V_i, E_i)$ 满足欧拉公式：

$$|V_i| - |E_i| + F_i = 2$$

两个联通分量的并的面数为 $F = F_1 + F_2 - 1$ ，因此我们有

$$\sum_{i=1}^{C} (|V_i| - |E_i| + F_i) = 2C$$

总有

$$|V| - |E| + F = \sum_{i=1}^{C} (|V_i| - |E_i| + F_i) - (C-1) = C + 1$$

Problem 11

在二部图中 G 中不包含子图 K_3 ，从而每个面至少有 4 条边。我们可以对所有不包含 K_3 的平面图证明同样的结论。

只需考虑联通图的情况，否则可以添加边来连接各个连通分量而只使边数增加。由每个面至少有 4 条边，我们有 $4f \leq 2e$ ，即 $e \geq 2f$ 。带入欧拉公式，我们有 $n - e + \frac{e}{2} \geq 2$ ，即 $e \leq 2n - 4$ 。

注：对于一般的平面图，每个面至少有 3 条边，可以仿照得到 $e \leq 3n - 6$ 。

2 补充题目及解答

题 1. 已知对 K_{18} 染色或者存在红色 K_5，或者同时存在红色 K_4 和蓝色 K_3；证明对 K_{35} 染色一定存在红色 K_5 或蓝色 K_4。

解： 反证。假设 K_{35} 的染色中不存在红色 K_5 也不存在蓝色 K_4 。对于任意一个顶点固定一个顶点 v ，如果 v 引出 18 条蓝色边，那么由于不存在红色 K_5 ，这 18 个点中存在蓝色 K_3 与 v 构成一个蓝色 K_4 矛盾。如果 v 引出 18 条红色边，这 18 个点中一定存在一个红色 K_4 与 v 构成一个红色 K_5 。从而对于任意一个顶点 v 一定引出恰好 17 条蓝边和 17 条红边。那么 K_{35} 中蓝色边的数量为 $\frac{1}{2}(17 \times 35)$ 是一个奇数，从而得到矛盾。

题 2. 请证明以下命题：

(a) 简单连通图有恰好一个圈等价于 $|V| = |E|$；

(b) 若 $|E| - |V| = k$，图中存在两个顶点之间有 $k + 1$ 条路径。

解：

(a) 若图有一个圈 C，那么在 C 种删去一条边得到子图 G' 满足 $|V(G')| = |V|$ 且 $|E(G')| = |E| - 1$。由于删去圈上的一条边并不改变图的连通性，并且 G' 没有圈，从而 G' 是一棵树。由树的性质，我们有 $|V| = |E| - 1$ ，即 $|V| = |E|$ 。

反之，若简单连通图满足 $|V| = |E|$ ，那么图 G 包含至少一个圈 C ，否则 G 是一棵树且与 $|V| = |E|$ 矛盾。从 C 中删去一条边得到子图 G' 满足 $|E(G')| = |V| - 1$ ，从而是没有圈的。进而可以得到原图 G 有且仅有一个圈 C 。

题 3. 证明连通简单平面图有一个顶点度数小于等于 5。

解： 由每个面至少有 3 条边，我们有 $3f \leq 2e$ ，即 $e \geq \frac{3}{2}f$ 。带入欧拉公式，我们有 $n - e + \frac{2e}{3} \geq 2$ ，即 $e \leq 3n - 6$ 。假设图 G 中任意顶点度数大于等于 6 ，可以得到不等式 $e = \frac{1}{2}\sum v \in V d(v) \geq 3n$ 从而得到矛盾。从而联通简单平面图中一定有顶点度数小于等于 5.

题 4. 请给出以下组合问题的方案数：

(a) n 对夫妻排成一行，求每对夫妻不相邻的排法；

(b) n 对夫妻排成一行，求每对夫妻不相邻，且同性不相邻的排法。

题 5. 对正方形用 n 种颜色染色。

(a) 用了至多三种颜色的染色数；

(b) 排除旋转、对称下重复的染色方案求方案数；

(c) 排除中心对称和绕对角线翻转下重复的方案，求方案数；

(d) 在（c）的基础上求至多用了三种颜色的染色数。

题 6. S 为 n 元集合，f, g 是定义在 S 的子集上的整值函数。已知对于 S 的偶数元子集，有

$$f(X) = \sum_{Y \subseteq X, |Y| \text{ is even}} g(Y),$$

对于 S 的奇数元子集，有

$$f(X) = \sum_{Y \subseteq X, |Y| \text{ is even}} -g(Y)$$

问题：对于 S 的奇数元子集 X，计算

$$\sum_{Y \subseteq X} f(Y)$$

解： 定义函数 S 的子集上的整值函数 g' ，对于 $|Y|$ is even 有 $g'(Y) = g(Y)$ ，对于 $|Y|$ is odd 定义 $g'(Y) = 0$

整理条件得到

$$f(X) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{|X|-|Y|} g'(Y)$$

那么由子集上的 Mobius 反演得到

$$g'(X) = \sum_{Y \subseteq X} f(Y)$$

从而对于奇数大小的集合 X 原式取 0 .