

## 离散数学 (2024 秋) 作业一

截止日期: 9 月 30 日 9.30

- (20pt) 确定  $n$ , 使得在 1 到 200 中任选  $n$  个数中必有两个数互素。  
确定  $n$ , 使得在 1 到 200 中任选  $n$  个数中必有两个数不互素。  
(请让  $n$  尽可能的小, 越小得分越高)
- (15pt) 从  $1, 3, 5, \dots, 299$  共 150 个奇数中任选  $n$  个数, 使得其中一定存在两个数满足其中一个整除另一个, 问  $n$  最小可以是多少并证明。
- (20pt) 考虑一个边长为 1 的等边三角形:  
证明在该三角形中任取五个点, 则其中存在两点使其距离不大于  $1/2$ ;  
证明在该三角形中任取十个点, 则其中存在两点使其距离不大于  $1/3$ ;  
确定  $m_n$ , 使得在该三角形中任取  $m_n$  个点, 则其中存在两点使其距离不大于  $1/n$ . (请让  $m_n$  尽可能的小, 越小得分越高) .
- (15 pt)  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  为实数且  $\sum_{i=1}^n a_i = A, \sum_{i=1}^n b_i = B$ .  
证明对于任意的整数  $k \in [n]$ , 存在  $i, j \in [n]$  使得  $\sum_{\ell=0}^{k-1} a_{i+\ell} b_{j+\ell} \geq \frac{k}{n^2} AB$ . ( $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $a_{i+\ell} = a_{i+\ell-n}$  如果  $i+\ell > n$ ,  $b_{j+\ell} = b_{j+\ell-n}$  如果  $j+\ell > n$ ).
- (15 pt) 构造  $n^2$  个数的序列, 使得其中不存在长度为  $n+1$  的递增子序列或递减子序列, 并证明。
- (15 pt) 确定  $n$ , 使得在平面上任取  $n$  个点 (这  $n$  个点无三点共线且互不重合), 则其中存在 4 个点构成凸四边形.  
(请让  $n$  尽可能的小, 越小得分越高) .
- (20pt) 证明在平面上任取  $\binom{2k-4}{k-2} + 1$  个点 (这些点无三点共线且互不重合), 总能找到其中  $k$  个点构成凸  $k$  边形。  
(你能找到比  $\binom{2k-4}{k-2} + 1$  更小的数使得上述成立么? )