HW3 参考答案

王元叙

2024 年 11 月 25 日

本文中使用简记 $ab = a * b$

Problem 1

1. 由于 $a^2 = e$ ，根据定义 $a^{-1} = a \ \forall a \in G$ 。

   从而 $\forall a, b \in G$ ， $aba^{-1}b^{-1} = abab = e$

   两侧同时右乘 ba ，得到 $aba^{-1}b^{-1}ba = ba$ 即 $ab = ba$ 。

2. 由题目条件，$\forall a, b \in G$ ， $abab = aabb$

   两侧同时左乘 a^{-1} ，右乘 b^{-1}，得到 $ba = ab$ 。

Problem 2

1. 记 a 的阶数为 r ，则 $a^r = e$

$$\begin{aligned} a^r(a^{-1})^r &= (a * a * \cdots * a) * (a^{-1} * a^{-1} * \cdots * a^{-1}) \\ &= a * a * \cdots * (a * a^{-1}) * a^{-1} * \cdots * a^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

   带入 $a^r = e$ 即得到 $(a^{-1})^r = e$

   另一方面若存在 $d < r$ 使得 $(a^{-1})^d = e$ 同理可得 $a^d = e$ 。这与 r 定义的最小性矛盾，因此 r 也是 a^{-1} 的阶。

2. 记 ab 的阶数为 r ，则 $(ab)^r = e$

$$(ba)^r = a^{-1} * (ab)^r * a = a^{-1} * e * a = e$$

另一方面若存在 $d < r$ 使得 $(ba)^d = e$ 同理可得 $(ab)^d = e$ 。这与 r 定义的最小性矛盾，因此 r 也是 ba 的阶。

注：本题我们可以仿照证明一个更强的结论：x 与 $a^{-1}xa$ 阶数必定相同。x 与 $a^{-1}xa$ 在群论中被称为共轭元素，本题中 $(ab)r$ 与 $(ba)^r$ 共轭。

Problem 3

1. 只需验证封闭性。设 $a, b \in H$ ，则 $\forall g \in G, abg = agb = gab$。因此 $ab \in H$ ，可得 H 是 G 的子群。

2. 由 H 的定义显然。

Problem 4

1. 只需验证封闭性。设 $a, b \in H \cap K$ ，有 $a, b \in H$ 且 $a, b \in K$ ，则 $ab \in H$ 且 $ab \in K$，从而 $ab \in H \cap K$。因此 $ab \in H \cap K$ ，可得 $H \cap K$ 是 G 的子群。

2. 根据拉格朗日定理，等价于证明 $[H : H \cap K] \leq [G : K]$.

   构造映射 $f : H : H \cap K \to G : K, aH \cap K \mapsto aK$ 。只需证明这个映射是单射即可得到 $[H : H \cap K] \leq [G : K]$ 。

   对于 $H : H \cap K$ 中的任意两个不同的陪集 $aH \cap K$ 与 $bH \cap K$ 满足 $a^{-1}b \notin H \cap K$ 。从而由 $a^{-1}b \notin H \cap K$ 和 $a^{-1}b \in H$ 得出 $a^{-1}b \notin K$ 从而 $aK \neq bK$ 。从而证明了结论。

   注：这里使用了结论 $a^{-1}b \in H \iff aH = bH$

   另：这个结论也可以通过结论 $|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|$ 来证明（同时利用子集 HK 的大小 $|HK| \leq |G|$ ）。

3. 考虑 $G =< \mathbb{Z}_6, + >$ ，取子群 $H = \{0, 3\}$ ，$K = \{0, 2, 4\}$ 。但是 $H \cup K = \{0, 2, 3, 4\}$ 不是子群。

4. 否则假设存在 $a \in H - K, b \in K - H$ ，由于 $H \cup K$ 是子群具有封闭性，$ab \in H \cup K$，不妨设 $ab \in H$。则 $b = a^{-1} * ab \in H$ 与定义矛盾。从而 $H - K$ 与 $K - H$ 至少一个为空集，从而证明了结论。

Problem 5

G/H 构成子群可以通过逐条验证性质证明。

Problem 6

对任意群元素 $x, g \in G$ 定义映射 $\varphi_g(x) = gx$ ，并构造置换群 $G = \{\varphi_g : g \in G\}$ 。可以验证 $G \cong G'$ 从而证明 G 同构于一个置换群。

Problem 7

考虑 S_n 中由元素 $(12\cdots n)$ 生成的子群。由于 $(12\cdots n)$ 的阶数为 n ，$(12\cdots n)$ 生成的子群是一个 n 阶循环群。课上证明过所有 n 阶循环群都同构于 $<\mathbb{Z}_n, +>$，该置换群同样与任意 n 阶循环群同构。

Problem 8

1. 若 $O_x \cap O_y$ 非空，不妨设 $z \in O_x \cap O_y$

   则 $\exists g, h \in G$ 使得 $g(x) = z = h(y)$ ，从而 $g^{-1}h(y) = g^{-1}(z) = x$ 。从而 $x \in O_y$，可以得到 $\forall w \in O_x, w \in O_y$ ，即 $O_x \subset O_y$。同理 $O_y \subset O_x$ 从而 $O_x = O_y$.

   从而我们可以得到 X 可以分解为若干轨道的无交并，即 $G = \bigcup_{i=1}^{k} O_{z_i}$ ，这一结论在第三问的证明中将会被用到。

2. 构造集合 $A = \{(g, x) | g \in G, x \in X, g(x) = x\}$ 则可以得到 $|A| = \sum_{g \in G} |C_g| = \sum_{x \in X} |S_x|$（即 double-counting 技巧）

3. 我们可以使用轨道稳定子定理 $|G| = |S_x| \cdot |O_x|$ 来证明这一点：

$$
\begin{aligned}
\sum_{g \in G} |C_g| = \sum_{x \in X} |S_x| &= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|O_x|} \\
&= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|} \\
&= |G| \sum_{i=1}^{k} \sum_{z \in O_{x_i}} \frac{1}{|O_{x_i}|} \\
&= |G| \sum_{i=1}^{k} 1 \\
&= |G| k
\end{aligned}
$$

   同时除以 $|G|$ 即可得到结论。下面再来证明轨道稳定子引理：

根据 Lagrange 定理，$[G:S_x]=|G|/|S_x|$ ，从而我们只需要证明 $[G:S_x]=|O_x|$ 即可。记 G/S_x 表示 G 对 S_x 的陪集族。我们可以构造映射 $f:G/S_x\to O_x, gS_x\mapsto g(x)$ 。只需证明这个映射是双射即可得到 $[G:S_x]=|O_x|$ 。

单射性：对于任意 $g,h\in G$ ，若 $g(x)=h(x)$ ，则 $h^{-1}g(x)=x$ ，从而 $h^{-1}g\in S_x$ ，即 $gS_x=hS_x$ 。

满射性：对于任意 $y\in O_x$ ，存在 $g\in G$ 使得 $g(x)=y$。从而我们证明了这是一个双射，定理得证。

注：证明本题的过程实际上和 Lagrange 定理的证明有很强的相似性，事实上这两个定理是等价的。这种相似性的本质是**陪集是左乘作用的轨道**。考虑子群 $H\le G$ 作用在集合 G 上：$h(g)=hg(h\in H,g\in G)$ 可以发现 Lagrange 定理是轨道稳定子定理的特殊情况，而第一问中的结论也和陪集分解相同。

注：本题是计数问题中常用的技术 Burnside 引理，用自然语言描述这个定理就是群作用的轨道数等于群元素不动点数目的平均值。下面展示一些这个技术的应用。

在接下来的讨论中我们使用记号 $|X/G|$ 表示 X 在 G 作用下的轨道数。

例：在一个四元项链上，考虑对每一个点红蓝二染色，有多少旋转意义下本质不同的染色方案？称两个染色方案本质不同当且仅当它们不能通过旋转相互转化。

我们知道一个四元项链的旋转群就是不旋转、旋转 90 度、旋转 180 度、旋转 270 度四种。在这四个作用下不动的染色方案分别为 $16,2,4,2$ 从而取平均得到轨道数目是 $\frac{16+2+4+2}{4}=6.$

这里我们可以观察到这些数字都是 2 的幂次，这就引申出了 Polya 计数的想法。染色方案和一般的作用集不同，实际上染色方案可以写成 C^X 的形式（C^X 即 $X\to C$ 的全体不同的映射，其中 C 为颜色集合，X 为被染色颜色的集合，也就是染色）。这样，我们可以认为群作用是作用在集合 X 上进而延拓到 C^X 上的群作用。从而根据 Burnside 引理，我们可以写出染色方案数的计算公式：

$$\left|C^X/G\right|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}m^{c(g)}$$

其中 $c(g)$ 表示元素 $g\in G$ 的置换表示的轮换分解中的轮换数目。

使用这个新公式来计算上面的四元项链的问题，我们可以得到：在不旋转、旋转 90 度、旋转 180 度、旋转 270 度四种作用下的轮换表示分别是 $(1)(2)(3)(4),(1234),(13)(24),(1432)$，分别有 $4,1,2,1$ 个轮换。同样可以计算得到本质不同的染色方案数 6.

接下来可以使用这个定理计算一个比较复杂的问题：

例：正立方体的六个面染色 n 种颜色，有多少种旋转意义下本质不同的染色方案？这个问题

的结果是

$$\frac{1}{24}(n^6+3n^4+12n^3+8n^2)$$

读者可以自行计算（提示；正立方体的旋转群大小为 24）。