离散数学（2024 秋）作业三

截止日期：11 月 9 日 18.00

1. (15pt) 证明下列群 G 是交换群

    (a) 对群 G 中任意元素 a，有 $a^2 = e$.

    (b) 对群 G 中任意元素 a, b，有 $(a * b)^2 = a^2 * b^2$.

2. (15pt) 对于任意群 G 中的元素 a，如果存在 r 使得 r 是满足 $a^r = e$ 的最小正整数，则称元素 a 的阶是 r，否则称 a 是无穷阶的。群中的两个元素称作是同阶的如果它们的阶一样（或者是相同的正整数，或者同为无穷阶），证明:

    (a) 对任意 $a \in G$，a 与它的逆 a^{-1} 同阶.

    (b) 对任意 $a, b \in G$，$a * b$ 与 $b * a$ 同阶.

3. (10pt) 对于群 G，定义

$$H = \{a \in G \mid \forall g \in G, a * g = g * a\}.$$

H 称作 G 的中心，证明 H 是 G 的子群且 H 是交换群。

4. (20pt) 设 H, K 为群 G 的子群，

    (a) 证明 $H \cap K$ 也是 G 的子群。

    (b) 若 G 为有限群，$|G|/|H| = m$, $|G|/|K| = n$，证明 $|G|/|H \cap K| \leq mn$.

    (c) 给出反例说明 $H \cup K$ 未必是 G 的子群。

    (d) 证明 $H \cup K$ 是 G 的子群当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$.

5. (20pt) 设 G 为群 (注意，未必交换)，H 是 G 的一个子群，证明以下几条等价:

(a) 对任意 $a \in G$, 有 $aH = Ha$,

(b) 对任意 $a \in G$, 任意 $h \in H$, 有 $aha^{-1} \in H$,

(c) 对任意 $a \in G$, 存在某个 $b \in G$ 使得 $aH = Hb$，同时存在某个 $c \in G$ 使得 $Ha = cH$（即 H 的任意一个左陪集 aH 也是一个右陪集，H 的任意一个右陪集 Ha 也是一个左陪集）。

满足如上性质的 H 被称作 G 的正规子群。定义集合 $G/H = \{aH \mid a \in G\}$ 为 H 的全部左陪集的集合，同时定义 G/H 上的运算 $(aH) \times (bH) = (ab)H$。证明 G/H 在该运算下构成一个群。

6. (15pt) 证明任意群 G 都同构于一个置换群。

7. (10pt) 求出与 n 阶循环群同构的置换群。

8. (15pt) 考虑有限群 G 在有限集合 X 上的作用。对 $x \in X$, 令

$$O_x = \{z \in X \mid \exists g \in G \text{ s.t. } g(x) = z\}$$

为 x 所在的轨道，令

$$S_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

为 x 的固定子群。对 $a \in G$, 令

$$C_a = \{z \in X \mid a(z) = z\}.$$

(a) 对任意 $x, y \in X$, 考虑它们的轨道 O_x 及，证明 $O_x = O_y$ 或 $O_x \cap O_y = \emptyset$.

(b) 证明 $\sum_{z \in X} |S_z| = \sum_{g \in G} |C_g|$。

(c) 令 k 表示该群作用的不同的轨道的数目，证明

$$k = \sum_{z \in X} \frac{1}{|O_z|} = \frac{\sum_{g \in G} |C_g|}{|G|}.$$