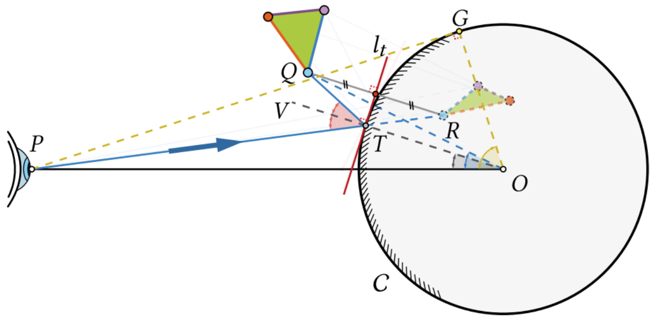
Lab01_Report

申长硕 大数据学院 PB22020518

问题引入

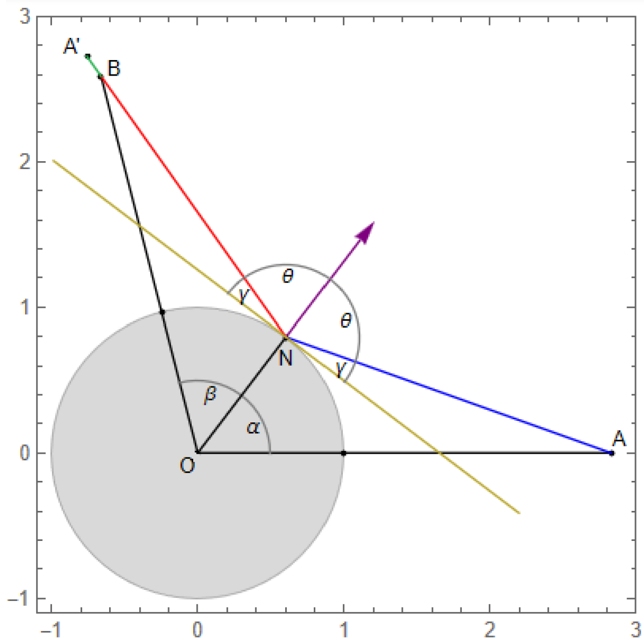
面对在平面中求解一个三角形从经过mirror cup反射到另一点的**反射路径**的求解问题，抽象出点的反射问题。



经提供参考材料得到如下解决方案：

数学分析

解析解(derived by Eberly)



从A出射的光线经过C面反射到B点，设A，B，O不共线，可以用N及其垂线两方向上的单位向量表示A和A'：

$$A = sN + tN^{\perp}$$
$$A' = sN - tN^{\perp}$$

可以将A'表示为：

$$A' = 2 < N, A > N - A$$

前提A，B不共线，则可以将N表示为A，B的线性组合：

$$N = xA + yB$$

于是我们有：

$$\begin{aligned}
&A \times N = A \times (xA + yB) = 0 + yA \times B = yA \times B \\
&N \times B = xA \times B \\
&\ N \cdot A = xA \cdot A + yB \cdot B
\end{aligned}$$

同时，由于N模长为1,于是有：

$$1 = N \cdot N = x^2 A \cdot A + 2xyA \cdot B + y^2 B \cdot B \tag{1}$$

N需要满足向量(B - N)和(A' - N)共线，有：

$$\begin{aligned}
0 &= (B - N) \times (A' - N) \\
&= (B - N) \times [(2N \cdot A - 1)N - A] \\
&= (2N \cdot A - 1)B \times N - B \times A + N \times A \\
&= (2N \cdot A - 1)B \times (xA + yB) - B \times A + (xA + yB) \times A \\
&= [(2N \cdot A - 1)x - 1 + y]B \times A \\
&= [(2xA \cdot A + 2yA \cdot B - 1)x - 1 + y]B \times A
\end{aligned}$$

其中 $B \times A \neq 0$，于是我们有：

$$(2xA \cdot A + 2yA \cdot B - 1)x - 1 + y = 0 \tag{2}$$

由(1)，(2)两式，我们可以得到关于x，y两未知数的方程组：

$$\begin{aligned}
p(x, y) &= ux^2 + 2vxy + wy^y - 1 = 0 \\
q(x, y) &= 2ux^2 + 2vxy - x + y - 1 = 0
\end{aligned}$$

通过p(x, y) = 0用x表示y：

$$y = \frac{1 + x - 2ux^2}{1 + 2vx} \tag{3}$$

将其带入p(x, y) = 0，得到：

$$\frac{4u(uw - v^2)x^4 + 4(v^2 - uw)x^3 + (u + 2v + w - 4uw)x^2 + 2(w - v)x + (w - 1)}{(1 + 2vx)^2} = 0$$

其中$u = A \cdot A, v = A \cdot B, w = B \cdot B$

分母不为0,于是可以得到方程：

$$r(x) = 4u(uw - v^2)x^4 + 4(v^2 - uw)x^3 + (u + 2v + w - 4uw)x^2 + 2(w - v)x + (w - 1) =$$

其中：

$$uw - v^2 = (A \cdot A)(B \cdot B) - (A \cdot B)^2 = |A \times B|^2 \neq 0$$

所以这是一个四次方程，之后就可以通过(4)解出实根$\overline{x}$并带入(3)求出对应$\overline{y}$

算法设计

问题描述：

- 假设：

> *原点处有一镜面单位圆C，可以反射光线*
>
> *观察点P位于x轴负半轴且在圆外*
>
> *物点在第二象限且在圆外*

- 输入：

> *观察点P，*$P \in \{(x, y)|x < -1, y = 0\}$
>
> *物点Q，*$Q \in \{(x, y)|x < 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1\}$

- 输出：

> *反射点T的位置*(x_t, y_t)
>
> *像点Q的位置*(x_q, y_q)

基本思想：使用牛顿二分法，对上述方程求解

P，Q不共线，于是可以用P，Q两点表达出反射点T：

$$T = \alpha P + \beta Q$$

将输入的P，Q两点带入上述分析中可以定义出：

$$\begin{cases} u = P \cdot P = x_p^2 \\ v = P \cdot Q = x_p \cdot x_q \\ w = Q \cdot Q = x_q^2 + y_q^2 \end{cases}$$

于是该问题转化为解决四次方程(α即为其中的x)：

$$4u(uw - v^2)x^4 + 4(v^2 - uw)x^3 + (u + 2v + w - 4uw)x^2 + 2(w - u)x + (w - 1) = 0$$

解出α之后带入方程：

$$\beta = \frac{1 + \alpha - 2u\alpha^2}{1 + 2v\alpha}$$

即可解出β，后可以将T表示出来：

$$\begin{cases}x_t = \alpha x_p + \beta x_q \\ y_t = \beta y_q\end{cases}$$

求解Q对称点Q'的两种方案：

1. 根据对称关系：

$$\begin{cases}Q = sT^{\perp} + tT \\ Q' = sT^{\perp} - tT\end{cases}$$

   通过求解$\vec{TQ}$和$\vec{T}$以及$\vec{T}^{\perp}$的内积确定系数s和t

$$\begin{cases}t = \vec{TQ} \cdot \vec{OT} \\ s = \vec{TQ} \cdot \vec{T}^{\perp}\end{cases}$$

   回带解出Q'即可

2. 根据P，T，Q共线以及$|QT| = |Q'T|$求解出Q'位置

$$\vec{TQ'} = \lambda \vec{PT}$$

$$|\vec{TQ'}| = |\vec{TQ}|$$

$$=> \vec{TQ'} = \frac{|\vec{TQ}|}{|\vec{PT}|}\vec{PT}$$

$$=> Q' = T + \frac{|\vec{TQ}|}{|\vec{PT}|}\vec{PT}$$

   将其带入即可，本作业采用第二种方法(第一种方法我想的需要两次平移，不如第二种来的直接)

代码设计

此处本人取实验主要部分的子函数代码进行描述，其余代码部分见*./src/sphere_reflection..cpp*，原理部分见前面`数学分析` `算法设计`板块

1. 主函数流程

   主要实现：

   a. 文件的读取，文件中每行为3个数值，分别表示x_p, x_q, y_q将其存储在一个二维vector中，由于这个过程二维数组也可以实现，所以并未通过调库获利
   b. 通过输入计算前面数学分析部分定义出的u, v, w，即三个内积，将其带入上述推导的公式得到需求的四次函数的各项系数
   c. 调用二分法求解函数零点，进而得到使用$\vec{P}, \vec{Q}$表示T点的P系数
   d. 进而求解Q的系数
   e. 通过算法设计给出的第二种方法求解Q的像点Q'

```
int main()
{
    // 不通过主函数传参，打开input.txt文件传入一系列x_p, x_q, y_q
    std::ifstream file("./input.txt");
    std::vector<std::vector<double>> data;
    std::vector<std::vector<double>> ans;

    if(file.is_open())
    {
        std::string line;
        while(std::getline(file, line))
        {
            // 逐行读取嘛
            std::vector<double> row;
            std::stringstream ss(line);
            double value;

            for(int i = 0; i < 3; i++)
            {
                if(ss >> value)
                {
                    row.push_back(value);
                    // std::cout << value << "\t";
                }
                else{
                    std::cerr << "Expected 3 numbers for
each line" << std::endl;
                    return 1;
                }
            }
            data.push_back(row);
        }
    }
    else
    {
        std::cerr << "Unable to open the file" << std::endl;
        return 1;
    }
    // 现在我们已经将数据存入<vector> data,
    // 输出检查一番
    for(const auto& row: data)
    {
        for(const auto& value : row)
        {
            std::cout << value <<"\t";
        }
        std::cout << std::endl;
        // 先计算u, v, w
        double* uvw = calc_uvw(row[0], row[1], row[2]);
```

```
        // 之后计算该四次函数的系数：
        double* coe = coefficient(uvw);

        // 计算coefficients之后使用二分法计算方程的根

        // 从0, |1 / x_p|开始迭代，因为x_t在-1～0之间，其余无意义
        double alpha = bisection(0, -1.0 / row[0], 1e-8,
coe);

        // 这里简单尝试一下牛顿法
        // double alpha = newton(-1.0 / row[0], 1e-10, coe);


        // 之后用alpha带入公式计算beta
        double beta = calc_beta(alpha, uvw);

        double x_t = alpha * row[0] + beta * row[1];
        double y_t = beta * row[2];

        // 这里计算Q',q_reflected
        double* q_r = calc_reflection(x_t, y_t, row[0],
row[1], row[2]);

        std::vector single_ans = {x_t, y_t, q_r[0], q_r[1]};
        ans.push_back(single_ans);
        std::cout << "(" << x_t << ", " << y_t << ")"<<
std::endl;
        // 简单进行一个内存的释放
        delete[] uvw;
        delete[] coe;
        delete[] q_r;
    }

    // 输出检查
    std::cout<<"----------answer summary:-----------"
<<std::endl;
    for(const auto& single_ans : ans)
    {
        std::cout<<"T: ("<<single_ans[0] <<", "
<<single_ans[1]<<")"<<"Q': ("<<single_ans[2]<<", "
<<single_ans[3]<<")"<<std::endl;
    }
    return 0;

}
```

2. 二分法实现

a. 逻辑相对简单，多做的一点就是定义了sgn函数来判断函数值同号异号，防止迭代后期因为函数值过小其乘积无法计算而得0的“风险”

b.

```
int sgn(double x)
{
    if(x >= 0){
        return 1;
    }
    else{
        return -1;
    }
}

// 二分法
double bisection(double left, double right, double epsilon,
double coe[5])
{
    std::cout<<std::endl<<std::endl<<"二分开始执行"
<<std::endl;
    // std::cout<<"coe数组"<<std::endl;
    // for(int i = 0; i < 5; i++)
    // {
    //     std::cout<<coe[i]<<std::endl;
    // }
    double mid;
    int run_times = 0;
    while(fabs(right - left) > epsilon)
    {
        mid = (left + right) / 2.0;
        double fun_value = func(mid, coe);
        // std::cout<<"value this loop"<<"\t mid:"
<<mid<<"func_value"<<fun_value<<std::endl;
        // std::cout<<"f(left)"<<func(left, coe)<<std::endl;
        // std::cout<<"f(right)"<<func(right, coe)
<<std::endl;
        if(fabs(fun_value) < epsilon)
        {
            return mid;
        }
        else if(sgn(fun_value) * sgn(func(left, coe)) < 0)
        {
            right = mid;
        }
        else
        {
            left = mid;
        }
        run_times++;
    }
```

```
    std::cout<<"运行次数"<<run_times<<std::endl;
    return (left + right) / 2.0;
}
```

3. 像点Q'的确定

a. 通过上述算法设计2得到的公式直接带入计算即可

```
double* calc_reflection(double x_t, double y_t, double x_p,
double x_q, double y_q)
{
    // lambda = |TQ| / |PT|
    double lambda = std::pow(((x_t - x_q) * (x_t - x_q) +
(y_t - y_q) * (y_t - y_q)), 0.5) / std::pow(((x_t - x_p) *
(x_t - x_p) + y_t * y_t), 0.5);
    // std::cout<<"lambda:"<<lambda<<std::endl;

    double x_qr = x_t + lambda * (x_t - x_p);
    double y_qr = y_t + lambda * y_t;   // y_p = 0

    double* coordinates = new double[2];
    coordinates[0] = x_qr;
    coordinates[1] = y_qr;

    std::cout<<"Q': ("<<x_qr<<", "<<y_qr<<")"<<std::endl;

    return coordinates;
}
```

实验结果

通过上述代码，所得结果：

P	Q	T	Q'
(-2, 0)	(-1, 1)	(-0.88567, 0.464316)	(-0.380057, 0.674993)
(-10, 0)	(-2, 1)	(-0.959312, 0.28235)	(0.304214, 0.321811)
(-1.000001, 0)	(-2,2)	(-1, 2.00058e-06)	(-0.000309957, 2.00015)
(-2.33, 0)	(-3, 1)	(-0.989279, 0.146038)	(1.18242, 0.38259)
(-3, 0)	(-1, 0.5)	(-0.922615, 0.385721)	(-0.78692, 0.410917)
(-3, 0)	(-2, 10)	(-0.827028, 0.56216)	(8.3803, 2.94415)
(-3, 0)	(-3, 1)	(-0.987408, 0.158192)	(1.18744, 0.329136)
(-10, 0)	(-2, 1)	(-0.959312, 0.28235)	(0.304214, 0.321811)
(-1024, 0)	(-8, 4)	(-0.970069, 0.242845)	(7.00089, 0.244737)

执行结果截图：

执行：

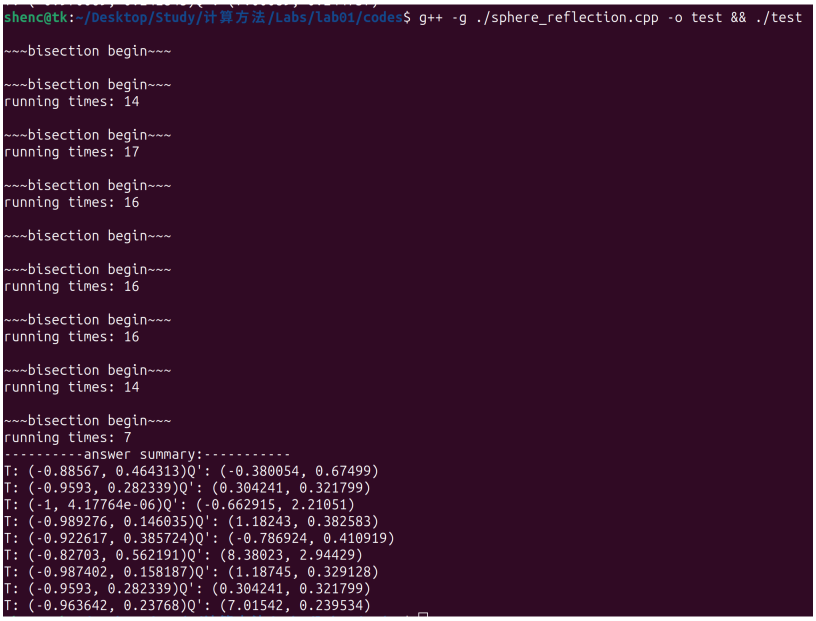
```
g++ -g ./sphere_reflection.cpp -o test && ./test
```

结果：

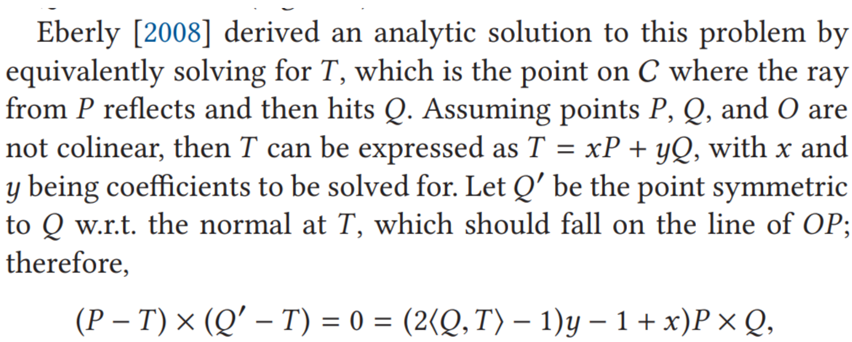
```
shenc@tk:~/Desktop/Study/计算方法/Labs/lab01/codes$ g++ -g ./sphere_reflection.cpp -o test && ./test

~~~bisection begin~~~

~~~bisection begin~~~
running times: 24

~~~bisection begin~~~
running times: 27

~~~bisection begin~~~
running times: 26

~~~bisection begin~~~

~~~bisection begin~~~
running times: 25

~~~bisection begin~~~
running times: 25

~~~bisection begin~~~
running times: 24

~~~bisection begin~~~
running times: 17
----------answer summary:-----------
T: (-0.88567, 0.464316)Q': (-0.380057, 0.674993)
T: (-0.959312, 0.28235)Q': (0.304214, 0.321811)
T: (-1, 2.00058e-06)Q': (-0.000309957, 2.00015)
T: (-0.989279, 0.146038)Q': (1.18242, 0.38259)
T: (-0.922615, 0.385721)Q': (-0.78692, 0.410917)
T: (-0.827028, 0.56216)Q': (8.3803, 2.94415)
T: (-0.987408, 0.158192)Q': (1.18744, 0.329136)
T: (-0.959312, 0.28235)Q': (0.304214, 0.321811)
T: (-0.970069, 0.242845)Q': (7.00089, 0.244737)
```

分析与思考

1. 代码执行过程中记录了二分法的执行次数(epsilon设置为1e-8)，执行25次左右，而将其改为1e-5后执行15次左右，结论就是在后期收敛速度不是那么快



```
shenc@tk:~/Desktop/Study/计算方法/Labs/lab01/codes$ g++ -g ./sphere_reflection.cpp -o test && ./test

~~~bisection begin~~~

~~~bisection begin~~~
running times: 14

~~~bisection begin~~~
running times: 17

~~~bisection begin~~~
running times: 16

~~~bisection begin~~~

~~~bisection begin~~~
running times: 16

~~~bisection begin~~~
running times: 16

~~~bisection begin~~~
running times: 14

~~~bisection begin~~~
running times: 7
----------answer summary:----------
T: (-0.88567, 0.464313)Q': (-0.380054, 0.67499)
T: (-0.9593, 0.282339)Q': (0.304241, 0.321799)
T: (-1, 4.17764e-06)Q': (-0.662915, 2.21051)
T: (-0.989276, 0.146035)Q': (1.18243, 0.382583)
T: (-0.922617, 0.385724)Q': (-0.786924, 0.410919)
T: (-0.82703, 0.562191)Q': (8.38023, 2.94429)
T: (-0.987402, 0.158187)Q': (1.18745, 0.329128)
T: (-0.9593, 0.282339)Q': (0.304241, 0.321799)
T: (-0.963642, 0.23768)Q': (7.01542, 0.239534)
```

2. 编写代码过程中，遇到了一个比较大的问题：
    a. 对于第二个输入，最后的输出结果T竟然算到了**第一象限**
    b. **分析原因**：求根的四次多项式，如果二分的起始位置是0和1的话最终可能无法收敛到想要的零点
    c. **相关改进**：二分的起点换成$(0, |\frac{1}{x_p}|)$，即进一步控制T点可能的取值范围，其中还有一些问题，就是Q点的横坐标对T点的确定也会有影响，不过这里就不予考虑了
    d. **改进的原理**：T点不仅是P, Q两点的反射点，同时也是整个圆上第二象限所有点距离P,Q之和最小的点，所以将x_t控制在[-1, 0]之间的话就会收敛到T点
3. 稳健性问题：该算法推导依赖P，T，Q不共线，对于TP, TQ两向量夹角过于小时可能会不稳定等
4. 在参考文献[1]中解析方法时发现两个错误：
    a. 

       Eberly [2008] derived an analytic solution to this problem by equivalently solving for T, which is the point on C where the ray from P reflects and then hits Q. Assuming points P, Q, and O are not colinear, then T can be expressed as $T = xP + yQ$, with x and y being coefficients to be solved for. Let Q' be the point symmetric to Q w.r.t. the normal at T, which should fall on the line of OP; therefore,

       $$(P - T) \times (Q' - T) = 0 = (2\langle Q, T\rangle - 1)y - 1 + x)P \times Q,$$

    b. 最后一句话**w.r.t the normal at T**应该是**tangent line(to the circle) at T**，应该是在T点出的切线而不是法线（或者此文中切线法线定义与我熟知的不同）
    c. 下面的公式右边缺少一个括号，应该是$[(2 \cdot A - 1)x - 1 + y]B \times A$ (A,B,N即上面Q,P,T)

参考文献

[1] Computational Mirror Cup and Saucer Art KANG WU, RENJIE CHEN, XIAO-MING FU, and LIGANG LIU, University of Science and Technology of China, China

[2] Alhazen's Problem: Reflection Point on a Sphere David Eberly, Geometric Tools, Redmond WA 98052