

数值代数实验报告

PB21010456 杨隽

2023 年 12 月 30 日

一、问题描述

参考课本 7.6.2 节 (P234-240)SVD 迭代完成 SVD 算法 7.6.3, 并对附件 svddata.txt 中的矩阵作 SVD 分解 $A = P\Sigma Q$ 。并计算 $PP^T - I, QQ^T - I, P\Sigma Q - A$ 的绝对值最大的元素, 依次用 ep, eq, et 表示。

要求输出迭代次数, 从小到大排序的所有奇异值以及上面要求的三个值。

输出格式为: (可以更详细, 不能比下面的简单)

迭代次数: x

奇异值从小到大:

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

ep = xx

eq = xx

et = xx

以下内容不需要在报告中给出, 但要在上交的程序中输出。

A=PTQ(可以用别的字母, 但是要在最上面说明)

T=

[矩阵]

P=

[矩阵]

Q=

[矩阵]

二、程序介绍

本次实验主要函数包括 double-diagonal (二对角化)、SVD、wilkinson, 以及之前实验涉及的求矩阵范数、矩阵相乘等。

1. 二对角化: 对应于将 $A^T A$ 三对角化, 这里将 A 二对角化, 即计算正交阵 U, V , 使得 $U^T A V$ 为二对角阵。二对角化可以通过一系列 householder 变换来实现。
2. 带 wilkinson 位移的 SVD 迭代: 应用对称 QR 算法的第二步就是对对称三对角阵 $T = B^T B$ 进行带位移的隐式 QR 迭代。不把 T 明确算出来即可完成。首先选取 $T = B^T B$ 矩阵的右下

角 2 阶矩阵的 wilkinson 位移, 然后确定一个 Givens 变换 $G(1, 2, \theta_1)$ 将第一列的第二个分量变为 0。然后确定一个正交阵 Q , 使得 $Q^T(G_1^T T G_1)Q$ 是对称三对角阵, 且 $Qe_1 = e_1$ 。这一步只需计算正交矩阵 P, Q 使得 $P^T(BG_1)Q$ 是二对角阵, 且 $Qe_1 = e_1$, 这一步可以利用 Givens 变换来实现。

3. SVD 算法: 首先输入矩阵 A , 将其二对角化, 然后进行收敛性判定: 将满足条件的较小对角元、次对角元置为 0, 确定最大的非负整数 p 和最小的非负整数 q 使得 $B = \text{diag}(B_{11}, B_{22}, B_{33})$, 其中 B_{11} 为 p 阶, B_{33} 为 q 阶对角阵, 而 B_{22} 对角元之上的次对角元均不为 0。如果 $q = n$ 则输出有关信息, 否则进行下一步。若 B_{22} 有对角元为 0 (最后一个除外), 则将其行的元素均化为 0, 并将相应的变换矩阵累积到 U , 然后进行收敛性判定, 否则进行下一步。应用 wilkinson 位移的 SVD 迭代到 B_{22} 产生正交矩阵 P, Q 以及二对角阵 $B_{22} = P^T B_{22} Q$, 并重新计算 P, Q , 然后进行收敛性判定。

三、实验结果

```
迭代次数为17
奇异值从小到大为
0.375993 0.703989 0.880006 1.14018 1.89863 2.60205 3.1445 4.98101 5.94702 8.66648 32.2979 214.31
ep=1.55431e-15
eq=1.22125e-15
et=2.27307e-06
```

图 1: 迭代次数、奇异值

```
A=PTQ
P=
0.201521    0.0911402    -0.13986    -0.0772605    0.322807    0.256887    0.123667    -0.0866028
-0.240969    -0.348862    0.197716    -0.404687    0.017673    0.217549    0.109832    0.31924
0.0283557    0.204913    0.00458787    -0.0809262    0.114699    0.258142    0.0145209    0
1 0.0209009    -0.00908054    0.0584687    0.183148    -0.146504
0.29061    0.264505    -0.0512032    0.342982    0.113254    0.0561503    -0.0906387    0.231329
0.0919456    0.171139    0.124253    -0.267726    -0.129713    -0.194737    0.199099    -0.1096
19 0.0794768    -0.0317489    -0.268255    -0.121089    0.021411    -0.290079    0.188472
0.0724663    0.176073    -0.343131    -0.104515    -0.193299
0.190181    0.119826    -0.173717    0.0785137    0.223697    0.089275    0.164854    -0.0819218
0.165363    -0.00102446    0.0595711    0.0671138    0.250287    0.329738    -0.0136077    -0.1
60351    -0.140856    0.0490834    0.0636028    0.115358    0.231153    -0.344275    0.151327
-0.23119    0.13246    0.222884    -0.213133    0.433599
0.254386    0.207301    -0.0813732    -0.245351    0.0130674    -0.0217869    0.0358542    0.097874
8 0.0428182    0.104175    0.150386    -0.0624607    0.0199971    -0.029447    -0.0393121    -0.319297
0.031931    0.00550046    0.125366    0.435922    -0.151119    -0.44472    -0.253273    -0.213282    0.109336
0.0880326    -0.0512625    -0.133406    0.0860741    0.0273551    0.0542833    0.044375
2 0.0629634    -0.0780019    -0.0110657    0.0359494    0.191129    -0.179997    -0.0462278
0.235666    -0.410109    -0.0780643    0.414204    -0.194218    -0.471498    -0.00513573    0.073
5477 0.21939    0.0181743    -0.209465    -0.261031    0.0916836
0.262533    0.237432    0.077748    0.0303058    0.0132068    -0.0444983    0.0386113    0.0887603
-0.316229    -0.0352413    0.0808656    0.0910414    -0.0729861    -0.274096    -0.00419546
-0.0975325    -0.351879    -0.0428883    -0.297513    0.0762631    -0.0363362    0.173699    -0.2
96973    -0.400814    -0.292688    0.160523    -0.193329    0.0320098
0.243492    0.116939    0.0629639    0.0582823    -0.0623611    -0.0322901    0.00267559    -0.4205
32 0.0668712    -0.123296    -0.299432    -0.00650983    -0.196687    0.222521    -0.52179
-0.0646878    0.0411685    -0.193775    -0.118273    -0.364739    0.0276899    0.09987    0.065238
4 -0.131602    0.0622103    -0.162586    -0.0749841    -0.0967181
0.159834    -0.0893072    0.442065    -0.055982    -0.0886118    0.047855    0.282982    0.0764946
0.225137    -0.169305    0.54024    0.0464528    -0.0909175    0.0557834    -0.163936    0.0216529
0.391865    0.141508    0.124682    0.0784058    -0.133658    -0.108029    0.160214    0.0217606
-0.0629571
0.216831    -0.278039    -0.235113    0.349371    -0.317596    0.112187    0.253236    0.0171741
0.0826097    0.340402    -0.337239    -0.0542116    -0.0237766    0.0810098    0.155827    0.22
9727 -0.190813    0.196276    0.131412    -0.0871175    0.111339    0.0423341    -0.142878
-0.0697631    -0.0937626    0.111044    -0.0138085    -0.190623
0.0928883    -0.547772    -0.0245587    -0.23847    -0.158842    0.321641    -0.0888091    0.038254
```

图 2: P 矩阵

0.0928883	-0.547772	-0.0245587	-0.23847	-0.158842	0.321641	-0.0888091	0.038254
-0.148838	0.18902	0.277632	-0.212802	0.184725	0.0883405	-0.153201	-0.04
10528	0.0778374	-0.133456	-0.203285	-0.041902	-0.246584	-0.0881861	0.0661721
-0.272715	0.0363486	-0.10312	-0.140564	0.00360236			
0.158165	-0.0463303	0.127587	0.120003	0.0878498	0.00909474	-0.275837	0.22448
0.296071	-0.0730955	-0.0015338	0.21431	-0.182303	0.00268426	0.031961	0.39
8798	0.102057	0.044012	0.0593127	-0.0156348	-0.168542	0.0623894	0.0739371
-0.490599	0.0773139	-0.0546809	0.346084	0.228771			
0.147892	-0.0300931	0.0489356	0.119416	0.254437	-0.132956	0.177335	-0.0450999
0.09215	0.315841	0.277662	-0.163854	-0.112729	0.121324	-0.171715	-0.1982
3	0.120147	-0.085721	0.230549	-0.0529103	-0.157578	-0.081221	-0.354912
108287	-0.39123	-0.0805682	0.323582	0.158621			
0.147795	-0.0396272	0.0496149	0.105018	-0.0284197	-0.461003	0.111084	0.0907401
-0.183638	-0.029631	0.142796	0.254262	0.638237	0.0381783	0.0673855	0.1
03311	0.0917778	0.02351	-0.0698319	-0.202744	0.129175	-0.0438198	0.0169323
-0.0694598	0.0400717	-0.136299	0.19522	-0.22037			
0.158657	-0.0550523	0.0999677	-0.040313	0.0760899	0.00576923	-0.322409	0.23579
0.217393	-0.131325	-0.0293666	0.197126	0.0269945	0.599482	0.187933	-0.
167699	-0.109431	0.0222309	-0.118297	0.059971	-0.119294	0.0947295	-0.200511
-0.180555	-0.159921	-0.0352724	-0.193161	-0.277192			
0.218459	0.130461	-0.0143121	-0.34007	-0.250533	-0.192067	0.17721	-0.409195
0.0835638	0.0582173	0.0891446	0.0451626	-0.0915488	0.0842198	0.612805	-0.0
194187	0.115887	-0.206599	-0.0266816	-0.0285801	-0.16263	-0.0230479	0.0505677
-0.118497	0.0303232	-0.00966164	0.0830718	-0.00538069			
0.159834	-0.0893072	0.442065	-0.055982	-0.0886118	0.047855	0.282982	0.0764946
0.225137	-0.169305	-0.0169856	-0.0909175	0.0240103	-0.0606404	-0.0674816	
0.435496	0.102038	-0.271746	-0.213332	0.199587	0.213747	-0.215199	-0.134096
0.232812	-0.140117	0.0308492	-0.154488	0.0851095			
0.242183	0.0464139	-0.249362	-0.0912947	0.0822891	0.099419	-0.0619317	0.179179
-0.210653	-0.035524	-0.353346	0.118232	0.0974041	-0.108985	0.0726473	-0.
0.0253388	0.660923	-0.0533792	0.130421	-0.0510381	-0.0136692	0.0600872	-0.14488
9	0.0340365	-0.148838	-0.0120323	-0.244382	0.192548		
0.114773	-0.158967	0.0266431	0.140529	0.198157	0.197554	-0.0982307	-0.524557
-0.103017	0.00235237	0.0446769	0.408229	-0.0145618	-0.154016	0.0125502	0.
101905	0.0427995	0.385468	-0.171806	0.224319	-0.11891	-0.215646	-0.0325636
0.155124	-0.104843	-0.187668	-0.00583749	-0.0446053			
0.0933567	-0.230244	0.0202884	-0.0679714	0.0431394	0.0784963	0.108533	0.10475
-0.136759	-0.241306	0.217479	0.276888	-0.348509	-0.0754392	0.0268042	-0.
131768	-0.0213873	-0.157435	0.465802	-0.0531484	0.339082	-0.231688	0.0120718

图 3: P 矩阵

131768	-0.0213873	-0.157435	0.465802	-0.0531484	0.339082	-0.231688	0.0120718
-0.161575	0.00893414	-0.102	-0.0802051	-0.315397			
0.12281	-0.233625	-0.0284907	-0.161752	0.187375	-0.494987	0.0526245	0.0364021
-0.127682	0.0474879	-0.242878	-0.246161	-0.158028	0.0758759	-0.0352377	0
0.145888	-0.0893203	0.141246	0.0329373	0.466794	0.0592561	0.0892004	0.0825633
-0.100716	0.100567	-0.380861	-0.116152	0.069423			
0.194173	0.0273063	-0.0760688	-0.267384	-0.010747	-0.00408776	-0.435188	-0.192
26	0.389877	0.195929	0.152068	-0.118635	0.19595	-0.284525	-0.0658806
148488	-0.0343041	0.0648447	0.142297	0.0187205	0.454612	0.212791	-0.10155
-0.00933464	-0.0840452	-0.0160227	-0.0731663	-0.0726484			
0.113186	-0.127864	-0.190975	0.218761	0.115968	0.0845831	0.299806	0.0206603
0.200705	0.0419144	0.220654	-0.268292	-0.00394195	-0.0824178	0.0552526	-0.
102355	0.0718321	-0.292095	-0.101005	0.25261	-0.0317328	0.585665	0.202158
0.135156	0.152462	0.00112569	-0.0365073	-0.0183303			
0.245103	-0.0379005	0.249796	0.223658	-0.212712	0.00142139	-0.250621	-0.043857
4	-0.236987	-0.0374695	-0.0317127	-0.10255	0.0526566	0.0365469	0.0433822
-0.113337	-0.0299223	-0.0845067	0.191159	0.140691	0.0339611	0.063849	0.583883
0.130682	-0.397614	0.140045	0.107705	0.106066			
0.212867	0.0408414	0.0432211	-0.3223	-0.0998765	-0.0012797	0.0282962	0.217003
-0.228191	0.33744	0.133818	0.275688	-0.287306	0.133114	-0.09523	0.103352
-0.0949957	0.216425	-0.15649	-0.244084	0.208054	0.0754158	0.11225	0.324
0.140605	0.0131654	0.0701753	0.279555				
0.235342	-0.0342118	0.208583	0.22741	-0.12882	0.0526029	-0.242403	-0.113701
-0.260678	-0.0223432	0.00639523	-0.0795438	0.0585996	0.0160812	0.0442937	-
0.0739062	-0.0375475	-0.169321	0.186961	0.159976	-0.00779487	0.0409998	-0.4071
53	0.145078	0.594529	0.0992192	0.110496	0.128561		
0.0325802	-0.390963	0.0897124	0.0442409	0.477681	-0.292797	-0.119177	-0.092592
9	0.00905826	0.0647401	-0.0899299	-0.052934	-0.104726	-0.155627	0.154788
0.0328707	-0.0166423	-0.110141	-0.113296	-0.338967	-0.0450548	-0.02668	0.0864
267	0.0813027	0.075012	0.489293	-0.143249	-0.0385487		
0.159496	-0.174221	-0.129762	-0.224787	0.123585	0.210925	0.0472228	0.102244
0.0738503	-0.179292	-0.391638	0.0307355	0.12817	-0.182757	0.070913	-0.2904
-0.267671	-0.174687	-0.19764	-0.0208991	0.0884289	-0.108163	-0.013922	
0.102836	-0.029847	-0.104377	0.534584	0.0609172			
0.153544	-0.170361	-0.459664	0.0971722	-0.354715	-0.300944	-0.100385	0.0303362
0.131896	-0.462944	0.242162	-0.0800179	-0.165358	-0.0901784	-0.127987	-
0.0340784	0.0148946	0.141069	-0.131781	-0.0213682	-0.0916821	-0.132964	-0.0817
168	0.175527	-0.0431464	0.128751	0.00708762	0.171746		

图 4: P 矩阵

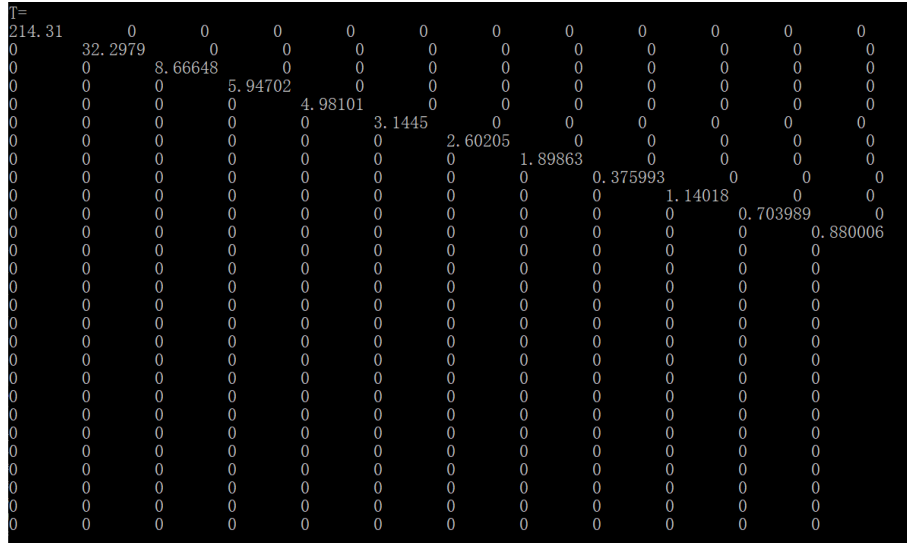


图 5: T 矩阵

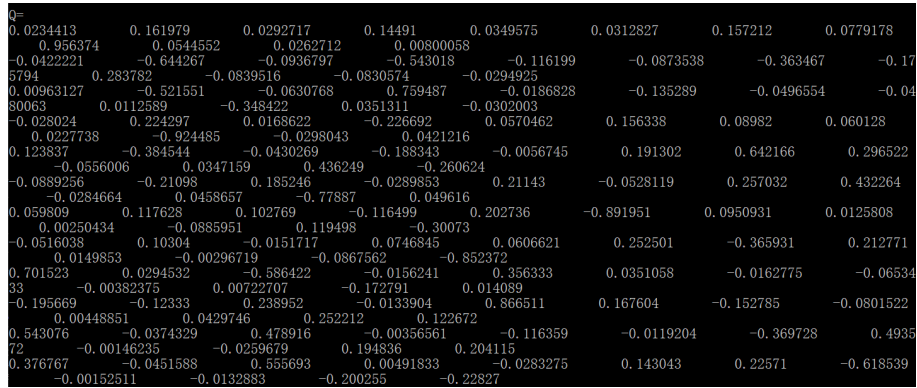


图 6: Q 矩阵

四、结果分析

带 Wilkinson 位移的 SVD 迭代法是一种有效的数值计算方法，用于求解特征值问题。该方法结合了 SVD（奇异值分解）和迭代技术，通过对矩阵进行迭代操作，逐步逼近真实的特征值和特征向量。

该方法的优点在于：

1. 全局收敛性：该方法具有全局收敛性，这意味着只要迭代过程持续进行，它最终会收敛到正确的解，而不会陷入局部最优解。
2. 对矩阵特征值分布敏感：该方法对矩阵特征值的分布很敏感，这使得它可以很好地处理具有复杂特征值分布的矩阵。

然而，带 Wilkinson 位移的 SVD 迭代法也存在一些缺点：

1. 计算量大：每次迭代需要进行奇异值分解 (SVD)，这是一个计算密集型操作，特别是对于大型矩阵。这可能导致计算时间较长，需要较高的计算资源。需要额外的存储空间：由于需要存储 U 、 Σ 和 V 等中间结果，该方法可能需要大量的存储空间。这可能对存储资源有限的环境不太适用。
2. 迭代不保证最快收敛：虽然该方法全局收敛，但它不一定是收敛速度最快的算法。对于某些问题，可能需要其他更优化的算法。