Lab7_Report

申长硕 人工智能与数据科学学院 PB22020518

问题引入

物理模拟在计算机图形学中起到非常重要的作用，其中数值积分的重要性不言而喻

考虑二维问题，质点初始时(t = 0)位于原点，速度为0收到水平和竖直两个力，获得两个独立的加速度 $a_x(t), a_y(t)$，目标是计算其轨迹

$$\begin{cases} v_x(t) = \int_0^t a_x(s)ds \\ x(t) = \int_0^t v_x(s)ds \\ \quad\quad = \int_0^t ds \int_0^s a_x(r)dr \end{cases}$$

现已有两个方向的加速度

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{sin(t)}{\sqrt{t+1}} \\ a_y(t) = \frac{log(t+1)}{t+1} \end{cases}$$

使用`Romberg积分`作为数值积分方法，计算质点在时刻$t \in linspace(0, 10, 100)$的位移$(x(t), y(t))$，其中初始区间数$M = 8$（M取4, 8, 12, 16， 20）做比较

数学分析

`Romberg积分`

从复化积分公式开始：

1. 复化梯形积分，第K个子区间上的积分公式：

   $$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

   其截断误差

   $$R_1^N(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

2. 复化Simpson积分

   $$I_k = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx = \frac{h}{6}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})]$$

   其截断误差

   $$R_2^N(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

3. 复化Cotes积分、、、

直接开始讨论Romberg公式

1. 使用梯形公式可以组合成Simpson积分：

$$I(f) \approx T_{2n}(f) + \frac{1}{3}(T_{2n}(f) - T_n(f)) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n = S_n$$

2. 再通过对Simpson积分进行组合得到Cotes积分

$$I(f) \approx S_{2n}(f) + \frac{1}{15}(S_{2n}(f) - S_n f) = C_n(f)$$

3. 类似的，通过对Cotes积分做组合得到Romberg积分

$$R_n(f) = C_{2n}(f) + \frac{1}{63}(C_{2n}(f) - C_n(f))$$

   还可以继续做下去

4. 于是，我们可以得到一个递推公式：

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1},\ f = 2, 3, \ldots$$

5. 给出Romberg算法的伪代码

step1 输入区间端点 a，b，精度控制值 e，循环次数 M，定义函数 $f(x)$，
    取 $n=1$，$h=b-a$

step 2 $R_{1,1} = (f(a)+f(b))h/2$

step 3 for $k=2$ to M

  $\{R_{k,1} = \left(R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a+(2i-1)h_k)\right)/2 \quad !h_k = h/2^{k-1}$

  for $j=2$ to k

   $\{R_{k,j} = R_{k,j-1} + (R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1})/(4^{j-1}-1)\}$

   if$|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < e$ 退出循环

  }

step 4 输出 $R_{k,k}$.

算法设计及代码实现

本实验使用Cpp完成计算部分，使用python实现可视化部分

主要是Cpp实现Romberg的函数

```
double Romberg(double a, double b, double e, int M, std::function<double(double)>
f, int &hit_count, int &total_count) {
    std::vector<std::vector<double>> R(M, std::vector<double>(M, 0.0));
    R[0][0] = (f(a) + f(b)) * (b - a) / 2;
    auto h = [a, b](int x) { return (b - a) / std::pow(2, x - 1); };
    // 每次进入循环，记录总调用次数
    total_count++;
    int result_index = 0;
    for (int k = 1; k < M; k++)
    {
        result_index = k;
        double sum = 0.0;
        for (int i = 1; i <= std::pow(2, k - 1); i++) {
            sum += f(a + (2 * i - 1) * h(k + 1));
        }
        R[k][0] = (R[k - 1][0] + h(k) * sum) / 2;
```

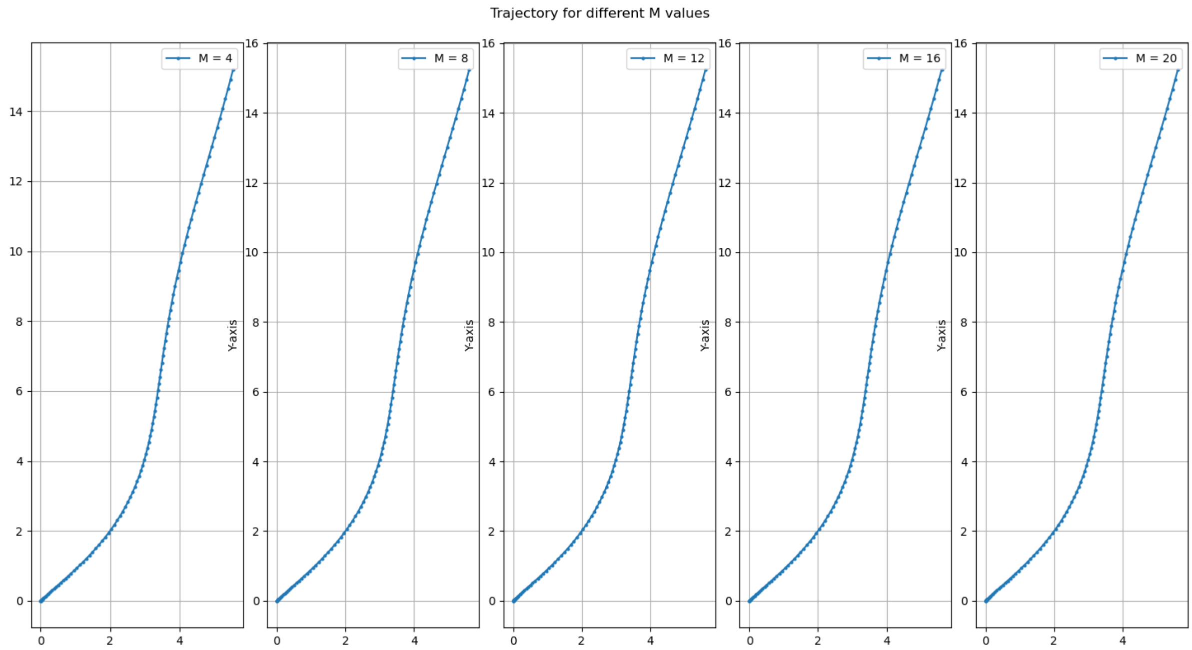
```
        for (int j = 1; j <= k; j++) {
            R[k][j] = R[k][j - 1] + (R[k][j - 1] - R[k - 1][j - 1]) /
(std::pow(4, j) - 1);
        }

        if (std::abs(R[k][k] - R[k - 1][k - 1]) < e) {
            hit_count++;
            break;
        }
    }

    return R[result_index][result_index];
}
```

其余函数不再展示，详间src中`run.cpp`和`run.py`

最终的console段输出结果

```
M = 4, 达到误差要求的比例: 15.8954%
M = 8, 达到误差要求的比例: 65.0738%
M = 12, 达到误差要求的比例: 100%
M = 16, 达到误差要求的比例: 100%
M = 20, 达到误差要求的比例: 100%
```

可视化结果



分析与思考

- 经过观察，在M较小时，随着M的增大，`Romberg`达到要求精度的比例会随之提升，不过到了某个M_0之后就达到100了，之后也就不再需要提高M了，不过其实根据我们所说的已经控制在要求精度内，也就不会再迭代下去了
- 本次实验需要进行两次`Rombeg`积分，中间嵌套的一次感觉有些难压
- 关于选取一个合适的M，个人觉得稳妥的方式还是递归，然后分析过去几次的达到误差要求的比例是否一定程度上不再变化，如果“收敛”，就达到了一个合适的M值，不需要再增加M了