

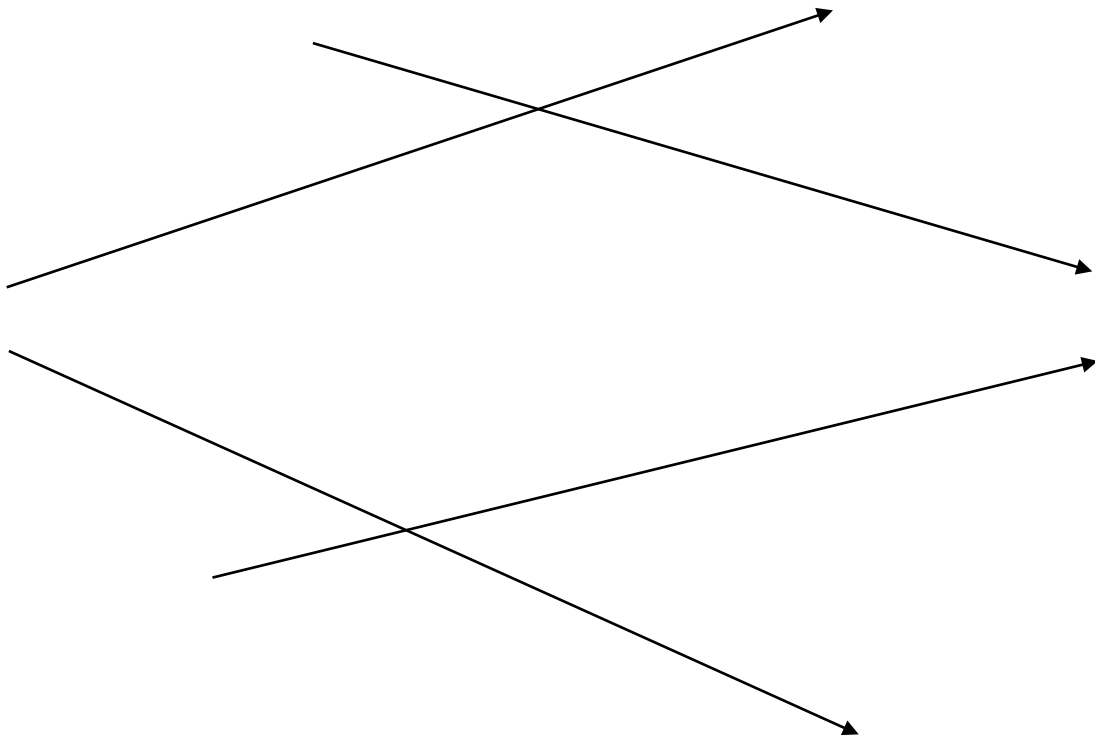


innershell

Optimal Transport







$$\min \sum_{i,j} \Gamma_{ij} d(x_i, y_j)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_j \Gamma_{ij} = a_i \quad \forall i$$

$$\sum_i \Gamma_{ij} = b_j \quad \forall j$$

$$\text{dist}(x_i, y_j)$$

$\Gamma_{ij} = \text{"mass" moved from } x_i \text{ to } y_j$

total transportation cost

supply/demand

constraints

demand

$$b_1$$

\vdots

$$b_j$$

\vdots

$$b_m$$

T

1

1

T

nm

supply

$$a_1$$

$$\vdots$$

$$a_i$$

$$\vdots$$

$$a_n$$

cost to move mass

Γ_{ij} from x_i to y_j

$$\Gamma_{ij} d(x_i, y_j)$$



Gaspard Monge
(1746-1818)



Leonid Kantorovich
(1912-1986)

M É M O I R E

S U R L A

T H É O R I E D E S D É B L A I S
E T D E S R E M B L A I S.

Par M. M O N G E.

LORSQU'ON doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ МАСС

Мы будем считать R метрическим компактным пространством, хотя некоторые из приведенных определений и результатов могут быть высказаны и для пространств более общего вида.

Пусть $\Phi(\epsilon)$ распределение масс, т.е. функция совокупности: 1) определенная для борелевских множеств, 2) неотрицательная: $\Phi(\epsilon) \geq 0$, 3) абсолютно-аддитивная: если $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots$; $\epsilon_i \cap \epsilon_k = \emptyset$ ($i \neq k$), то $\Phi(\epsilon) = \Phi(\epsilon_1) + \Phi(\epsilon_2) + \dots$. Пусть $\Phi'(\epsilon')$ другое распределение масс, причем $\Phi(R) = \Phi'(R)$. Перемещением масс будем называть такую функцию $\Psi(\epsilon, \epsilon')$, определен-

Mongee's Formula

Kantovich's Formulation

$\sigma(i) = j$ if mine i assigned to factory j

$$\min \sum_i d(x_i, y_{\sigma(i)})$$

strict: deterministic assignments

relaxed: fractional assignments

$$\dot{x}_1$$

$$\dot{x}_i$$

$$\dot{x}_n$$

$$\dot{y}_1$$

$$\dot{y}_j$$

$$\dot{y}_m$$

allow "mass splitting"

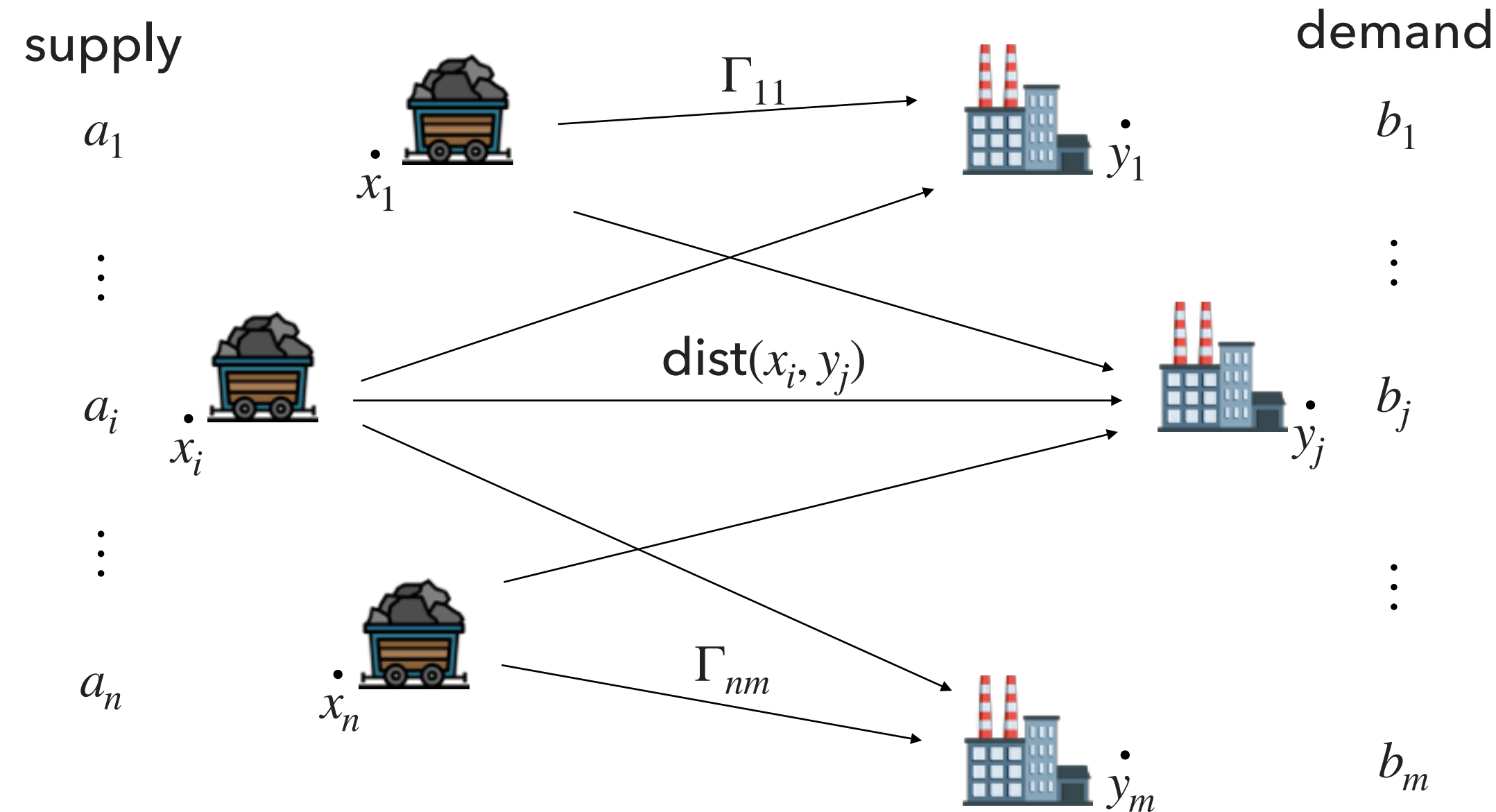
Optimal Transport in a nutshell

Monge's Formulation

strict: deterministic assignments



Gaspard Monge
(1746-1818)



Γ_{ij} = "mass" moved from x_i to y_j

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j} \Gamma_{ij} d(x_i, y_j) \quad \text{total transportation cost} \\ \text{subject to} \quad & \sum_j \Gamma_{ij} = a_i \quad \forall i \\ & \sum_i \Gamma_{ij} = b_j \quad \forall j \end{aligned}$$

supply/demand constraints

Kantorovich's Formulation

relaxed: fractional assignments



Leonid Kantorovich
(1912-1986)

666. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
M É M O I R E
SUR LA
THÉORIE DES DÉBLAIS
ET DES REMBLAIS.
Par M. M O N G E.
LORSQU'ON doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de

Л. В. Канторович

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ МАСС

Мы будем считать R метрическим компактным пространством, хотя некоторые из приведенных определений и результатов могут быть высказаны и для пространств более общего вида.

Пусть $\Phi(\epsilon)$ распределение масс, т.е. функция совокупности: 1) определенная для борелевских множеств, 2) неотрицательная: $\Phi(\epsilon) \geq 0$, 3) абсолютно-аддитивная: если $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots$; $\epsilon_i \cap \epsilon_k = \emptyset$ ($i \neq k$), то $\Phi(\epsilon) = \Phi(\epsilon_1) + \Phi(\epsilon_2) + \dots$. Пусть $\Phi'(\epsilon')$ другое распределение масс, причем $\Phi(R) = \Phi'(R)$. Перемещением масс будем называть такую функцию $\Psi(\epsilon, \epsilon')$, определен-

Optimal Transport

From mines to measures

Discrete

Continuous