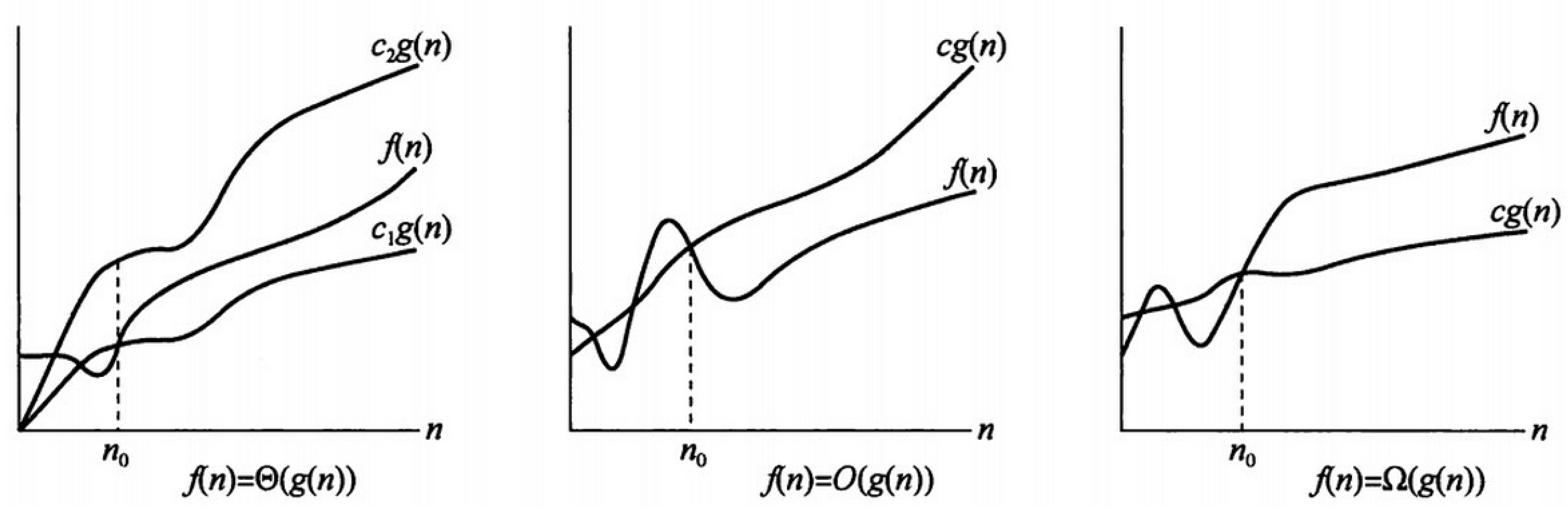
1.渐近精确界记号：Θ（big-theta）

假设**算法**A的运行时间表达式$T_1(n)$为：$T_1(n) = 30n^4 + 20n^3 + 40n^2 + 46n + 100$
假设算法B的运行时间表达式$T_2(n)$为：$T_2(n) = 1000n^3 + 50n^2 + 78n + 10$
当问题规模足够大的时候，例如n=100万，算法的运行时间将主要取决于时间表达式的第一项，其它项的执行时间只有它的几十万分之一，可以忽略不计。第一项的常数系数，随着n的增大，对算法的执行时间也变得不重要了。
于是，算法A的运行时间可以记为：$T_1(n) \approx n^4$，记为$T_1(n) = \Theta(n^4)$；算法B的运行时间可以记为：$T_2(n) \approx n^4$，记为$T_2(n) = \Theta(n^4)$。

> Θ的数学含义
> 方式一：设$f(n)$和$g(n)$是定义域为自然数集合的函数。如果$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$存在，并且等于某个常数$c(c>0)$，那么$f(n) = \Theta(g(n))$。通俗理解为$f(n)$和$g(n)$同阶，Θ用来表示算法的精确阶。
>
> 方式二：$\Theta(g(n))$={$f(n)$:存在正常量c_1、c_2和n_0，使得对所有$n \geq n_0$，有$0 \leq c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)$}若存在正常量$c_1$、$c_2$，使得对于足够大的n，函数$f(n)$能“夹入”$c_1g(n)$与$c_2g(n)$之间，则$f(n)$属于集合$\Theta(g(n))$，记作$f(n) \in \Theta(g(n))$。作为代替，我们通常记“$f(n) = \Theta(g(n))$”。

由下图中左侧$f(n) = \Theta(g(n))$图可以看出，对所有$n > n_0$时，函数$f(n)$乘一个常量因子可等于$g(n)$，我们称$g(n)$是$f(n)$的一个 渐近紧确界 。Θ记号在五个记号中，要求是最严格的，因为$g(n)$即可以表示上界也可以表示下界。



需要注意的是：$\Theta(g(n))$的定义要求每个成员$f(n) \in \Theta(g(n))$均 渐近非负，即当n足够大时，$f(n)$非负。 渐近正函数 就是对所有足够大的n均为正的函数。

2.渐近上界记号：O(big-oh)

> 定义：设$f(n)$和$g(n)$是定义域为自然数集N上的函数。若存在正数c和n_0，使得对一切$n \geq n_0$都有$0 \leq f(n) \leq cg(n)$成立，则称$f(n)$的渐进的上界是$g(n)$，记作$f(n) = O(g(n))$。通俗的说n满足一定条件范围内，函数$f(n)$的阶不高于函数$g(n)$。

根据符号O的定义，用它评估算法的复杂度得到的只是问题规模充分大时的一个上界。这个上界的阶越低，评估越精确，越有价值。

> 例如：设$f(n) = n^2 + n$,则
> $f(n) = O(n^2)$，取$c = 2$,$n_0 = 1$即可
> $f(n) = O(n^3)$，取$c = 1$,$n_0 = 2$即可。显然，$O(n^2)$作为上界更为精确。

几种常见的复杂度关系

> $O(1) < O(\log(n)) < O(n) < O(n\log n) < O(n^2) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$
> 需要注意的是：对数函数在没有底数时，默认底数为2；如$\lg n = \log n = \log_2 n$因为计算机中很多程序是用二分法实现的。

符号用法测试：素数测试

```
int isprime(int n) {
    for(int i=2; i<=(int)sqrt(n); i++) {
        if(n%i==0) {
            return0;
        }
    }
    return1;
}
```

在上面这个素数测试的例子中，基本运算是整除；时间复杂度$T(n) = O(n^{\frac{1}{2}})$是正确的。当被测的数n为偶数时，基本运算一次也没执行，所以$T(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$是错误的，因为没有办法证明$T(n)$的下界是$\Omega(n^{\frac{1}{2}})$。

3.渐近下界记号：Ω(big-omege)

> 定义：设$f(n)$和$g(n)$是定义域为自然数集N上的函数。若存在正数c和n_0，使得对一切$n \geq n_0$都有$0 \leq cg(n) \leq f(n)$成立，则称$f(n)$的渐进的下界是$g(n)$，记作$f(n) = \Omega(g(n))$。通俗的说n满足一定条件范围内，函数$f(n)$的阶不低于函数$g(n)$。

根据符号Ω的定义，用它评估算法的复杂度得到的只是问题规模充分大时的一个下界。这个下界的阶越高，评估越精确，越有价值。

> 例如：设$f(n) = n^2 + n$,则
> $f(n) = \Omega(n^2)$，取$c = 1$,$n_0 = 1$即可
> $f(n) = \Omega(100n)$，取$c = 1/100$,$n_0 = 1$即可

显然，$\Omega(n^2)$作为下界更为精确。

4.非渐近紧确上界：o(小-oh)

> 定义1：设$f(n)$和$g(n)$是定义域为自然数集N上的函数。若对于任意正数c，都存在n_0，使得对一切$n \geq n_0$都有$0 \leq f(n) < cg(n)$成立，则称$f(n)$的渐进的非紧确上界是$g(n)$，记作$f(n) = o(g(n))$。通俗的说n满足一定条件范围内，函数$f(n)$的阶低于函数$g(n)$。
> 定义2：设$f(n)$和$g(n)$是定义域为自然数集合的函数。如果$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$，那么$f(n) = o(g(n))$。通俗理解为$f(n)$低于$g(n)$的阶。

由O记号提供的渐近上界可能是渐近紧确的，也可能是非紧确的。（如：$2n^2 = O(n^2)$是渐近紧确的，而$2n = O(n^2)$是非紧确上界。）
例子：$f(n) = n^2 + n$，则$f(n) = o(n^3)$

5.非渐近紧确下界：ω(小-omege)

> 定义1：设$f(n)$和$g(n)$是定义域为自然数集N上的函数。若对于任意正数c，都存在n_0，使得对一切$n \geq n_0$都有$0 \leq cg(n) < f(n)$成立，则称$f(n)$的渐进的非紧确下界是$g(n)$，记作$f(n) = \omega(g(n))$。通俗的说n满足一定条件范围内，函数$f(n)$的阶高于函数$g(n)$。
> 定义2：设$f(n)$和$g(n)$是定义域为自然数集合的函数。如果$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \infty$，那么$f(n) = o(g(n))$。通俗理解为$f(n)$高于$g(n)$的阶。

ω记号与Ω的关系类似于o和O记号的关系。我们用ω表示一个非渐近紧确的下界。
例子：$f(n) = n^2 + n$，则$f(n) = \omega(n)$是正确的。$f(n) = \omega(n^2)$则是错误的，$f(n) = \Omega(n^2)$是正确的。

6.渐近记号Θ、O、o、Ω、ω关系

记号	含义	通俗理解
(1)Θ（西塔）	紧确界。	相当于”=”
(2)O（大欧）	上界。	相当于”<=”
(3)o（小欧）	非紧的上界。	相当于”<”
(4)Ω（大欧米伽）	下界。	相当于”>=”
(5)ω（小欧米伽）	非紧的下界。	相当于”>”