悬停油门估计偏差情况下的运动分析

在上一次作业中，部分同学在实验中出现了过冲和飞行过程中抽搐的情况，最终经过对飞行日志的分析，定位到是因为**悬停油门量估计有偏差**所致。虽然最终我们发现源头是悬停油门量估计器的参数设置不合理，经过修改之后最终飞行表现恢复正常，但在解决这个问题的过程中，顺便从理论上分析了一下悬停油门量估计不准带来的影响，觉得十分有趣，更有趣的是，理论分析与大家入学笔试的最后一个题目有着紧密的关联，算是它的升级版，故书写此文与大家分享。

理论模型

油门量与加速度

回顾一下，在我们进行悬停油门量讲解的时候，构建了一个z向油门量与z向加速度之间的关系：

$$T_z = T_h(\frac{a_z}{g} + 1) \tag{1}$$

现在我们用T_h表示**真实的悬停油门量**，用$v_0 \sim 0$表示**我们估计到的悬停油门量**，当我们期望飞机在z向具有加速度a_z时，基于估计到的悬停油门量会给出的z向油门分量为:

$$\tilde{T_z} = \tilde{T_h}(\frac{a_z}{g} + 1) \tag{2}$$

记$\tilde{a_z}$为z向油门量$\tilde{T_z}$产生的真实的z向加速度，根据公式1我们有：

$$\tilde{T_z} = T_h(\frac{\tilde{a_z}}{g} + 1) \tag{3}$$

整理得到:

$$\tilde{a_z} = \alpha a_z + (\alpha - 1)g \tag{4}$$

其中:

$$\alpha = \frac{\tilde{T_h}}{T_h} \tag{5}$$

公式4建立了基于我们估计的错误的悬停油门量，z向的期望加速度和飞机真实的加速度之间的关系，也是我们后续理论分析的重要工具。

轨迹跟踪控制模型

记无人机真实的轨迹为c，期望无人机跟踪的轨迹为r，通过反馈输入给无人机的控制量是期望加速度a_{des}并按照如下方式计算：

$$a_{des} = \ddot{r} + K_v(\dot{r} - \dot{c}) + K_p(r - c) \tag{6}$$

根据上一章节的分析，由于悬停油门量的估计偏差，飞机在z向得到的真实的加速度为:

$$\ddot{c} = \alpha a_{des} + (\alpha - 1)g = \alpha[\ddot{r} + K_v(\dot{r} - \dot{c}) + K_p(r - c)] + (\alpha - 1)g \tag{7}$$

假设某时刻，我们希望通过上面的控制让无人机在原地悬停，则:

$$r(t) = 0 \tag{8}$$

从而上述微分方程可以进一步化为:

$$\ddot{c}+\alpha K_v\dot{c}+\alpha K_p=(\alpha-1)g \tag{9}$$

理论分析

将微分方程两边同时做拉式变换:

$$(s^2+\alpha K_v s+\alpha K_p)C(s)=(\alpha-1)g\frac{1}{s}+v_0 \tag{10}$$

其中v_0代表无人机的初始速度，从而我们进一步有:

$$\begin{aligned}C(s)&=(\alpha-1)g\frac{1}{s(s^2+\alpha K_v s+\alpha K_p)}+\frac{v_0}{s^2+\alpha K_v s+\alpha K_p}\\&=\frac{(\alpha-1)g+v_0 s}{s(s^2+\alpha K_v s+\alpha K_p)}\\&=\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p}\frac{1}{s}+\frac{v_0-\frac{K_v(\alpha-1)g}{K_p}-\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p}s}{s^2+\alpha K_v s+\alpha K_p}\\&=\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p}\frac{1}{s}+\frac{A+Bs}{(s+\frac{\alpha K_v}{2})^2+\alpha K_p-(\frac{\alpha K_v}{2})^2}\end{aligned} \tag{11}$$

其中:

$$A=v_0-\frac{K_v(\alpha-1)g}{K_p}\quad B=-\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p} \tag{12}$$

下面我们分两种情况来分析:

情况1：$\alpha K_p-(\frac{\alpha K_v}{2})^2>0$

令:

$$\omega^2=\alpha K_p-(\frac{\alpha K_v}{2})^2\qquad\lambda=\frac{\alpha K_v}{2} \tag{13}$$

则:

$$C(s)=\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p}\frac{1}{s}+\frac{A+Bs}{(s+\lambda)^2+\omega^2} \tag{14}$$

反变换得到:

$$c(t)=\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p}+[\frac{A}{\omega}\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)]e^{-\lambda t} \tag{15}$$

从上面来看，在这种情况下，无人机的运动由两个不同的项组成：

- **偏移项：** $\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p}$

在实际飞行过程中，这一项表现为过冲，也就是当无人机最终打到稳定之后的位置，可以看到K_p越大，过冲就越小。

- **衰减震荡项**$[\frac{A}{\omega}\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)]e^{-\lambda t}$

震荡幅度为$\sqrt{(\frac{A}{\omega})^2+B^2}$，震荡频率为$\omega=\sqrt{\alpha K_p-(\frac{\alpha K_v}{2})^2}$，震荡周期为$\frac{2\pi}{\omega}$，但这个震荡将随时间指数衰减，直到消失。

实验验证

仿真实验

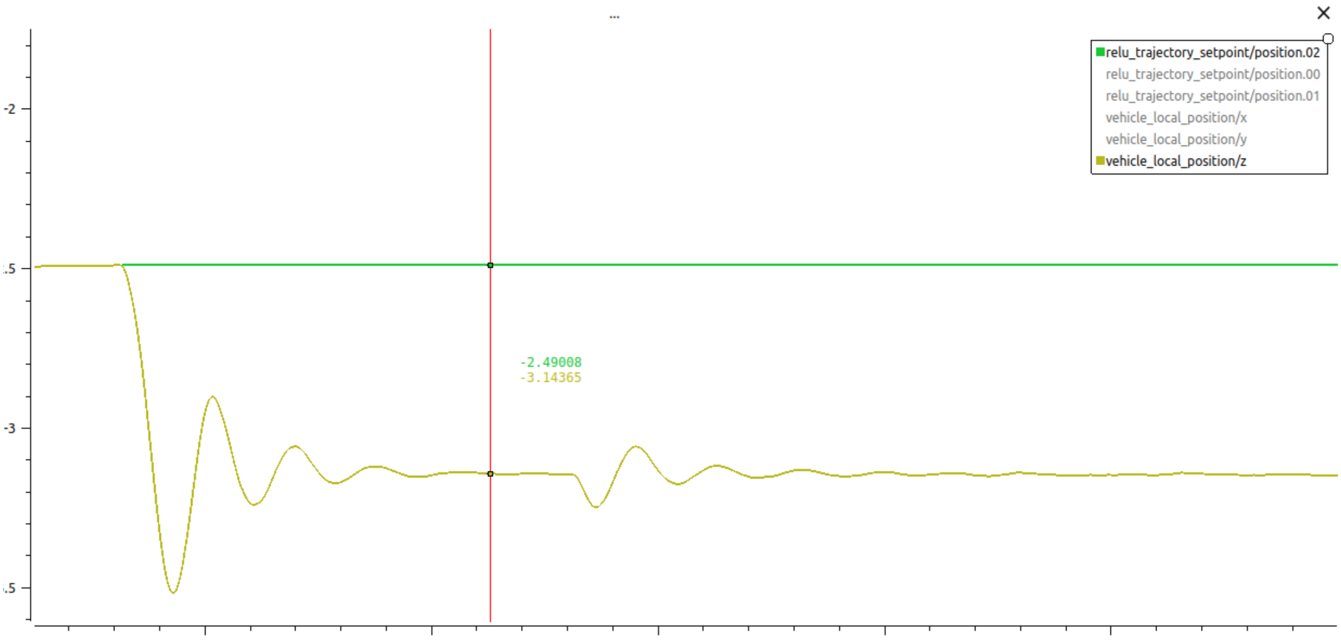
我们首先修改位置控制器，令$\tilde{T}_h = 1.5 * T_h$

```
// Setup the current estimated hover thrust
if (_hover_thrust_estimate_sub.updated()) {
    hover_thrust_estimate_s hover_thrust_est;
    _hover_thrust_estimate_sub.copy(&hover_thrust_est);

    if (hover_thrust_est.valid) {
        _hover_thrust = hover_thrust_est.hover_thrust * 1.5;
    }
}
```

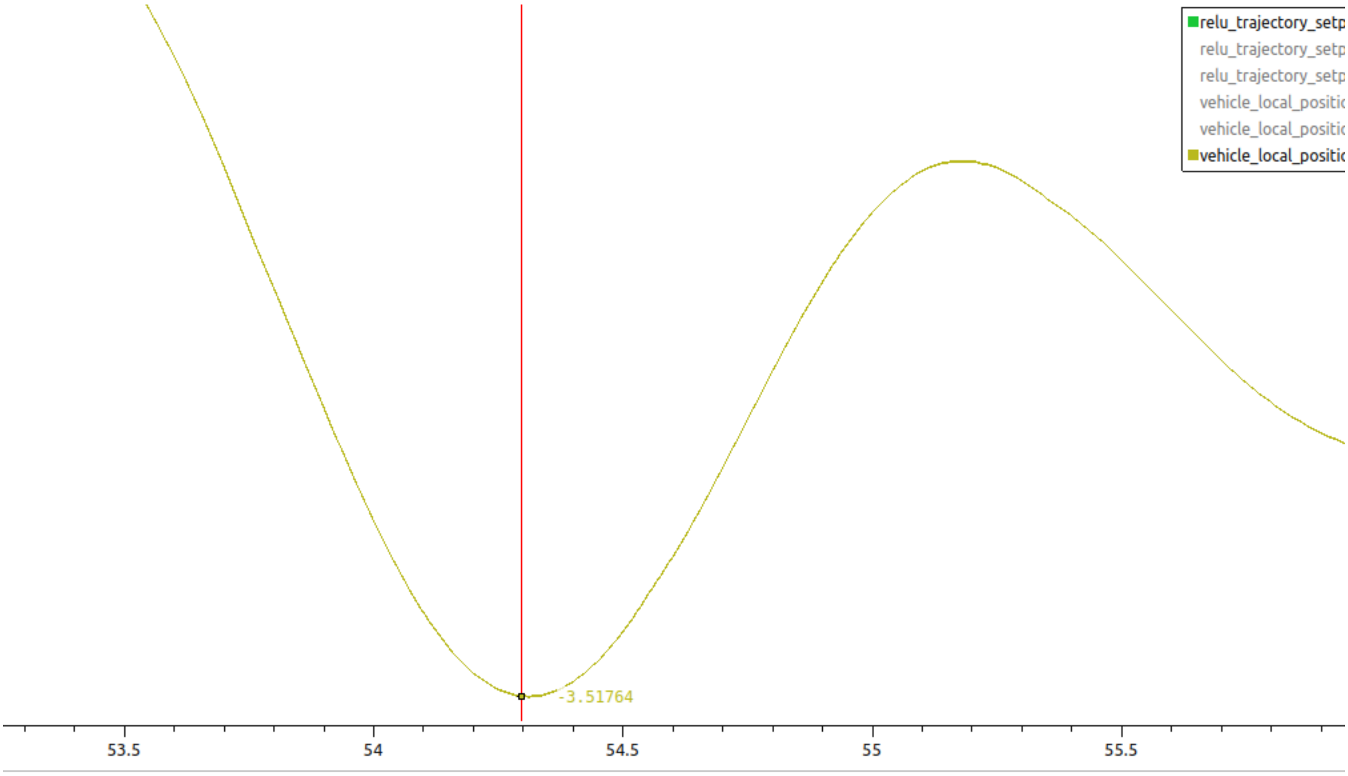
此时$\alpha = 1.5$，然后我们修改控制器参数: $K_p = 5, K_v = 0.5$

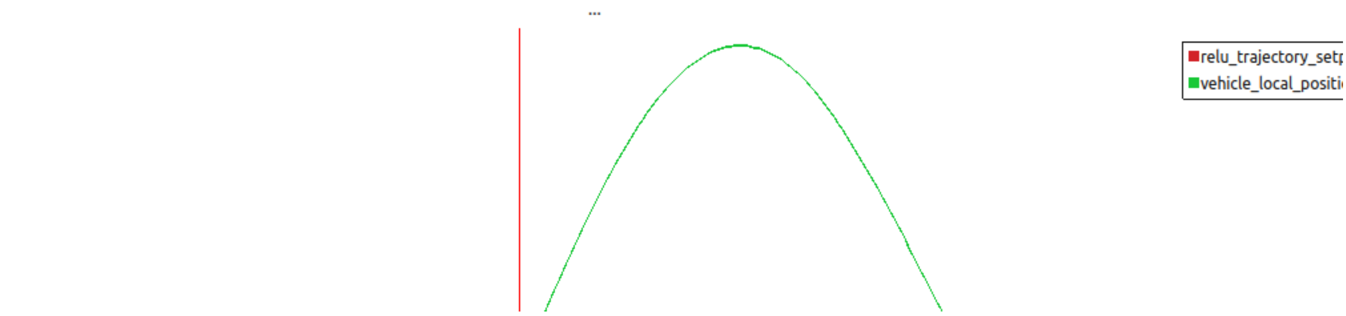
首先分析过冲，理论计算得到，此时悬停位置的过冲量应该为: $\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p} = 0.65$



然后分析震荡频率，在这种情况下，震荡周期应该为: $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha K_p - (\frac{\alpha K_v}{2})^2}} = 2.31$

```
>>> import numpy as np
>>> kp = 1.5 * 5
>>> kv = 1.5 * 0.5
>>> 2 * np.pi / np.sqrt(kp - (kv / 2) ** 2)
2.316111173841665
>>>
```



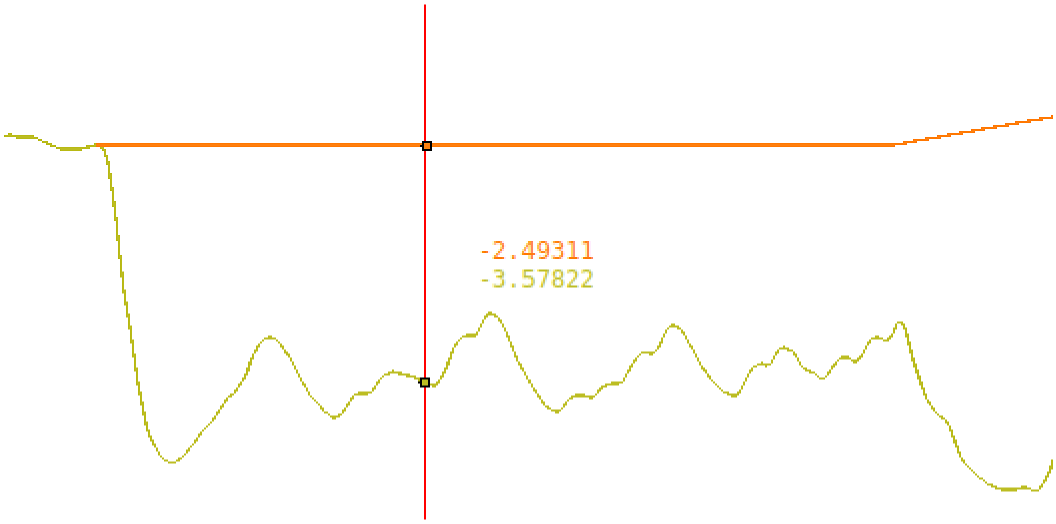


真实数据验证

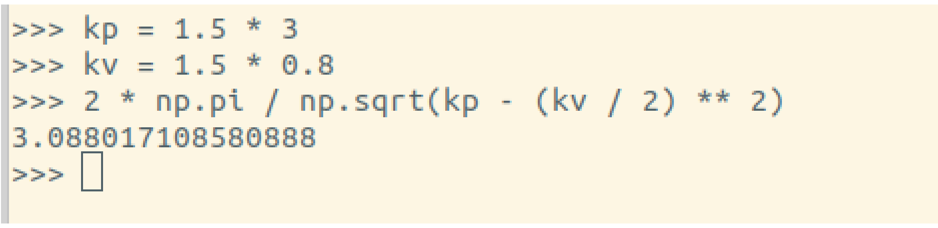
在学生的飞机上，真实的悬停油门量大约是0.2，但由于悬停油门估计器参数设置不合理，估计得到的悬停油门是0.3，因此$\alpha = 1.5$。此外，在我分析的飞行日志里，$K_p = 3, K_v = 0.8$:

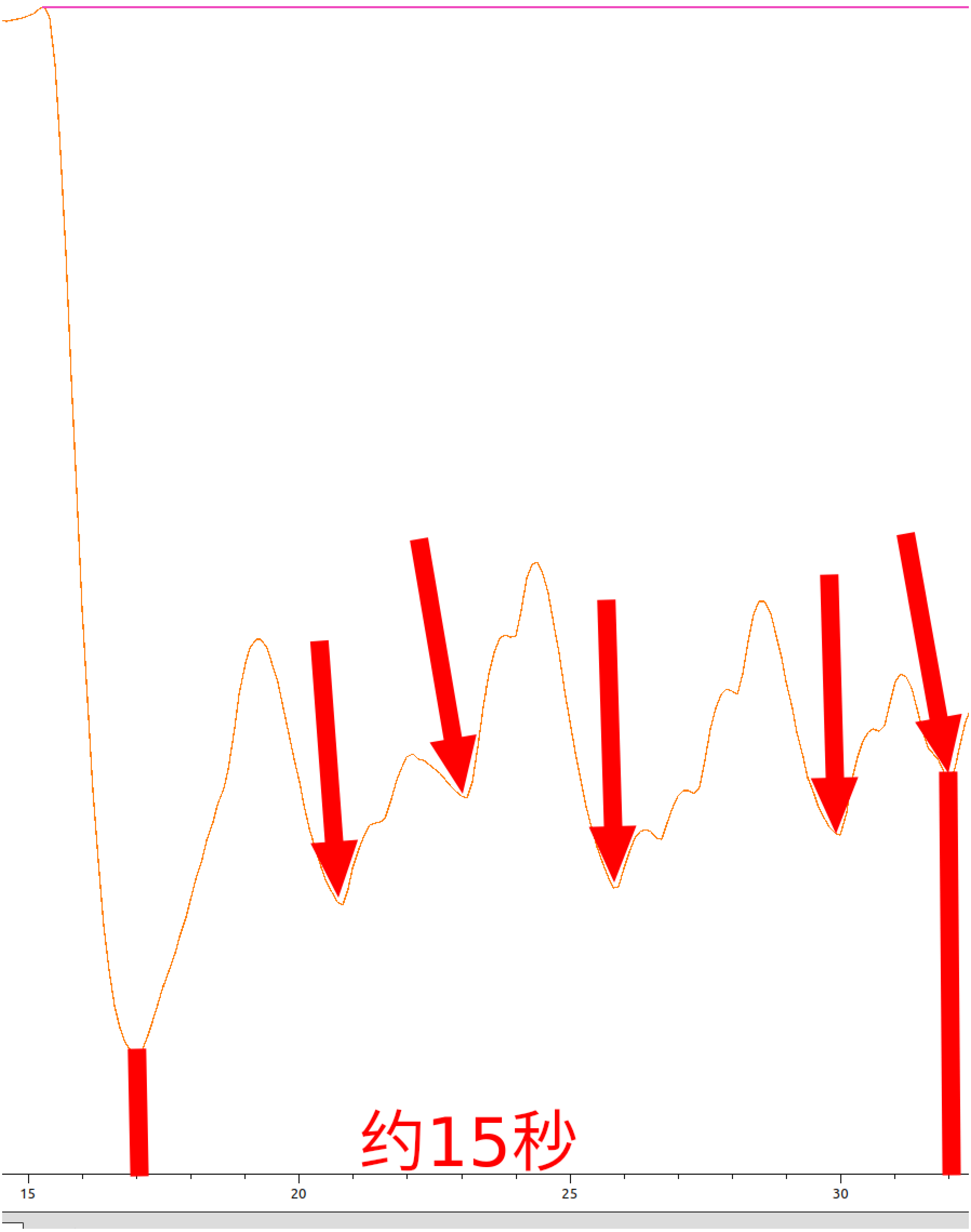
MY_MC_POS_KP_XY	3
MY_MC_POS_KP_Z	3
MY_MC_VEL_KI_XY	0
MY_MC_VEL_KI_Z	0
MY_MC_VEL_KP_XY	0.8
MY_MC_VEL_KP_Z	0.8

因此，过冲量应该为: $\frac{g}{3*3} \sim 1.1$。



周期应该为: 3.08


```
>>> kp = 1.5 * 3
>>> kv = 1.5 * 0.8
>>> 2 * np.pi / np.sqrt(kp - (kv / 2) ** 2)
3.088017108580888
>>>
```



从上面的数据来看，震荡经历5个周期(5个波谷)，时间恰好约15秒。

情况2: $\alpha K_p - (\frac{\alpha K_v}{2})^2 < 0$

令$\triangle^2 = (\frac{\alpha K_v}{2})^2 - \alpha K_p, \lambda = \frac{\alpha K_v}{2}$，则:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p}\frac{1}{s} + \frac{A+Bs}{(s+\lambda)^2-\triangle^2} \\ &\frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p}\frac{1}{s} + \frac{A+Bs}{2\triangle}(\frac{1}{s+\lambda-\triangle} - \frac{1}{s+\lambda+\triangle}) \end{aligned} \tag{16}$$

再令$\lambda_1 = \lambda - \triangle, \lambda_2 = \lambda + \triangle$，则:

$$c(t) = \frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p} + \frac{A}{2\triangle}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + \frac{B}{2\triangle}(\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) \tag{17}$$

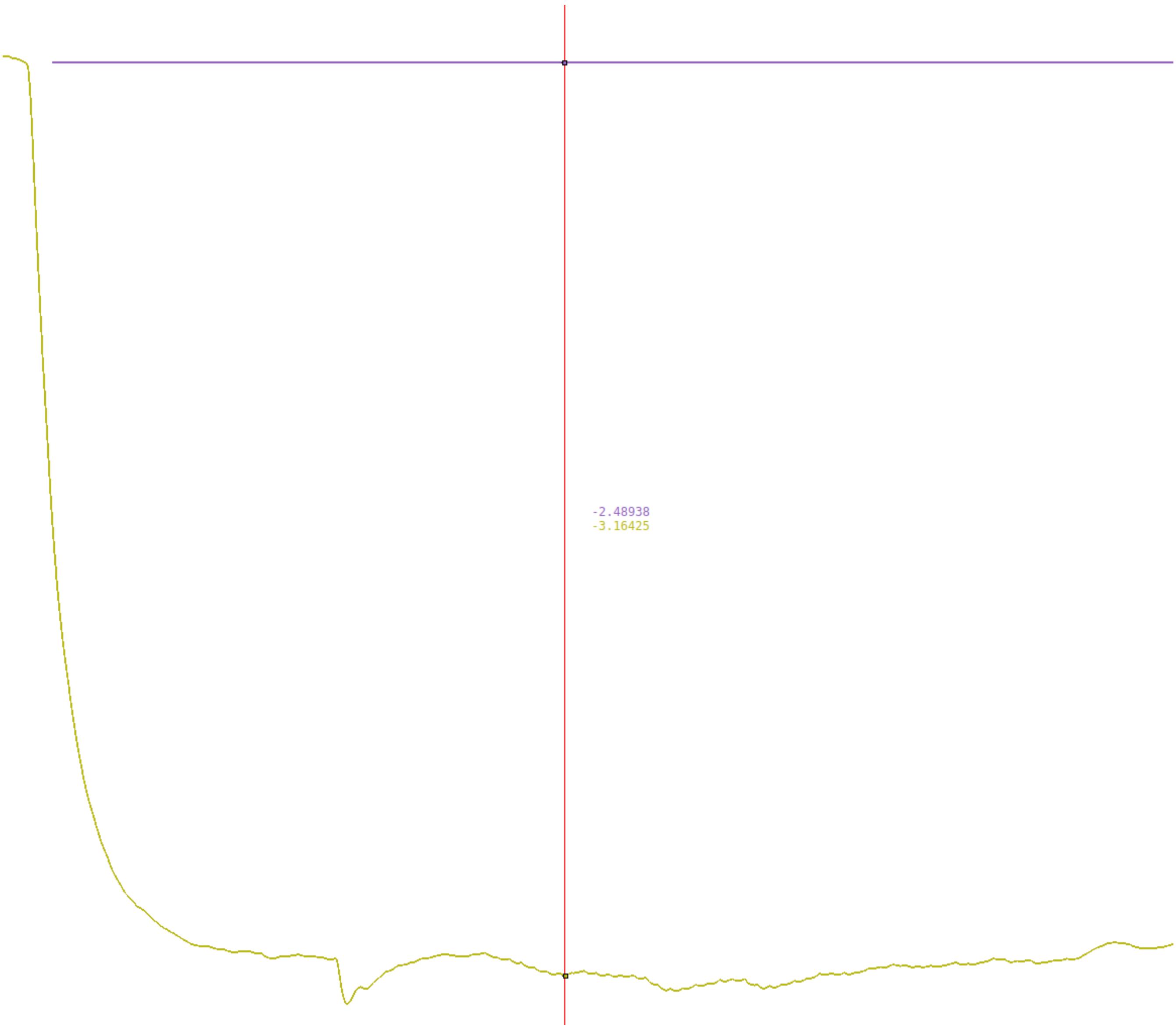
可以看到，此时只有过冲，没有震荡。

实验验证

仿真实验

$K_p = 5, K_v = 5.5$

过冲量:



无震荡。

为什么当悬停油门量有偏差时震荡如此明显?

我们从上面的分析已经看到，飞机最终的震荡幅度为:

$$\sqrt{(\frac{A}{\omega})^2+B^2} \geq |B| = \frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_p} \tag{18}$$

当$\alpha \neq 0$时，上述震荡幅度会比较明显。

而当悬停油门量的估计较为准确时，$\alpha \sim 1$，最终的震荡幅度为:

$$\frac{A}{\omega} = \frac{v_0}{\omega} \tag{19}$$

而在我们启动控制器时，$v_0 \sim 0$，因此在悬停油门量估计准确的情况下，这种震荡几乎观察不到。

速度控制下的稳态分析

当只有速度控制时，原控制策略变成:

$$\ddot{c} = \alpha a_{des} + (\alpha-1)g = \alpha[\ddot{r} + K_v(\dot{r}-\dot{c})] + (\alpha-1)g \tag{20}$$

做拉式变换后:

$$(s^2+\alpha K_v s)C(s) = (\alpha-1)g\frac{1}{s} + v_0 \tag{21}$$

$$C(s) = (\alpha-1)g\frac{1}{s^2(s+\alpha K_v)} + \frac{v_0}{s(s+\alpha K_v)} \tag{22}$$

我们关心其速度的拉式变换:

$$\begin{aligned} V(s) = sC(s) &= \frac{(\alpha-1)g + v_0 s}{s(s+\alpha K_v)} \\ &= \frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_v}\frac{1}{s} + \frac{v_0 - \frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_v}}{s+\alpha K_v} \end{aligned} \tag{23}$$

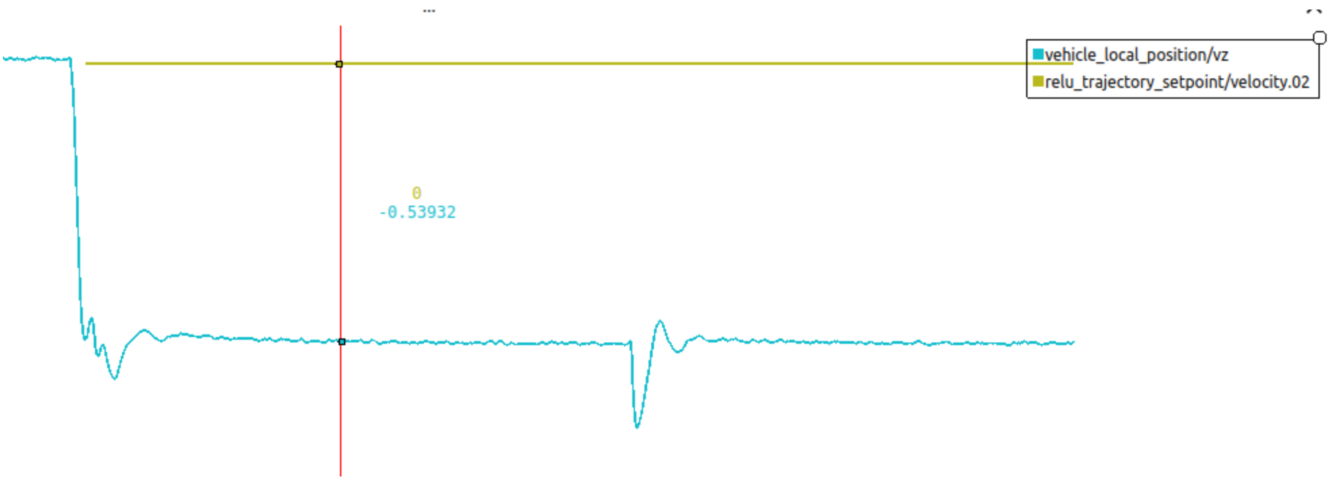
因此我们有:

$$v(t) = \frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_v} + (v_0 - \frac{(\alpha-1)g}{\alpha K_v})e^{-\alpha K_v t} \tag{24}$$

可以看，在这种情况下，只有速度反馈起作用，当悬停油门量估计不准时，飞机甚至无法悬停，在达到稳态情况下依然有一个非零的速度:

实验验证

$K_p = 0, K_v = 6$



经过上面的分析，只要有K_p，位置就能最终稳定(虽然不在我们期望的悬停位置)，因此速度必然能收敛到0(无人机可以最终实现悬停)。当没有位置反馈时，加一个速度的积分项可以解决这个问题。

$K_p = 0, K_v = 6, I_v = 1.5$