Proyecto Ecuaciones Diferenciales

Universidad De San Buenaventura

David Santiago Soler Sanabria

María Paz Gómez Fonseca

Años y números de población en el País de España:

0	2016	46.418.884
1	2017	46.497.393
2	2018	46.645.070
3	2019	46.918.951
4	2020	47.318.050
5	2021	47.400.798
8	2024	48.619.695

Para este proyecto se usó el siguiente modelo.

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\int \frac{dp}{kx} = \int dt$$

Se utilizó el método de separación de variables.

$$\frac{1}{k}\int \frac{\mathrm{dp}}{p} = \int \mathrm{dt}$$

$$\ln(p) = \mathrm{kt} + \mathrm{kc}$$

Seguidamente, se integró. Luego se pasó a multiplicar el k que estaba dividendo por el tiempo (t) y la constante de integración (c).

$$e^{\ln(p)} = e^{\mathrm{kt}+kc}$$

$$p = e^{\mathrm{kt}} * c$$

A continuación se aplica el (e) para que con esto se cancele el euler (e) con el logaritmo natural (ln).

$$P = e^{\mathrm{kt}} * P_0$$

Luego se hace la aplicación de PVI (problema de valor inicial).

La ecuación final, a la que se llega al hacer todos los procesos anteriores es la siguiente, la cual se llamará ecuación 1:

$$p(t) = e^{\mathrm{kt}} p_0$$

Seguido de esto se reemplazan los valores del años con la población, se inicia con la primera pareja que en este caso es el 2016 como año 0 y 2017 como año 1, se iguala cada una a su población indicada en la tabla.

$$P(0) = 46.418.884$$

$$P(1) = 46.497.393$$

$$P_0 = 0$$

Ahora se usa la ecuación a la que se llegó anteriormente y se reemplaza con los datos de año 0 y 1.

$$46.418.884 = e^{\mathrm{k}0} P_0$$

Este es el valor que se tomará como la constante (c), la cual mas adelante se usará para reemplazar con las demás parejas.

$$P_0 = 46.418.884$$

Luego se utiliza el valor de la población del año 1, esta se iguala a la población del año 0, multiplicado por el auler elevado al tiempo 1 por la k.

$$(46.497.393) = 46.418.884e^{(1)K}$$

$$\frac{46.497.393}{46.418.884} = e^{K*1}$$

Se divide la población 1 entre la población 0.

$$1.0016 = e^{K*1}$$

Se aplica el logaritmo ntural (ln) a cada lado de la ecuación, para multiplicarlo por el euler (e) y asi cancelarlos y queda la k, la cual se va a calcular.

$$\ln(1.0016) = \ln e^{k*1}$$

$$\ln(1.0016) = k$$

$$k = 0.00159$$

Una vez ya se calculó en k, se reemplaza en la ecuación 1, con el tiempo1 y la población del año 0.

$$P(t) = e^{(0.00159)(t)} * 46.418.884$$

$$P(t) = e^{(0.00159)(1)} * 46.418.884$$

$$P(t) = 46492.748$$

Ahora se hará un pronóstico de la población para el año 2024 con la ecuación 1, se usará la población del año 0, con el tiempo (t) que son los años que hay desde el año 2016 hasta el año 2024 y con la k que se calculo anteriormente.

pronostico año 2024

$$p(t = 8)$$

$$P(t) = e^{(0.00159)(8)} * 46.418.884$$

$$P(t=8) = 47.013.103$$

Finalmente se calcula el error, es decir el valor real de la población del año 2024, menos el valor que calculamos para el año 2024, sobre la población real del 2024.

$$\%error = \frac{|\text{valor real} - \text{valor esperado}|}{\text{valor real}} * 100$$

$$\%error = \frac{|48.619.695 - 47.013.103|}{48.619.695} * 100$$

$$\%error = 3.304\%$$

2.

Se usa el valor de la población del año 2, el cual es el 2018.

$$P(t=2) = 46.645.070$$

$$46.645.070 = 46.418.884$$

$$P_0 = 46.418.884$$

$$(46.645.070) = 46.418.884e^{(2)*K}$$

Ahora se despeja para calcular el valor de k.

$$\frac{46.645.070}{46.418.884} = e^{K*2}$$

$$1.0048 = e^{K*2}$$

$$\ln(1.0048) = \ln e^{k*2}$$

$$0.00478 = k*2$$

$$\frac{0.00478}{2} = k$$

$$k = 0.00239$$

Seguidamente se reemplaza con la ecuación 1, se usa la población del año 0 y del año 2.

$$P(t) = e^{(k)(t)} * 46.418.884$$

$$P(t) = e^{(0.00239)(2)} * 46.418.884$$

$$P(t) = 46641.297$$

Se calcula el pronóstico para el año 2024.

Pronostico año 2024

$$p(t = 8)$$

$$P(t) = e^{(0.00239)(8)} * 46.418.884$$

$$P(t = 8) = 47.314.952$$

Por último se calcula el error con el valor esperado con el año 2.

%error= $\frac{|\text{valor real} - \text{valor esperado}|}{\text{valor real}} * 100$

%error= $\frac{|48.619.695 - 47.314.952|}{48.619.695} * 100$

$$\%\text{error} = 2.683\%$$

3.

Se reemplaza con los valores del tiempo 3, el cual es el año 2017.

$$P(t = 3) = 46.918.951$$

$$P_0 = 46.418.884$$

$$(46.918.951) = 46.418.884e^{(t)*K}$$

Ahora se calcula el valor de k, con la población del año 3

$$\frac{46.918.951}{46.418.884} = e^{K*3}$$

$$1.01077 = e^{K*3}$$

$$\ln(1.01077) = \ln e^{k*3}$$

$$0.01077 = k*3$$

$$\frac{0.01077}{3} = k$$

$$k = 0.00359$$

Ya calculada k con el año 3, se reemplazan los valores con de dicho año con la ecuación 1.

$$P(t) = e^{(k)(t)} * 46.418.884$$

$$P(t) = e^{(0.00357)(3)} * 46.418.884$$

$$P(t) = 46918.702$$

Se hace el pronóstico del año 2024 con el valor de población del año 3.

Pronostico año 2024

$$p(t = 8)$$

$$P(t) = e^{(0.00357)(8)} * 46.418.884$$

$$P(t = 8) = 47.763.72$$

Por último se calcula el error con los datos reales y esperados.

%error= $\frac{|\text{valor real} - \text{valor esperado}|}{\text{valor real}} * 100$

%error= $\frac{|48.619.695 - 47.763.72|}{48.619.695} * 100$

$$\%\text{error} = 1.7626\%$$

4.

Se usa la población en el año 2020, que es el tiempo 4.

$$P(t=4) = 47.318.050$$

$$P_0 = 46.418.884$$

$$(47.318.050) = 46.418.884e^{(t)*K}$$

Ahora se calcula la k con el valor de población del año 2020, tiempo 4.

$$\frac{47.318.050}{46.418.884} = e^{K*4}$$

$$1.0193 = e^{K*4}$$

$$\ln(1.0193) = \ln e^{k*4}$$

$$0.0193 = k*4$$

$$\frac{0.0193}{4} = k$$

$$k = 0.004825$$

Una vez ya calculada k, se reemplazan los valores con la ecuación 1.

$$P(t) = e^{(k)(t)} * 46.418.884$$

$$P(t) = e^{(0.004825)(4)} * 46.418.884$$

$$P(t) = 47.323.469$$

Se calcula el pronóstico de población para el año 2024 con el valor de k anteriormente calculado.

Pronostico año 2024

$$p(t=8)$$

$$P(t) = e^{(0.004825)(8)} * 46.418.884$$

$$P(t=8) = 48.245.683$$

Por último se calcula el error con los velores reales y el esperado.

%error= $\frac{|\text{valor real} - \text{valor esperado}|}{\text{valor real}} * 100$

%error= $\frac{|48.619.695 - 48.245.683|}{48.619.695} * 100$

$$\%error = 0.7692\%$$

5.

Se usa el valor de población del año 2021, el tiempo 5.

$$P(t = 5) = 47.400.798$$

$$P_0 = 46.418.884$$

$$(47.400.798) = 46.418.884e^{(t)*K}$$

Se calcula el valor de k, con el valor de población de dicho año.

$$\frac{47.400.798}{46.418.884} = e^{K*5}$$

$$1.0211 = e^{K*5}$$

$$\ln(1.0211) = \ln e^{k*5}$$

$$0.0209 = k * 5$$

$$\frac{0.0193}{5} = k$$

$$k = 0.00418$$

Ahora se reemplazan los valores de población del tiempo 5 y población con la ecuación 1.

$$P(t) = e^{(k)(t)} * 46.418.884$$

$$P(t) = e^{(0.00418)(5)} * 46.418.884$$

$$P(t) = 47399247.79$$

Se hace el pronóstico para el año 2024 con el k ya calculado.

Pronostico año 2024

$$p(t = 8)$$

$$P(t) = e^{(0.00418)(8)} * 46.418.884$$

$$P(t = 8) = 47.997.376$$

Por último se calcula el error con los valores reales y el esperado.

%error= $\frac{|\text{valor real} - \text{valor esperado}|}{\text{valor real}} * 100$

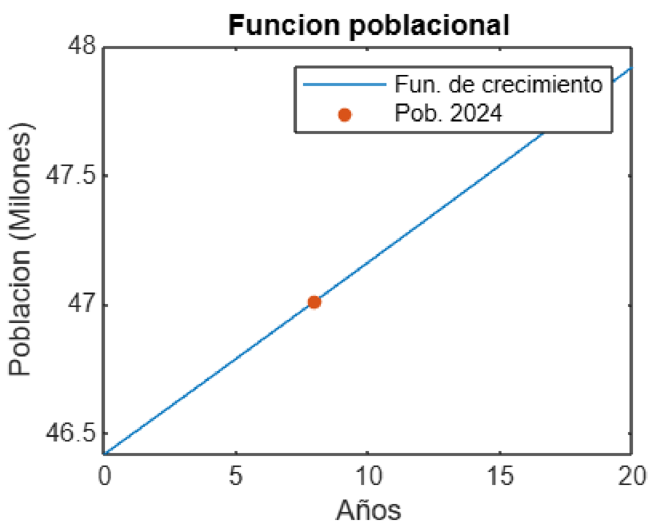
%error= $\frac{|48.619.695 - 47.997.376|}{48.619.695} * 100$

$$\%\text{error} = 1.279\%$$

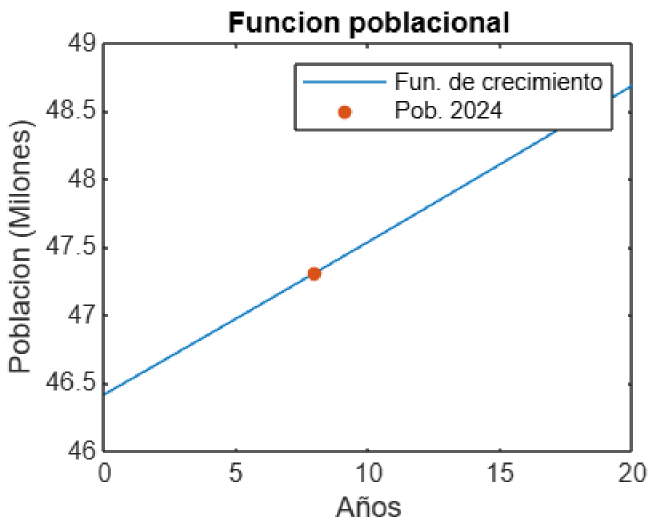
Tabla de parejas:

Parejas	Ecuación	Pronóstico - 2024	Error
$p = (t = 0)$ $p = (T = 1)$ 2016 y 2017	$P(t) = e^{(0.00159)(t)} * 46.418.884$	$47.013.103$	3.304%
$p = (t = 0)$ $p = (T = 2)$ 2016 y 2018	$P(t) = e^{(0.00239)(t)} * 46.418.884$	$47.314.952$	2.683%
$p = (t = 0)$ $p = (T = 3)$ 2016 y 2019	$P(t) = e^{(0.00357)(t)} * 46.418.884$	$47.763.720$	1.7626%
$p = (t = 0)$ $p = (T = 4)$ 2016 y 2020	$P(t) = e^{(0.004825)(t)} * 46.418.884$	$48.245.683$	0.7692%
$p = (t = 0)$ $p = (T = 5)$ 2016 y 2021	$P(t) = e^{(0.00418)(t)} * 46.418.884$	$47.997.376$	1.279%

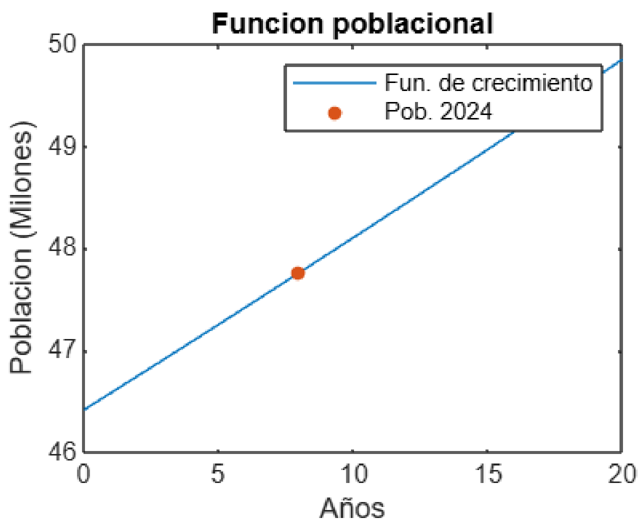
```
%Pareja 2016 y 2017
clc
clear all
t=linspace(0,20);
P=exp((0.00159)*(t))*46.418884;
plot(t,P)
hold on;
plot([8],[47.013103],".","MarkerSize",15)
title('Funcion poblacional')
xlabel('Años')
ylabel('Poblacion (Milones)')
legend('Fun. de crecimiento','Pob. 2024')
hold off;
```




```
%Pareja 2016 y 2018
clc
clear all
t=linspace(0,20);
P=exp((0.00239)*(t))*46.418884;
plot(t,P)
hold on;
plot([8],[47.314952],".","MarkerSize",15)
title('Funcion poblacional')
xlabel('Años')
ylabel('Poblacion (Milones)')
legend('Fun. de crecimiento','Pob. 2024')
hold off;
```

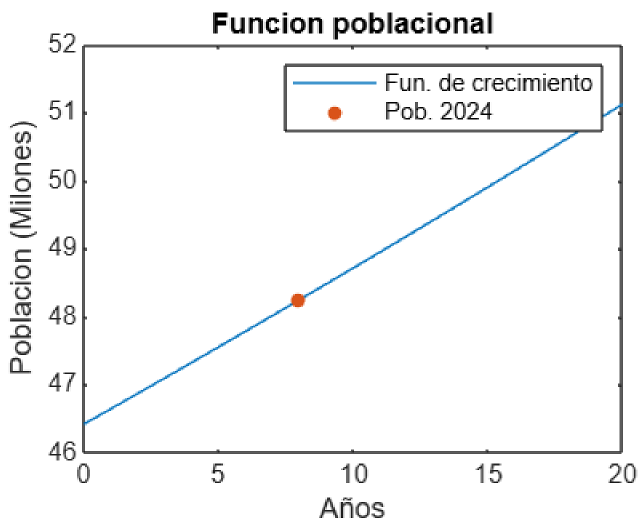



```
%Pareja 2016 y 2019
clc
clear all
t=linspace(0,20);
P=exp((0.00357)*(t))*46.418884;
plot(t,P)
hold on;
plot([8],[47.763720],".","MarkerSize",15)
title('Funcion poblacional')
xlabel('Años')
ylabel('Poblacion (Milones)')
legend('Fun. de crecimiento','Pob. 2024')
hold off;
```

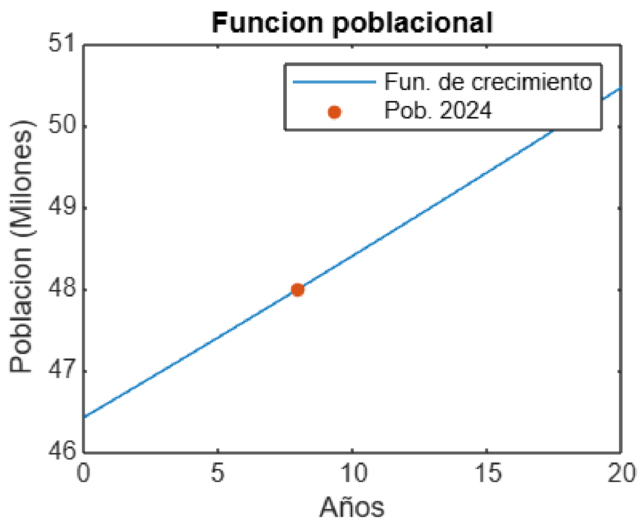



```
%Pareja 2016 y 2020
clc
clear all
t=linspace(0,20);
```

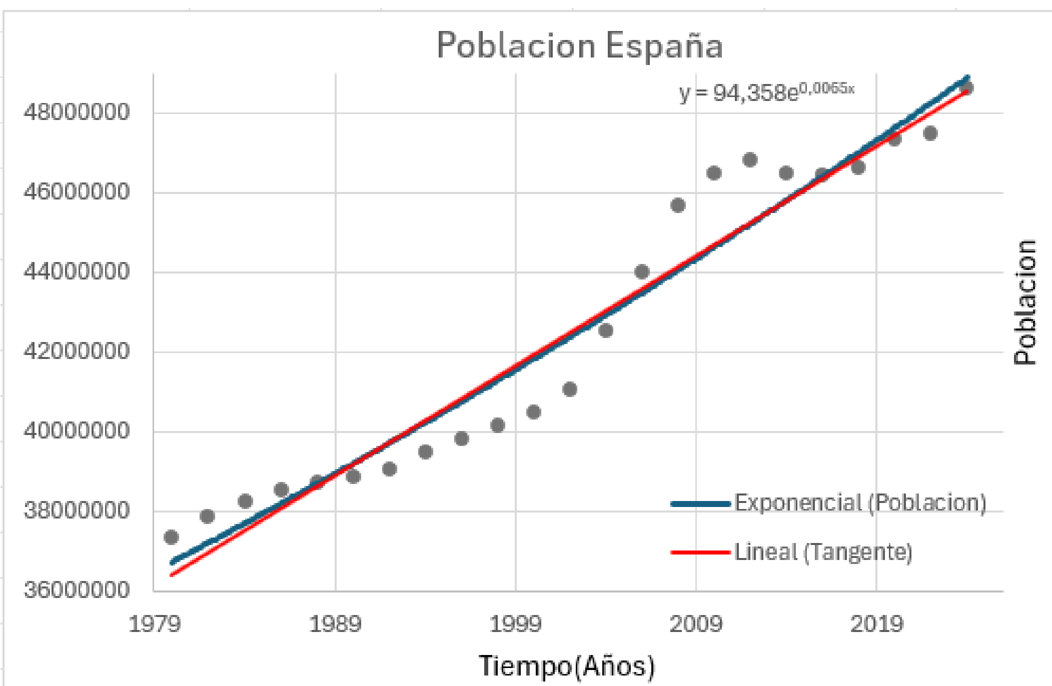
```
P=exp((0.004825)*(t))*46.418884;
plot(t,P)
hold on;
plot([8],[48.245683],".","MarkerSize",15)
title('Funcion poblacional')
xlabel('Años')
ylabel('Poblacion (Milones)')
legend('Fun. de crecimiento','Pob. 2024')
hold off;
```




```
%Pareja 2016 y 2021
clc
clear all
t=linspace(0,20);
P=exp((0.00418)*(t))*46.418884;
plot(t,P)
hold on;
plot([8],[47.997376],".","MarkerSize",15)
title('Funcion poblacional')
xlabel('Años')
ylabel('Poblacion (Milones)')
legend('Fun. de crecimiento','Pob. 2024')
hold off;
```



Curva y tangente del crecimiento poblacional de España en los ultimos años.



$$y = 94.358e^{0.0065x}$$

Año	Poblacion
1980	37346940
1982	37881873
1984	38252899
1986	38531195
1988	38731578
1990	38853227
1992	39051336
1994	39458489
1996	39808374
1998	40143449
2000	40470182
2002	41035271
2004	42547454
2006	44009969
2008	45668938
2010	46486621
2012	46818216
2014	46495744
2016	46418884
2018	46645070
2020	47318050
2022	47486727
2024	48619695

Referencia

[Población, total - Spain | Data (bancomundial.org)]