

Pravdepodobnosť a statistika -- AR 2022/2023
Prírodovedecká fakulta Univerzity Jána Evangelistu Purkyně v Ústí nad Labem

Diskrétna náhodná premenná**Príklad 0**

Nakreslite pravdepodobnostnú funkciu (pmf) a distribučnú funkciu (cdf) náhodných veličín, ktoré sa vyskytujú v príkladoch 2, 3, 6 a 16. Na aké rozdelenie poukazuje graf pmf vzhľadom na (a) symetriu? Vypočítajte strednú hodnotu, smerodajnú odchýlku a varianciu týchto náhodných veličín a interpretujte ich.

Príklad 1

Zásielka 1000 výrobkov obsahuje 15 % nekvalitných výrobkov. Náhodne s vrátením vyberieme štyri výrobky. Určite pravdepodobnosť, že práve tri z nich budú kvalitné. Vypočítajte túto pravdepodobnosť, keď výbery realizujeme bez vrátenia. (0.368475; 0.369388)

Príklad 2

Študent má problémy so vstávaním. Za posledných 375 dní nebol schopný vstať na znamenie budíka v 120 prípadoch a nestihol ranné povinnosti. V semestri je 13 prednášok. Určite pravdepodobnosť, že študent: a) nestihne väčšinu prednášok, b) zaspí najviac dvakrát, c) stihne všetky prednášky, d) nestihne žiadnu prednášku.

Príklad 3

Personalistovi je známe, že o určitú účtovnú pozíciu vo firme prejaví záujem uchádzač s ekonomickým vysokoškolským vzdelaním s pravdepodobnosťou 0.65 a uchádzač bez adekvátneho ekonomického vzdelania s pravdepodobnosťou 0.35. Určite pravdepodobnosť, že až štvrtý uchádzač o danú pozíciu bude mať ekonomické vysokoškolské vzdelanie. (0.02787)

Príklad 4

Pravdepodobnosť chyby pri prenose jedného bitu je 0.20. Jednotlivé prenosy sú navzájom nezávislé. Pri prvej chybe prenos končí. Určite pravdepodobnosť, že

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) bude prenesených práve 5 bitov, | c) budú prenesené najviac 4 bity, |
| b) bude prenesených aspoň 5 bitov, | d) bude prenesených najmenej 2 a najviac 5 bitov. |
- (a) 0.0655; b) 0.3277; c) 0.6723; d) 0.3779)

Príklad 5

V banke majú zoznam 50 žiadateľov o úver. Medzi nimi je 35 spoľahlivých a 15 nespoľahlivých žiadateľov. Určite pravdepodobnosť, že ak banka poskytne úver práve 20 žiadateľom, bude z nich 15 spoľahlivých a 5 nespoľahlivých. (0.207)

Príklad 6

Realitný maklér jedná v priemere s 5 zákazníkmi za deň. Aká je pravdepodobnosť, že počet zákazníkov makléra za jeden deň a) bude práve 5, b) bude väčší ako 4. (a) 0.1755; b) 0.5595)

Príklad 7

Analytik predpovedal, že 3,5 % malých spoločností ohlási v budúcom roku bankrot. Predpokladáme, že táto predpoveď je správna.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že zo 100 náhodne vybraných malých spoločností aspoň 2 ohlásia bankrot? (0,869)
- b) Aká je pravdepodobnosť, že spomedzi 100 náhodne vybraných spoločností ohlásia bankrot najmenej 3 spoločnosti a najviac 5 spoločnosti? (0,545)

Príklad 8

Pri kontrole účtovných dokladov sa počas posledných rokov nachádzalo stabilne zhruba 2 % účtov s formálnymi nedostatkami. Ak audítor vyberie náhodne 20 účtovných dokladov, aká je pravdepodobnosť, že: a) budú práve dva chybné, b) ani jeden nebude chybný, c) maximálne dva budú chybné? (a) 0,0528, b) 0,6676, c) 0,9929).

Príklad 9

Pravdepodobnosť, že sa 40 ročný muž nedožije ďalšieho roka je 0,01. Ročné poistné tejto vekovej skupiny je 700€. V prípade úmrtia poisťovňa vyplatí 10 000€. Aká je pravdepodobnosť, že zisk z 500 poistených mužov vo veku 40 rokov bude aspoň 300 000€. (0,616)

Príklad 10

Kvôli chorobe vymeškal študent 2 týždne z vyučovania. V deň, keď sa vrátil do školy, učiteľ rozdal študentom 100-otázkový test vždy so štyrmi možnosťami odpovedí, z ktorých jedna bola správna. Keďže študent látku vôbec nepoznal, odpovede vyberal náhodne. Na vyhovenie z testu mal odpovedať správne aspoň na 35 zo 100 otázok. Určte pravdepodobnosť, že študent vyhovel z testu. (0,0164)

Príklad 11

Predpokladajme, že 400 študentov končí tohto roku štúdium. Súčasné štatistiky hovoria o tom, že pol percenta populácie tvoria milionári.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden študent končiaci tohto roku štúdium bude milionárom?
 - b) Aká je pravdepodobnosť, že aspoň 5 z nich budú milionári?
- (a) 0,865, b) 0,052)

Príklad 12

Počujete: "let us play a game". Pravidlá hry sú, že zaplatíte vstupný poplatok do hry 12€. Potom hádzate opakovane regulárnou kockou dovtedy, kým nepadne číslo päť, ale najviac štyrikrát. V prípade že do štyroch hodov padne päťka, získavate 20€. Je to pre vás výhodná hra? Aký by mal byť poplatok do férovej hry (tzn. hry s nulovým očakávaným ziskom), v ktorej by ste mali dovolené hádzať kockou šesťkrát v nádeji, že padne šestka, a v takom prípade by ste získali 10€?

Príklad 13

Dvaja hráči striedavo hádžu kockou. Vyhráva ten, kto prvý hodí jednotku. Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá ten, ktorý začínal? Aký je očakávaný počet hodov začínajúceho hráča? Aký je očakávaný počet hodov druhého hráča? (0.5455; 1.7851; 1.4876)

Príklad 14

Internetovú stránku navštíví za sledované obdobie v priebehu jednej hodiny v priemere 30 záujemcov z celého sveta, a tak možno predpokladať, že ich návštevy sú nezávislé. Stanovte:

- a) pravdepodobnosť toho, že v priebehu štyroch minút navštíví túto stránku aspoň nejaký návštevník,
- b) pravdepodobnosť, že počas päťminútového výpadku stránky to neovplyvnilo žiadneho návštevníka,
- c) pravdepodobnosť najpravdepodobnejšieho počtu návštev stránky počas desiatich minút,
- d) minimálny počet návštev stránky počas dvadsiatich minút, ktorý s pravdepodobnosťou aspoň 0.99 nebude prekročený.

Príklad 15

Podľa stavu k januáru 2019 bolo v Českej republike približne 50.76 % žien a v Slovenskej republike 48.82 % mužov (<http://ec.europa.eu/eurostat> - tabuľka DEMO_PJAN, k 18.11.2020). Opakovane ťaháme osoby z populácie Českej republiky. Aká je pravdepodobnosť, že pri štvrtom pokuse pôjde o prvý raz o muža? Opakovane ťaháme osoby z populácie Slovenskej republiky dovtedy, kým nevytiahneme muža. Koľko pokusov môžeme očakávať do prvého zistenia osoby mužského pohlavia? S akou pravdepodobnosťou medzi desiatimi prvými vytiahnutými osobami nebude žiaden muž? (0.0644; 1.0483; 0.0012)

Príklad 16

Divízia má 25 pracovníkov, z ktorých sú 15 za spísanie petície za zmenu pravidiel pre prácu nadčas, zvyšní sú proti. Pre spísanie petície je potrebná nadpolovičná väčšina hlasov. Do novokoncipovaného celodivízného výboru je náhodne vybraných 5 členov, ktorí majú na programe rokovania aj rozhodovať o vypísaní, resp. nevypísaní uvedenej petičnej akcie. S akou pravdepodobnosťou bude hlasovanie v celodivíznom výbore v prospech petície? (0.6988)

Príklad 17

S cieľom motivovať študentov k priebežnému štúdiu na predmete „finančno-ekonomická analýza podniku (FBI)“ na Ekonomickej fakulte Univerzity Mateja Bela v Banskej Bytrici bol v šiestom týždni semestra študentom zadaný doplnkový test v LMS Moodle, ktorý pozostával z piatich otázok vždy s ôsmimi odpoveďami, z ktorých jedna bola správna. Študenti vypracovávali test dištančne s obmedzeným časovým limitom a mohli používať ľubovoľné pomôcky. Otázky a odpovede neboli triviálne, a tak študent, ktorý látku vôbec nepoznal, bol odkázaný na náhodné tipovanie. Za každú správne zodpovedanú otázku študent získal práve jeden bod. Vypočítajte pravdepodobnosť, že študent získa 0 až 5 bodov. Stanovte strednú hodnotu počtu bodov pre študenta, ktorý odpovedá náhodne.

Boli získané výsledky uvedené v tabuľke nižšie. Vypočítajte priemerný počet bodov a porovnajte rozdelenie počtu bodov s teoretickým rozdelením pri náhodnom tipovaní. Možno (opticky) usudzovať, že študenti boli na test nepripravení?

Počet bodov	0	1	2	3	5	nepísal
Počet študentov	13	15	11	5	3	3

Príklad 18

Podnik poskytujúci v typickej zimnej obci v čase od 21.00 h večer do 7.00 h ráno opravy kúrenia obdrží v priemere každé dve hodiny jednu telefonickú objednávku. Náklady na prevádzku tohto zariadenia sú pokryté, keď za noc obdrží aspoň tri objednávky. Vypočítajte pravdepodobnosť, že tieto náklady budú pokryté. (0.8753)

Príklad 19

V hre LOTO sa losuje 6 čísel (neuvažujeme dodatkové číslo) zo 49. Na získanie štvrtej ceny potrebujete uhádnuť tri čísla. Aká je pravdepodobnosť, že vyhráte štvrtú cenu v jednom ťahu pri výbere jednej šesticke čísel, ak ste podali jeden tiket? (0.018)

Príklad 20

Pracovníci prichádzajú k terminálu nezávisle na sebe v priemere traja za hodinu. Stanovte pravdepodobnosť príchodu viac než 2 pracovníkov počas trojhodinového intervalu a pravdepodobnosť, že počas dvadsaťminútovej odstavky terminálu nikto nebude musieť čakať. (0.9938; 0.3679)

Príklad 21

Dodávateľ dodáva obchodu cukor. V poslednej zásielke bolo 100 vriec, pričom počas prepravy sa poškodilo 11. Aká je pravdepodobnosť, že medzi desiatimi náhodne vybranými vrecami bude aspoň jedno poškodené? (0.706)

Príklad 22

Predpokladajme, že v každých 500 m látky je priemerne 10 kazov. Látku striháme v dvojmetrových kusoch. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraný dvojmetrový kus nebude mať kaz. (0.961)

Príklad 23

Supermarket sľúbil vyplatiť finančnú kompenzáciu zákazníkovi, ktorí budú pri pokladni čakať dlhšie ako 10 min. Stredný počet pokladní, ktoré je potrebné mať v prevádzke, aby nemusel zákazníkovi nič platiť, je 5. Aká je pravdepodobnosť, že k obsluhu všetkých zákazníkov do 10 min nebude stačiť ani 10 pokladní? (0.0137)

Spojité náhodné premenné**Príklad S 0**

Nakreslite funkciu hustoty (pdf) a distribučnú funkciu (cdf) náhodných veličín, ktoré sa vyskytujú v príkladoch S 2, S 10, S 17 a S 19. Na aké rozdelenie poukazuje graf pdf vzhľadom na (a) symetriu? Vypočítajte strednú hodnotu, smerodajnú odchýlku a variáciu týchto náhodných veličín a interpretujte ich.

Príklad S 1

Pred Vianocami sa robí výlov kaprov. Zistilo sa, že dĺžka kaprov v rybníku je približne gaussovsky rozdelená so strednou hodnotou 20,5 cm a smerodajnou odchýlkou 5,4 cm.

- a) Zistite podiel kaprov určených pre výlov, ktorí presahujú v dĺžke 25 cm.
 - b) Zistite, aký podiel kaprov má dĺžku od 14 do 18 cm.
 - c) Zistite dĺžku v cm, ktorú presiahne aspoň 25 % kaprov.
- (a) 0.2023, b) 0.2073, c), 24.142 cm).

Príklad S 2

Istá firma sa rozhodla podrobiť svojich zamestnancov IQ testu. Priemerný výsledok IQ testu bol 115, disperzia 256. Predpokladajme, že hodnoty IQ testu možno spoľahlivo opísať Gaussovým rozdelením. Určte pravdepodobnosť, že hodnota IQ testu pri náhodne vybranom zamestnancovi nadobudne hodnoty: a) menšie alebo rovné ako 120, b) väčšie ako 105, c) v rozpätí 100 a 130. (a) 0.6227, b) 0.7373, c), 0.6514)

Príklad S 3

Nech náhodná premenná $X \sim N(2,5)$. Stanovte kvartily tejto premennej a kvartilové rozpätie. Interpretujte kvartilové rozpätie. (kvartily 0.4918; 2; 3.5082; rozpätie 3.0164)

Príklad S 4

Klient, ktorý má v poisťovni uzavreté havarijné poistenie, je po určitom časovom okamihu na základe bezškodného priebehu v prvej bonusovej triede, kde platí 65 % základného poistného, ktoré činí 1 100 Kč. Výška škody sa riadi logaritmicko-normálnym rozdelením s parametrami $\mu = 6$ a $\sigma^2 = 2$. Určte medián výšky škody a maximálnu výšku škody, s ktorou možno počítať s pravdepodobnosťou 95 % (teda takej hodnoty škody, ktorá nebude prevýšená s pravdepodobnosťou 95 %). (medián 403.43 Kč, kvantil 4 130.59 Kč)

Príklad S 5

Nech náhodná premenná $X \sim N(2,9)$. Určte pravdepodobnosť, že táto premenná nadobúda hodnoty a) väčšie ako 0.5, b) menšie ako -1.2, c) v hraniciach od -0.5 do 1. (a) 0.6915, b) 0.1431, c) 0.1671).

Príklad S 6

Náhodná premenná X má gaussovske rozdelenie s $\mu = 23$ a $\sigma^2 = 25$.

- (a) Určte $P(X > 18)$.
 - (b) Určte $P(8 < X < 22)$.
 - (c) Stanovte, pre ktorú hodnotu x platí $P(X < x) = 0,95$.
 - (d) Stanovte, pre ktorú hodnotu x je splnené $P(X > x) = 0,75$.
 - (e) Určte hranice intervalu ekvidištancného od strednej hodnoty, v ktorých sa s pravdepodobnosťou 0,95 bude nachádzať hodnota náhodnej premennej X .
- (a) 0.841, b), 0.419, c) 31.12, d) 19.63, e) 13.2 a 32.8)

Príklad S 7

Náhodná premenná U vznikla normovaním náhodnej premennej $X \sim (20,25)$. Len na základe informácie, že $P(U < 1,645) = 0,95$, nájdite x , pre ktoré platí: $P(X < x) = 0,95$. (28,225)

Príklad S 8

Dlhopisový fond na rozvíjajúcich sa (emerging) trhoch má priemerný ročný výnos 10 % a smerodajnú odchýlku 15 %, v oboch prípadoch per annum. Investičná spoločnosť investuje do dlhopisového fondu 200 mil. €. Predpokladá sa gaussovské rozdelenie výnosov dlhopisového fondu.

- a) Spočítajte pravdepodobnosť, že sa investorovi zhodnotí jeho investícia o viac ako 6 mil. €.
 - b) Stanovte pravdepodobnosť, že strata investora bude viac ako 18,4 mil. €.
- (a) 0.6796, b) 0.1002726)

Príklad S 9

Náhodná premenná X má lognormálne rozdelenie s parametrami $\mu = 5$ a $\sigma^2 = 1$.

- a) Určte pravdepodobnosť, že náhodná premenná X nadobudne hodnoty menšie ako 100.
 - b) Určte pravdepodobnosť, že náhodná premenná X nadobudne hodnoty v intervale od 50 do 100.
- (a) 0.3465, b) 0.2082)

Príklad S 10

Mesačné príjmy určitej skupiny domácností (v Kč) sú náhodnou premennou, ktorá má lognormálne rozdelenie $LN(7,9)$. Odhadnite podiel domácností, ktoré majú mesačný príjem vyšší ako 20,000 Kč. (0,1665)

Príklad S 11

Určitá súčiastka sa pokazí v záručnej dobe 1000 dní s pravdepodobnosťou 0.1. Je známe, že doba životnosti takejto súčiastky sa riadi exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti.

- a) Stanovte strednú dobu životnosti tejto súčiastky.
 - b) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že súčiastka sa nepokazí počas jedného nepriestupného roka.
 - c) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že súčiastka sa nepokazí počas prvých 200 dní, ale pokazí sa v priebehu ďalších 500 dní.
- (a) 9,491.22 dní, b) 0.9622735, c) 0.05024666)

Príklad S 12

Meranie ampérmetrom je zaťažené systematickou chybou 20 mA a náhodné chyby merania majú Gaussovo rozdelenie so smerodajnou odchýlkou 5 mA. Vykonáme na ňom jedno meranie. S akou pravdepodobnosťou sa bude líšiť chyba nameranej hodnoty maximálne o 12 mA od

- a) strednej hodnoty očakávanej chyby merania;
- b) skutočnej meranej hodnoty?

Aká je s pravdepodobnosťou 0.95 maximálna odchýlka chyby merania od jej strednej hodnoty?

- (a) 0.936049, b) 0.054799, 9.8224)

Príklad S 13

Doba životnosti výrobku má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 2000 dní.

- a) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že výrobok bude funkčný aspoň 3000 dní.
 - b) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že výrobok nebude funkčný dlhšie, ako je jeho priemerná doba životnosti.
 - c) Stanovte maximálnu záručnú dobu, ktorú chce poskytnúť jeho výrobca, ak pripúšťa maximálne 5 % reklamačných výrobkov.
- (a) 0.2231302, b) 0.6321206, c) 10.5866 dní)

Príklad S 14

Náhodná premenná X má gaussovské rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 0$. Je známe, že pre ňu platí $P\{|X| \leq 5\} = 0.95$. Stanovte a) smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X , b) pravdepodobnosť $P\{X > -2\}$ a c) pravdepodobnosť $P\{|X| \leq 2.5\}$.

Príklad S 15

Čas nepriameho bunkového delenia (nazývaný mitóza) má normálne rozdelenie so strednou hodnotou jedna hodina a varianciou 25.

- a) Aká je pravdepodobnosť, že delenie nejakej bunky sa uskutoční skôr ako za 45 minút?
- b) Aká je pravdepodobnosť, že delenie nejakej bunky bude trvať viac ako 65 minút?
- c) Aký čas je potrebný na dokončenie mitózy približne 99 % zo všetkých buniek?
(0.00135, 0.15866, 71.63 min)

Príklad S 16

Nutne si potrebujete zavolať, kráčate k telefónnej búde. Predpokladajme, že dĺžka hovoru v minútach je exponenciálna náhodná premenná s parametrom $\lambda = 1/10$. Niektorý však príde do telefónnej budy tesne pred vami. Nájdite pravdepodobnosť, že budete musieť čakať: a) menej ako 5 minút, d) medzi 5 až 10 minút, c) viac ako 10 minút. Vypočítajte taktiež očakávanú hodnotu a varianciu.

(a) 0.3934693; b) 0.2386512; c) 0.3678794; $E(X) = 10$ minút, $\text{var}(X) = 100$ minút²)

Príklad S 17

Na posilnenie identifikácie zamestnanca so smerovaním firmy je každých 20 minút premietaná krátka prezentácia o jej misii a vízii. Určite pravdepodobnosť, že ak náhodne prídeme do premietacej miestnosti: a) nebudeme na prezentáciu čakať viac ako 5 minút, b) budeme čakať viac ako 10 minút, c) budeme čakať 5 až 10 minút. (0.25, 0.50, 0.25)

Príklad S 18

Doba do poruchy má exponenciálny rozdeľník s intenzitou poruch 0.02. Najdte strednú dobu do poruchy a pravdepodobnosť, že po dobu 80 hodín nedojde k poruše. (50 hodín, 0.2018965)

Príklad S 19

Doba bezporuchového chodu zařízení má exponenciálny rozdeľník se strední hodnotou 700 hodin. Určete dobu, během níž nedojde s pravděpodobností 0,8 k poruše?

Príklad S 20

Rýchlosť prenosu súboru z fakultného serveru na osobný počítač v študentskom domove počas pracovného dňa večer, má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 60 kilobitov a smerodajnou odchýlkou 4 kilobity za sekundu.

- a) Vypočítajte pravdepodobnosť, že súbor bude prenesený rýchlosťou 70 kilobitov za sekundu alebo väčšou.
- b) Vypočítajte pravdepodobnosť, že súbor bude prenesený rýchlosťou menšou ako 58 kilobitov za sekundu.
- c) Ak má súbor veľkosť 1 megabyte (MB) / 1 mebibyte (MiB), aký je priemerný čas na jeho prenos? (Vieme, že 8 bitov je 1 byte.)
(a) 0.006209665; b) 0.3085375; c) 133.333 sekúnd, 139.8101 sekúnd)

Príklad S 21

Rýchlosť prenosu súboru v kilobitoch za sekundu z fakultného serveru na osobný počítač v študentskom domove počas pracovného dňa večer, má lognormálne rozdelenie $\text{LN}(3.75, 0.50)$. Vypočítajte pravdepodobnosť, že súbor bude prenesený a) rýchlosťou 70 kilobitov za sekundu alebo väčšou, b) rýchlosťou menšou ako 58 kilobitov za sekundu. (0.2404, 0.6697)

Príklad S 22 (exponenciálne rozdelenie s posunom)

Predpokladáme, že životnosť počítačového komponentu (v rokoch) je náhodná premenná s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti so strednou hodnotou a disperziou rovnou 4.

- a) Stanovte pravdepodobnosť, že životnosť komponentu prekročí 4 roky. (0.368)
- b) Určte pravdepodobnosť, že životnosť komponentu prekročí 4 roky a neprekročí 8 rokov. (0.318)

Príklad S 23 (exponenciálne rozdelenie s posunom)

Dlhodobým pozorovaním sa zistilo, že pravdepodobnosť doby čakania na opravu istého zariadenia má exponenciálne rozdelenie s počiatkom v 1 a so strednou hodnotou 9. Vypočítajte pravdepodobnosť ukončenia opravy v dobe kratšej ako štyri minúty. Stanovte intenzitu doby čakania. (0.3127, 0.125)

Príklad S 24

Podľa agentúry Moody's sa odhaduje, že miera náhrady (recovery rate) z úverov poskytnutých dlžníkom z ratingovej kategórie BB+ má približne rovnomerné rozdelenie, pričom sa počíta, že minimálna miera náhrady je 20% a maximálna miera 80%. Ak úverová expozícia voči dlžníkovi z kategórie BB+ je 130 mil. €, vypočítajte pravdepodobnosť, že pri defaulte dlžníka sa vráti sa aspoň 90 mil. €. (0.1795)