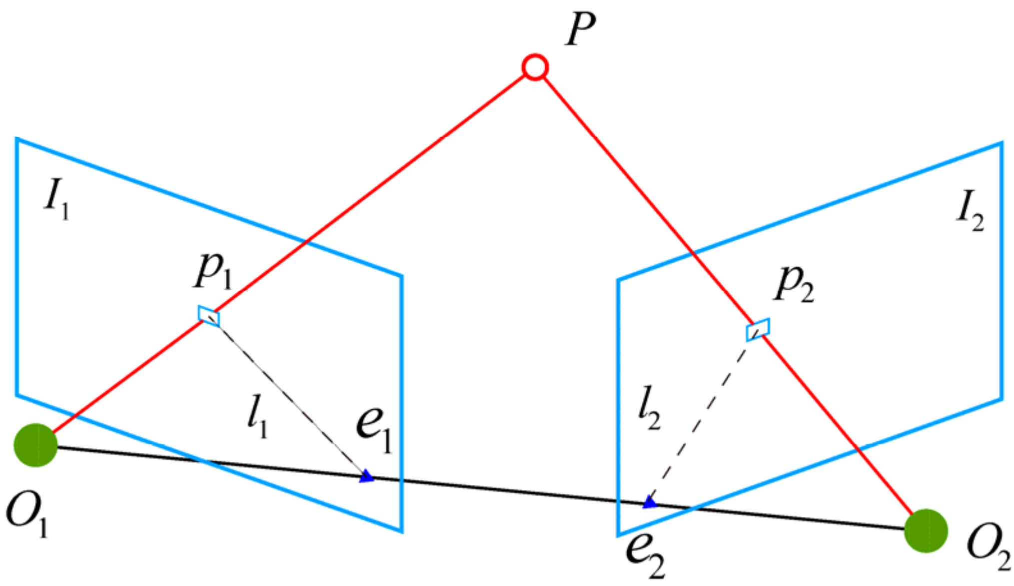
对极几何：

利用若干组两两匹配的像素点，估计连续两帧之间的运动关系：



1) O_1, O_2 ,P 构成极平面；

2) e_1, e_2, 是极点，l_1，l_2 与 O_1O_2 交点；

3) O_1 O_2 是基线，

4) l_1，l_2 是极线；

[极线约束]:

如果事先没有经过特征的匹配得到连续两帧上关于空间点 P 在相机上的对应关系 p1-p2。则无法通过三角化计算 P 的深度值。需要在第二帧上找到与 p1 相对应的 p2。则可以利用**极线约束。也就是说投影到第一帧上 p1 处的空间点，投影到第二帧的时候，一定位于 l2 极线上。**

$$s_1 \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}, \quad s_2 \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{t}\right). \tag{7.1}$$

这里 $\boldsymbol{K}$ 为相机内参矩阵，$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t}$ 为两个坐标系的相机运动（如果我们愿意，也可以写成李代数形式）。如果使用齐次坐标，我们也可以把上式写成在乘以非零常数下成立的（up to a scale）等式[①]：

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{t}\right). \tag{7.2}$$

现在，取：

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{p}_2. \tag{7.3}$$

这里的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是两个像素点的归一化平面上的坐标。代入上式，得：

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{t}. \tag{7.4}$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{t}^\wedge$。回忆 $^\wedge$ 的定义，这相当于两侧同时与 $\boldsymbol{t}$ 做外积：

$$\boldsymbol{t}^\wedge \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{t}^\wedge \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_1. \tag{7.5}$$

然后，两侧同时左乘 $\boldsymbol{x}_2^T$：

$$\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{t}^\wedge \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{t}^\wedge \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_1. \tag{7.6}$$

观察等式左侧，$\boldsymbol{t}^\wedge \boldsymbol{x}_2$ 是一个与 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都垂直的向量。把它再和 $\boldsymbol{x}_2$ 做内积时，将得到 0。因此，我们就得到了一个简洁的式子：

$$\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{t}^\wedge \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_1 = 0. \tag{7.7}$$

重新代入 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$，有：

$$\boldsymbol{p}_2^T \boldsymbol{K}^{-T} \boldsymbol{t}^\wedge \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{p}_1 = 0. \tag{7.8}$$

以上两个式子就称为对极约束。

对极约束：$p_2{}^T K^{-T} t^\wedge R K^{-1} p_1 = 0$

本质矩阵（**Essential**）：$E = t^\wedge R$

基本矩阵（**Fundamental**）：$F = K^{-T} t^\wedge R K^{-1}$

说明：

本质矩阵 E 的奇异值必定是 $[\sigma, \sigma, 0]^T$ 的形式；

E 有 5 个自由度（尺度等价性消除了其中一个自由度）

可以由 8 点/5 点法求解

E ==> R, t 可以由 SVD 分解得到； $E = U \Sigma V^T$

Draft

单应矩阵 H （ Homogeneous）：用于描述共同平面上的一些点在两张图像上的关系，判断相机的运动关系；

单应矩阵通常描述处于共同平面上的一些点，在两张图像之间的变换关系。考虑在图像 I_1 和 I_2 有一对匹配好的特征点 p_1 和 p_2。这些特征点落在某平面上。设这个平面满足方程：

$$\boldsymbol{n}^T \boldsymbol{P} + d = 0. \tag{7.16}$$

稍加整理，得：

$$-\frac{\boldsymbol{n}^T \boldsymbol{P}}{d} = 1. \tag{7.17}$$

然后，回顾本开头的式 (7.1)，得：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{K}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{t}) \\
&= \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{t} \cdot (-\frac{\boldsymbol{n}^T \boldsymbol{P}}{d})\right) \\
&= \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^T}{d}\right)\boldsymbol{P} \\
&= \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^T}{d}\right)\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{p}_1.
\end{aligned}$$

于是，我们得到了一个直接描述图像坐标 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 之间的变换，把中间这部分记为 $\boldsymbol{H}$，于是

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{H}\boldsymbol{p}_1. \tag{7.18}$$

H 矩阵可以由 **DLT** 分解得到 **R,t**；

当特征点共面，或者相机发生纯旋转时，基础矩阵的自由度下降。