Modes dans un guide cyclindrique

C. Laurent & M. Gaborit

Projet L3

On cherche à définir les modes dans un guide d'onde cylindrique.

Position du problème

On se place en coordonnées cylindriques (voir figure 1, donc sur un domaine $D = \{\forall (r,\theta) \in [0,1] \times [-\pi;\pi]\}$), en régime harmonique.

Equation de propagation Ainsi, on cherchera à résoudre l'équation dite d'Helmholtz (1) :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \tag{1}$$

Avec la condition limite suivante :

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{r=R} = 0 \tag{2}$$

Laplacien En coordonnées cyclindriques :

$$\Delta\bullet = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\bullet}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bullet}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\bullet}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques, on a $p(t,r,\theta,z)$. On choisira de séparer les variables :

$$p(t,r,\theta,z) = \psi(r)\varphi(\theta)e^{j(\omega t + k^{(z)}z)} \tag{3}$$

On réécrit donc (1) :

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}\left[r\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right]\varphi + \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\psi + k^2\psi\varphi = 0\\
\tfrac{1}{r\psi}\tfrac{\partial}{\partial r}\left[r\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \tfrac{1}{\varphi r^2}\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + k^2 = 0\\
\tfrac{1}{r\psi}\left[r\tfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \tfrac{1}{\varphi r^2}\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + k^2 = 0\\
\tfrac{r}{\psi}\left[r\tfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right] + k^2r^2 + \tfrac{1}{\varphi}\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0
\end{gathered}$$

On a alors :

$$-\left\{\frac{r}{\psi}\left[r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + k^2r^2\right\} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -\mu \quad ; \quad \mu < 0 \tag{4}$$

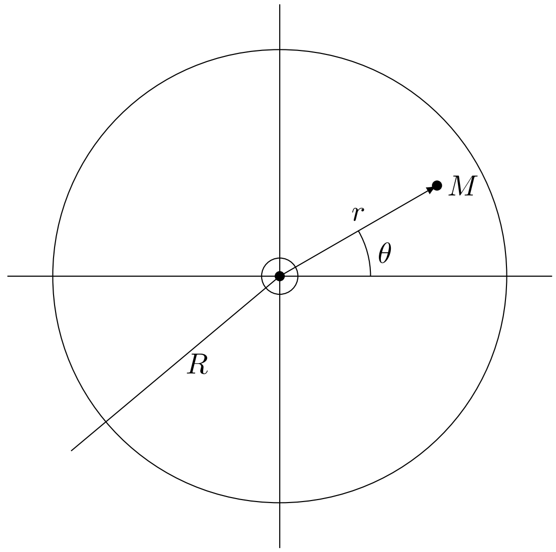

Figure 1: Coupe du guide

Condition de recollement En $\theta = \pm\pi$ (aux limites du domaine d'étude) la fonction $\varphi(\theta)$ doit avoir une même valeur ainsi, nous avons la condition de recollement suivante :

$$\begin{cases} \varphi(-\pi) = \varphi(\pi) \\ \frac{\partial\varphi(-\pi)}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi(\pi)}{\partial\theta} \end{cases} \tag{5}$$

Ainsi, en reprenant le terme de droite de (4), on retrouve :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -\mu\varphi \Rightarrow \varphi(\theta) = A\cos(\theta\sqrt{\mu}) + B\sin[\theta\sqrt{\mu}] \tag{6}$$

En appliquant la condition limite (5), on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(-\pi) & = & \varphi(\pi) \\ \Leftrightarrow & A\cos(-\pi\sqrt{\mu}) + B\sin(-\pi\sqrt{\mu}) & = & A\cos(\pi\sqrt{\mu}) + B\sin(\pi\sqrt{\mu}) \\ \Leftrightarrow & 2B\sin(\pi\sqrt{\mu}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \sin(\pi\sqrt{\mu}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \pi\sqrt{\mu} & = & n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\mu} & \equiv & n \end{array} \tag{7}$$

On s'occupe maintenant de la deuxième partie de l'équation (4).

$$\frac{r}{\psi}\left[r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + k^2r^2 = \sqrt{\mu} = n^2 \Leftrightarrow r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + r\frac{\partial\psi}{\partial r} + (r^2k^2 - n^2)\psi = 0 \tag{8}$$

Condition de non-divergence On admet que :

$$\lim_{r\to 0}\psi_n(r) < \infty \tag{9}$$

Les solutions de l'équation (8) sont donc de la forme :

$$\psi_{n,m}(r) = A_{n,m}\mathrm{J}_n(\alpha_{n,m}r) + \underbrace{B_{n,m}\mathrm{K}_n(\alpha n, mr)}_{(9)\Rightarrow B_{n,m}=0} \tag{10}$$

On pose par ailleurs :

$$k^{(r)}_{n,m} = (\alpha_{n,m})^2$$

; les $\alpha_{n,m}$ correspondent aux zéros des fonctions de bessel J_n de première espèce et d'ordre n.

Solution particulière On recombine les équations (3), (6) et (10) :

$$p_{n,m}(r,\theta,t) = \mathrm{J}_n(\alpha_{n,m})\left[a_{n,m}\cos(n\theta) + b_{n,m}\sin(n\theta)\right]e^{j(\omega t - k^{(z)}_{n,m}z)} \tag{11}$$

On notera d'ailleurs que

$$k^{(z)}_{n,m}\sqrt{k^2 - (\alpha_{n,m})^2}$$

Solution Générale En sommant (11) sur n et m, on obtient la solution générale suivante.

$$p(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{J}_n(\alpha_{n,m})\left[a_{n,m}\cos(n\theta) + b_{n,m}\sin(n\theta)\right]e^{j(\omega t - k^{(z)}_{n,m}z)} \tag{12}$$