

Modes dans un guide cylindrique

C. Laurent & M. Gaborit

Projet L3

On cherche à définir les modes dans un guide d'onde cylindrique.

Position du problème

On se place en coordonnées cylindriques (voir figure ??, donc sur un domaine $D = \{\forall(r, \theta) \in [0, 1] \times [-\pi; \pi]\}$), en régime harmonique.

Equation de propagation Ainsi, on cherchera à résoudre l'équation dite d'Helmholtz (??) :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

Avec la condition limite suivante :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{r=R} = 0 \quad (2)$$

Laplacien En coordonnées cylindriques :

$$\Delta \bullet = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \bullet}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bullet}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques, on a $p(t, r, \theta, z)$. On choisira de séparer les variables :

$$p(t, r, \theta, z) = \psi(r) \varphi(\theta) e^{j(\omega t + k^{(z)} z)} \quad (3)$$

On réécrit donc (??) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \psi + k^2 \psi \varphi &= 0 \\ \frac{1}{r \psi} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{\varphi r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 &= 0 \\ \frac{1}{r \psi} \left[r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{\varphi r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 &= 0 \\ \frac{r}{\psi} \left[r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + k^2 r^2 + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned}$$

On a alors :

$$- \left\{ \frac{r}{\psi} \left[r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + k^2 r^2 \right\} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\mu \quad ; \quad \mu < 0 \quad (4)$$

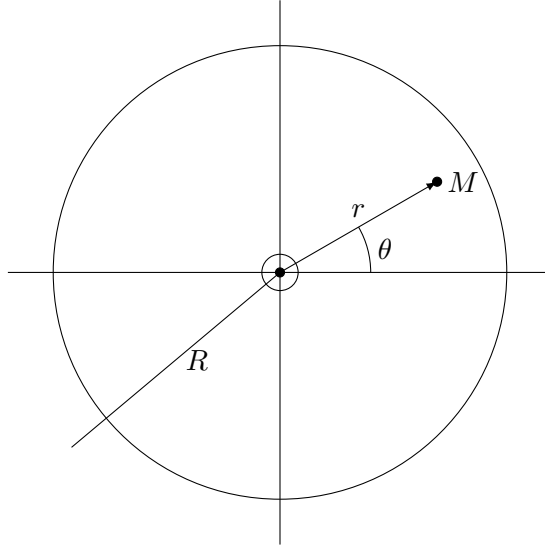


Figure 1: Coupe du guide

Condition de recollement En $\theta = \pm\pi$ (aux limites du domaine d'étude) la fonction $\varphi(\theta)$ doit avoir une même valeur ainsi, nous avons la condition de recollement suivante :

$$\begin{cases} \varphi(-\pi) = \varphi(\pi) \\ \frac{\partial\varphi(-\pi)}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi(\pi)}{\partial\theta} \end{cases} \quad (5)$$

Ainsi, en reprenant le terme de droite de (??), on retrouve :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -\mu\varphi \Rightarrow \varphi(\theta) = A \cos(\theta\sqrt{\mu}) + B \sin[\theta\sqrt{\mu}] \quad (6)$$

En appliquant la condition limite (??), on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(-\pi) &= \varphi(\pi) \\ \Leftrightarrow A \cos(-\pi\sqrt{\mu}) + B \sin(-\pi\sqrt{\mu}) &= A \cos(\pi\sqrt{\mu}) + B \sin(\pi\sqrt{\mu}) \\ \Leftrightarrow 2B \sin(\pi\sqrt{\mu}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(\pi\sqrt{\mu}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \pi\sqrt{\mu} &= n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\mu} &\equiv n \end{aligned} \quad (7)$$

On s'occupe maintenant de la deuxième partie de l'équation (??).

$$\frac{r}{\psi} \left[r \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial\psi}{\partial r} \right] + k^2 r^2 = \sqrt{\mu} = n^2 \Leftrightarrow r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial\psi}{\partial r} + (r^2 k^2 - n^2) \psi = 0 \quad (8)$$

Condition de non-divergence On admet que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi_n(r) < \infty \quad (9)$$

Les solutions de l'équation (??) sont donc de la forme :

$$\psi_{n,m}(r) = A_{n,m}J_n(\alpha_{n,m}r) + \underbrace{B_{n,m}K_n(\alpha_{n,m}r)}_{(??) \Rightarrow B_{n,m}=0} \quad (10)$$

On pose par ailleurs :

$$k_{n,m}^{(r)} = (\alpha_{n,m})^2$$

; les $\alpha_{n,m}$ correspondent aux zéros des fonctions de Bessel J_n de première espèce et d'ordre n .

Solution particulière On recombine les équations (??), (??) et (??) :

$$p_{n,m}(r, \theta, t) = J_n(\alpha_{n,m}) [a_{n,m} \cos(n\theta) + b_{n,m} \sin(n\theta)] e^{j(\omega t - k_{n,m}^{(z)} z)} \quad (11)$$

On notera d'ailleurs que

$$k_{n,m}^{(z)} \sqrt{k^2 - (\alpha_{n,m})^2}$$

Solution Générale En sommant (??) sur n et m , on obtient la solution générale suivante.

$$p(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} J_n(\alpha_{n,m}) [a_{n,m} \cos(n\theta) + b_{n,m} \sin(n\theta)] e^{j(\omega t - k_{n,m}^{(z)} z)} \quad (12)$$