Modes dans un guide cyclindrique

C. Laurent & M. Gaborit

Projet L3

On cherche à définir les modes dans un guide d'onde cylindrique.

Position du problème

On se place en coordonnées cylindriques (voir figure 1, donc sur un domaine $D = \{\forall(r,\theta) \in [0,1] \times [-\pi;\pi]\}$), en régime harmonique.

Equation de propagation Ainsi, on cherchera à résoudre l'équation dite d'Helmholtz (1) :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \tag{1}$$

Laplacien En coordonnées cyclindriques :

$$\Delta \bullet = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial \bullet}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bullet}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bullet}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques, on a $p(t,r,\theta,z)$. On choisira de séparer les variables :

$$p(t,r,\theta,z) = \psi(r)\varphi(\theta)e^{j(\omega t + k^{(z)}z)}$$

On réécrit donc (1) :

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}\left[r\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right]\varphi + \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\psi + k^2\psi\varphi = 0 \\
\tfrac{1}{r\psi}\tfrac{\partial}{\partial r}\left[r\tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \tfrac{1}{\varphi r^2}\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + k^2 = 0 \\
\tfrac{1}{r\psi}\left[r\tfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \tfrac{1}{\varphi r^2}\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + k^2 = 0 \\
\tfrac{r}{\psi}\left[r\tfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \tfrac{\partial\psi}{\partial r}\right] + k^2r^2 + \tfrac{1}{\varphi}\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0
\end{gathered}$$

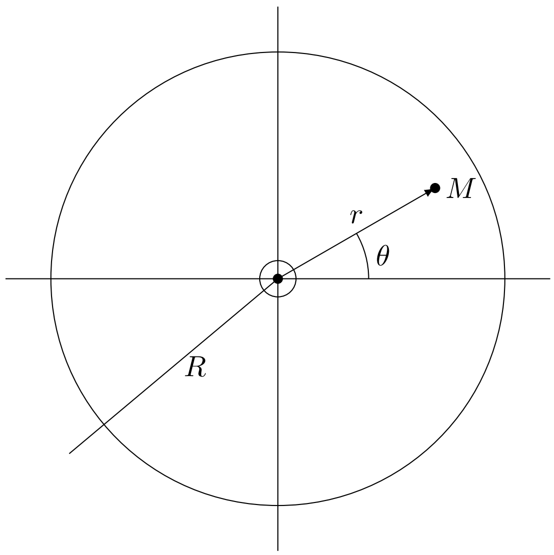

FIGURE 1 – Coupe du guide

On a alors :

$$-\left\{\frac{r}{\psi}\left[r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]+k^2r^2\right\}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=-\mu \quad ; \quad \mu<0 \tag{2}$$

Condition de recollement En $\theta=\pm\pi$ (aux limites du domaine d'étude) la fonction $\varphi(\theta)$ doit avoir une même valeur ainsi, nous avons la condition de recollement suivante :

$$\begin{cases}\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)\\ \frac{\partial\varphi(-\pi)}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi(\pi)}{\partial\theta}\end{cases} \tag{3}$$