Modelamiento de los modos acústicos de un tubo por elementos finitos

Juan Chango
Instituto de Informática, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.

El siguiente trabajo corresponde a la `Tarea No3` de la asignatura: `Métodos numéricos en Vibroacústica` con nomenclatura: `ACUS360`. El trabajo se basa en la implementación del método de elementos finitos para encontrar los modos acústicos de un tubo. Inicialmente se muestra la teoría usada en conjunto con las ecuaciones de energía para el comportamiento acústico de un tubo delgado alargado frente a una onda acústica. Luego se detalla la implementación del método de elementos finitos usando el software de cálculo numérico MATLAB. Al final se muestran los resultados del modelamiento, gráficas para diferentes simulaciones y las conclusiones.

Introducción

El método de elementos finitos permite modelar distintos tipos de sistemas los cuales están compuestos por estructuras y/o fluidos. Anteriormente el método fue usado satisfactoriamente para el moldeamiento de una viga delgada en la cual se considera únicamente al comportamiento de la estructura, sin embargo la flexibilidad de este método permite ampliar su rango de aplicaciones, más específicamente para modelar sistemas acústicos en los cuales el análisis de la interacción entre un fluido y una estructura es de mucha importancia. Un caso particular en el estudio de la acústica, es el de un tubo alargado delgado el cual contiene un fluido como el aire en su interior y está formado por paredes rígidas. En este tubo las ondas sonoras están obligadas a propagarse en la dirección axial, lo cual será válido para sonidos con una longitud de onda mucho mayor que el diámetro del tubo. Para modelar este tipo de sistema, se considera el uso de elementos acústicos de una dimensión los cuales caracterizan la presión sonora a lo largo del tubo. Modelar esto permite conocer el comportamiento más elemental de las ondas sonoras y establece las bases para el desarrollo futuro de sistemas con geometrías complejas y que consideran la presencia de fuerzas no conservativas.

Método de Elementos Finitos

En acústica, la mayor parte del tiempo se busca caracterizar el comportamiento de un sistema en función de la presión sonora. Sin embargo, para el análisis de elementos finitos se considera más adecuado usar el potencial de velocidad ϕ el cual se relaciona con la presión sonora p de la siguiente manera:

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{1}$$

El tubo está formado por varios elementos simples, los cuales poseen geometrías sencillas y tienen grados de libertad de presión sonora, como se muestra en la Figura 1.

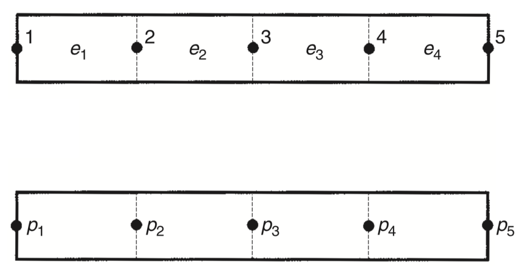

Figura 1. (Imagen superior)Tudo delgado divido en 4 elementos; (Imagen inferior) Tubo delgado dividido en 4 elementos con 1 grado de libertad.

Cada elemento posee dos nodos y a su vez cada nodo posee un grado de libertad. Considerando al elemento e_1, se tienen los grados de libertad: p_1 y p_2 los cuales representan a la presión sonora en cada nodo. Sin embargo, como se mencionó anteriormente en lugar de trabajar con la presión se hace uso del potencial de velocidad en cada nodo: ϕ_1 y ϕ_2. De esta manera se obtienen ecuaciones de energía en función de un mismo término.

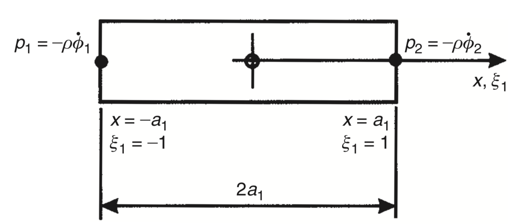

Figura 2. Elemento acústico formado por dos nodos con un grado de libertad.

Para caracterizar el potencial de velocidad en el elemento es necesario hacer uso de dos funciones predefinidas las cuales deben cumplir con los criterios de convergencia de Rayleigh-Ritz y están dadas por la siguiente expresión

$$\phi(\xi_1) = \alpha_1 + \alpha_2\xi_1 \tag{2}$$

donde $\xi_1 = x/a_1$ y $2a_1$ es la longitud del elemento (Figura 2) .

La Ec. (2) es evaluada para: ϕ_1 y ϕ_2 en las posiciones del elemento $\xi_1 = -1$ y $\xi_1 = +1$ respectivamente. De esta manera se obtiene el siguiente resultado

$$\phi(\xi_1, t) = \begin{bmatrix} G_1(\xi_1) & G_2(\xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \{\mathbf{g}(\xi_1)\}^T \{\boldsymbol{\phi}_e(t)\} \tag{3}$$

donde

$$G_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1),\ G_2(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \tag{4}$$

con

$$\{\boldsymbol{\phi}_e(t)\} = \begin{Bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Ecuaciones de energía

La energía cinética y potencial para un elemento acústico están dadas por las siguientes expresiones

$$T_e = \frac{1}{2}\rho_0 \int_{-1}^{1} \frac{A}{a_1^2} \left(\frac{\partial\phi(\xi_1, t)}{\partial\xi_1}\right)^2 a_1 d\xi_1 \tag{6}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\rho_0 \int_{-1}^{1} \frac{A}{c^2} \left(\frac{\partial\phi(\xi_1, t)}{\partial t}\right)^2 a_1 d\xi_1 \tag{7}$$

donde ρ_0 es la densidad estática del fluido y A la sección transversal del elemento. Reemplazando la Ec. (3) en las Ecuaciones (6) y (7) se obtienen las siguientes expresiones de energía en forma matricial

$$T_e = \frac{1}{2}\rho_0\{\boldsymbol{\phi}_e\}^T[\mathbf{H}_e]\{\boldsymbol{\phi}_e\} \tag{8}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\rho_0\{\dot{\boldsymbol{\phi}}_e\}^T[\mathbf{Q}_e]\{\dot{\boldsymbol{\phi}}_e\} \tag{9}$$

donde

$$[\mathbf{H}_e] = \frac{A}{a_1}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$[\mathbf{Q}_e] = \frac{Aa_1}{c^2}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Las matrices de rigidez e inercia acústica del elemento están representadas por: $[\mathbf{H}_e]$ y $[\mathbf{Q}_e]$. La energía total de la viga es obtenida al sumar las energías de cada elemento considerando los nodos que comparten entre ellos. Como resultado de la adición de energías elementales se obtiene la energía cinética y potencial total del sistema representadas por T y U, las cuales determinan el comportamiento general del sistema al usar el Principio de Hamilthon dado por la siguiente expresión

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U) + \delta W_{nc}]dt = 0 \tag{12}$$

donde δW_{nc} representa a las energías no conservativas. Al sumar la Eq. (8) y Eq. (9) para todos los elementos e integrando el resultado usando principio de Hamilthon se obtiene la siguiente expresión

$$[\mathbf{Q}]\{\ddot{\mathbf{p}}(t)\} + [\mathbf{H}]\{\mathbf{p}(t)\} = \{0\} \tag{13}$$

donde $\{\mathbf{p}\} = -\rho_0 \left\{\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\}$ son las presiones sonoras en cada nodo, $[\mathbf{H}]$ y $[\mathbf{Q}]$ son las matrices globales de rigidez e inercia. Si se considera un movimiento armónico tal que $\{\mathbf{p}(t)\} = \{\mathbf{a}\}sin(\omega t)$, donde ω es la velocidad angular, se tiene que las amplitudes complejas $\{\mathbf{a}\}$ son independientes del tiempo. Por lo tanto se genera un problema de valores y vectores propios de la siguiente forma

$$[\mathbf{H} - \omega^2\mathbf{Q}]\{\mathbf{a}\} = \{0\} \tag{14}$$

Dependiendo de las condiciones del sistema se debe omitir la fila y la columna correspondiente al nodo nulo de las matrices de rigidez e inercia. Por ejemplo, si el tubo está abierto por el lado izquierdo entonces el valor de presión en el primer nodo será igual a cero, lo cual equivale a omitir todos los elementos de la primera fila y la primera columna de las matrices mencionadas. En el caso de un tubo con ambos extremos cerrados se consideran a todos los nodos en el análisis.

Implementación

La implementación del modelado del tubo se realizó usando el software de cálculo matemático MATLAB. El tubo está cerrado por ambos extremos y posee las siguientes características

Característica	**Variable**	**Valor**	
Longitud	L	0.5	m
Sección Transversal	A	0.05	m^2
Densidad estática del aire	ρ_0	1.21	$Kg\,m^{-3}$
Velocidad del sonido	c	343	$m\,s^{-1}$

Cuadro 1
Características del tubo.

Inicialmente se calcularon las matrices de masa y rigidez del elemento usando las Ecuaciones (10) y (11). Con las matrices elementales calculadas se procede a construir las matrices globales de rigidez $\left[\mathbf{H}_g\right]$ e inercia $\left[\mathbf{Q}_g\right]$ de tamaño $n \times n$, donde n es el número de nodos totales en el tubo. Para la construcción de las matrices globales se hace uso de la matriz auxiliar $[\mathbf{A}_e]$ usando el siguiente código de MATLAB

```
for e=1:n_nodes - 1
    Ae =  [ zeros(p,1*(e-1)),...
            eye(p),...
            zeros(p, n_nodes * ...
            n_dofs - p - 1*(e-1))];

    Qg = Qg + Ae' * Q * Ae;
    Hg = Hg + Ae' * H * Ae;
end
```

donde `n_nodes` es el número total de nodos en el tubo, `n_dofs` es el numero de grados de libertad por nodo (en este caso es igual a uno) y `p` es el numero grados de libertad totales en el elemento.

Considerando que el tubo se encuentra cerrado por ambos extremos, no se debe eliminar ningún grado de libertad de las matrices globales. Entonces se procede a resolver la Eq. (13) con la ayuda de la función `eig(Hg, Qg)` la cual permite obtener los vectores y valores propios del sistema.

Resultados

El tubo fue modelado con 8 ,16, 32 y 64 elementos. A continuación se muestra el resultado de las 4 primeras frecuencias naturales de vibración(valores propios) junto con la solución exacta.

	Elementos (Hz)			
Solución exacta	**8**	**16**	**32**	**64**
343	345	344	343	343
686	704	690	687	686
1029	1089	1044	1033	1030
1372	1513	1407	1381	1374

Cuadro 2
Resultado del moldeamiento para varios elementos.

Usando los vectores propios obtenidos del moldeamiento para 16, 32 y 64 elementos se realizaron gráficas de los modos y se muestran en la Figura 3.

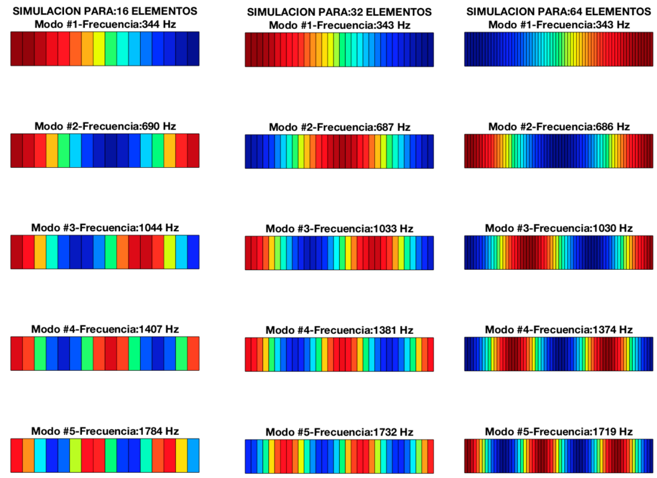

Figura 3. Imagenes resultado del modelamiento para 16, 32 y 64 elementos. Color rojo: máxima presión positiva. Color azul: máxima presión negativa.

Conclusiones

Se puede concluir que el método de elementos finitos modela con mucha precisión a los modos acústicos de un tubo delgado alargado siempre y cuando se tiene un número adecuado de elementos y nodos. El mejor resultado se obtuvo usando 64 elementos, lo cual significa que para la frecuencia más alta analizada correspondiente al quinto modo, se necesitan aproximadamente de 20 elementos por longitud de onda para lograr una representación precisa de la vibración en el tubo. El resultado del modelamiento usando 32 elementos entrega resultados bastante buenos para los primeros modos, sin embargo la representación gráfica carece de precisión.

En conclusión, el uso del potencial de velocidad en lugar de la presión sonora representa una estratagema muy valiosa la cual permite analizar la energía de cada elemento de una forma más rápida y sencilla.

Bibliografía

Fahy, F. J., y Gardonio, P. (2007). *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. Elsevier.