FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MAGISTER EN INFORMÁTICA

“IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO DE RAYLEIGH - RITZ PARA EL CÁLCULO DE LOS MODOS NATURALES DE VIBRACIÓN DE UNA VIGA DELGADA”

TRABAJO CORRESPONDIENTE A LA MATERIA DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN VIBROACÚSTICA

PROFESOR GUÍA:
DR. MARIO GONZÁLEZ MONTENEGRO

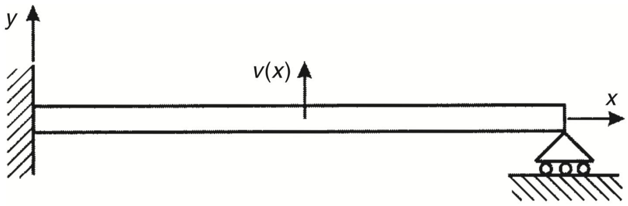
AUTOR:
JUAN CHANGO PERUGACHI

FECHA DE ENTREGA:
9 DE MAYO DE 2018

VALDIVIA –CHILE

1. **Introducción**
   El presente trabajo se basa en la implementación del método numérico Rayleigh-Ritz para encontrar las frecuencias naturales de una viga delgada.

2. **Desarrollo**
   A continuación se muestran brevemente los conceptos teóricos relacionados a la simulación del siguiente sistema: Una viga delgada sujetada por un extremo.



Método numérico de Rayleigh-Ritz:

Básicamente se requiere conocer el movimiento perpendicular al eje "x" de la viga en un punto dado en el mismo eje. El método numérico de Rayleigh-Ritz hace uso de las ecuaciones de movimiento del sistema en conjunto con el principio de Hamilton para describir el movimiento mencionado considerando un número de "n" grados de libertad. Así el método establece la siguiente ecuación de movimiento:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x) v_i(t)$$

Donde:

$$d_i(x) = x^{i+1} (L - x)$$

Ecuaciones de energía del sistema:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Usando la anterior ecuación en conjunto con las ecuaciones de energía, se obtienen las siguientes ecuaciones para formar las matrices de inercia y rigidez:

$$M_{k,s} = \rho A \left\{ \frac{L^{k+s+5}}{k+s+3} - 2\frac{L^{k+s+5}}{k+s+4} + \frac{L^{k+s+5}}{k+s+5} \right\}$$

$$\begin{aligned} K_{k,s} = EI_z \Bigg\{ & \left[\frac{(k+1)k(s+1)sL^{k+s+1}}{k+s-1} \right] - \left[\frac{(k+2)(k+1)(s+1)sL^{k+s+1}}{k+s} \right] \\ & - \left[\frac{(k+1)k(s+2)(s+1)L^{k+s+1}}{k+s} \right] \\ & + \left[\frac{(k+2)(k+1)(s+2)(s+1)L^{k+s+1}}{k+s+1} \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

Frecuencias naturales del sistema y valores propios:

Por último al usar el principio de Hamilton(sin considerar fuerzas no conservativas) junto con las ecuaciones de energía resueltas y expresarlas en forma de matrices, se tiene la siguiente ecuación:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{v}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{v}(t)\} = \{\mathbf{0}\}$$

Una ecuación propia de un sistema elástico masa-resorte. Al considerar un movimiento armónico de cada grado de libertad, la ecuación se reduce a un problema de vectores y valores propios:

$$\left[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right]\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$$

3. Implementación

La implementación se desarrolló en software MATLAB, siguiendo el siguiente orden:

Inicialmente se establecieron las variables de entrada:

n_deg_free	Grados de libertad del sistema
rho	Densidad del material
L	Longitud de la viga

E	Módulo de Young del Material
b	Ancho del material
h	Espesor del material

Se calculan los valores de sección transversal y el segundo momento de área:

```
A = b * h;
Iz = (b*h^3)/12;
```

Se generan las matrices de masa y rigidez "M" y "K":

```
for k=1:n_deg_free
    for s=1:n_deg_free

        m1 = (L^(k+s+5))/(k+s+3);
        m2 = 2*((L^(k+s+5))/(k+s+4));
        m3 = ((L^(k+s+5))/(k+s+5));

        M(k,s) = rho*A*( m1-m2+m3 );


        k1 = ( ( (k+1)*k*(s+1)*s*L^(k+s+1) ) / (k+s-1));
        k2 = ( ( (k+2)*(k+1)*(s+1)*s*L^(k+s+1) ) / (k+s));
        k3 = ( ( (k+1)*k*(s+2)*(s+1)*L^(k+s+1) ) / (k+s));
        k4 = ( ( (k+2)*(k+1)*(s+2)*(s+1)*L^(k+s+1) ) / (k+s+1));

        K(k,s) = E*Iz*( k1-k2-k3+k4 );
    end

end
```

Se calculan los vectores y valores propios. Los valores propios son llamados "LAMBDA" y los vectores propios tienen el nombre "A", puesto que son la matriz de amplitudes de la vibración armónica de cada grado de libertad:

```
[A,LAMBDAI] = eig(K,M);
LAMBDA = LAMBDAI*ones(n_deg_free,1);
Freqs = round(( LAMBDA.^(0.5) )./(2*pi));
```

Por último se generan los resultados en función de espacio (eje "x") usando la ecuación que propone el método de Rayleigh-Ritz. Se usaron 1000 puntos para la matriz de entrada "x". "Y" es la matriz que contiene el resultado para cada grado de libertad y su frecuencia natural asociada.

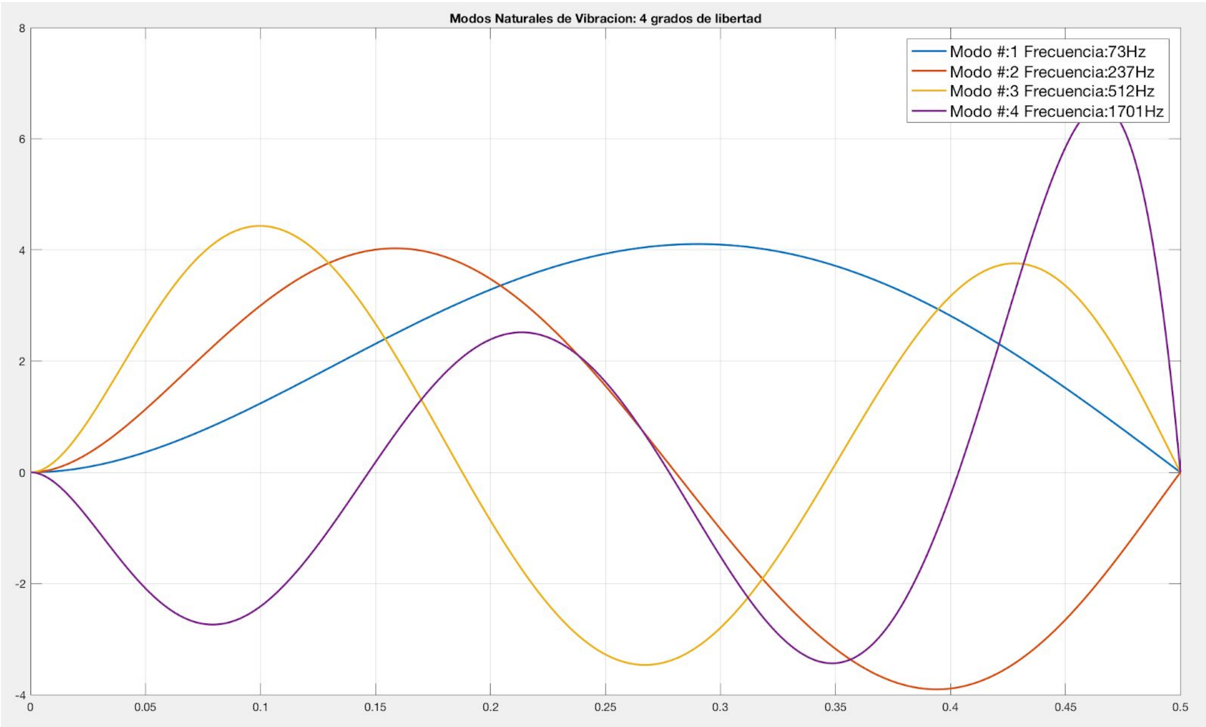
```
n_points = 1000;
x = 0:L/(n_points-1):L;
d = zeros(n_deg_free,n_points);
for i=1:n_deg_free
    d(i,:) = (x.^(i+1)).*(L-x);
end
Y = (d'*A)';
```

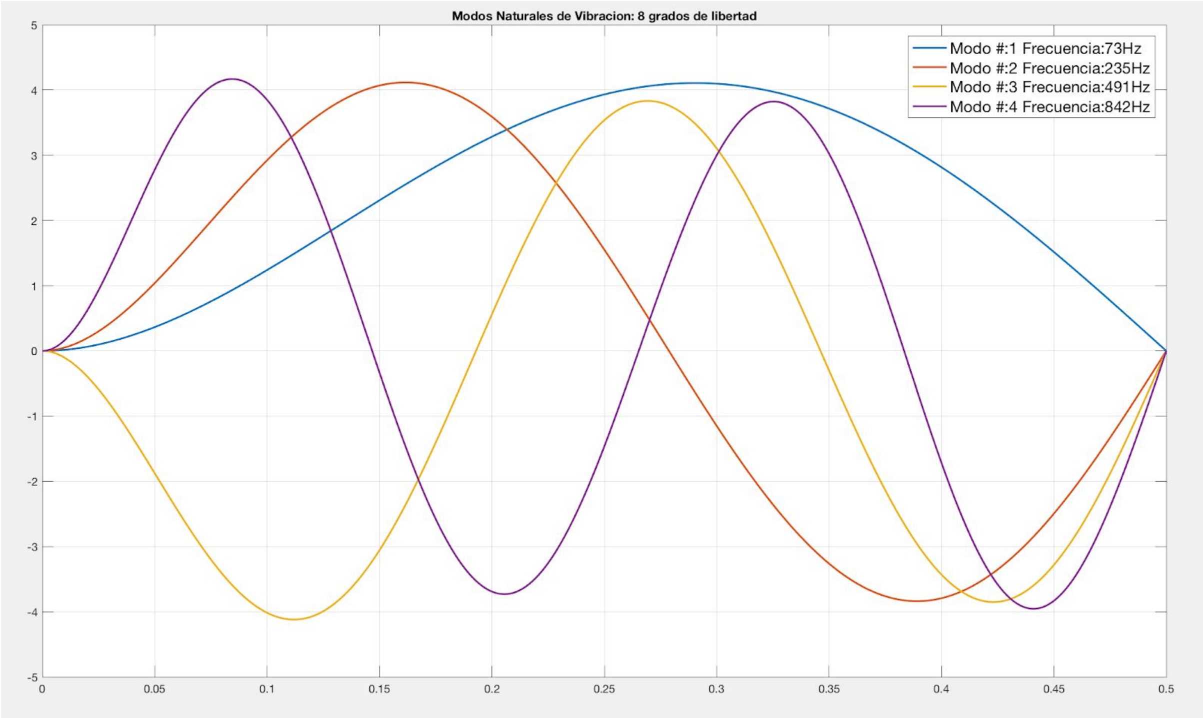
4. Resultados

Considerando los siguiente valores de entrada:

n_deg_free	4 - 8	
rho	2700	Kg m^{-3}
L	0.5	m
E	7.1E10	N m^{-2}
b	0.02	m
h	0.005	m

Se obtienen los siguientes resultados:





5. Conclusiones

Se puede concluir que el método de Rayleigh-Ritz permite obtener resultados de manera muy precisa basándose en las ecuaciones de energía del sistema, las cuales son de mucha ayuda para el desarrollo matemático del método numérico.

En conclusión, cada grado de libertad en la ecuación tiene relación directa con la frecuencia natural más alta. Las ecuaciones de energía se postulan para longitudes de onda mucho más grandes que las dimensiones de la viga, por lo que basta establecer un número pequeño de grados de libertad para obtener información relevante de la viga, es decir, para conocer sus modos naturales de vibración de baja frecuencia.

Por último, se pudo ver que representar un modo de vibración de alta frecuencia requiere de un polinomio de mayor grado, por lo cual el último modo de vibración tiende a ser menos estable que los anteriores en su representación de una función senoidal.

6. Referencias

Fahy, F. J., & Gardonio, P. (2007). Sound and structural vibration: radiation, transmission and response. Academic press.

Petyt, M. (2010). Introduction to finite element vibration analysis. Cambridge university press.