

# Modelamiento de los modos de flexión de una viga por elementos finitos

Juan Chango

Instituto de Informática, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.

El siguiente trabajo corresponde a la Tarea No2 de la asignatura: Métodos numéricos en Vibroacústica con nomenclatura: ACUS360. El trabajo se basa en la implementación del método de elementos finitos para encontrar las frecuencias naturales de vibración de una viga delgada. Inicialmente se muestra la teoría usada en conjunto con las ecuaciones de energía para el comportamiento elástico de una viga delgada frente a una onda de flexión. Luego se detalla la implementación del método de elementos finitos usando el software de cálculo numérico MATLAB. Al final se muestran los resultados del modelamiento, además de los tiempos de ejecución del programa y las conclusiones.

## Introducción

Previamente, el moldeamiento de los modos de flexión de una viga delgada fue desarrollado satisfactoriamente usando el método de Rayleigh-Ritz. Este método permite caracterizar la deformación a lo largo de la viga, mediante el uso de un conjunto de funciones que dependen del tiempo y del espacio. Las funciones espaciales son predefinidas y se caracterizan por ser polinomios que deben cumplir criterios de convergencia (Fahy y Gardonio, 2007). El principal problema de este método es encontrar un conjunto de funciones predefinidas para geometrías complejas, además que el grado del polinomio de las funciones predefinidas aumenta con el número de nodos en la viga. En contrapartida, el método de elementos finitos permite solventar estos problemas al considerar que la viga está formada por elementos simples, los cuales permiten adaptarse a diversas geometrías. También estos elementos necesitan funciones predefinidas con polinomios de menor grado para cumplir los criterios de convergencia de Rayleigh-Ritz.

## Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos considera a la viga como un sistema complejo formado por varios elementos más sencillos. Estos elementos poseen geometrías simples y tienen grados de libertad asociados. Por lo tanto, la viga es dividida en varios elementos como se muestra en la Figura 1.

Cada elemento posee dos nodos alineados en el eje axial de la viga con cuatro grados de libertad. Considerando al elemento  $e_1$  se tienen los siguientes grados de libertad:  $v_{1,2}$  deformaciones perpendiculares al eje axial de la viga,  $\theta_{z1,2}$  desplazamientos angulares respecto al eje  $z$ . Se necesitarán cuatro funciones predefinidas para caracterizar la deformación en el elemento individual. Estas funciones cumplen los criterios de convergencia de Rayleigh-Ritz y están dadas por la siguiente expresión,

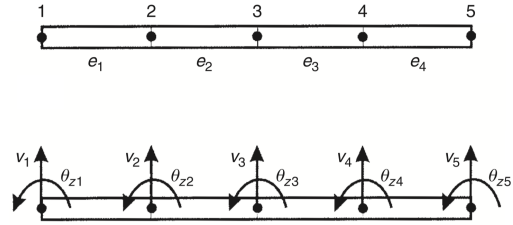


Figura 1. (Imagen superior) Viga delgada dividida en 4 elementos; (Imagen inferior) Viga delgada dividida en 4 elementos con 2 grados de libertad.

$$v(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 + \alpha_4\xi^3 \quad (1)$$

donde  $\xi = x/a$  y  $2a$  es la longitud del elemento. Al expresar la última ecuación en forma matricial se tiene,

$$v(\xi) = \{\mathbf{p}(\xi)\}^T \{\mathbf{a}(\alpha)\} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

La anterior ecuación es derivada con respecto al eje axial y se evalúa para:  $v_1, \theta_{z1}, v_2$  y  $\theta_{z2}$  en las posiciones del elemento  $\xi = -1$  y  $\xi = +1$  respectivamente. El resultado es una matriz la cual es reemplazada en la Ecuación 2 y simplificando queda la siguiente expresión:

$$v(\xi) = \{\mathbf{n}(\xi)\}^T \{\mathbf{v}_e\} \quad (3)$$

donde

$$\{\mathbf{n}(\xi)\}^T = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (2 - 3\xi + \xi^3) \\ (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ (2 + 3\xi - \xi^3) \\ (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{Bmatrix}^T \quad (4)$$

y

$$\{\mathbf{v}_e\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

### Ecuaciones de energía

La energía cinética y potencial para un elemento simple esta determinada por las siguientes expresiones

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho A \dot{v}^2 d\xi \quad (6)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 EI_z \frac{1}{a^4} A \left( \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{d\xi^2} \right) d\xi \quad (7)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material,  $A$  la sección transversal del elemento,  $E$  es el módulo de Young y  $I_z$  es el segundo momento de área. Reemplazando la ecuación 3 en 6 y 7 y operando el resultado se obtiene las siguientes expresiones de las energías en forma matricial

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{v}}_e\}^T [\mathbf{M}_e] \{\dot{\mathbf{v}}_e\} \quad (8)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \{\mathbf{v}_e\}^T [\mathbf{K}_e] \{\mathbf{v}_e\} \quad (9)$$

donde

$$[\mathbf{M}_e] = \frac{\rho A a}{105} \begin{Bmatrix} 78 & 22a & 27 & -13a \\ 22a & 8a^2 & 13a & -6a^2 \\ 27 & 13a & 78 & -22a \\ -13a & -6a^2 & -22a & 8a^2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$[\mathbf{K}_e] = \frac{EI_z}{2a^3} \begin{Bmatrix} 3 & 3a & -3 & -3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

La energía total de la viga es obtenida al sumar las energías de cada elemento individual considerando los nodos que comparten entre ellos. El resultado de la suma genera una

matriz global de masa y rigidez  $[\mathbf{M}]$  y  $[\mathbf{K}]$ . Al sumar las ecuaciones 8 y 9 para todos los elementos e integrando el resultado usando principio de Hamilton se obtiene la siguiente expresión

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{v}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{v}(t)\} = \{0\} \quad (12)$$

Considerando un movimiento armónico de la forma  $\{\mathbf{v}(t)\} = \{\mathbf{a}\} \sin(\omega t)$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular, se tiene que las amplitudes complejas  $\{\mathbf{a}\}$  son independientes del tiempo. Por lo tanto se crea un problema de valores y vectores propios de la siguiente forma

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} = \{0\} \quad (13)$$

### Implementación

La implementación del modelamiento de la viga delgada se realizó usando el software de cálculo matemático MATLAB. La viga delgada posee las siguientes características

Característica	Variable	Valor	
Largo	L	0.5	$m$
Ancho	b	0.002	$m$
Grosor	h	0.005	$m$
Densidad del material	rho	2700	$Kgm^{-3}$
Modulo de Young	E	7.1E+010	$Nm^{-2}$

Cuadro 1

*Características de la viga delgada.*

Inicialmente se calcularon las matrices de masa y rigidez del elemento simple usando las ecuaciones 10 y 11. Con las matrices elementales calculadas se procede a construir las matrices globales de masa  $\mathbf{M}_g$  y rigidez  $\mathbf{K}_g$ . Para ello se hace uso de la matriz auxiliar  $\mathbf{A}_e$  usando el siguiente código de MATLAB

```
for e=1:n_nodes - 1
    Ae = [ zeros(p, 2*(e-1)), ...
           eye(p), ...
           zeros(p, n_nodes - ...
                * n_dofs - p - 2*(e-1))];
```

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{M}_g + \mathbf{A}_e' * \mathbf{M} * \mathbf{A}_e;$$

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{K}_g + \mathbf{A}_e' * \mathbf{K} * \mathbf{A}_e;$$

end

Considerando que la viga se encuentra sujeta por el lado izquierdo se deben eliminar los grados de libertad correspondientes a:  $v_1$ ,  $\theta_{z1}$  y  $v_n$  de las matrices globales. Entonces se procede a resolver la ecuación 13 con la ayuda de la función `eig(Kg, Mg)` la cual permite obtener los vectores y valores propios del sistema.

### Resultados

La viga delgada fue modelada con 4, 8 y 16 elementos. A continuación se muestra el resultado de las frecuencias naturales de vibración (valores propios) junto con la solución exacta.

Solución exacta(Hz)	4e (Hz)	8e (Hz)	16e (Hz)
73	73	73	73
235	237	236	235
491	502	492	491
840	943	844	840

Cuadro 2

*Resultado del moldeamiento de la viga delgada para varios elementos.*

Usando los vectores propios obtenidos del moldeamiento para 4, 8 y 16 elementos se realizaron gráficas de los modos usando interpolación lineal, se muestran en la Figura 2.

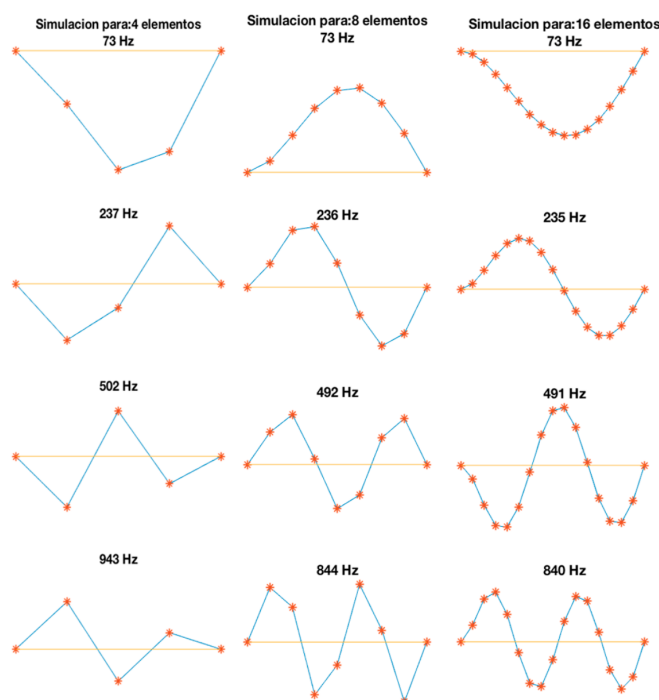


Figura 2. Imágenes resultado del modelamiento para 4, 8 y 16 elementos.

Por último, se midió el tiempo de cómputo para el mo-

Elementos	Tiempo de Cómputo(mseg)
4	8.6
8	16.9
16	25.6
32	38.7
64	41.7
128	117.1

Cuadro 3

*Tiempos de cómputo del modelo.*

delamiento con diferentes números de elementos usando un computador MacBook Pro del 2015 con un procesador: 2.9GHz, Intel Core i5 y memoria RAM: 8 GB 1867 MHz DDR3 . Los resultados se muestran en el cuadro 3.

### Conclusiones

Se puede concluir que el método de elementos finitos modela con mucha precisión a los modos de flexión de una viga delgada. El mejor resultado tanto de moldeamiento como de representación gráfica se obtuvo al usar 16 elementos, lo cual lleva a pensar que en modelos con geometrías mas complejas se necesitaran muchos mas nodos para obtener un resultados preciso.

Se observó la ventaja del método de elementos finitos sobre el método de Rayleigh-Ritz para determinar el comportamiento vibratorio de una viga delgada, ya que mediante el uso de funciones predefinidas con polinomios de bajo grado se puede construir sistemas tan sencillos como la viga delgada y tan complejos como se requiera

Se concluye que los vectores propios obtenidos de las matrices globales de inercia y rigidez caracterizan a la viga con buena precisión para las diferentes frecuencias naturales de vibración, sin embargo si se requiere de mayor resolución en la caracterización se debe aumentar en número de elementos.

Por último se puede ver que el desempeño del algoritmo es bastante bueno, ya que para lograr buenos resultados el tiempo de cálculo fue muy bajo. Además a medida que se sigue duplicando el número de elementos el algoritmo tiene un tiempo de cómputo muy bueno.

### Bibliografía

Fahy, F. J., y Gardonio, P. (2007). *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. Elsevier.