

Modelamiento de los Modos de Flexión de una Placa Fina

Juan F. Chango
 Instituto de Informática
 Universidad Austral de Chile
 Valdivia, Chile
 jnfran92@gmail.com

Resumen—El siguiente trabajo corresponde a la Tarea No4 de la asignatura: **Métodos numéricos en Vibroacústica** con nomenclatura: ACUS360 dictada por el Dr. Mario A. González. El trabajo se basa en la implementación del método de elementos finitos para encontrar los modos de flexión de una placa fina. Inicialmente se muestra la teoría usada en conjunto con las ecuaciones de energía para el comportamiento mecánico de una placa fina frente a una onda de flexión. Luego se detalla la implementación del método de elementos finitos usando el software de cálculo numérico MATLAB. Al final se muestran los resultados del modelado, gráficas de los vectores propios y las conclusiones.

I. INTRODUCCIÓN

El método de elementos finitos permite modelar distintos tipos de sistemas con geometrías variadas. Anteriormente el método fue usado satisfactoriamente para el moldeamiento de una viga delgada en la cual se considera únicamente al comportamiento de elementos estructurales de una dimensión, sin embargo la flexibilidad de este método permite ampliar su rango de aplicaciones, más específicamente para modelar sistemas con elementos geométricos más complejos los cuales interactúan en dos o tres dimensiones. Un caso particular en este estudio, es el de una placa rectangular delgada, la cual posee varios elementos estructurales de dos dimensiones acoplados entre ellos mediante sus nodos. En esta placa las ondas de flexión deforman a la placa de forma normal al plano. Para modelar este tipo de sistema, se considera el uso de elementos estructurales los cuales caracterizan la deformación a lo largo de la placa.

II. ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos considera a la placa fina como un sistema complejo formado por varios elementos estructurales más sencillos. Estos elementos poseen geometrías simples y tienen grados de libertad asociados. Por lo tanto, la placa es dividida en varios elementos como se muestra en la imagen superior en la Figura 1.

Cada elemento posee cuatro nodos y a su vez cada nodo posee tres grados de libertad y se muestra en la imagen inferior en Figura 1. Considerando al elemento e_1 , se tienen los grados de libertad: $w_{1,2,3,4}$, $\theta_{x1,2,3,4}$ y $\theta_{y1,2,3,4}$ los cuales representan a la deformación en el eje normal al plano y el desplazamiento angular alrededor del eje x y y para cada nodo (con $\theta_x =$

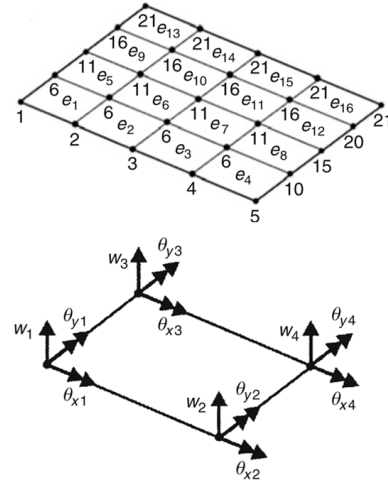


Figura 1. Imagen superior: Placa fina representada por una grilla de 4×4 elementos rectangulares con 4 nodos. Imagen inferior: Elemento estructural de dos dimensiones con 4 nodos y tres grados de libertad por cada nodo.

$\partial w / \partial y$ y $\theta_y = -\partial w / \partial x$). De esta manera, se necesitarán doce funciones predefinidas para caracterizar la deformación en el elemento individual. Estas funciones cumplen los criterios de convergencia de Rayleigh-Ritz y están dadas por la siguiente expresión

$$w(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3 \quad (1)$$

donde $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ son las coordenadas adimensionales con referencia a las dimensiones $2a$ y $2b$ del elemento rectangular. Al expresar la anterior ecuación en forma matricial se tiene,

$$w(\xi, \eta) = \{\mathbf{p}(\xi, \eta)\}^T \{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (2)$$

con

$$\{\mathbf{p}(\xi, \eta)\}^T = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 \\ & & & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\{\boldsymbol{\alpha}\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12}] \quad (4)$$

La Ec. (2) es derivada con respecto a ξ y η y se evalúa para cada grado de libertad en las posiciones del elemento $\xi = \pm 1$ y $\eta = \pm 1$ respectivamente. El resultado queda de la siguiente manera

$$\{\mathbf{w}_e\} = [\mathbf{A}_e]\{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (5)$$

donde

$$[\mathbf{A}_e] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{2}{b} & 0 & \frac{1}{b} & \frac{2}{b} & \frac{3}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{3}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{2}{a} & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{3}{a} & \frac{1}{a} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{2}{b} & 0 & \frac{1}{b} & -\frac{2}{b} & \frac{3}{b} & \frac{1}{b} & \frac{3}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{3}{a} & \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{3}{a} & \frac{1}{a} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & \frac{2}{b} & 0 & \frac{1}{b} & \frac{2}{b} & \frac{3}{b} & \frac{1}{b} & \frac{3}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{3}{a} & -\frac{1}{a} \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} & \frac{2}{b} & 0 & \frac{1}{b} & -\frac{2}{b} & \frac{3}{b} & -\frac{1}{b} & -\frac{3}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{3}{a} & \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{3}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad (6)$$

y $\{\mathbf{w}_e\}$ es un vector columna con los desplazamientos y rotaciones de cada nodo

$$\{\mathbf{w}_e\}^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}] \quad (7)$$

II-A. Ecuaciones de energía

La energía cinética y potencial para un elemento estructural en dos dimensiones están dadas por las siguientes expresiones

$$T_e = \frac{1}{2} \int_A \rho h \dot{w}^2 dA \quad (8)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A I_z \{\boldsymbol{\chi}\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\chi}\} dA \quad (9)$$

donde ρ es la densidad de la estructura, h es el grosor de la placa e I_z el segundo momento de área. Para la energía potencial se tienen los siguientes términos

$$\{\boldsymbol{\chi}\}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} E' & E'v & 0 \\ E'v & E' & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (11)$$

con $E' = E/(1 - \nu^2)$ y $G = E/(2(1 + \nu))$. E es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson.

Reemplazando la Ec. (2) en (8) y (9) se obtienen las siguientes expresiones de energía en forma matricial

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{w}}_e\}^T [\mathbf{M}_e] \{\dot{\mathbf{w}}_e\} \quad (12)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \rho_0 \{\mathbf{w}_e\}^T [\mathbf{K}_e] \{\mathbf{w}_e\} \quad (13)$$

donde

$$[\mathbf{M}_e] = [\mathbf{A}_e]^{-T} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho h \{\mathbf{p}(\xi, \eta)\}^T \{\mathbf{p}(\xi, \eta)\} ab d\xi d\eta [\mathbf{A}_e]^{-1} \quad (14)$$

$$[\mathbf{K}_e] = [\mathbf{A}_e]^{-T} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 I_z \{\mathbf{P}(\xi, \eta)\}^T [\mathbf{D}] \{\mathbf{P}(\xi, \eta)\} ab d\xi d\eta [\mathbf{A}_e]^{-1} \quad (15)$$

con

$$\{\mathbf{P}(\xi, \eta)\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \\ \frac{1}{ab} \frac{\partial^2 \mathbf{p}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Las matrices de rigidez e inercia del elemento están representadas por: $[\mathbf{M}_e]$ y $[\mathbf{K}_e]$. La energía total de la placa es obtenida al sumar las energías de cada elemento considerando los nodos que comparten entre ellos. Como resultado de la adición de energías elementales se obtiene la energía cinética y potencial total del sistema representadas por T y U , las cuales determinan el comportamiento general del sistema al usar el Principio de Hamilton dado por la siguiente expresión

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U) + \delta W_{nc}] dt = 0 \quad (17)$$

donde δW_{nc} representa a las energías no conservativas. Para este trabajo no se considera la presencia de energías no conservativas, de tal forma al sumar la Eq. (12) y Eq. (13) para todos los elementos e integrando el resultado usando principio de Hamilton se obtiene la siguiente expresión

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{w}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{w}(t)\} = \{0\} \quad (18)$$

Si se considera un movimiento armónico tal que $\{\mathbf{w}(t)\} = \{\mathbf{a}\} \sin(\omega t)$, donde ω es la velocidad angular, se tiene que las amplitudes complejas $\{\mathbf{a}\}$ son independientes del tiempo. Por lo tanto se genera un problema de valores y vectores propios de la siguiente forma

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} = \{0\} \quad (19)$$

Dependiendo de las condiciones del sistema se debe omitir la fila y la columna correspondiente al nodo nulo de las matrices de rigidez e inercia. En el presente trabajo se considera que la placa no se mueve en los bordes, por lo cual se deben eliminar los grados de libertad correspondientes de las matrices generales.

III. IMPLEMENTACIÓN

La implementación del modelado de la placa fina se realizó usando el software de cálculo matemático MATLAB. La placa posee las siguientes características: Largo $Lx = 0,414m$, ancho $Ly = 0,314m$, grosor $h = 0,001m$, densidad del material $\rho = 2700kg/m^3$, módulo de Young $E = 7,1e10$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$.

Inicialmente se calcularon las matrices de masa y rigidez del elemento usando la Ec. (3) y variables simbólica de MATLAB para integrar y evaluar las matrices de masa y rigidez en conjunto con la matriz $[A_e]$. Con las matrices elementales calculadas se procede a construir las matrices globales usando la función: `assembly_global(local_matrix, n)`, donde `local_matrix` es la matriz elemental y `n` es el número de grados de libertad totales en la placa. Considerando que la placa no tiene movimiento en los bordes, se debe eliminar los elementos de las matrices globales correspondientes y se procedió a calcular los valores y vectores propios con la función de MATLAB: `eig(Kg, Mg)`.

IV. RESULTADOS

La placa fue modelada con $32 \times 32 = 1024$ elementos. A continuación se muestra el resultado de las 15 primeras frecuencias naturales de vibración(valores propios) junto con la solución de Warbuton [1].

Cuadro I

RESULTADO DEL MODELAMIENTO PARA 1024 ELEMENTOS - 15 PRIMERAS FRECUENCIAS.

Modo	Frecuencia en Hz	
	Warbuton	MATLAB
1	73	73
2	123	123
3	170	171
4	206	206
5	217	217
6	295	295
7	318	320
8	319	321
9	364	365
10	405	405
11	439	439
12	460	462
13	517	520
14	545	544
15	545	544

Usando los vectores propios obtenidos del moldeamiento se realizaron gráficas de los 15 primeros modos y se muestran en la Figura 2.

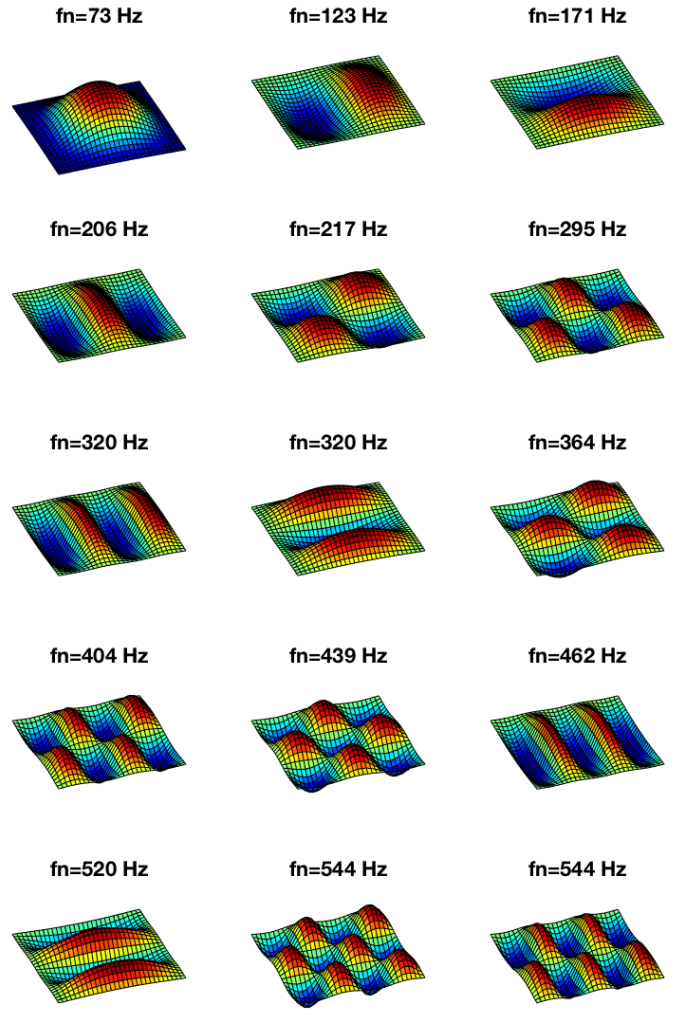


Figura 2. Imagenes resultado del modelamiento para $32 \times 32 = 1024$ elementos. Color rojo: máxima deformación positiva. Color azul: máxima deformación negativa.

V. CONCLUSIONES

Se puede concluir que el método de elementos finitos modela con mucha precisión a los modos de flexión de una placa delgada siempre y cuando se tiene un número adecuado de elementos y nodos. El mejor resultado en cuanto a precisión y representación gráfica se obtuvo usando 32 elementos, sin embargo se debe siempre tomar en cuenta que cada nodo posee 3 grados de libertad, a medida que se aumenta la precisión el costo computacional aumenta considerablemente ya que las matrices de masa y rigidez se vuelven cada vez mas grandes.

REFERENCIAS

- [1] Frank J Fahy and Paolo Gardonio. *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. Elsevier, 2007.