数值分析：分段插值

张王优

2025-10-22

SCHOOL OF
ARTIFICIAL INTELLIGENCE
上海交通大学人工智能学院

目录

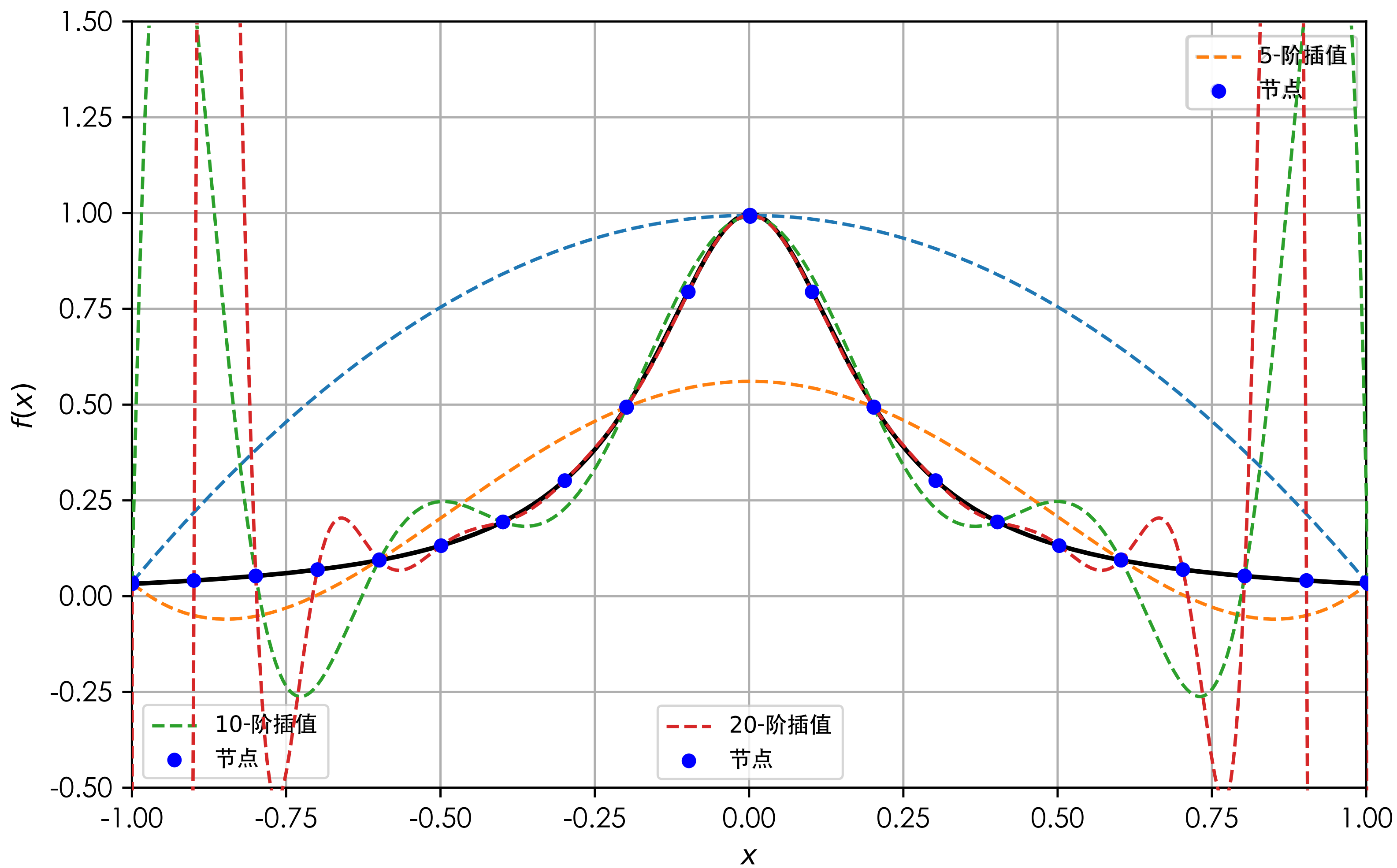
CONTENTS

Runge 现象

- 回顾：多项式插值（Lagrange, Newton, Hermite 插值法）
  - 在一组等间插值点上，使用具有**高次多项式**的多项式插值，会在**区间边缘处**出现振荡问题

Runge 函数

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$



分段（Piecewise）低次插值

- 回顾：多项式插值（Lagrange, Newton, Hermite 插值法）
  - 插值多项式的次数并非总是越高越好！
  - 高次多项式插值还面临稳定性、大幅度振荡等问题，实际中一般较少使用
- 如何处理这种情况？
  - **分段插值**：在每个子区间上分别用插值多项式来逼近 $f(x)$
    1) 将整个插值区间分割为多个子区间 $[x_j, x_{j+1}]$
    2) 在每个子区间上进行低次插值
    3) 将所有插值多项式拼接成一个插值函数

分段低次插值

- 常见方法
  1) 分段线性插值 ⇨ 将插值点用折线段连接起来逼近，但导数是间断的
  2) 分段三次 Hermite 插值 ⇨ 插值函数的导数连续
  3) 三次样条插值 ⇨ 插值函数在整个插值区间上二阶连续可导
- **优点**
  - 公式相对简单、 运算量小、稳定性好、一致收敛性
- **缺点**
  - 分段插值函数的光滑性（n 阶导数连续）不高
  - 分段三次 Hermite 插值的计算公式较复杂，需要额外信息（导数值）

分段线性插值

- 设已知节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，记

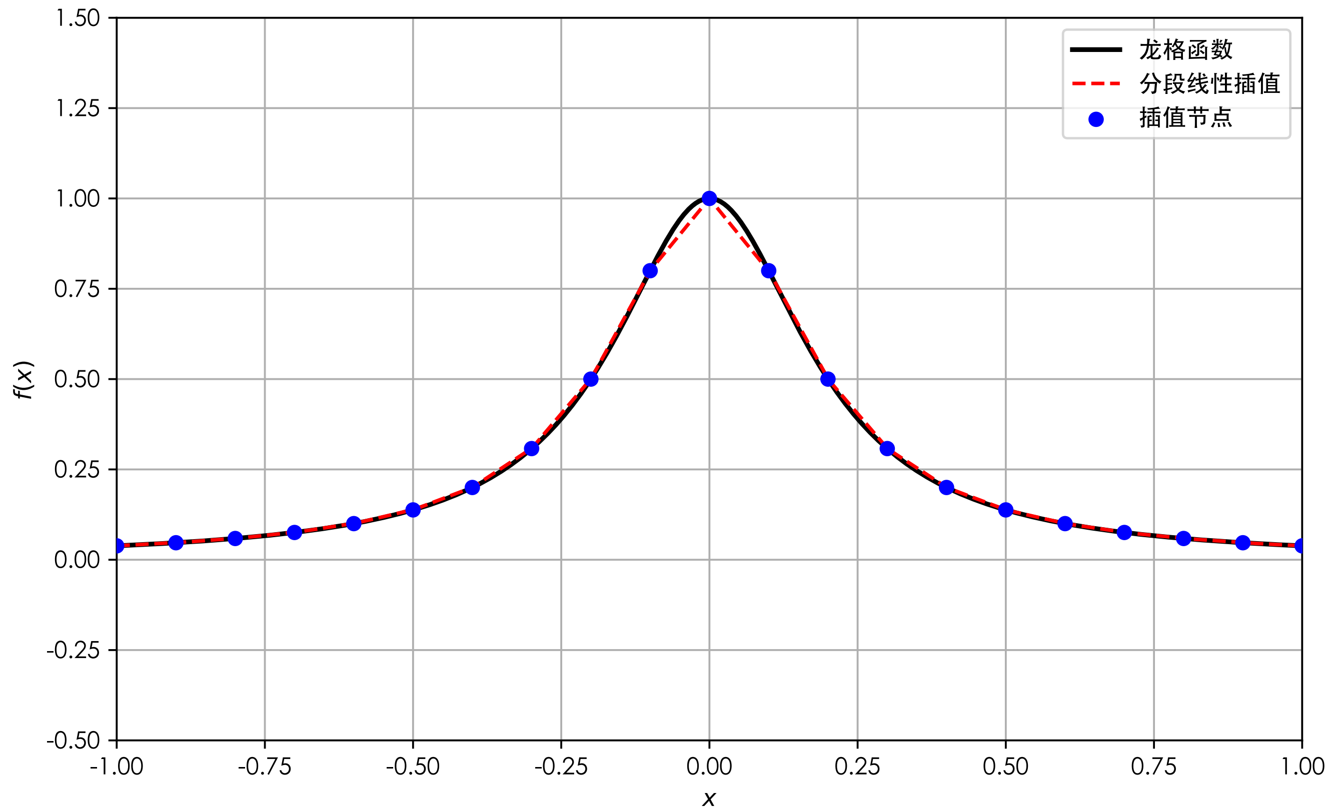
$$h_k = x_{k+1} - x_k, \qquad h = \max_k\{h_k\}$$

求分段函数 $I_h(x)$ 满足

1) $I_h(x) \in C[a, b]$，即函数在区间 $[a, b]$ 上连续；
2) $I_h(x_k) = y_k$， $k = 0, 1, \cdots, n$；
3) $I_h(x)$ 在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数.

- $\Rightarrow I_h(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \ x \in [x_k, x_{k+1}], \ k = 0, 1, \cdots, n-1$

分段线性插值——误差分析



$$I_h(x) = y_k \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

$$x \in [x_k, x_{k+1}],\ k = 0, 1, \cdots, n-1$$

回顾： $M_n \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(n)}(x) \right|$

$h = \max\limits_k \{h_k\}$

- 对于子区间 $[x_k, x_{k+1}]$，应用 Lagrange 插值余项定理：

$$|f(x) - I_h(x)| = \left| \frac{f''\left(\xi^{(k)}\right)}{2!} (x - x_k)(x - x_{k+1}) \right| \le \frac{M_2}{8} h_k^2$$

⇨ 在整个区间 $[a, b]$ 上，有

✅ 一致收敛性：当 $h \to 0$ 时，$|R_h(x)| \to 0$

$$|R_h(x)| = |f(x) - I_h(x)| \le \max_k \left| \frac{M_2}{8} h_k^2 \right| = \frac{M_2}{8} h^2$$

分段线性插值

- 在线计算工具
  - ❑ https://tools.timodenk.com/linear-interpolation

Linear interpolation

Performs and visualizes a linear interpolation for a given set of points.

Syntax for entering a set of points: `Spaces` separate x- and y-values of a point and a `Newline` distinguishes the next point. Hit the button *Show example* to see a demo.

```
-1.5 -1.2
-.2 0
1 0.5
5 1
10 1.2
```

Interpolate | Show example

Points

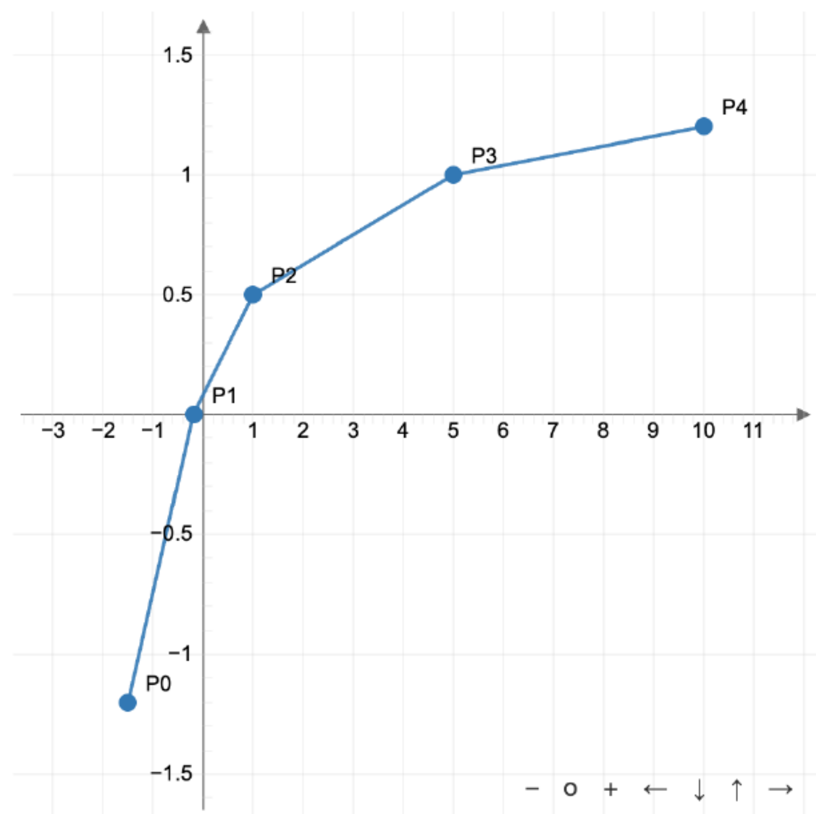
$P_0(-1.5|-1.2)$; $P_1(-0.2|0)$; $P_2(1|0.5)$; $P_3(5|1)$; $P_4(10|1.2)$

Equation

$$f(x)=\begin{cases} 9.2308\cdot 10^{-1}\cdot x+1.8462\cdot 10^{-1}, & \text{if } x\in[-1.5,-0.2],\\ 4.1667\cdot 10^{-1}\cdot x+8.3333\cdot 10^{-2}, & \text{if } x\in(-0.2,1],\\ 1.2500\cdot 10^{-1}\cdot x+3.7500\cdot 10^{-1}, & \text{if } x\in(1,5],\\ 4.0000\cdot 10^{-2}\cdot x+8.0000\cdot 10^{-1}, & \text{if } x\in(5,10]. \end{cases}$$

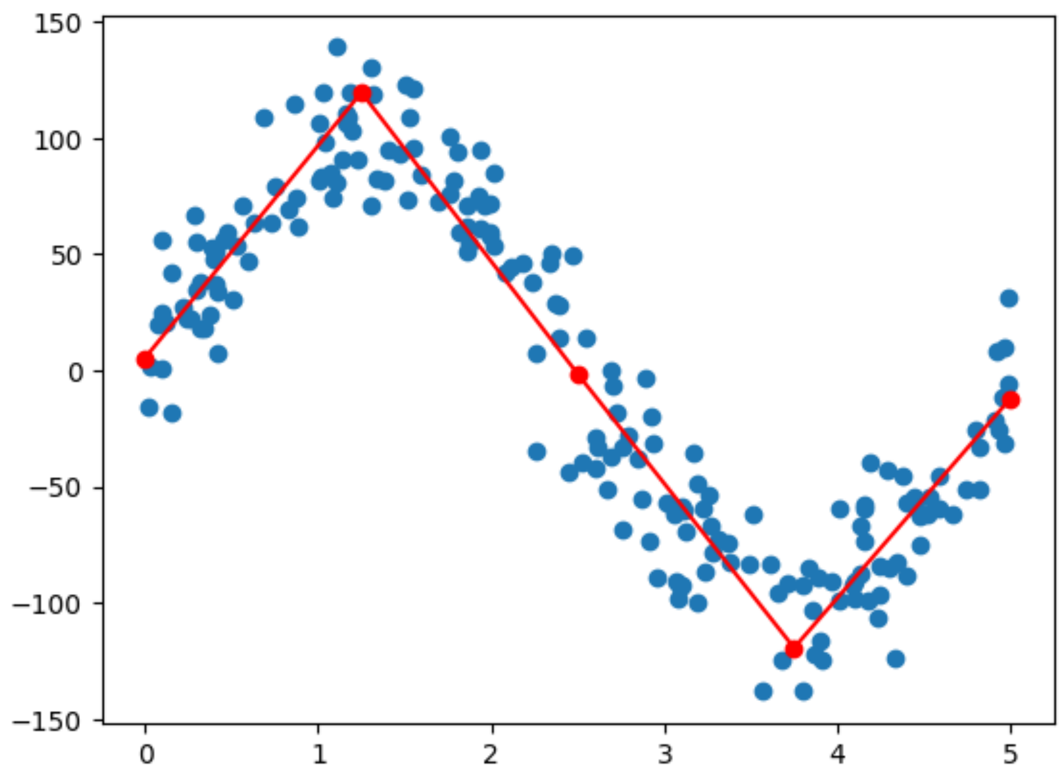
x-value

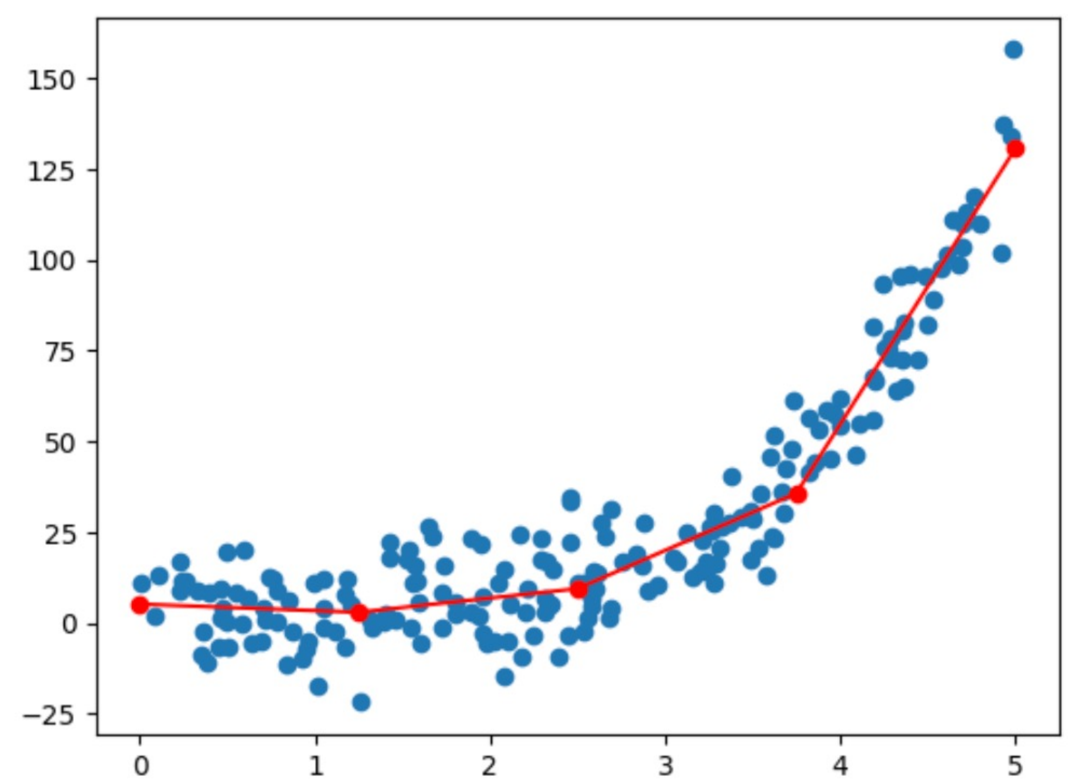
Graph



分段线性插值——延伸讨论

- 基于分段线性回归拟合任意一元函数
- 参考代码：https://github.com/google/pwlfit
- 思考：
  - ❑ 如何确定分段数量以及最优的分段位置?





分段三次 Hermite 插值

- 设已知节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 和一阶导数值 $m_0, m_1, \cdots, m_n$，记

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \qquad h = \max_k \{h_k\}$$

求分段函数 $I_h(x)$ 满足

1) $I_h(x) \in C^1[a, b]$，即函数在区间 $[a, b]$ 上一阶导数连续；
2) $I_h(x_k) = y_k$, $I_h'(x_k) = m_k$, $k = 0, 1, \cdots, n$;
3) $I_h(x)$ 在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式.

在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上进行两点三次 Hermite 插值

$$M_n \overset{\text{def}}{=} \max_{a\le x\le b}\left|f^{(n)}(x)\right|$$

$$h = \max_k\{h_k\}$$

分段三次 Hermite 插值

- $I_h(x) = H_3(x),\ \ x \in [x_k, x_{k+1}],\ k = 0, 1, \cdots, n-1$
- 误差估计：$|R_h(x)| = |f(x) - I_h(x)| \le \dfrac{M_4}{384} h^4$

✅ 一致收敛性
✅ 收敛速度 > 分段线性插值

回顾：两点三次 Hermite 插值（见第三节）

在子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上，求满足以下插值条件的 Hermite 插值多项式：

$$p(x_k) = f(x_k) = y_k, \qquad p'(x_k) = f'(x_k) = m_k$$

$$p(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) = y_{k+1}, \qquad p'(x_{k+1}) = f'(x_{k+1}) = m_{k+1}$$

基于 Lagrange 基函数表示 $H_3(x)$，并代入上述条件，可求得

$$H_3(x) = y_k\left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 + y_{k+1}\left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2$$

$$+ m_k(x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 + m_{k+1}(x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2$$

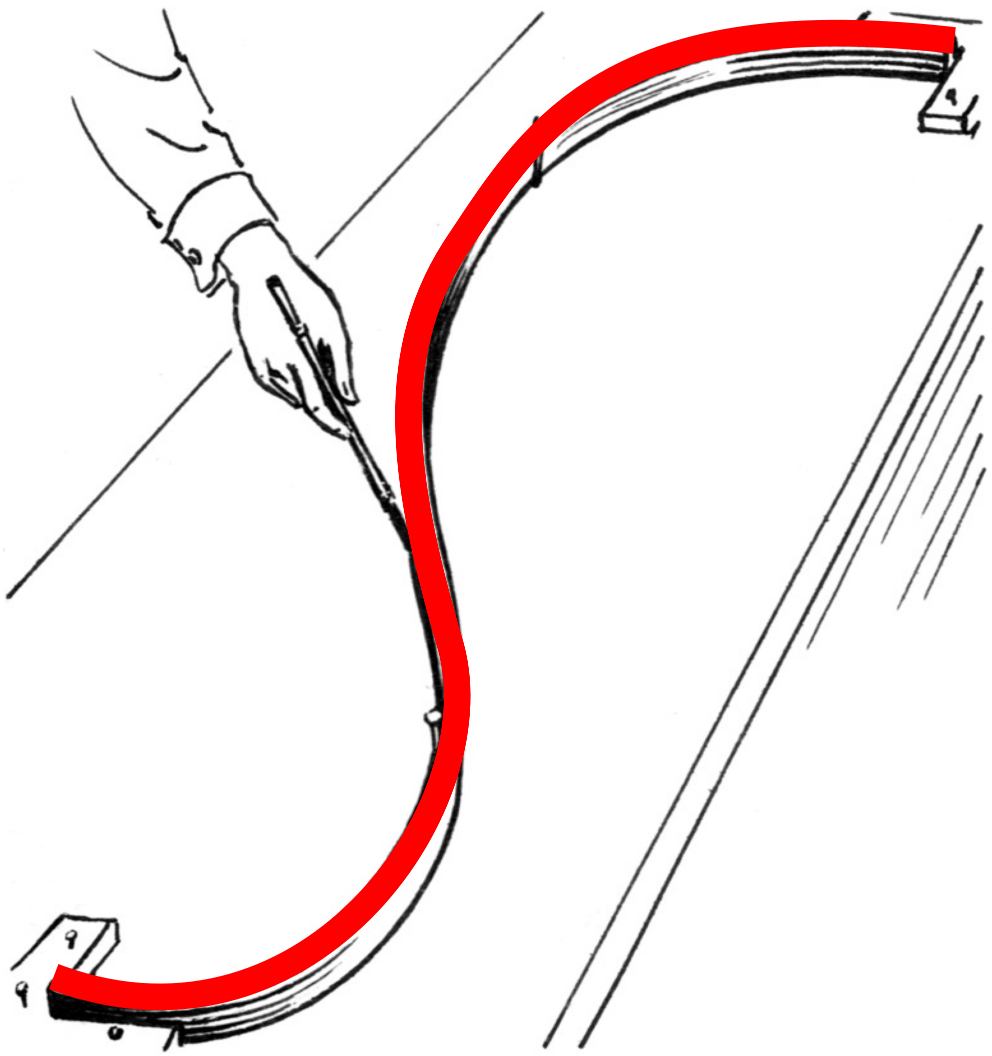
- 插值余项 $\left|\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2\right| \le \dfrac{M_4}{384} h_k^4$

目录

CONTENTS

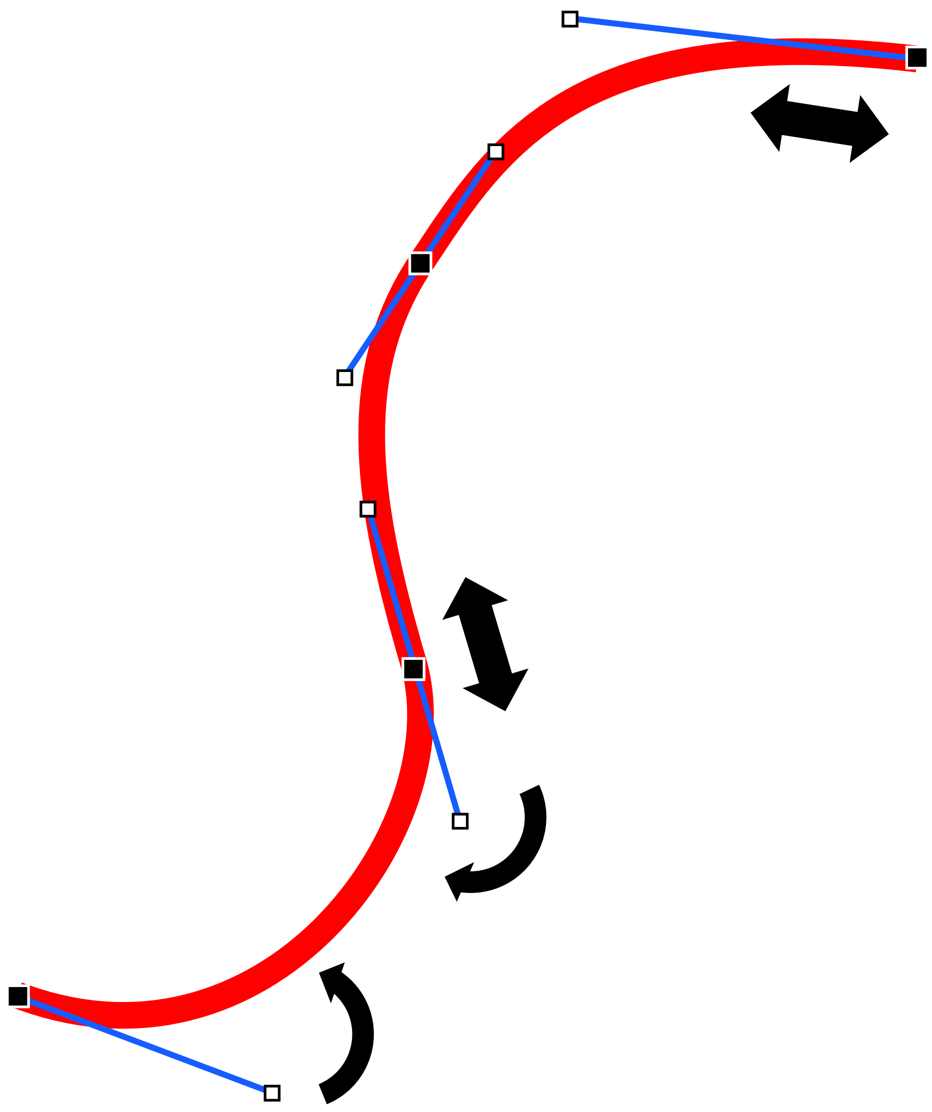
样条（Spline）

- 早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（所谓样条）用压铁固定在样点上，其他地方让它自由弯曲，然后沿木条画下曲线，称为样条曲线。
- 样条曲线在计算机制图中的应用
  - 将这种“自然弯曲”的特性用数学方法加以模拟
  - 通过控制点来定义曲线形状，使曲线在这些点之间平滑过渡



样条（Spline）

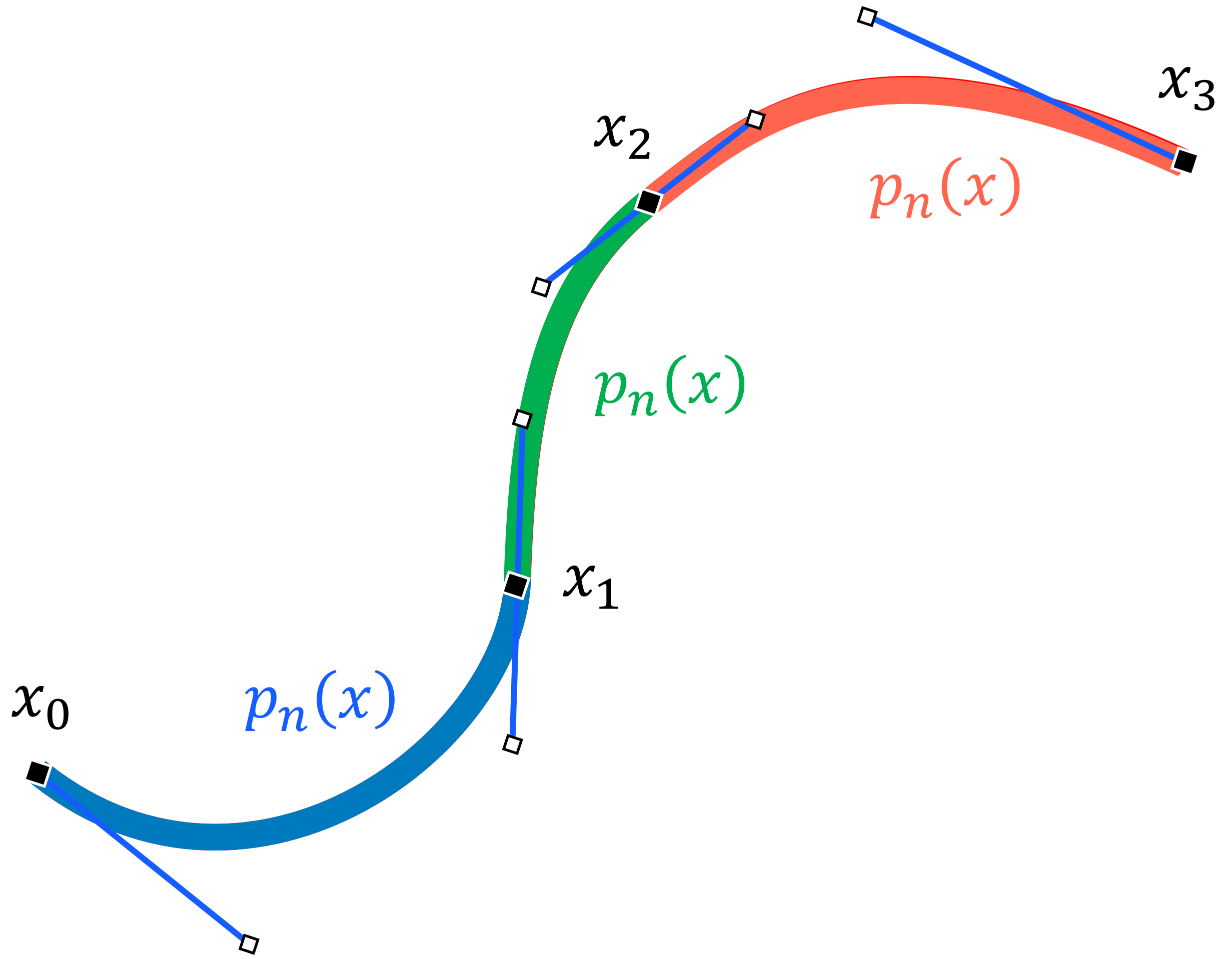
- 早期工程师制图时，把富有弹性的细长木条（所谓样条）用压铁固定在样点上，其他地方让它自由弯曲，然后沿木条画下曲线，称为样条曲线。
- 样条曲线在计算机制图中的应用
  - 将这种"自然弯曲"的特性用数学方法加以模拟
  - 通过控制点来定义曲线形状，使曲线在这些点之间平滑过渡
  - 实际上由分段三次曲线并接而成



2. 三次样条插值

样条函数

- 设已知节点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$，若函数 $S \in C^2[a,b]$ 在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上都是 n 次多项式，则称函数 S 为 n 次样条函数



三次样条插值函数

- 设已知节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，若插值函数 $S(x)$ 满足

1) $S(x) \in C^2[a,b]$，即函数在区间 $[a,b]$ 上二阶导数连续；
2) $S(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n$;
3) $S(x)$ 在每个区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式.

则称之为三次样条插值函数。

- 比较
  - 分段线性（连续） ⇨ 分段三次 Hermite（一阶导连续） ⇨ 三次样条（二阶导连续）

如何求解三次样条插值函数?

- 在子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上，已知

  插值函数：$S(x) = a_k + b_k x + c_k x^2 + d_k x^3 \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$

  插值条件：$S(x_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

  二阶导数连续：$\begin{cases} S(x_k^-) = S(x_k^+) \\ S'(x_k^-) = S'(x_k^+) \\ S''(x_k^-) = S''(x_k^+) \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$

- 共 n 个子区间 ⇨ $4n$ 个未知数
- 以上共有 $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ 个已知条件

  ⇨ 还缺少两个条件

如何求解三次样条插值函数?

- 边界条件：实际问题通常对样条函数在两个端点 a, b 处的状态有要求
- 常见边界条件

1) 已知两端的一阶导数值：$\begin{cases} S'(x_0^+) = f_0' \\ S'(x_n^-) = f_n' \end{cases}$

2) 已知两端的二阶导数值：$\begin{cases} S''(x_0^+) = f_0'' \\ S''(x_n^-) = f_n'' \end{cases}$

3) 若 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期的周期函数，则要求 $S(x)$ 也是周期函数, 此时应满足 $\begin{cases} S(x_0^+) = S(x_n^-) \\ S'(x_0^+) = S'(x_n^-) \\ S''(x_0^+) = S''(x_n^-) \end{cases}$.

周期样条函数

如何求解三次样条插值函数?

- 另一种表示方法

$$S(x)=\begin{cases} s_0(x) \overset{\text{def}}{=} a_0+b_0x+c_0x^2+d_0x^3 & 若\ x\in[x_0,x_1] \\ s_1(x) \overset{\text{def}}{=} a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3 & 若\ x\in(x_1,x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) \overset{\text{def}}{=} a_{n-1}+b_{n-1}x+c_{n-1}x^2+d_{n-1}x^3 & 若\ x\in(x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

- 插值条件： $S(x_k)=y_k \quad (k=0,1,\cdots,n)$
- 二阶导数连续： $\begin{cases} s_{k-1}(x_k)=s_k(x_k^+) \\ s'_{k-1}(x_k^-)=s'_k(x_k^+) \\ s''_{k-1}(x_k^-)=s''_k(x_k^+) \end{cases} \quad (k=1,\cdots,n-1)$
- 边界条件

如何求解三次样条插值函数?

- 另一种表示方法

$$S(x)=\begin{cases} s_0(x) \overset{\text{def}}{=} a_0+b_0x+c_0x^2+d_0x^3 & \text{若 } x\in[x_0,x_1] \\ s_1(x) \overset{\text{def}}{=} a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3 & \text{若 } x\in(x_1,x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) \overset{\text{def}}{=} a_{n-1}+b_{n-1}x+c_{n-1}x^2+d_{n-1}x^3 & \text{若 } x\in(x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

❑ 边界条件

1) 已知两端的一阶导数值: $\begin{cases} s_0'(x_0^+) & = f_0' \\ s_{n-1}'(x_n^-) & = f_n' \end{cases}$

2) 已知两端的二阶导数值: $\begin{cases} s_0''(x_0^+) & = f_0'' \\ s_{n-1}''(x_n^-) & = f_n'' \end{cases}$

3) 若 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期的周期函数, 则要求 $S(x)$ 也是周期函数, 此时应满足 $\begin{cases} s_0(x_0) & = s_{n-1}(x_n) \\ s_0'(x_0^+) & = s_{n-1}'(x_n^-) \\ s_0''(x_0^+) & = s_{n-1}''(x_n^-) \end{cases}$.

如何求解三次样条插值函数?

$m_k = S'(x_k)$

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

1. 根据已有的分段三次 Hermite 插值公式，将 $s_k(x)$ 表示成基于 $y_k, y_{k+1}, m_k, m_{k+1}$ 的形式

$$s_k(x) = y_k\alpha_k(x) + y_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + m_k\beta_k(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}(x)$$

2. 计算上述公式的二阶导数，并根据已知条件，列出 $n+1$ 个方程组，求解未知数 $m_0, m_1, \cdots, m_n$（一阶导数值）

$$s_k''(x) = \blacksquare m_k + \blacksquare m_{k+1} + \blacksquare y_k + \blacksquare y_{k+1} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

3. 将求得的 m_k 代回第 1 个公式，得到 $s_k(x)$ 的完整表达式

如何求解三次样条插值函数?

$h_k = x_{k+1} - x_k$

$m_k = S'(x_k)$

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

- 代入第 10 页推导的公式，并利用 $h_k = x_{k+1} - x_k$ 化简，可得

$$s_k(x) = \frac{(x - x_{k+1})^2[h_k + 2(x - x_k)]}{h_k^3} y_k + \frac{(x - x_k)^2[h_k + 2(x_{k+1} - x)]}{h_k^3} y_{k+1}$$

$$+ \frac{(x - x_{k+1})^2(x - x_k)}{h_k^2} \underbrace{m_k}_{\text{未知数}} + \frac{(x - x_k)^2(x - x_{k+1})}{h_k^2} \underbrace{m_{k+1}}_{\text{未知数}}$$

- 求二阶导数，得

$$s_k''(x) = \frac{6x - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k + \frac{6x - 4x_k - 2x_{k+1}}{h_k^2} m_{k+1}$$

$$+ \frac{6(x_k + x_{k+1} - 2x)}{h_k^3}(y_{k+1} - y_k)$$

如何求解三次样条插值函数?

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$
$$m_k = S'(x_k)$$

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

$$s_k''(x) = \frac{6x - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k + \frac{6x - 4x_k - 2x_{k+1}}{h_k^2} m_{k+1} + \frac{6(x_k + x_{k+1} - 2x)}{h_k^3}(y_{k+1} - y_k)$$

- 代入二阶导数连续的条件 $s_{k-1}''(x_k^-) = s_k''(x_k^+)$，得

$$\frac{2}{h_{k-1}} m_{k-1} + \frac{4}{h_{k-1}} m_k - \frac{6}{h_{k-1}^2}(y_k - y_{k-1}) = -\frac{4}{h_k} m_k - \frac{2}{h_k} m_{k+1} - \frac{6}{h_k^2}(y_{k+1} - y_k)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_{k-1}} m_{k-1} + 2\left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k}\right) m_k + \frac{1}{h_k} m_{k+1} = 3\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k^2} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}^2}\right) \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

如何求解三次样条插值函数?

$h_k = x_{k+1} - x_k$

$m_k = S'(x_k)$

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

$$\frac{1}{h_{k-1}} m_{k-1} + 2\left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k}\right) m_k + \frac{1}{h_k} m_{k+1} = 3\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k^2} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}^2}\right)$$

- 两边除以 $\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k}$，并用 $f[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}$ 代入化简，得

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

其中 $\lambda_k = \frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}$，$\mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}$，

$$g_k = 3(\lambda_k f[x_{k-1}, x_k] + \mu_k f[x_k, x_{k+1}])$$

- 以上列出了关于未知量 $m_0, m_1, \cdots, m_n$ 的 $n-1$ 个方程，再加上**边界条件**，即可唯一确定所有未知量

如何求解三次样条插值函数？——三转角方程

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 基于**边界条件 1**，即 $\begin{cases} s_0'(x_0^+) = f_0' \triangleq m_0 \\ s_{n-1}'(x_n^-) = f_n' \triangleq m_n \end{cases}$

⇨ 上述方程组可化简为只含 $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$ 的 $n-1$ 个方程

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 m_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} m_n \end{bmatrix}$$

如何求解三次样条插值函数？——三转角方程

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

❑ 基于**边界条件 2**，即 $\begin{cases} s_0''(x_0^+) = f_0'' \\ s_{n-1}''(x_n^-) = f_n'' \end{cases}$

⇨ 代入 $s_k''(x)$ 的表达式

$$s_k''(x) = \frac{6x - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k + \frac{6x - 4x_k - 2x_{k+1}}{h_k^2} m_{k+1} + \frac{6(x_k + x_{k+1} - 2x)}{h_k^3}(y_{k+1} - y_k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_0''(x_0^+) = -\dfrac{4}{h_0} m_0 - \dfrac{2}{h_0} m_1 + \dfrac{6}{h_0} f[x_0, x_1] & = f_0'' \\ s_{n-1}''(x_n^-) = \dfrac{2}{h_{n-1}} m_{n-1} + \dfrac{4}{h_{n-1}} m_n - \dfrac{6}{h_{n-1}} f[x_{n-1}, x_n] & = f_n'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \dfrac{h_0}{2} f_0'' & \triangleq g_0 \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \dfrac{h_{n-1}}{2} f_n'' & \triangleq g_n \end{cases}$$

如何求解三次样条插值函数？——三转角方程

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 基于**边界条件 2**，即 $\begin{cases} s_0''(x_0^+) & = f_0'' \\ s_{n-1}''(x_n^-) = f_n'' \end{cases}$

⇨ 上述方程组可写成含 $m_0, m_1, \cdots, m_{n-1}, m_n$ 的 $n+1$ 个方程

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

如何求解三次样条插值函数？——三转角方程

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 基于**边界条件 3**，即 $\begin{cases} s_0(x_0) = s_{n-1}(x_n) \\ s_0'(x_0^+) = s_{n-1}'(x_n^-) \\ s_0''(x_0^+) = s_{n-1}''(x_n^-) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 = m_n \\ s_0''(x_0^+) = s_{n-1}''(x_n^-) \end{cases}$

⇨ 代入 $s_k''(x)$ 的表达式，得

$$\frac{1}{h_0}m_1 + \frac{1}{h_{n-1}}m_{n-1} + 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}\right)m_n = \frac{3}{h_0}f[x_0, x_1] + \frac{3}{h_{n-1}}f[x_{n-1}, x_n]$$

⇨ 两边除以 $\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}$，化简得 $\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n$

其中 $\mu_n \triangleq \frac{h_{n-1}}{h_0+h_{n-1}}$，$\lambda_n \triangleq \frac{h_0}{h_0+h_{n-1}}$，$g_n \triangleq 3(\mu_n f[x_0, x_1] + \lambda_n f[x_{n-1}, x_n])$

如何求解三次样条插值函数？——三转角方程

思路 1：直接利用分段三次 Hermite 插值

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 基于**边界条件 3**，即 $\begin{cases} s_0(x_0) = s_{n-1}(x_n) \\ s_0'(x_0^+) = s_{n-1}'(x_n^-) \\ s_0''(x_0^+) = s_{n-1}''(x_n^-) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 = m_n \\ s_0''(x_0^+) = s_{n-1}''(x_n^-) \end{cases}$

⇨ 上述方程组可写成含 $m_1, \cdots, m_{n-1}, m_n$ 的 n 个方程

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k) = M_k \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$ 反推 $S(x)$

未知数

1. 由于 $s_k(x)$ 是三次多项式，可知 $s_k''(x)$ 是线性函数，直接写出它的表达式

$$s_k''(x) = M_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + M_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \qquad \text{(两点式)}$$

2. 对上式求积分，得到 $s_k(x)$ 的表达式，其中包含未知量 M_k 和积分常数 c_1, c_2

3. 根据已知条件，列出 $n+1$ 个方程组，求解未知数 $M_0, M_1, \cdots, M_n$（二阶导数值）

4. 将计算结果代入回第 2 个公式，得到 $s_k(x)$ 的完整表达式

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

- 思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k) = M_k$ 反推 $S(x)$
  - 已知 $s_k(x)$ 是三次多项式 ⇨ $s_k''(x)$ 是线性函数，可表示为

$$s_k''(x) = M_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + M_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \quad \text{(两点式)}$$

$$= M_k \frac{x_{k+1} - x}{h_k} + M_{k+1} \frac{x - x_k}{h_k}$$

$h_k = x_{k+1} - x_k$

  - 对上式积分两次，可得

$$s_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} + c_1 x + c_2$$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k) = M_k$ 反推 $S(x)$

$$s_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} + c_1 x + c_2$$

- 代入插值条件 $s_k(x_k) = y_k$ 和 $s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$，可确定积分常数 c_1 和 c_2
- 整理后，得到

$$k = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$s_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} + \left(y_k - \frac{M_k h_k^2}{6}\right) \frac{x_{k+1} - x}{h_k} + \left(y_{k+1} - \frac{M_{k+1} h_k^2}{6}\right) \frac{x - x_k}{h_k}$$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k)=M_k$ 反推 $S(x)$

$$s_k(x)=\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}M_{k+1}+\left(y_k-\frac{M_kh_k^2}{6}\right)\frac{x_{k+1}-x}{h_k}+\left(y_{k+1}-\frac{M_{k+1}h_k^2}{6}\right)\frac{x-x_k}{h_k}$$

$k=0,1,\cdots,n-1$

- 对上式求导，得到一阶导数表达式

$$s_k'(x)=-\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^2}{2h_k}M_{k+1}+\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{M_{k+1}-M_k}{6}h_k$$

- 代入条件 $s_{k-1}'(x_k^-)=s_k'(x_k^+)$ 和 $f[x_k,x_{k+1}]=\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}$，得

$$\frac{h_{k-1}}{6}M_{k-1}+\frac{h_{k-1}}{3}M_k+f[x_{k-1},x_k]=-\frac{h_k}{3}M_k-\frac{h_k}{6}M_{k+1}+f[x_k,x_{k+1}]$$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

- 思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k)=M_k$ 反推 $S(x)$

$$\frac{h_{k-1}}{6}M_{k-1}+\frac{h_{k-1}}{3}M_k+f[x_{k-1},x_k]=-\frac{h_k}{3}M_k-\frac{h_k}{6}M_{k+1}+f[x_k,x_{k+1}]$$

- 两边乘以 $\frac{1}{h_{k-1}+h_k}$，并化简得

$$\mu_k M_{k-1}+2M_k+\lambda_k M_{k+1}=d_k \qquad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

其中

$$\lambda_k=\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}, \qquad \mu_k=\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}$$

$$d_k=6\frac{f[x_k,x_{k+1}]-f[x_{k-1},x_k]}{h_{k-1}+h_k}=6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]$$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k) = M_k$ 反推 $S(x)$

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 基于**边界条件 1**，即 $\begin{cases} s_0'(x_0^+) = f_0' \\ s_{n-1}'(x_n^-) = f_n' \end{cases}$

⇨ 代入 $s_k'(x)$ 的表达式

$$s_k'(x) = -\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k} M_k + \frac{(x-x_k)^2}{2h_k} M_{k+1} + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{M_{k+1}-M_k}{6} h_k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_0'(x_0^+) = -\dfrac{h_0}{3} M_0 - \dfrac{h_0}{6} M_1 + f[x_0, x_1] = f_0' \\ s_{n-1}'(x_n^-) = \dfrac{h_{n-1}}{3} M_n + \dfrac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n] = f_n' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_0}\left(f[x_0, x_1] - f_0'\right) \triangleq d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{-6}{h_{n-1}}\left(f[x_{n-1}, x_n] - f_n'\right) \triangleq d_n \end{cases}$$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k)=M_k$ 反推 $S(x)$

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k \qquad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

- 基于**边界条件 1**，即 $\begin{cases} s_0'(x_0^+) = f_0' \\ s_{n-1}'(x_n^-) = f_n' \end{cases}$

⇨ 上述方程组可化简为含 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的 $n+1$ 个方程

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k) = M_k$ 反推 $S(x)$

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 基于**边界条件 2**，即 $\begin{cases} s_0''(x_0^+) = f_0'' \triangleq M_0 \\ s_{n-1}''(x_n^-) = f_n'' \triangleq M_n \end{cases}$

⇨ 上述方程组可化简为只含 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 的 $n-1$ 个方程

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 M_0 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n \end{bmatrix}$$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

- 思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k) = M_k$ 反推 $S(x)$

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 基于**边界条件 3**，即 $\begin{cases} s_0(x_0) = s_{n-1}(x_n) \\ s_0'(x_0^+) = s_{n-1}'(x_n^-) \\ s_0''(x_0^+) = s_{n-1}''(x_n^-) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_0'(x_0^+) = s_{n-1}'(x_n^-) \\ M_0 = M_n \end{cases}$

⇨ 代入 $s_k'(x)$ 的表达式，得

$$-\frac{h_0}{3}M_0 - \frac{h_0}{6}M_1 + f[x_0, x_1] = \frac{h_{n-1}}{3}M_n + \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n]$$

⇨ 两边乘以 $\frac{1}{h_0+h_{n-1}}$，化简得 $\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$

其中 $\mu_n \triangleq \frac{h_{n-1}}{h_0+h_{n-1}}$，$\lambda_n \triangleq \frac{h_0}{h_0+h_{n-1}}$，$d_n \triangleq 6\frac{f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]}{h_0+h_{n-1}}$

如何求解三次样条插值函数？——三弯矩方程

思路 2：基于 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x_k) = M_k$ 反推 $S(x)$

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

❑ 基于**边界条件 3**，即 $\begin{cases} s_0(x_0) = s_{n-1}(x_n) \\ s_0'(x_0^+) = s_{n-1}'(x_n^-) \\ s_0''(x_0^+) = s_{n-1}''(x_n^-) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_0'(x_0^+) = s_{n-1}'(x_n^-) \\ M_0 = M_n \end{cases}$

⇨ 上述方程组可化简为含 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的 n 个方程

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

如何求解三转角方程/三弯矩方程?

- 不论是三转角方程还是三弯矩方程，系数矩阵对角元素均为 2，非对角元素满足 $\mu_k + \lambda_k = 1 < 2$
- 所以系数矩阵具有**强对角优势**

  ⇨ **非奇异**方阵

  ⇨ 方程组有**唯一解**
- 线性方程组的数值求解方法将在后续章节介绍（**追赶法**）

边界条件一

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 m_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} m_n \end{bmatrix}$$

边界条件二

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

边界条件三

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

误差估计

定理

设 $f(x) \in C^4[a,b]$，$S(x)$ 为满足第一或第二类边界条件的三次样条函数，则有

$$\begin{aligned}
\max_{a\le x\le b}|f(x)-S(x)| &\le \frac{5}{384}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^4\\
\max_{a\le x\le b}|f'(x)-S'(x)| &\le \frac{1}{24}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^3\\
\max_{a\le x\le b}|f''(x)-S''(x)| &\le \frac{3}{8}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^2
\end{aligned}$$

其中 $h=\max\limits_{0\le k\le n-1}h_k=\max\limits_{0\le k\le n-1}|x_{k+1}-x_k|$.

三次样条插值函数

例

给定 $f(x)$ 定义在 $[27.7, 30]$ 上，插值节点及函数值如下，试求三次样条插值多项式 $S(x)$，满足边界条件 $S'(27.7) = 3.0$，$S'(30) = -4.0$。

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

- 给定的是第一类边界条件

  ⇨ 列出相应的三转角方程

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 \\ \lambda_2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 m_0 \\ g_2 - \mu_2 m_3 \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_k = \frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}$，$\mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}$，$g_k = 3(\lambda_k f[x_{k-1}, x_k] + \mu_k f[x_k, x_{k+1}])$

- $h_0 = 0.3,\ h_1 = h_2 = h_3 = 1$
- $\lambda_1 = \frac{1}{0.3+1} = \frac{10}{13},\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$
- $\mu_1 = \frac{0.3}{0.3+1} = \frac{3}{13},\ \mu_2 = \frac{1}{2}$
- $g_1 = 3 * \left(\frac{10}{13} * \frac{4.3-4.1}{28-27.7} + \frac{3}{13} * \frac{4.1-4.3}{29-28}\right) = 1.4,\ g_2 = -1.95$

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{13} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 - \frac{10}{13} \times 3.0 \\ -1.95 - \frac{1}{2} \times (-4.0) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{475}{1010} = -0.47029703 \\ m_2 = \frac{72}{505} = 0.14257426 \end{cases}$$

三次样条插值函数

例

给定 $f(x)$ 定义在 $[27.7, 30]$ 上，插值节点及函数值如下，试求三次样条插值多项式 $S(x)$，满足边界条件 $S'(27.7)=3.0$，$S'(30)=-4.0$。

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

$$s_k(x)=\frac{(x-x_{k+1})^2[h_k+2(x-x_k)]}{h_k^3}y_k+\frac{(x-x_k)^2[h_k+2(x_{k+1}-x)]}{h_k^3}y_{k+1}$$
$$+\frac{(x-x_{k+1})^2(x-x_k)}{h_k^2}m_k+\frac{(x-x_k)^2(x-x_{k+1})}{h_k^2}m_{k+1}$$

- $$s_0(x)=\frac{(x-28)^2[0.3+2(x-27.7)]}{0.3^3}*4.1+\frac{(x-27.7)^2[0.3+2(28-x)]}{0.3^3}*4.3$$
$$+\frac{(x-28)^2(x-27.7)}{0.3^2}*3.0+\frac{(x-27.7)^2(x-28)}{0.3^2}*\left(-\frac{475}{1010}\right)$$
$$\approx 337.0(x-28)^2(x-27.7)-323.7(x-27.7)^2(x-28)$$
$$+45.6(x-28)^2+47.8(x-27.7)^2$$

$$\begin{cases} h_0=0.3, \qquad h_1=h_2=h_3=1 \\ m_0=3.0 \\ m_1=-\dfrac{475}{1010}=-0.47029703 \\ m_2=\dfrac{72}{505}=0.14257426 \\ m_3=-4.0 \end{cases}$$

三次样条插值

- 基于 Python 的第三方库实现
  - 采用三次样条插值方法
  - 4 种边界条件：非扭结（默认）、周期、固定边界、自然边界

第三类边界条件　第一类边界条件　第二类边界条件 + 二阶导数值=0

```
from scipy.interpolate import CubicSpline

x = [-2, -1, 3, 4, 5]
y = [1 / (1 + 25 * num**2) for num in x]
set_interp = CubicSpline(x, y, bc_type="natural", extrapolate=True)
result = set_interp([-2, -1.5, -1, 0, 3, 3.5, 4, 4.5, 5])
assert all(result[::2] == y)
```

三次样条插值

- 基于 Python 的第三方库实现[1]
  - 采用三次样条插值方法
  - 能保持被插值数据的单调性（普通的三次插值未必满足）

```
from scipy.interpolate import PchipInterpolator

x = [-2, -1, 3, 4, 5]
y = [1 / (1 + 25 * num**2) for num in x]
set_interp = PchipInterpolator(x, y, extrapolate=True)
result = set_interp([-2, -1.5, -1, 0, 3, 3.5, 4, 4.5, 5])
assert all(result[::2] == y)
```

[1] F. N. Fritsch and J. Butland, A method for constructing local monotone piecewise cubic interpolants, SIAM J. Sci. Comput., 5(2), 300-304 (1984). DOI:10.1137/0905021.

样条插值

- 在线计算工具[2]
  - https://tools.timodenk.com/cubic-spline-interpolation
  - 支持 4 种样条插值：自然样条、非扭结样条、周期样条、二次样条

Cubic spline interpolation

Performs and visualizes a cubic spline interpolation for a given set of points.

Syntax for entering a set of points: `Spaces` separate x- and y-values of a point and a `Newline` distinguishes the next point. Hit the button *Show example* to see a demo.

```
-1.5 1.0
-.2 0
1 0.5
```

Natural | Interpolate | Show example

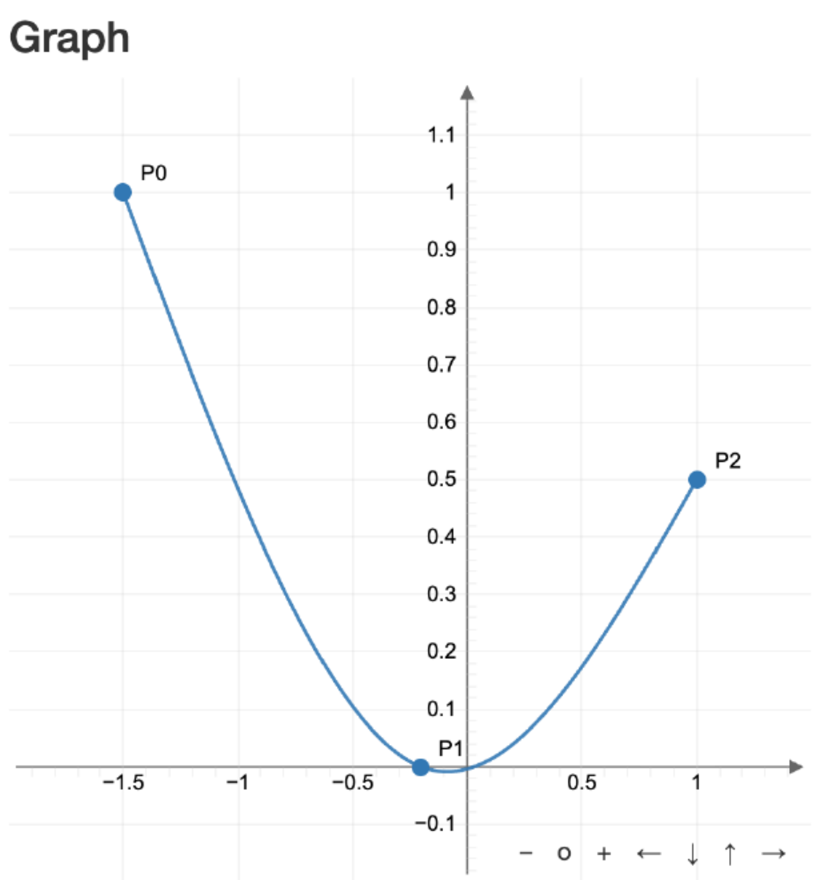
Points

$P_0(-1.5|1); P_1(-0.2|0); P_2(1|0.5)$

Equation

$$f(x)=\begin{cases}1.8245\cdot10^{-1}\cdot x^3+8.2101\cdot10^{-1}\cdot x^2+1.5394\cdot10^{-1}\cdot x-5.9172\cdot10^{-4}, & \text{if } x\in[-1.5,-0.2],\\ -1.9765\cdot10^{-1}\cdot x^3+5.9295\cdot10^{-1}\cdot x^2+1.0833\cdot10^{-1}\cdot x-3.6325\cdot10^{-3}, & \text{if } x\in(-0.2,1].\end{cases}$$

By default, the algorithm calculates a "natural" spline. Details about the mathematical background of this tool and boundary conditions can be found here.



[2] Cubic Spline Interpolation. (n.d.). Timo Denk's Blog. Retrieved October 23, 2025, from https://blog.timodenk.com/cubic-spline-interpolation/.

课后习题

课后习题（11.05 课间将作业交给助教）

1. （教材第 44 页）习题 22、24

22. 求 $f(x)=x^2$ 在$[a,b]$上的分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差.

24. 给定数据如表 2.10 所示，试求三次样条插值 $S(x)$，并满足条件

(1) $S'(0.25)=1.0000$，$S'(0.53)=0.6868$；

(2) $S''(0.25)=S''(0.53)=0$.

表 2.10

x_j	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
y_j	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

2. 加分项（实战作业）

- 请编写具有如下功能的 Python 函数：

```python
def resample(series, tgt_length):
    """对 series 输入序列进行重采样，使得重采样后的长度等于 tgt_length
       注：请使用分段线性插值方法，假设 x0, x1, ... 依次是 0, 1, ...

       Args:
           series (List[float]): 一维实数序列（长度大于 0)
           tgt_length (int): 期望输出的序列长度（一定大于 0)
       Returns:
           ret (List[float]): 重采样后的一维序列
    """
    ...

assert resample([1.0], tgt_length=8000) == [1.0] * 8000
assert resample([1.0, 3.0, 4.0], tgt_length=2) == [1.0, 4.0]
```

2. 加分项（实战作业）

- 实现 `resample` 函数的基本思路：
  1. 若 `tgt_length` 等于 `len(series)`，无须任何处理
  2. 若 `tgt_length` 等于 `1`，返回第一个值
  3. 否则，在 series 的两个端点 `0` 和 `len(series)-1` 间进行**等间距**插值，增加 `tgt_length-2` 个节点，使得插值后的总长度等于 `tgt_length`

- **示例**

  series = [P0, P1, P2, P3]

  tgt_length = 5

⇨ 返回结果为 [P0, Q1, Q2, Q3, P3]