数值分析：多项式插值

张王优

2025-10-15

SCHOOL OF
ARTIFICIAL INTELLIGENCE
上海交通大学人工智能学院

「目录」

CONTENTS

逐次线性插值

- 回顾： Lagrange 插值法
  - 基函数 $l_i(x) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$
  - 每增加一个新的插值节点，所有插值基函数 $l_i(x)$ 都需重新计算
- 解决办法——更换基函数
  - 设计一个可以**逐次**生成插值多项式的算法，即

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

其中 $p_{n+1}(x)$ 和 $p_n(x)$ 分别是 $n+1$ 次和 n 次插值多项式

新的插值基函数

- 直线方程

  ❑ 两点式：$y = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ ⇨ Lagrange 插值

  ❑ 点斜式：$y = y_0 + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$ ⇨ ?

- 设插值节点为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，插值基函数 $\omega_n(x)$ 为

$$\omega_0 = 1$$
$$\omega_1 = x - x_0$$
$$\omega_2 = (x-x_0)(x-x_1)$$
$$\vdots$$
$$\omega_n = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

⇨ $\omega_{n+1} = \omega_n \cdot (x - x_n)$

➡

$$p_1(x) = y_0\omega_0 + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\omega_1$$
$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}\omega_2$$
$$\vdots$$
$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n\omega_n$$

差商（Difference Quotient)

- 已知函数 $f(x)$ 和节点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$，则
  - $f(x)$ 关于点 x_0, x_k 的一阶差商：

$$f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

  - $f(x)$ 关于点 x_0, x_1, x_k 的二阶差商：

$$f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$$

  - $f(x)$ 关于点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的 k 阶差商：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

差商（Difference Quotient)

- 用差商重新表示插值多项式

$$\omega_0 = 1$$
$$\omega_1 = x - x_0$$
$$\omega_2 = (x - x_0)(x - x_1)$$
$$\vdots$$
$$\omega_n = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$\Downarrow$$

$$p_1(x) = y_0\omega_0 + f[x_0, x_1]\omega_1$$

$$p_2(x) = y_0\omega_0 + f[x_0, x_1]\omega_1 + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2$$

$$p_n(x) = ?$$

差商（Difference Quotient）

- 用差商重新表示插值多项式

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0)$$

$$\Leftarrow \quad f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f(x_0) + \left(f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x](x - x_1)\right) \cdot (x - x_0)$$

$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1)$$

$$\Uparrow \quad f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \left(f[x_0, x_1, x_2] + f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_2)\right) \cdot (x - x_0)(x - x_1)$$

$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Uparrow \quad f[x_0, x_1, x_2, x] = \frac{f[x_0, x_1, x] - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2}$$

差商（Difference Quotient）

- 用差商重新表示插值多项式

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$
$$+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

- Newton 差商插值多项式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x)$$

- 插值余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(x)$$

差商（Difference Quotient）

- 差商的性质

1. 差商可以表示为函数值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_k)$ 的线性组合

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)}$$

Lagrange 插值多项式

$$L_k(x) = \sum_{j=0}^{k} f(x_j) l_j(x) = \sum_{j=0}^{k} f(x_j) \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_k)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)}$$

差商（Difference Quotient）

证明（归纳法）

1. 对于一阶差商（$k=1$），有 $f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$ 成立

2. 假设上述结论对 $k-1$ 阶差商成立，则

$$
\begin{aligned}
f[x_0,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}] &= \sum_{j=0,\,1,\,\cdots,\,k-2,\,k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{k-2})(x_j-x_k)} \\
&\quad -\sum_{j=0,\,1,\,\cdots,\,k-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{k-2})(x_j-x_{k-1})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{j=0,\,1,\,\cdots,\,k-2}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{k-2})}\cdot\left(\frac{1}{x_j-x_k}-\frac{1}{x_j-x_{k-1}}\right) \\
&\quad -\frac{f(x_{k-1})}{(x_{k-1}-x_0)\cdots(x_{k-1}-x_{k-2})}+\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-2})} \\
&=\sum_{j=0,\,1,\,\cdots,\,k-2}\frac{f(x_j)\cdot(x_k-x_{k-1})}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}+\sum_{j=k-1,\,k}\frac{f(x_j)\cdot(x_k-x_{k-1})}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}
\end{aligned}
$$

即上述结论对 k 阶差商也成立.

差商（Difference Quotient）

- 差商的性质

2. 差商与节点的排序无关，即差商具有**对称性**

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f\left[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\right]$$

其中 $i_0, i_1, \cdots, i_k$ 是对 $0, 1, \cdots, k$ 的一个任意排列

- 差商的等价定义

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

差商（Difference Quotient）

- 差商的性质

  3. 差商与阶导数之间的关系

     - 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 k 阶导数，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

思路 1：与 Lagrange 插值余项的定理的证明方法类似 ⇦ 罗尔定理

思路 2：根据插值多项式的存在唯一性，有 $N_n(x) \equiv L_n(x)$ 且余项相同。根据 Lagrange 插值余项的定理，有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \Rightarrow f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

差商（Difference Quotient）

- 差商的性质

4. 若 $h(x)=c\cdot f(x)$，则 $h[x_0,x_1,\cdots,x_k]=c\cdot f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$;

   若 $h(x)=f(x)+g(x)$，则

$$h[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]+g[x_0,x_1,\cdots,x_k].$$

5. 若 $f(x)$ 为 n 次多项式，则它的 n 阶差商为与 x 无关的常数，$n+1$ 阶, $n+2$ 阶, $\cdots$ 等高阶差商的结果均为 0。

   - 假设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，可以证明，它的 n 阶差商等于 ____________。

差商（Difference Quotient）

差商的等价定义

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

- 如何计算差商?
  - 差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	$\cdots$	k 阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
x_k	$f(x_k)$	$f[x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]$	$\cdots$	$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$

差商（Difference Quotient）

差商的等价定义

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

- 如何计算差商?
  - ❑ 差商表

例

已知 $y=f(x)$ 的函数表，计算其各阶差商.

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	$\mathbf{-2}=\frac{3-5}{-1-(-2)}$		
1	17	$\mathbf{7}=\frac{17-3}{1-(-1)}$	$\mathbf{3}=\frac{7-(-2)}{1-(-2)}$	
2	21	$\mathbf{4}=\frac{21-17}{2-1}$	$\mathbf{-1}=\frac{4-7}{2-(-1)}$	$\mathbf{-1}=\frac{-1-3}{2-(-2)}$

差商（Difference Quotient)

- 如何计算差商?

尾递归

```python
def difference_quotient(x, y):
    """Compute the `k`-order difference quotient.
    Args:
        x: A list of numbers x[0], x[1], ..., x[k]
        y: A list of numbers, same length as `x`, denoting the function values `f(x)`.
    """
    assert len(x) == len(y) >= 2
    k = len(x)
    if k == 2:
        return (y[1] - y[0]) / (x[1] - x[0])
    return (
        difference_quotient(x[1:], y[1:]) - difference_quotient(x[:-1], y[:-1])
    ) / (x[-1] - x[0])
```

差商（Difference Quotient）

- 如何计算差商?

迭代

```python
def difference_quotient(x, y):
    """Compute the `k`-order difference quotient.
    Args:
        x: A list of numbers x[0], x[1], ..., x[k]
        y: A list of numbers, same length as `x`, denoting the function values `f(x)`.
    """
    assert len(x) == len(y) >= 2
    k = len(x)
    table = [[yi] + [0] * order for order, yi in enumerate(y)]
    for j in range(1, k + 1): # j-order difference quotient
        for i in range(j, k):
            table[i][j] = (table[i][j - 1] - table[i - 1][j - 1]) / (x[i] - x[i - j])
    return table[-1][-1]
```

1. 差商与 Newton 插值

Newton 插值

- Newton 插值多项式 $N_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次插值多项式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1]\omega_1(x) + \cdots + f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_n(x)$$

- 当增加一个节点时，Newton 插值公式只需在原来的基础上增加一项，之前的计算结果可以直接复用！

❑ 注：增加的插值节点，需排在已有插值节点的后面

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_k]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

Newton 插值余项

- 相比于 Lagrange 插值余项，Newton 插值余项更加实用
  - $R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]\omega_{n+1}(x)$
  - 仅涉及插值点与插值节点的差商, 在导数不存在时仍然可计算
  - **注：** 在计算差商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]$ 时，由于 $f(x)$ 未知，只能使用插值得到的近似值

    ⇨ 得到的差商可能存在一定的偏差

Newton 插值

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1]\omega_1(x) + \cdots + f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_n(x)$$
$$\omega_n = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

例

已知 $y = \ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

分别用 Newton 线性和抛物线插值计算 $\ln 0.54\ (\approx -0.616186)$ 的近似值.

取节点 0.4, 0.5, 0.6 作差商表

- $N_1(x) = -0.9163 + 2.232\cdot(x-0.4)$

  $\Rightarrow N_1(0.54) \approx -0.6038$
- $N_2(x) = N_1(x) - 2.0450\cdot(x-0.4)(x-0.5)$

  $\Rightarrow N_2(0.54) \approx -0.6153$

x_i	$\ln x_i$	一阶差商	二阶差商
0.4	-0.9163		
0.5	-0.6931	2.232	
0.6	-0.5108	1.823	-2.045

Newton 插值

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x)$$
$$\omega_n = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

例

已知 $y = \ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

分别用 Newton 线性和抛物线插值计算 $\ln 0.54$ (≈ -0.616186) 的近似值.

取节点 0.5, 0.6, 0.4 作差商表

- $N_1(x) = -0.6931 + 1.8230 \cdot (x - 0.5)$

  $\Rightarrow N_1(0.54) \approx -0.6202$
- $N_2(x) = N_1(x) - 2.0450 \cdot (x - 0.5)(x - 0.6)$

  $\Rightarrow N_2(0.54) \approx -0.6153$

x_i	$\ln x_i$	一阶差商	二阶差商
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

Newton 插值

- 注意事项
  - 选取插值节点时，应遵循就近原则
    - 优先选取离插值位置 x 更近的节点
  - 插值节点无需按大小顺序排列
  - 最终计算插值多项式时，只需要使用差商表中对角线部分的值
  - 增加插值节点时，新增的插值点必须排在已有插值节点的后面

Newton 插值 vs. Lagrange 插值

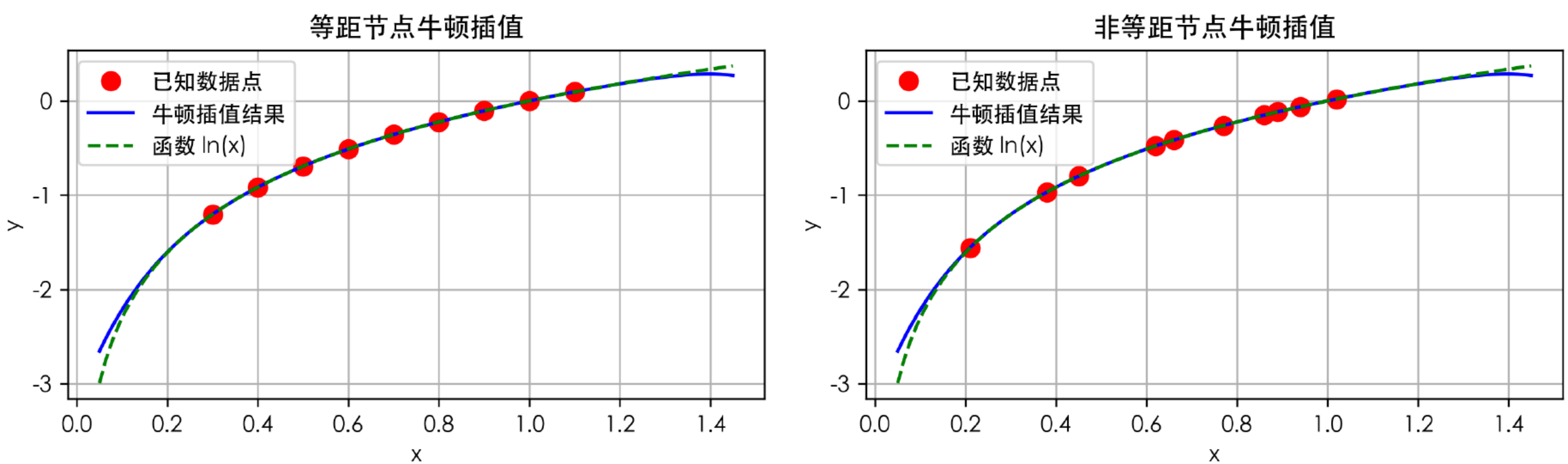
对比项	Newton 插值	Lagrange 插值
插值多项式	$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1]\omega_1(x)+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n]\omega_n(x)$	$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{k=0,\,k\neq i}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}$
插值余项	$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]\omega_{n+1}(x)$	$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$
节点扩展性	仅需针对新增节点计算一项新增的基函数及其系数	需重新计算整个插值多项式
计算复杂度	$\mathcal{O}(n^2)$ ⇦ 差商表 通过分治计算可降至 $\mathcal{O}(n\log^2 n)$ ⬅	$\mathcal{O}(n^2)$ ⇦ 基函数
数值稳定性	适用于解决次数较低的插值多项式问题。随着插值点增多的情况，容易受到高次项影响，出现**龙格现象**，即在插值区间的边缘处，插值多项式的值会产生较大误差	
误差估计	直接通过差商余项计算，$f(x)$ 取值需估计	计算余项时要求 $f(x)$ 存在 $n+1$ 阶导数

等距节点插值公式

- 前面的方法支持任意插值节点，而实际应用经常采用等距节点

$$x_k = x_0 + kh, \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

其中常数 $h > 0$ 称为步长



- 如何对前面的插值公式进行简化，得到等距节点的插值公式?

等距节点插值公式

- 如何对前面的插值公式进行简化，得到等距节点的插值公式?

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x)$$

- $\omega_{k+1} = \prod_{j=0}^{k}(x - x_j) = \prod_{j=0}^{k}(t - j)\, h^{k+1}$ ⇦ 设 $x = x_0 + th,\quad t \in \mathbb{R}$
- $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} \triangleq \frac{\Delta f_0}{h}$

  $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{(f(x_2)-f(x_1))-(f(x_1)-f(x_0))}{1\cdot 2h^2} = \frac{\Delta f_1-\Delta f_0}{1\cdot 2h^2} \triangleq \frac{\Delta^2 f_0}{1\cdot 2h^2}$

  $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{\Delta^2 f_1-\Delta^2 f_0}{1\cdot 2\cdot 3h^3} \triangleq \frac{\Delta^3 f_0}{1\cdot 2\cdot 3h^3}$
- ⇨ $f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = ?$

等距节点插值公式 ⇨ 差分

- 向前差分（Forward Difference），简称差分
  - 一阶：$\Delta f_k \triangleq f_{k+1} - f_k \quad = f(x_{k+1}) - f(x_k)$
  - 二阶：$\Delta^2 f_k \triangleq \Delta f_{k+1} - \Delta f_k \quad = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$
  - m 阶：$\Delta^m f_k \triangleq \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k$
- 向后差分（Backward Difference）
  - 一阶：$\nabla f_k \triangleq f_k - f_{k-1} \quad = f(x_k) - f(x_{k-1})$
  - 二阶：$\nabla^2 f_k \triangleq \nabla f_k - \nabla f_{k-1} \quad = f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}$
  - m 阶：$\nabla^m f_k \triangleq \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$

1. 差商与 Newton 插值

等距节点插值公式 ⇨ 差分

- 如何计算高阶差分?
  - ❑ 向前差分表

$f(x_i)$	Δ	Δ^2	Δ^3	$\cdots$	Δ^m
$f(x_0)$	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\cdots$	$\Delta^m f_0$
$f(x_1)$	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\vdots$	$\iddots$	
$f(x_2)$	Δf_2	$\vdots$	$\Delta^3 f_{m-3}$		
$f(x_3)$	$\vdots$	$\Delta^2 f_{m-2}$			
$\vdots$	Δf_{m-1}				
$f(x_m)$					

等距节点插值公式 ⇨ 差分

- 如何计算高阶差分?

  - 向后差分表

$f(x_i)$	∇	∇^2	∇^3	$\cdots$	∇^m
$f(x_0)$					
$f(x_1)$	∇f_1				
$f(x_2)$	∇f_2	$\nabla^2 f_2$			
$f(x_3)$	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$f(x_m)$	∇f_m	$\nabla^2 f_m$	$\nabla^3 f_m$	$\cdots$	$\nabla^m f_m$

等距节点插值公式 ⇨ 差分

- 为表示方便，引入不变算子 I 和移位算子 E，即

$$\mathrm{I}f_k = f_k,\quad \mathrm{E}f_k = f_{k+1},\quad \mathrm{E}^i f_i = f_{k+i}$$

- ⇨ $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = \mathrm{E}f_k - \mathrm{I}f_k = (\mathrm{E} - \mathrm{I})f_k$

- ⇨ 可以发现，向前差分算子 $\Delta = \mathrm{E} - \mathrm{I}$

  同理可得，向后差分算子 $\nabla = \mathrm{I} - \mathrm{E}^{-1}$

等距节点插值公式 ⇨ 差分

- 向前差分算子 $\Delta = \mathrm{E} - \mathrm{I}$

二项式定理

$$(x+y)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i} y^i = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i y^{m-i}$$

组合数公式

$$C_m^i = \binom{m}{i} \triangleq \frac{m!}{i!\,(m-i)!}$$

⇨ $\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k = (\mathrm{E} - \mathrm{I})^m f_k$

$= \left[\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \mathrm{E}^{m-i}\right] f_k$

$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f_{k+m-i}$

⇨ $f_{k+m} = \mathrm{E}^m f_k = (\mathrm{I} + \Delta)^m f_k = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \Delta^i f_k$

等距节点插值公式 ⇨ 差分

- 向后差分算子 $\nabla = \mathrm{I} - \mathrm{E}^{-1}$

二项式定理

$$(x+y)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^{m-i}\, y^i = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i\, y^{m-i}$$

组合数公式

$$C_m^i = \binom{m}{i} \triangleq \frac{m!}{i!\,(m-i)!}$$

$$\Rightarrow \nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1} = (\mathrm{I} - \mathrm{E}^{-1})^m f_k$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \mathrm{E}^{-i}\right] f_k$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f_{k-i}$$

$$\Rightarrow f_{k-m} = \mathrm{E}^{-m} f_k = (\mathrm{I} - \nabla)^m f_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \nabla^i f_k$$

等距节点插值公式 ⇨ 差分

- 差分的性质

1. 各阶差分均可用函数值表示
   - m 阶向前差分：$\Delta^m f_k = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} f_{k+m-i}$
   - m 阶向后差分：$\nabla^m f_k = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} f_{k-i}$
2. 可用各阶差分表示函数值
   - $$f_{k+m} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \Delta^i f_k$$
   - $$f_{k-m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \nabla^i f_k$$

1. 差商与 Newton 插值（选学）

等距节点插值公式 ⇨ 差分

$$x_k = x_0 + kh, \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

- 差分的性质

3. 差商与差分的关系

- $f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{h}\Delta f_k$
- $f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_k$
- $f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \qquad (m = 1, 2, \cdots, n)$
- 同理，对于向后差分，有
- $f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\nabla^m f_k \qquad (m = 1, 2, \cdots, n)$

等距节点插值公式 ⇨ 差分

$$x_k = x_0 + kh, \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

- 差分的性质

3. 差商与差分的关系

证明

根据差商的性质 1： $f[x_0, x_1, \cdots, x_m] = \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_m)}$

$$⇨ f[x_0, x_1, \cdots, x_m] = \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{jh \times (j-1)h \times \cdots \times 1h \times (-1)h \times \cdots (j-m)h} = \frac{1}{h^m} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^{m-j}}{j!\,(m-j)!} f_j$$

$$= \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \frac{m!}{j!\,(m-j)!} f_j = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f_j$$

根据差分的性质 1： $\Delta^m f_0 = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f_j$

$$⇨ f[x_0, x_1, \cdots, x_m] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_j$$

等距节点插值公式

$$x_k = x_0 + kh, \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{1}{k!}\frac{1}{h^k}\Delta^k f_0$$

- 设 $x = x_0 + th$，其中 $t \in \mathbb{R}^+$
- 将 Newton 差商插值多项式中各阶差商用相应阶的差分代替：

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x)$$

  - $\omega_k = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j) = \prod_{j=0}^{k-1}(t - j)\, h^k$
  - 向前差分 ⇨ Newton 前插公式

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th)$$

$$= f(x_0) + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

❖ 余项 $R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi \in (x_0, x_n)$

等距节点插值公式

例

给定 $f(x) = \cos(x)$ 在等距节点 $0.0, 0.1, \cdots, 0.5$ 处的函数值, 试用 4 次 Newton 向前插值公式计算 $f(0.048)$ 的近似值（≈ 0.9988482211670），并估计误差。

取节点 $0.0, 0.1, \cdots, 0.4$ 作差分表

- 插值点 $x = 0.048 = x_0 + th$，故 $h = \frac{0.048-0.0}{0.1} = 0.48$
- $N_4(x) = f(x_0) + t\,\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 f_0$
- $N_4(0.048) = 1.00000 + 0.48\times(-0.00500)$

$$+\frac{0.48\times(-0.52)}{2}\times(-0.00993)$$

$$+\frac{0.48\times(-0.52)\times(-1.52)}{6}\times(-0.00013)$$

$$+\frac{0.48\times(-0.52)\times(-1.52)\times(-2.52)}{24}\times(-0.00012)$$

$$\approx 0.99884$$

x_i	$f(x_i)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0.0	1.00000	−0.00500	−0.00993	−0.00013	−0.00012
0.1	0.99500	−0.01493	−0.00980	−0.00025	
0.2	0.98007	−0.02473	−0.00955		
0.3	0.95534	−0.03428			
0.4	0.92106				

- 误差限 $|R_4(0.048)| = \left|\frac{t(t-1)\cdots(t-4)}{5!}h^5 f^{(5)}(\xi)\right| \le \frac{h^5}{5!}|t(t-1)\cdots(t-4)| \max_{0\le x\le 0.4}|-\sin(x)| \approx 2.78274\times10^{-4}$

等距节点插值公式

$$x_k = x_n - kh, \qquad k = 0, 1, \cdots, n$$

$$f[x_{k+n}, x_{k+n-1}, \cdots, x_n] = \frac{1}{k!}\frac{1}{h^k}\nabla^k f_n$$

- 设 $x = x_n + th$，其中 $t \in \mathbb{R}^-$
- 将 Newton 差商插值多项式中各阶差商用相应阶的差分代替：

$$N_n(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}]\omega_1(x) + \cdots + f[x_n, \cdots, x_1, x_0]\omega_n(x)$$

  - $\omega_k = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_{n-j}) = \prod_{j=0}^{k-1}(t + j)\, h^k$
  - 向后差分 ⇨ Newton 后插公式

$$\begin{aligned} N_n(x) &= N_n(x_n + th) \\ &= f(x_n) + t\nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \end{aligned}$$

❖ 余项 $R_n(x) = \dfrac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi \in (x_0, x_n)$

多项式插值的在线计算工具

- https://tools.timodenk.com/polynomial-interpolation

Polynomial interpolation

Performs and visualizes a polynomial interpolation for a given set of points.

Syntax for entering a set of points: `Spaces` separate x- and y-values of a point and a `Newline` distinguishes the next point. Hit the button *Show example* to see a demo.

```
-1.5 -1.2
-.2 0
1 0.5
```

Interpolate | Show example

Points

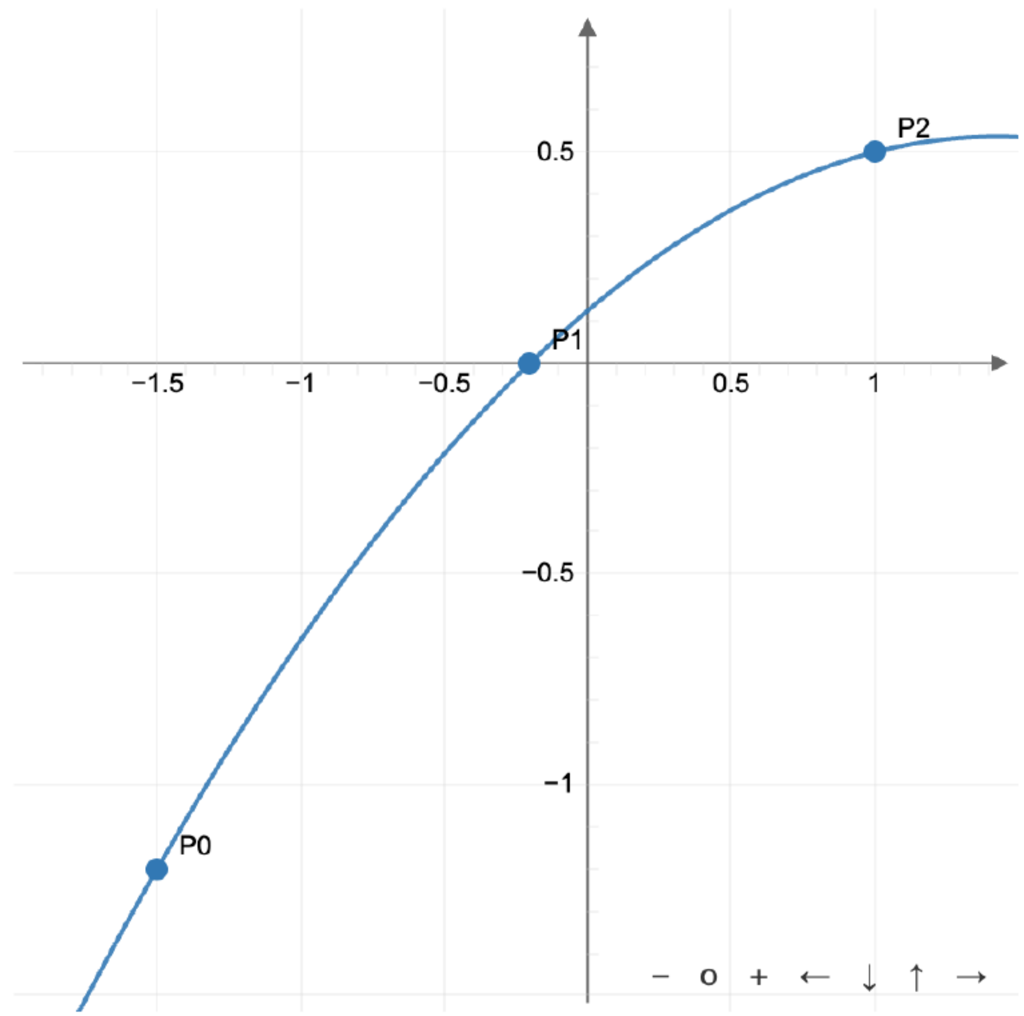
$P_0(-1.5|-1.2); P_1(-0.2|0); P_2(1|0.5)$

Equation

$f(x) = -2.0256 \cdot 10^{-1} \cdot x^2 + 5.7872 \cdot 10^{-1} \cdot x + 1.2385 \cdot 10^{-1}$

x-value

Graph



目录

CONTENTS

新的插值多项式

- 不少实际问题（如）不仅要求在节点上的函数值相等，而且还要求若干阶导数值也相等

  - $f(x) \approx p(x) \quad \Leftrightarrow \quad$

$$
\begin{aligned}
p(x_i) &= f(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \\
p'(x_i) &= f'(x_i) \\
p''(x_i) &= f''(x_i) \\
p^{(3)}(x_i) &= f^{(3)}(x_i) \\
&\vdots \\
p^{(m)}(x_i) &= f^{(m)}(x_i)
\end{aligned}
$$

- 满足上述要求的插值多项式称为 **Hermite 插值多项式**

Hermite 插值多项式

- 以下仅讨论对一阶导数值有要求，且函数值与导数值个数相等的情况

设在节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上，$y_i = f(x_i)$，$m_i = f'(x_i)$，求满足以下条件的插值多项式 $H(x)$：

证明唯一性

$$H(x_i) = y_i, \qquad H'(x_i) = m_i, \qquad (\, i = 0, 1, 2, \cdots, n \,)$$

- 共 $2n+2$ 个条件，可唯一确定一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式

$$H(x) = H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

- 直接求解每个系数非常复杂 ⇨ 确定合适的基函数

Hermite 插值多项式的基函数

- 仿照 Lagrange 插值基函数的构造方式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\alpha_i(x) + m_i\beta_i(x)$$

□ 其中 $\alpha_i(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \qquad \alpha_i'(x_k) = 0$

$(i, k = 0, 1, \cdots, n)$

$\beta_i'(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \qquad \beta_i(x_k) = 0$

□ 上述 $2n+2$ 个多项式 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x), \beta_0(x), \beta_1(x), \cdots, \beta_n(x)$ 称为节点 $x_0, \cdots, x_n$ 上的 $2n+1$ 次 Hermite 插值基函数

Hermite 插值多项式的基函数

- 如何求解基函数 $\alpha_i(x)$?

$$\alpha_i(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \quad \alpha_i'(x_k) = 0 \quad (i, k = 0, 1, \cdots, n)$$

- 尝试用 n 次 Lagrange 基函数 $l_i(x)$ 表示 $\alpha_i(x)$

$$\alpha_i(x) = (a_i x + b_i)\, l_i^2(x)$$

❑ ⇨ $$\alpha_i(x_k) = \begin{cases} a_i x_i + b_i = 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

$$\alpha_i'(x_k) = a_i \cdot l_i^2(x_k) + (a_i x_k + b_i) \cdot 2 l_i(x_k) \cdot l_i'(x_k) = 0$$

❑ 化简可得 $$\begin{cases} a_i x_i + b_i = 1 \\ a_i + 2(a_i x_i + b_i) l_i'(x_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i x_i + b_i = 1 \\ a_i + 2 l_i'(x_i) = 0 \end{cases}$$

Hermite 插值多项式的基函数

- 如何求解基函数 $\alpha_i(x)$?

$$\alpha_i(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \qquad \alpha_i'(x_k) = 0 \qquad (i, k = 0, 1, \cdots, n)$$

- 尝试用 n 次 Lagrange 基函数 $l_i(x)$ 表示 $\alpha_i(x)$

$$\alpha_i(x) = (a_i x + b_i)\, l_i^2(x)$$

❑ ⇨ $a_i = -2l_i'(x_i), \quad b_i = 1 + 2x_i l_i'(x_i)$

❑ 已知 $l_i(x) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$，可求得 $l_i'(x_i) = \sum_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}$

❑ ⇨ $\alpha_i(x) = \left[1 - 2(x - x_i) \sum_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}\right] l_i^2(x)$

Hermite 插值多项式的基函数

- 如何求解基函数 $\beta_i(x)$?

$$\beta_i'(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \qquad \beta_i(x_k) = 0 \quad (i, k = 0, 1, \cdots, n)$$

- 尝试用 n 次 Lagrange 基函数 $l_i(x)$ 表示 $\beta_i(x)$

$$\beta_i(x) = (c_i x + d_i)\, l_i^2(x)$$

❑ ⇨ $\beta_i'(x_k) = c_i \cdot l_i^2(x) + (c_i x_k + d_i) \cdot 2l_i(x_k) \cdot l_i'(x_k) = l_i(x_k)$

$\beta_i(x_k) = (c_i x_k + d_i)\, l_i^2(x_k) = 0$

❑ 化简可得 $\begin{cases} c_i + 2(c_i x_i + d_i) l_i'(x_i) = 1 \\ c_i x_i + d_i = 0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} c_i = 1 \\ d_i = -x_i \end{cases}$

❑ ⇨ $\beta_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)$

Hermite 插值多项式

- $2n+1$ 次 Hermite 插值多项式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \alpha_i(x) + m_i \beta_i(x)$$

$$\alpha_i(x) = \left[1 - 2(x - x_i) \sum_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}\right] l_i^2(x)$$

$$\beta_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)$$

- 类似 Lagrange 插值余项的证明，可得到 Hermite 插值余项

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\, \omega_{2n+1}^2(x)$$

Hermite 插值多项式

- 两点三次 Hermite 插值（$n=1$）

例

求满足以下插值条件的 Hermite 插值多项式：

$$p(x_0)=f(x_0)=y_0,\qquad p'(x_0)=f'(x_0)=m_0$$
$$p(x_1)=f(x_1)=y_1,\qquad p'(x_1)=f'(x_1)=m_1$$

类似前面的计算过程，可得到

$$H_3(x)=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$
$$+m_0(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+m_1(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

- 插值余项 $R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

Hermite 插值多项式

- 三点三次 Hermite 插值

例 基于 Lagrange 插值基函数的解法

求满足以下插值条件的插值多项式：

$$p(x_0)=f(x_0)=y_0,\qquad p(x_1)=f(x_1)=y_1,\qquad p(x_2)=f(x_2)=y_2$$

$$p'(x_1)=f'(x_1)=m_1$$

由给定的 4 个条件，可唯一确定一个次数不超过 3 的插值多项式，设

$$p(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_2\alpha_2(x)+m_1\beta_1(x),\qquad \alpha_i(x)=(a_ix+b_i)\,l_i(x),\qquad \beta_1(x)=(cx+d)\,l_1(x)$$

则 $\alpha_i(x_k)=\begin{cases}a_ix_i+b_i=1, & k=i,\\ 0, & k\neq i,\end{cases}\qquad \alpha_i'(x_1)=a_i\cdot l_i(x_1)+(a_ix_1+b_i)\cdot l_i'(x_1)=0$

$\beta_1(x_k)=(cx_k+d)l_1(x_k)=0,\qquad \beta_1'(x_1)=c+(cx_1+d)l_1'(x_1)=1$

⇨ $\beta_1(x)=(x-x_1)l_1(x),\quad \alpha_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_i-x_1}l_i(x) & i\neq 1,\\ 1-(x-x_1)l_1'(x_1)l_1(x) & i=1.\end{cases}$

Hermite 插值多项式

- 三点三次 Hermite 插值

例

基于 Lagrange 插值基函数的解法

求满足以下插值条件的插值多项式：

$$p(x_0)=f(x_0)=y_0,\qquad p(x_1)=f(x_1)=y_1,\qquad p(x_2)=f(x_2)=y_2$$

$$p'(x_1)=f'(x_1)=m_1$$

$$\Rightarrow\ p(x)=y_0\frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$$

$$+\,y_1\left(1-(x-x_1)\left(\frac{1}{x_1-x_0}+\frac{1}{x_1-x_2}\right)\right)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+\,y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)^2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)^2}+m_1\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

Hermite 插值多项式

- 三点三次 Hermite 插值

例

基于 Newton 插值基函数的解法

求满足以下插值条件的插值多项式：

$$p(x_0) = f(x_0) = y_0, \qquad p(x_1) = f(x_1) = y_1, \qquad p(x_2) = f(x_2) = y_2$$

$$p'(x_1) = f'(x_1) = m_1$$

由给定的 4 个条件，可唯一确定一个次数不超过 3 的插值多项式，设

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

则 $p'(x_1) = f[x_0, x_1] + (x_1 - x_0)f[x_0, x_1, x_2] + A(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = m_1$

⇨ $A = \frac{m_1 - f[x_0,x_1] - (x_1 - x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$

- 插值余项 $R(x) = f^{(4)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)/4!$

Hermite 插值多项式

- 三点三次 Hermite 插值

例

基于 Newton 插值基函数的解法

求满足以下插值条件的插值多项式：

$$p(x_0)=f(x_0)=y_0,\qquad p(x_1)=f(x_1)=y_1,\qquad p(x_2)=f(x_2)=y_2$$

$$p'(x_1)=f'(x_1)=m_1$$

$$\Rightarrow\ p(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+\frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\frac{m_1-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}-(x_1-x_0)\frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=y_0\frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}+y_1\left(1-(x-x_1)\left(\frac{1}{x_1-x_0}+\frac{1}{x_1-x_2}\right)\right)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)^2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)^2}+m_1\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

请自行证明两种求解方法的结果是等价的

例

基于 Newton 插值基函数的解法

最后求插值余项 $R(x)=f(x)-p(x)$ 的表达式。

由给定条件知，$R(x_0)=0$，$R(x_1)=0$，$R(x_2)=0$，且 $R'(x_1)=0$，于是可设

$$R(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

为确定 $K(x)$，现将 x 看作区间 $\left[\min\limits_{i=0,1,2} x_i, \max\limits_{i=0,1,2} x_i\right]$ 上的固定点，并构造函数

$$\varphi(t)=f(t)-p(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$$

显然 $\varphi(x_i)=0\ (i=0,1,2)$，且 $\varphi'(x_1)=0$，$\varphi(x)=0$, 故 $\varphi(t)$ 在区间 $\left[\min\limits_{i=0,1,2} x_i, \max\limits_{i=0,1,2} x_i\right]$ 上有 5 个零点（重根算 2 个）。

反复应用 Rolle 定理得，$\varphi'(t)$ 在区间 $\left[\min\limits_{i=0,1,2} x_i, \max\limits_{i=0,1,2} x_i\right]$ 上至少有 4 个零点，

$\varphi''(t)$ 在区间 $\left[\min\limits_{i=0,1,2} x_i, \max\limits_{i=0,1,2} x_i\right]$ 上至少有 3 个零点，……

$\varphi^{(4)}(t)$ 在区间 $\left[\min\limits_{i=0,1,2} x_i, \max\limits_{i=0,1,2} x_i\right]$ 上至少有 1 个零点 ξ

⇨ $\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!\,K(x)=0$

⇨ $K(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$

⇨ 插值余项 $R(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}{4!}$

课后习题

课后习题（10.29 课间将作业交给助教）

1. （教材第 43 页）习题 7

7. 设 $f(x)\in C^2[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$，求证 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

注： $f(x)\in C^2[a,b]$ 表示函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 2 阶可导，且其 2 阶导函数连续。

2. （教材第 44 页）习题 16、19

16. $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 及 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

19. 求一个次数不高于四次的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(0)=0, P(1)=P'(1)=1, P(2)=1$.