本人鄂西南吴彦祖，尝学 LaTeX，然纸上得来终觉浅，适逢信息光学此公式繁杂之课业，练手之作，还望诸位海涵。

信息光学复习

尘小雨

May 1, 2021

目录

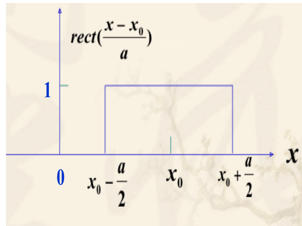

图 1: $rect(\frac{x-x_0}{a})$ 图像

1　数学基础

信息光学又称傅里叶光学，顾名思义，当然会用到不少傅里叶变换或者相关的数学方法，工欲善其事必先利其器，所以我们首先来回顾一下课程中的数学基础。

1.1　光学中常用的初等函数

1.1.1　矩形函数

定义： $rect(\frac{x-x_0}{a})=1$，定义域为 $\left|\frac{x-x_0}{a}\right|\le\frac{a}{2}$, 即以 x_0 为中心, 长为 a, 高为 1 的一个矩形

二维矩形函数： $rect(\frac{x}{a},\frac{y}{b})$ 以原点为中心的 $a\times b$ 矩形范围内，函数值为 1，其他地方为 0。

光学上的应用： 表示不透明屏上的矩形孔、**狭缝的透过率（这一点对后面很重要！）**

作用： 它与其他函数相乘，可限制函数自变量的取值范围，起到截取函数的作用

1.1.2　$sinc$ 函数

定义： $sinc(\frac{x}{a})=\frac{\sin{\pi(x-x_0)/a}}{\pi(x-x_0)/a}$

图像自己想象 Orz

特点： 函数在 $x = x_0$ 处有最大值 1, 零点为：$x - x_0 = \pm na(n = 1, 2)\cdots$

二维 $sinc$ **函数** $sinc(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) = sinc(\frac{x}{a})sinc(\frac{x}{b})$

作用： 描述矩阵或单缝的夫琅禾费衍射图样, 还有一个重要特性是**与矩形函数互为傅里叶变换**

tips： 在数学计算的过程中可以去掉 π (π 起到的是归一化作用)

1.1.3 阶跃函数

定义： $step(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

作用： 描述直边的透过率；起到开关的作用

1.1.4 符号函数

定义： $sgn(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

作用： 符号函数与某函数相乘，可以使得该函数在某点极性发生翻转 (改变正负号)

1.1.5 三角函数

定义： $tri(\frac{x}{a}) = \begin{cases} 0, & |\frac{x}{a}| \geq 1 \\ 1 - |\frac{x}{a}|, & |\frac{x}{a}| < 1 \end{cases}$ 即以 0 为中点，底为 $2a$，高为 1 的等腰三角形

作用： 表示光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数

1.1.6 圆域函数

定义： $circ(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2+y^2} \le a \\ 0, & otherwise \end{cases}$

极坐标形式 $circ(r) = \begin{cases} 1, & r \le a \\ 0, & otherwise \end{cases}$

作用： 表述圆孔的透过率

1.1.7 高斯函数

定义： $Gaus(\frac{x}{a}) = e^{-\pi x^2}$

特点： 当 $x = 0$ 时，函数在原点处有最大值 1，高斯图形中曲线下面积为 a

二维高斯函数 $Gaus(r) = e^{-\pi(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}$，极坐标下 $Gaus(r) = e^{-\pi r^2}$

1.1.8 *delta* 函数

δ 函数在以往的课程中已经有广泛的学习，此处不表，但有几条特殊性质如下：

$$\delta(x,y) = \lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^2\pi(x^2+y^2)}$$

$$\delta(x,y) = \lim_{n\to\infty} n^2 rect(nx) rect(ny)$$

$$\delta(x,y) = \lim_{n\to\infty} n^2 sinc(nx) sinx(ny)$$

$\delta^2(x) = \frac{L}{2\pi}\delta(x)$, 此性质可由卷积定理推出。

1.1.9 梳状函数

定义：

$$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

n 为整数

光学上的应用 单位光通量间隔为 1 的点光源线阵的亮度, 此外, 间隔为 x_0 的等间距脉冲序列表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nx_0)=\frac{1}{x_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\frac{x}{x_0}-n)=\frac{1}{x_0}comb(\frac{x}{x_0})$$

对普通函数作等间距抽样

二维脉冲序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\delta(y-nb)=\frac{1}{ab}comb(\frac{x}{a})comb(\frac{y}{b})$$

1.2 傅里叶变换和卷积

1.2.1 傅里叶变换

$$F(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-j2\pi(\xi x+\eta y)}dxdy$$

振幅谱 $|F(\xi,\eta)|$

相位谱 $\phi(\xi,\eta)$

功率谱 $|F(\xi,\eta)|^2$

傅里叶逆变换

$$F(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{j2\pi(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta=F^{-1}F\{\xi,\eta\}$$

例题 1 求函数 $f(x,y)=1$ 的傅里叶变换
解:
1 可以变为

$$f(x,y)=\lim_{a\to\infty}rect(\frac{x}{a})rect(\frac{y}{a})$$

而 $F\{rect(x)\}=asinc(\xi a),F\{rect(y)\}=asinc(\eta a)$ 所以

$$F\{f(x,y)\}=\lim_{a\to\infty}a^2sinc(a\xi)sinc(a\eta)=\delta(\xi,\eta)$$

例题 2 求梳妆函数 $comb(\frac{x}{a})$ 的傅里叶变换

解:

$$comb(\frac{x}{a})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\frac{x}{a}-n)=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)$$

作傅里叶展开有

$$comb(\frac{x}{a})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j2\pi n\frac{x}{a}}$$

$c_0,c_1,c_2\cdots c_n$ 都等于 1。(这是因为 δ 函数的作用) 所以,

$$comb(\frac{x}{a})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi n\frac{x}{a}}$$

所以,傅里叶变换

$$F\{comb(\frac{x}{a})\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi(\xi-\frac{n}{a})x}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\xi-\frac{n}{a})=acomb(a\xi)$$

1.2.2 傅里叶变换性质

线性性质

$$F\{af(x,y)+bg(x,y)\}=aF(\xi,\eta)+bG(\xi,\eta)$$

两个函数的线性组合的傅里叶变换等于各函数傅里叶变换的相应组合

迭次傅里叶变换 对二元函数作两次傅里叶变换,可以得到倒立像

坐标缩放性

$$F\{f(ax,by)\}=\frac{1}{|ab|}F(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b})$$

位移定理 空域位移带来频域相移;空域相移带来频域位移

$$F\{f(x-x_0,y-y_0)\}=e^{-j2\pi(\xi x_0+\eta y_0)}F(\xi,\eta)$$

$$F\{e^{j2\pi(\xi_0x+\eta_0y)}f(x,y)\}=F(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)$$

1.3 卷积

卷积定义

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta=f(x,y)*h(x,y)$$

卷积可以看作一个函数经过系统变换成另一个函数，其中 $f(x,y)$ 可以看作输入函数 (光学中可以看作入射光波)，$h(x,y)$ 可以看作系统 (光学中可以认为是光学透镜组)
以往的课程中已经学习过卷积，可以把运算过程简略为：折叠、位移、相乘、积分

卷积的效应 展宽效应和平滑效应

运算性质

分配律

结合律

交换律

平移不变性 $f(x-x_1)*h(x-x_2)=g(x-x_1-x_2)$

δ 函数卷积

$$f(x,y)*\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x-x_0,y-y_0)$$

此方程的意义：δ 函数可以看作单缝

1.3.1 卷积定理

即卷积的傅里叶变换等于傅里叶变换相乘; 相乘的傅里叶变换等于傅里叶变换的卷积

$$F\{f(x,y)*g(x,y)\}=F(\xi,\eta)G(\xi,\eta)$$

$$F\{f(x,y)g(x,y)\}=F(\xi,\eta)*G(\xi,\eta)$$

1.4 傅里叶—贝塞尔变换

极坐标傅里叶变换 球坐标原函数为 $g(r,\theta)$，频谱函数为 $G(\rho,\varphi)$

$$G(\rho,\varphi)=\int_0 \infty rg(r)\{\int_0 2\pi e^{-j2\pi\rho rcos(\theta-\varphi)}d\theta\}dr$$

贝塞尔函数关系式：$\int_0 2\pi e^{-jacos(\theta-\varphi)}d\theta=2\pi J_0(a)$ $g(r,\theta)$ 具有圆域对称性，可以写作 $g(r)$

傅里叶-贝塞尔变换与逆变换

$$G(\rho)=2\pi\int_0 2\pi rg(r)J_0(2\pi\rho r)dr$$

$$g(r)=2\pi\int_0 2\pi rG(\rho)J_0(2\pi\rho r)d\rho$$

光学应用 研究圆孔衍射

1.5 例题

1. 求 $\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\pi x^2}dx$

答案：$\frac{1}{2\pi}$

2. 求矩形函数的傅里叶变换

答案：

$$F\{rect(\frac{x}{a})\}=asinc(\eta a),F\{rect(\frac{y}{a})\}=asinc(\xi a),F\{rect(\frac{x}{a},\frac{y}{a})\}=a^2sinc(\xi a)sinc(\eta a)$$

3. 求 $f(x,y)=1$ 的傅里叶变换

答案：$F\{f(x,y)=1\}=\delta(\xi,\eta)$

4. 求梳状函数 $comb(\frac{x}{a})$ 的傅里叶变换

答案：$acomb(a\xi)$

5. 求高斯函数的傅里叶变换

答案：$F\{Gaus(x)Gaus(y)\}=Gaus(\xi)Gaus\eta$

6. 求余弦函数的傅里叶变换

答案：

$$F\{cos(2\pi\xi_0x)\}=\frac{1}{2}\delta(\xi-\xi_0)+\frac{1}{2}\delta(\xi+\xi_0)$$

$$F\{cos(2\pi(\xi_0x+\eta_0y))\}=\frac{1}{2}\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)+\frac{1}{2}\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)$$

7. 求三角形函数的傅里叶变换

答案：利用卷积定理 $tir(x) = rect(x) * rect(x)$

$$F\{tri(x)\} = F\{rect(x) * rect(x)\}$$

$$= F\{rect(x)\}F\{rect(x)\}$$

$$= sinc(\xi)sinc(\xi)$$

$$= sinc^2(\xi)$$

8. 求圆域函数的傅里叶变换

答案：$circ(r) = 1, 0 < r < 1$ 利用傅里叶-贝塞尔变换

$$F\{circ(r)\} = 2\pi \int_0^1 rcirc(r)J_0(2\pi\rho\ r)dr = 2\pi \int_0^1 rJ_0(2\pi\rho\ r)dr$$

令 $r' = 2\pi\rho r$

利用恒等式 $\int_0^x \xi J_0(\xi)d\xi = xJ_1(x)$ 有

$$2\pi \int_0^1 rJ_{p0}(2\pi\rho r)dr = 2\pi\times\int_0^{2\pi\rho} \frac{r'}{(2\pi\rho)^2} J_0(r')dr' = \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_0^{2\pi\rho} r'J_0r'dr' = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$$

6. 掌握卷积的图解法

. 求两个矩形函数的卷积

x 答案：$rect(x) * rect(x) = tri(x)$, 即两个矩形函数的卷积是三角形函数. 掌握 δ 函数和另一个函数卷积难受