

1 Beschreibende Statistik

1.1 Beschreibende/Deskriptive Statistik

Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakterisiert und durch geeignete Grafiken anschaulich gemacht.

1.2 Schließende/Induktive Statistik

Aus beobachtete Daten werden Schlüsse gezogen und diese im Rahmen vorgegebener Modelle der Wahrscheinlichkeitstheorie bewertet.

1.3 Grundgesamtheit

Ω: Grundgesamtheit ω : Element oder Objekt der Grundgesamtheit diskret (< 30 Ausprägungen), stetig (≥ 30 Ausprägungen), univariat ($p=1$), multivariat ($p>1$); Diskrete Merkmale haben eine abzählbare Anzahl möglicher Ausprägungen. Stetige Merkmale haben eine nicht abzählbare (= überabzählbar) Anzahl möglicher Ausprägungen.

Lagemaße

1.4 Modalwerte x_{mod}

Am häufigsten auftretende Ausprägungen (insbesondere bei qualitativen Merkmalen)

1.5 Mittelwert, quantitativ

R: $mean(x)$
Schwerpunkt der Daten. Da Empfindlich gegenüber Ausreißern.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

1.6 Median, quantitativ

R: $median(x)$
Liegt in der Mitte der sortierten Daten x_i . Unempfindlich gegenüber Ausreißern.

$$x_{0,5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Streuungsmaße

1.7 Spannweite

$$\max x_i - \min x_i$$

1.8 Stichprobenvarianz s^2

R: $var(x)$
Verschiebungssatz:
 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)$ Gemittelte Summe der quadratischen Abweichung vom Mittelwert

1.9 Stichpr. standardabw.

R: $sd(x)$
 $s = \sqrt{s^2}$ Streuungsmaß mit gleicher Einheit wie beobachteten Daten x_i . \bar{x} minimiert die "quadratische Verlustfunktion" oder die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an.

1.10 Quantile

R: $quantile(x, p)$. Teilt die sortierten Daten x_i ca. im Verhältnis $p: (1-p)$ d.h. $\hat{F}(x_p) \approx p$; $\hat{F} \hat{=}$ kummul. rel. Häufigkeit;
1. Quartil = 0.25-Quantil; Median = 0.5-Quantil; 3. Quartil = 0.75-Quantil;

$$x_p \begin{cases} x_{\lceil np \rceil}, & np \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}), & np \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

1.11 Interquartilsabstand I

$I = x_{0,75} - x_{0,25}$. Ist ein weiterer Streuungsparameter.

1.12 Chebyshev

$\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$, für alle $k \geq 1$ \bar{x} der Durchschnitt, $s > 0$ die Stichproben-Standardabweichung von Beobachtungswerten x_1, \dots, x_n . Sei $S_k = \{i, 1 \leq i \leq n : |x_i - \bar{x}| < k \cdot s\}$; Für eine beliebige Zahl $k \geq 1$ liegen mehr als $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$ Prozent der Daten im Intervall von $\bar{x} - ks$ bis $\bar{x} + ks$. **Speziell:** Für $k=2$ liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um \bar{x} . Für $k=3$ liegen mehr als 89% der Daten im 3s-Bereich um \bar{x} . **Komplement Formulierung:** $\bar{S}_k = \{i | |x_i - \bar{x}| \geq k \cdot s\}$; $\frac{N(\bar{S}_k)}{n} \leq \frac{1}{k^2}$;

Die Ungleichheit liefert nur eine **sehr grobe Abschätzung**, ist aber unabhängig von der Verteilung der Daten. **Empirische Regeln** 68% der Daten im Bereich um $\bar{x} \pm s$. 95% um $\bar{x} \pm 2s$. 99.7% um $\bar{x} \pm 3s$.
1.13 Korrelation
Grafische Zusammenhang zwischen multivariaten Daten x und y durch ein Streudiagramm. Kennzahlen zur Untersuchung des Zusammenhangs:

1.14 Empirische Kovarianz

R: $cov(x, y)$; $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})$; $S_{xy} > 0$ steigend; $S_{xy} < 0$ fallend;

1.15 Empir. Korrelk. koeff. r

R: $cor(x, y)$; $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$; Näherungsweise lin.

Zusammenhang zw. x und y , falls $|r| \approx 1$; **Bemerkung:** -Der Korrelationskoeffizient kann nur einen statistischen Zusammenhang beschreiben, keinen Kausalen; -Den Korrelationskoeffizient immer im Zusammenhang mit den Streudiagramm sehen (Anscombe-Quartett).

1.16 Regressionsgerade y

$y = mx + t$ mit $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $t = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$; Für den Bereich $|\pm 0,7|$ bis $\pm 1 \Rightarrow$ linearer Zusammenhang.

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Begriffe

Ergebnisraum Ω: Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments

Elementarereignis $\omega \in \Omega$: einzelnes Element von Ω

Ereignis $E \subseteq \Omega$: beliebige Teilmenge des Ergebnisraums Ω heißt sicheres Ereignis, \emptyset heißt unmögliches Ereignis

Vereinigung $E \cup F$: Ereignis E oder Ereignis F treten ein. $\bigcup_{i=1}^n E_i$: mindestens ein Ereignis E_i tritt ein.

Schnitt $E \cap F$: Ereignis E und Ereignis F treten ein.

$\bigcap_{i=1}^n E_i$ alle Ereignisse E_i treten ein. **Ge-**

genereignis $\bar{E} = \Omega \setminus E$: Ereignis E tritt nicht ein (Komplement von E)

Disjunkte Ereignisse E und F: $E \cap F = \emptyset$

2.2 De Morgan'schen Regeln

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$$

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$$

2.3 Wahrscheinlichkeit

$0 \leq P(E) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$;
 $P(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$, falls $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$

2.4 Satz 2.1

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

(Übungsaufgabe!!! Ergänzen)

2.5 Laplace-Experiment

Zufallsexperimente mit n gleich wahrscheinlichen Elementarereignissen. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ für $E \subseteq \Omega$ aus:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}} = \frac{\text{Mächtigkeit von } E}{\text{Mächtigkeit von } \Omega} = \frac{|E|}{n}$$

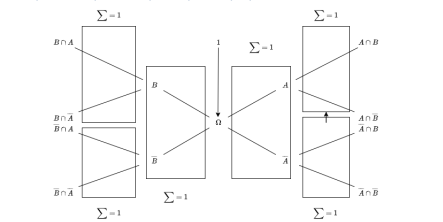
2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

2.7 Satz 2.2

$$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$$

$$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$$



2.8 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^n E_i$ mit $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$ d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte Zerlegung bzw. eine Partition von Ω . Somit gilt:

$$P(F) = \sum_{i=1}^n P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^n P(F|E_i) \cdot P(E_i)$$

Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten $F \cap E_i$



2.9 Vierfeldertafel

$$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \bar{E})$$

$$P(\bar{F}) = P(\bar{F} \cap E) + P(\bar{F} \cap \bar{E})$$

| | E | \bar{E} | |
|-----------|---------------------|---------------------------|--------------|
| F | $P(F \cap E)$ | $P(F \cap \bar{E})$ | $P(F)$ |
| \bar{F} | $P(\bar{F} \cap E)$ | $P(\bar{F} \cap \bar{E})$ | $P(\bar{F})$ |
| | $P(E)$ | $P(\bar{E})$ | 1 |

Satz 2.2 oben: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$ **Tafel**
 $= P(F) - P(F \cap \bar{E}) = P(E) - P(\bar{F} \cap E)$; $P(\bar{F}|E) = 1 - P(F|E)$

2.10 Formel von Bayes

Hilfreich, wenn man $P(F|E_i)$ kennt, aber nicht $P(E_k|F)$ **Satz 2.4** $P(E_k|F) =$

$$\frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_{i=1}^n P(F|E_i) \cdot P(E_i)}$$

Nur Nenner! $P(F)$ aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

2.11 Stochastische Unabhängigkeit

Übung Die Ereignisse E und F heißen (stochastisch) unabhängig, wenn die Information über das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert, d.h. falls

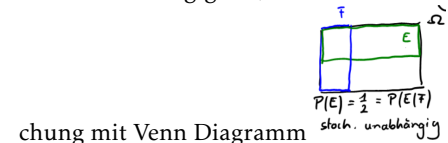
$$P(E|F) = P(E) \text{ or } P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

$$= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

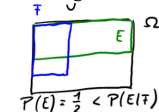
Es gilt Falls die Ereignisse E, F unabhängig sind, dann sind auch: $\circ E, \bar{F}$; $\circ \bar{E}, F$;
 $\circ \bar{E}, \bar{F}$ unabhängig

Bemerkung

\circ Stochastische Unabhängigkeit bedeutet nicht notwendigerweise eine kausale Abhängigkeit; \circ Veranschauli-



chung mit Venn Diagramm



$$P(\bar{E}) = \frac{1}{2} < P(E|F)$$

$$\circ A, B \neq \emptyset \text{ und } A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$$

$$\emptyset \neq P(A) \cdot P(B) \text{ da } P(A) > 0 \text{ und } P(B) > 0$$

$$\Rightarrow A, B \text{ stochastisch abhängig}$$

3 Zufallsvariable

Abbildung des **abstrakten** Ergebnisraums Ω auf \mathbb{R} . Eine Abbildung $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$ heißt Zufallsvariable (ZV). $x \in \mathbb{R}$ heißt Realisation der ZV X .

Diskrete ZV: $X(\Omega) = x_1, \dots, x_n (n \in \mathbb{N})$; z.B. $X =$ "Augensumme beim Würfeln"
 \circ Stetige ZV: $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$; "z.B. Körpergröße eines Menschen"

3.1 Verteilungsfunktion-allg.

Die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ für ein Ereignis B in \mathbb{R} wird zurückgeführt auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Ereignisse in Ω . Für jedes $X \in \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ einer ZV X definiert durch:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$\circ 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$\circ \text{monoton wachsend}$$

$$\circ P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$\circ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

3.2 Diskrete ZVs

Für eine diskrete ZV X mit $X(\Omega) = x_1, \dots, x_n$ (n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch:

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & \text{falls } x_i \in X(\Omega) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

Es gilt:

$$\circ F(x) = (P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i))$$

$\circ F(x)$ ist eine rechtseitig stetige **Treppenfunktion** mit **Sprüngen** bei der Realisation von x_i .

3.3 Stetige ZVs

Stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Es gilt:

$$\circ F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \text{ und } F'(x) = f(x)$$

$$\circ F(x) \text{ ist stetig \& } P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \text{ wegen } P(X = a) = 0$$

3.4 Verteilungsfunktion

Untergrenze Es wird normal mit - integriert.

3.5 Zusammenfassung

3.6 Diskrete ZV

\circ Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$: $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$; x_i ist Realisation der ZV.

\circ Verteilungsfunktion $F(x)$ ist rechtsseitig stetige

Treppenfunktion. Sprunghöhen: $P(X = x_i) = F(x_i) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x) \neq 0$

$$\circ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \neq P(a \leq X \leq b)$$

3.7 Stetige ZV

$$\circ \text{Dichtefunktion } f_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

\circ Verteilungsfunktion $F(x)$ ist stetig mit $F'(x) = f(x)$; $P(X = x_i) = 0$

$$\circ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = P(a < X < b)$$

3.8 Erwartungswert

Der Erwartungswert $E[X] = \mu$ einer ZV X ist der **Schwerpunkt** ihrer Verteilung oder der durchschnittliche zu erwartende Wert der ZV.

- diskrete ZV: $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$
- stetige ZV: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
- ZV ist konstant. $E[X]$ verhält sich linear.

Eigenschaften von $E[X]$:

- $E[b] = b$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$

- $\sum_{i=1}^n x_i$

3.9 Satz 3.1

Sei $Y = g(X)$ eine Funktion der ZV X . Dann gilt:

- für diskrete ZV: $E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot p(x_i)$
- für stetige ZV: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$. Das vertauschen von E und g nur bei **linearen** Funktionen möglich. $\Rightarrow g(E[X])$

3.10 Varianz

Die Varianz einer ZV X mit μ ist ein quadratisches Streuungsmaß. $\sigma^2 = Var[X] =$

$$E[(X - \mu)^2] \stackrel{\text{falls } x \text{ stetig}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)$$

$g(X)$

Die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche Dimension von der ZV X .

- $Var[b] = 0$
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

3.11 Satz 3.2

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das einfache x quadriert **nicht** $f(x)$!!!

3.12 Z-Transformation, Standardisierung

Sei X eine ZV mit μ und σ . Dann ist

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} - \frac{\mu(\text{konstant})}{\sigma}$$

3.13 Kovarianz

Eigenschaften:

- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$
- $Cov[X, X] = Var[X]$
- $Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]$

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y) ist definiert durch $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ Die Kovarianz beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X und Y . Je stärker diese Korrelieren, desto (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz. Falls X, Y (stochastisch) unabhängig $\Rightarrow Cov[X, Y] = 0$

3.14 Satz 3.3

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

3.15 Varianz einer Summe von ZV

$$\begin{aligned} & \circ Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov[X_i, X_j]; Var[X_1 + X_2] = \\ & Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2] \\ & \circ Falls X_i, X_j paarweise unabhängig !!!: $Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$ \end{aligned}$$

3.16 Overview μ, σ

3.17 $E[X]$

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= aE[X] + b; E[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \\ \text{Falls } X_1, X_2 \text{ unabhängig:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \mu \Rightarrow E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] = \\ & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu \end{aligned}$$

μ

3.18 Varianz

$$\begin{aligned} Var[aX + b] &= a^2 Var[X] \\ \text{Falls } X_i, X_j \text{ paarweise unabhängig:} \\ Var[X_1 + \dots + X_n] &= \sum_{i=1}^n Var[X_i] \\ Var[X_i] &= \sigma^2 \Rightarrow Var[\bar{X}] = Var\left[\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right] = \\ & \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

3.19 Quantile

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und $0 < p < 1$. Dann ist das p -Quantil definiert als der Wert $x_p \in \mathbb{R}$ für den gilt:

$$\begin{aligned} F(x_p) &\geq p. \text{ p-Quantil einer stetigen ZV mit } \textbf{streng monoton wachsenden} \\ F(x): x_p &= F^{-1}(p) \text{ d. h. umkehrbar.} \end{aligned}$$

4 Spezielle Verteilung

4.1 Diskrete Verteilung

4.2 Bernoulli-Verteilung

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg; **Wahrscheinlichkeit**: $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$; **Verteilung**: $X \sim B_{1,p}$ p ist Erfolgswahrscheinlichkeit; $E[X] = p = \sum x_i \cdot p(x_i) = 1 \cdot p(1); Var[X] = p(1-p) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$;

4.3 Binominalverteilung

Anzahl der Erfolge beim n -maligen Ziehen mit Zurücklegen; **Wahrscheinlichkeit** $P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$; **Verteilung** $X \sim B_{n,p}$; $E[X] = np$; $Var[X] = np(1-p)$; **R**: $d\text{binom}(k, n, p) = P(X=k) \triangleq$ Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion; $p\text{binom}(k, n, p) = F(k) \triangleq$ Verteilungsfunktion; $q\text{binom}(q, n, p) \triangleq$ q -Quantil; $r\text{binom}(q, n, p) \triangleq$ k binomialverteilte Zufallszahlen;

4.4 Hypergeometrische Verteilung

Anzahl der Erfolge beim n -maligen Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten, und N Elementen, die Misserfolg bedeuten. **Gesamtumfang** $= M + N$; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, \min\{n, M\}\}$; **Verteilung** $X \sim H_{M, N, n}$; $E[X] = n \frac{M}{M+N}$;

$\frac{M}{M+N} \triangleq$ **Trefferwahrscheinlichkeit**; $Var[X] = n \frac{M}{M+N} (1 - \frac{M}{M+N}) \frac{M+N-n}{M+N-1}$; $\rightarrow 1$ falls n klein im Verhältnis zu $M+N$; **R**: $d\text{hyper}(k, M, N, n) = P(X = k)$; $p\text{hyper}(k, M, N, n) = F(k)$;

4.5 Poisson-Verteilung

Verteilung der seltenen Ereignisse Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in einem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge λ pro Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt. $k \in \mathbb{N}_0 \rightarrow$ **diskret Wahrscheinlichkeit** $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$, da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$; **Verteilung** $X \sim P_{\lambda}$; $E[X] = \lambda$, da $\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$; $Var[X] = \lambda$ **R**: $d\text{pois}(k, \lambda) = P(X = k)$; $p\text{pois}(k, \lambda) = F(k)$;

4.6 Gleichverteilung

Alle Werte $\{x_1, \dots, x_n\}$ einer ZV X sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$; **Verteilung** $X \sim U_{\{x_1, \dots, x_n\}}$; $E[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}$; $Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2$; **R**: $\text{sample}(1 : N, n) \triangleq$ n Zufallszahlen zwischen 1 und N

4.7 Gleichverteilung

4.8 Stetige Gleichverteilung

Zufallszahlen aus einem Intervall $[a, b]$; **Dichte**: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in [a, b]$; **Verteilung**: $X \sim U_{[a, b]}$; $E[X] = \frac{a+b}{2}$;

$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ **R**: $d\text{unif}(x, a, b) = f(x)$; $p\text{unif}(x, a, b) = F(x)$; $r\text{unif}(n) \triangleq$ n Zufallszahlen zwischen 0 und 1; $r\text{unif}(n, a, b) \triangleq$ n Zufallszahlen zwischen a und b ;

4.9 Normalverteilung

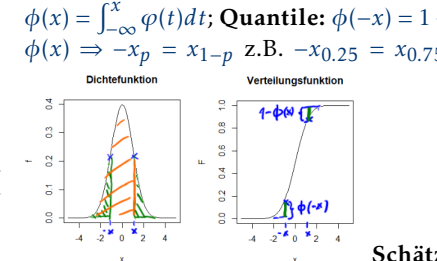
Beschreibt viele reale Situationen, ist insbesondere Grenzverteilung unabhängiger Summen; **Dichte**: $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$; **Verteilung**: $X \sim N_{\mu, \sigma^2}$; $E[X] = \mu$; $Var[X] = \sigma^2$; **R**: $d\text{norm}(x, \mu, \sigma) = f(x)$; $p\text{norm}(x, \mu, \sigma) = F(x)$; $q\text{norm}(q, \mu, \sigma) : q$ -Quantil; **Maximalstelle** von $f(x)$ bei $x = \mu$; **Wende-**

stelle von $f(x)$ bei $x = \mu \pm \sigma$; $E[aX + b] = aE[X] + b$; $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$; $X \sim N_{\mu, \sigma^2} \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu + b, a^2 \sigma^2}$ und $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$; $X_1 \sim N_{\mu_1, \sigma_1^2}$ und $X_2 \sim N_{\mu_2, \sigma_2^2} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$;

X_1, X_2 stochastisch unabhängig

4.10 Standardnormalverteilung

Dichte: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$; **Verteilung** $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$; **Quantile**: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p}$ z.B. $-x_{0.25} = x_{0.75}$;

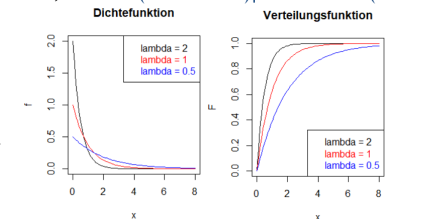


werte: $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$; $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) \approx 68\%$; $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) \approx 95\%$; $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) \approx 99.7\%$

4.11 Exponentialverteilung

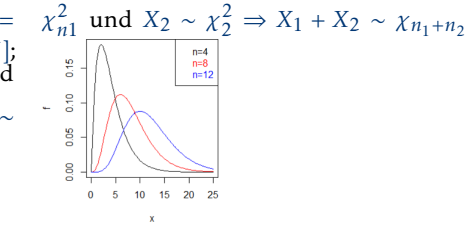
Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei $Y_t \sim P_{\lambda t}$ im Intervall $[0, t]$ von t Zeiteinheiten, dann beschreibt die Exponentialverteilung die Wartezeit X bis zum Eintreten eines Ereignisses; **Dichte- und Verteilungsfunktion**: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$ und $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; **Verteilung**: $X \sim \text{Exp}_{\lambda}$; $E[X] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ Berechnung mit partieller Integration; $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$; **R**: $d\text{exp}(x, \lambda) = f(x)$;

$p\text{exp}(x, \lambda) = F(x)$; **Eigenschaft**: Eine exponentialverteilte ZV X ist gedächtnislos, d.h. $P(X > s + t) | X > t = P(X > s)$;



4.12 Chiquadrat-Verteilung

Z_1, \dots, Z_n seien unabhängige, standardnormalverteilte ZV $\Rightarrow X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell**: Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung**: $X \sim \chi_n^2$; $E[X] = n$; $Var[X] = 2n$; **R**: $d\text{chisq}(x, n) = f(x)$; $p\text{chisq}(x, n) = F(x)$; **Eigenschaft**: $X_1 \sim$



4.13 t-Verteilung

$Z \sim N_{0,1}$ und $X \sim \chi_n^2 \Rightarrow Y = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ ist t-

verteilt mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell**: Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; **Verteilung**: $Y \sim t_n$; $E[Y] = 0$ für $n > 1$; $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$ für $n > 2$; **R**: $d\text{t}(y, n) \triangleq f(x)$; $p\text{t}(y, n) \triangleq F(x)$; **Eigenschaften**: Für $n \rightarrow \infty : t_n \rightarrow N_{0,1}$; Achsensymmetrie der Dichtefunktion $\Rightarrow -y_p = x_{1-p}$

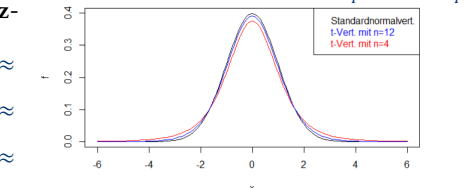


Abbildung Dichtefunktion

5 Zentraler Grenzwertsatz

μ, σ^2 bekannt aber nicht die Verteilung

5.1 ZGWS

Seien $X_i (i = 1, \dots, n)$ unabhängige identische verteilte (i.i.d) ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann gilt für hinreichend große n (> 30) und $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n$ näherungsweise:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N_{n\mu, n\sigma^2} \text{ \& } \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \sim N_{0,1}$$

$\sum X_i$ bezieht sich auf Y ; $\sum X_i - n\mu$ bezieht sich auf X_i ; $\bar{X} \sim N_{\mu, \frac{\sigma^2}{n}}$ & $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$;

Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn die X_i abhängig und nicht identisch verteilt sind, vorausgesetzt kein X_i ist deutlich dominanter! als die anderen. Für die Voraussetzung des ZGW ist, dass die X_i nicht normalverteilt sein müssen, damit $\sum_{i=1}^n X_i$ oder \bar{X} bei hinreichend großem n normalverteilt sind. Faustregel: Je schiefer die Verteilung der X_i , desto größer muss n sein: $n > 30$: falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung); $n > 15$: falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist (Binomialverteilung); $n \leq 15$: falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;

5.2 ϕ

$\phi(-a) = 1 - \phi(a)$; $\phi(a) = 1 - \phi(-a)$; $P(-a < Z < a) = \phi(a) - \phi(-a) = \phi(a) - (1 - \phi(a)) = 2\phi(a) - 1$ or $1 - \phi(-a) - \phi(-a) = 1 - 2\phi(-a)$

5.3 ϕ^{-1}

$-x_p = x_{1-p} \Leftrightarrow -qnorm(p) = qnorm(1 - p) \Leftrightarrow -\phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(1 - p)$

Zusammenhang

$\phi^{-1}(p) = x_p$;

Aufgabentypen: Seien X_i i.i.d. ZV mit μ und σ^2 , aber unbekannter Verteilung. Dann sind $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ und $Z_2 = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ näherungsweise standardnormalverteilt.

- Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für $\sum X_i, \bar{X}, Z_1$ oder Z_2 berechnen.
- Es lässt sich n bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke k und Wahrscheinlichkeit p gilt: $P(Z_i > k) \geq p$ or $P(-k \leq Z_i \leq k) \geq p$

5.4 Stichprobenvert.normalvert. Grundgesamt.

5.5 Stichprobenmittel

Die Stichprobenfunktion $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für Erwartungswert μ , d. h. $E[\bar{X}] = \mu$

5.6 Stichprobenvarianz

Die Stichprobenfunktion $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2 , d. h. $E[S^2] = \sigma^2$; $E[\bar{X}] = E[\frac{1}{n} \sum X_i] = \frac{1}{n} E[\sum X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$; $Var[\bar{X}] = Var[\frac{1}{n} \sum X_i] = \frac{1}{n^2} Var[\sum X_i] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$; Seien $X_i (i = 1, \dots, n)$ unabhängige normalverteilte ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann gilt:

bei bekannter Varianz: $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N_{0,1}$;

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Rightarrow \text{Standardisierung} \sim \chi^2_{n-1}$; Bei unbekannter Varianz: $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$;

6 Konfidenzintervall

6.1 Begriffe

Irrtumswahrscheinlichkeit = α ; Konfidenzniveau = $1 - \alpha$; Konfidenzintervall = I

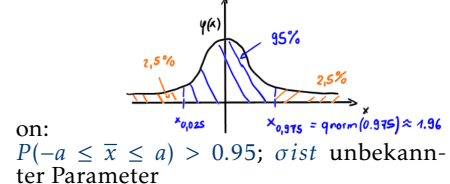
6.2 Punktschätzer

$E[X]$: Stichprobenmittel: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$;

Varianz: Stichprobenvarianz: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$; Schätzwert für wahren Parameter, aber keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung, Geringe Sicherheit für wahren Parameter;

6.3 Intervallschätzer

Intervall für wahren Parameter, mit vorgegebener Sicherheit; Vorgabe (95% or 99%); Dichtefunktion:



on: $P(-a \leq \bar{x} \leq a) > 0.95$; σ ist unbekannter Parameter

$P(x_{0.025} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < x_{0.975}) \geq 0.95$

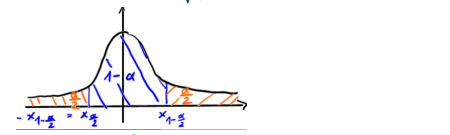
$-1.96; N_{0,1}; 1.96$;

6.4 μ , unbekannt, σ^2 , bekannt

$I =]\bar{X} - \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}[$

$qnorm(1 - \frac{\alpha}{2})$

| $1-\alpha$ | $\frac{\alpha}{2}$ | $\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ |
|------------|--------------------|----------------------------------|
| 90% | 5% | $\phi^{-1}(0.95) \approx 1.645$ |
| 95% | 2.5% | $\phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$ |
| 99% | 0.5% | $\phi^{-1}(0.995) \approx 2.576$ |



6.5 μ & σ^2 , unbekannt

$I =]\bar{X} - t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}[$

6.6 Zusammenfassung

Wie verändert sich das $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall, n größer \Rightarrow I kürzer; $1 - \alpha$ größer \Rightarrow I länger; Für $\frac{L}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$

6.7 Aufgabentypen

Geg: n, $1 - \alpha$; **Ges:** I s.o. **Geg:** $\bar{X}, \sigma, 1 - \alpha, L$; $L = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; **Ges:** n; $\sqrt{n} > 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **Geg:** n, I, L; **Ges:** $1 - \alpha$; $1 - \frac{\alpha}{2} =$

$\phi(\frac{L\sqrt{n}}{2\sigma})$

7 Hypothesentests

Basierend auf n unabhängig und identisch Verteilte (i.i.d) Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n (Messungen) soll eine Entscheidung getroffen werden, ob eine Hypothese für einen unbekannten Erwartungswert μ gültig ist or nicht.

7.1 Def

α = Signifikanzniveau/ Fehlerwahrscheinlichkeit TG = Prüfgröße; TG* = standardisierte Prüfgröße; signifikante Schlussfolgerung = H_0 verworfen \rightarrow klassischer Parametertest; schwache Schlussfolgerung = H_0 wird nicht verworfen \rightarrow klassischer Parametertest. p-Wert = beobachtetes Signifikanzniveau

7.2 Null- und Gegenhypothese

Modell: Verteilung der Grundgesamtheit or Testgröße TG (häufig \bar{x}) ist bekannt bis auf einen Parameter, z.B. μ , für den eine Hypothese aufgestellt wird. $TG \sim N_{\mu, \sigma^2}$; **Nullhypothese:** H_0 : Angezweifelte Aussage, der widersprochen werden kann, wenn die Stichprobe einen Gegenbeweis liefert. $H_0 : \mu = \mu_0$; **Gegenhypothese** H_1 : Gegenteil von H_0 z.B. $H_1 \neq \mu_0$;

7.3 Ablehnungsbereich, Fehler 1. & 2.

Treffen der Testentscheidung, basierend auf einer konkreten Stichprobe $\{x_1, \dots, x_n\}$; Berechnung der Realisation $tg = TG(x_1, \dots, x_n)$ der Prüfgröße TG; **Ablehnungsbereich / Kritischer Bereich C:** Werte der Testgröße, die für H_1 , sprechen & bei Gültigkeit von H_0 mit Wahrscheinlichkeit $\leq \alpha$ (meist 0.1, 0.05, or 0.01) auftreten. **Fehler 1. Art:** α ist die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 verworfen wird, obwohl sie richtig ist. **Annahmebereich:** Komplement \bar{C} des Ablehnungsbereichs. H_0 kann nicht abgelehnt werden, falls $tg \in \bar{C} (P(tg \in \bar{C}) \geq 1 - \alpha)$. **Fehler 2. Art:** Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

| Realität | Testentscheidung H_0 wird (nicht) abgelehnt | H_0 wird abgelehnt. |
|-------------------|--|-----------------------------|
| H_0 ist wahr. | richtig | falsch (Wsk: Fehler 1. Art) |
| H_0 ist falsch. | falsch (Wsk: Fehler 2. Art) | richtig |

$H_0 : \mu = \mu_0$;
 $H_1 : \mu \neq \mu_0$;

7.4 Klassischer Parametertest

H_0 wird abgelehnt, falls $tg = TG(x_1, \dots, x_n) \in C$; H_0 wird angenommen falls $tg = TG(x_1, \dots, x_n) \in \bar{C}$; Der kritische Bereich ergibt sich analog zu den Konfidenzintervallen durch die Vorgabe eines kleinen Signifikanzniveau α d.h. max. Wahrscheinlichkeit für

Fehler 1. Art: mit standardisierter Prüfgröße TG* gilt: $P(TG \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG^* \in]-\infty; \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})[\cup]\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}); \infty[$; $P(TG \in \bar{C}) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})]$; Wird dann H_0 verworfen, spricht man von einer signifikanten Schlussfolgerung. Kann H_0 nicht verworfen werden, dann lässt sich keine Aussage über den Fehler 2. Art treffen & man spricht von einer schwachen Schlussfolgerung.

7.5 Zweiseitiger Gauß Test

$H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$; $\bar{X} \sim N_{\mu_0, \sigma_0^2/n} \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \sim N_{0,1}$; $P_{\mu_0}(\bar{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow |TG| = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \sqrt{n} > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$;

Testentscheidung: H_0 wird abgelehnt, falls $|TG| > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$; H_0 wird angenommen, falls $|TG| \leq \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$

7.6 Einseitiger Gauß Test

7.7 linksseitig

$H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$

7.8 rechtsseitig

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

$P_{\mu_0}(\bar{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \sqrt{n} < \phi^{-1}(\alpha)$;

Testentscheidung: H_0 wird abgelehnt falls, $TG < \phi^{-1}(\alpha)$; H_0 wird angenommen, falls $TG \geq \phi^{-1}(\alpha)$;

7.9 Varianten Gauß Test, σ^2 bekannt, μ unbekannt

Prüfgröße $tg = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \sqrt{n}$;

| H_0 | H_1 | H_0 ablehnen, falls | p-Wert |
|------------------|------------------|--|---------------------|
| $\mu = \mu_0$ | $\mu \neq \mu_0$ | $ tg > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ | $2(1 - \Phi(tg))$ |
| $\mu \leq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $tg > \phi^{-1}(1 - \alpha)$ | $1 - \Phi(tg)$ |
| $\mu \geq \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | $tg < \phi^{-1}(\alpha)$ | $\Phi(tg)$ |

7.10 t-Test, μ, σ^2 unbekannt

Prüfgröße $tg = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$

| H_0 | H_1 | H_0 ablehnen, falls | p-Wert |
|------------------|------------------|---|---|
| $\mu = \mu_0$ | $\mu \neq \mu_0$ | $ tg > t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ | $2(1 - t_{n-1}(\frac{ tg }{t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}))$ |
| $\mu \leq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $tg > t_{n-1}^{-1}(1 - \alpha)$ | $1 - t_{n-1}(tg)$ |
| $\mu \geq \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | $tg < t_{n-1}^{-1}(\alpha)$ | $t_{n-1}(tg)$ |

7.11 p-Wert

Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von H_0 den beobachteten Wert tg der Prüfgröße or einen noch stärker von μ_0 abweichenden Wert zu bekommen. Der p-Wert zu einer Hypothese H_0 ist der kleinste Wert von α , für den H_0 noch abgelehnt

werden kann. Je kleiner der Wert, desto kleiner ist der Fehler 1. Art & umso signifikanter ist die Testentscheidung. **Nice to know** Anhand des p-Werts kann man für beliebige Werte von α eine Testentscheidung treffen;

Falls $p - \text{Wert} < 1\%$: sehr hohe Signifikanz

Falls $1\% \leq p - \text{Wert} < 5\%$: hohe Signifikanz

Falls $5\% \leq p - \text{Wert} \leq 10\%$: Signifikanz

Falls $p - \text{Wert} > 10\%$: keine Signifikanz

7.12 Zusammenhang I & Hypothesentests zweiseitig

zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$; H_0 wird abgelehnt, falls $\mu_0 \notin I$; H_0 wird angenommen, falls $\mu_0 \in I$; Das Konfidenzniveau ist der Annahmebereich von H_0 zum Signifikanzniveau α ;

7.13 Zusammenfassung klass. Hypo.test

Signifikanzniveau α wird vorgegeben; α & Verteilung der Testgröße unter H_0 wird der Ablehnungsbereich ermittelt. Je kleiner (größer) α , desto kleiner (größer) ist der Ablehnungsbereich;

! : α & C hängen nicht von der konkreten Stichprobe ab;

H_0 wird abgelehnt, falls der ermittelte Wert der Testgröße (beobachteter Wert) in C liegt. ! : Die tg hängt von der konkreten Stichprobe ab. Sie ist eine ZV.

7.14 Test mittels p-Wert

α wird vorgegeben. Berechnung des p-Werts anhand der konkreten Stichprobe mit der Verteilung der Tg unter H_0 ;

! : Der p-Wert hängt von der konkreten Stichprobe ab, ist eine ZV. H_0 wird abgelehnt, falls $p - \text{Wert} \leq \alpha$;

8 Fehleranalyse

Derzeit ausgeklammert

9 Interpolation

Zu gegebenen Punkten $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ eine Funktion G (dies ist nicht eindeutig! Abhängig von der Funktionsklasse), so dass $G(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$ (Interpolationsbedingung). Interpolation ist ungeeignet für vertauschte Daten. Lösung: Approximation der kleinsten Quadrate.

9.1 Begriffe

Extrapolation $\hat{=}$ Näherungswerte für x-Werte außerhalb der Stützstellen; Dividierende Differenzen $\hat{=}$ Koeffizienten c_i lassen sich rekursiv durch wiederholte Bildung von "Differenzquotienten" berechnen

9.2 Vandermonde/klassisch

Unterschiedliche Darstellungen für ein Interpolationspolynom $G(x) = p_n(x)$ vom Grad n haben unterschiedliche Eigenschaften bei der nume-

rischen Berechnung.**Monombasis:**
 $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots; p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$; **Ziel:** Bestimmung d. Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n sodass $p_n(x_i) = y_i = a_n x_i^n + \dots + a_1 x_i^1 + a_0 x_i^0$ für $i = 0, \dots, n$; **Für die eindeutige Lösung n+1 Gleichungen: Interpolationsbedingungen:**

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} x_0^n & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$$

gen; Die Koeffizientenmatrix ist die sog. **Vandermonde Matrix**; **Eigenschaften:** Die Vandermonde Matrix ist nicht singular (falls alle x_i verschieden); Rechenaufwand: $\mathcal{O}(n^3)$; Für große n sehr schlecht konditioniert & als Allgemeiner Ansatz ungeeignet.

9.3 Lagrange
2 Formeln; $p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$; $L_k(x) \prod_{j=0; j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$; Jede Basisfunktion $L_k(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$; **Bemerkung:** Findet Anwendung bei Numerischer Integration; Wenn Stützstellen x_i gleich bleiben & nur y_i ändern \Rightarrow keine Neuberechnung; Rechenaufwand $\mathcal{O}(n+1)^2$; Kommen neue Stützpunkte hinzu \Rightarrow Neuberechnung!; Die Interpolationspolynome liefern nur sinnvolle **Näherungswerte** für x-Werte, die zwischen den gegebenen Stützstellen liegen; Extrapolation (Näherungswerte für x-Werte außerhalb der Stützstellen) kann zu großen Abweichungen führen.

9.4 Newton
Darstellung des Interpolanten, die auf ein gestaffeltes LGS führt & einfache Hinzunahme weiterer Punkte erlaubt. $p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

Polynom vom Grad n
Das Resultierende LGS für die Koeffizienten c_i hat gestaffelte Form. **Interpolationsbedingungen?**

Vorteile: Rechenaufwand $\mathcal{O}(n^2)$ Gleitpunktoperationen; Hinzufügen weiterer Stützstellen ohne großen Aufwand. Andere Koeffizienten bleiben unverändert.

9.5 Dividierende Differenzen

| | |
|----|-----|
| x | y |
| -2 | -15 |
| 3 | -5 |
| 1 | 3 |
| 4 | 1 |

Diagramm zur Dividierenden Differenzen-Methode:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} -15 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{l} -5-(-15) \\ -5-3 \\ 3-1 \end{array} \begin{array}{l} = 2 \\ = -4 \\ = 2 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{l} -4-2 \\ -4-1 \\ 2-1 \end{array} \begin{array}{l} = -2 \\ = -2 \\ = 1 \end{array} \end{array}$$

Ergebnis: $\frac{10}{3} = \frac{16}{3} = \frac{10}{3}$

9.6 Effizienz
9.7 klassisch
 $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$; **Aufwand:** 2n-1 Mult.
9.8 Horner Schema
 $p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = ((a_3 + a_2)x + a_1)x + a_0$; Allg.: $p_n(x) = (\dots(a_n x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0$; **Aufwand:** n Mult.

9.9 Interpolationsfehler
Falls f hinreichend glatt ist & p_n das eindeutige Interpolationspolynom von Grad n, dann gilt für den Interpolationsfehler:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-x_0)\dots(x-x_n)$$

mit $\theta \in [x_0; x_n]$
Vergleichbar zum Restglied bei der Taylorreihenentwicklung; **Bemerkung:** θ unbekannt, daher nur Fehlerabschätzung; Fehler ist Abhängig von der Verteilung der Stützstellen; Der Fehler ist bei großen n an den Intervallrändern deutlich größer, als in der Intervallmitte

9.10 Wahl der Stützstellen
Runge Funktion ($f = \frac{1}{1+25x^2}$) äquidistante Stützstellen das Interpolationspolynom nicht immer gegen die zugrundeliegende stetige Funktion konvergiert, wenn die Anzahl der Stützstellen & damit der Grad des Polynoms wächst. **Lösung:** Nicht-äquidistante Verteilung der Stützstellen, dichter an den Intervallgrenzen.

9.11 Chebyshev-Punkte
haben die Eigenschaft; senkrechte Projektion von gleichverteilten Punkten auf dem Einheitskreis. $t_k = \cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n})$, $k = 1, \dots, n$, $au\ f[-1, 1]$; Invtervall: $[a, b]$: $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k$. \Rightarrow Fehler wird gleichmäßiger verteilt und Konvergenz erreicht.

9.12 Schwächen der Polynominterpolation
Hoher Rechenaufwand bei meist keiner hoher Differenzierbarkeitsgrad benötigt wird; RB kann Interpolationsfehler sehr groß sein; Bei wachsenden n ist es unmöglich eine Konvergenz gegen die zu interpolierenden Funktion sicherzustellen; **R:** approx $\hat{=}$ lin Interpolation; Spline $\hat{=}$ Spline interpolation; Bibliotheken für Polynominterpolation;

9.13 Spline
Jede Funktion S_i ist ein Polynom vom Grad $n \leq k$; $S(x)$ ist $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar, d.h. für alle $x_i (i = 1, \dots, n-1)$ gilt: $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$;

9.14 Kubisch
Ansatz: $S_i = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$; **Gleichungssystem:** 4n Parameter $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, \dots, n-1)$; **2n Interpolationsbedingungen:** am Rand je

nur eine $x_i x_i = y_i$; $Si(x_{i+1}) = y_{i+1}$ für $(i = 0, 1, \dots, n-1) \Rightarrow$ Stetigkeit; **Stetigkeit der 1. Abl:** $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$; $\Leftrightarrow S'_i(x_{i+1}) - S'_{i+1}(x_{i+1}) = 0$; für $i = 0, 1, \dots, n-2$; **Stetigkeit der 2. Abl.:** $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$; $S''_i(x_{i+1}) - S''_{i+1}(x_{i+1}) = 0$; für $i = 0, 1, \dots, n-2$; **natürlicher Randbedingungen:** $S''_0(x_0) = 0$; $S''_{n-1}(x_n) = 0$; nach geschickter Umformung der Gleichungen hat das LGS Tridiagonalform. **Rechenaufwand** $\mathcal{O}(n)$ Gleitpunktoperationen.

10 NumInt
Verbesserung der Näherung: Aufteilung in kleine Teilintervalle & Summe von Rechtecksflächen bilden; Interpolation mit Polynom höheren Grades durch diskrete Punkte.

10.1 Ansatz[a,b]
 $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{j=0}^i \alpha_j f(x_j)$

10.2 Def
 $p_k \hat{=}$ Interpolationspolynom; $I_n \hat{=}$ Quadraturformel; $K \hat{=}$ Fehlerkonstante des Verfahrens.; Singularität $\hat{=}$ isolierter Punkt, der ungewöhnliches Verhalten zeigt;

10.3 Newton-Cotes
Das Integral des p_k diens al Appr. für das Int. von f(x); $\int_0^1 f(t) dt \approx \int_0^1 p_k(t) dt = \sum_{j=0}^k \alpha_j f(t_j)$ Das Interpolationspolynom muss nicht explizit aufgestellt werden, es dient vorab der Bestimmung der Gewichte α_j ; $\int_0^1 p_k(t) = \int_0^1 \sum f(t_j) L_j(t) dt = \sum f(t_j) \int_0^1 L_j(t) dt$

10.4 Trapezregel
 $T_1 : \int_0^1 f(t) dt \approx \frac{1}{2}(f(0)+f(1))$; $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b))$;
 T_n : Für Teilintervalle mit gleicher Länge: $h = \frac{b-a}{n}$; $T_n = h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2})$;

10.5 SimpsonRegel
 $S_1 : \int_0^1 f(t) dt \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(0.5) + f(1))$;
 $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$;
Für n = 1: $\frac{(b-a)}{2} \cdot \frac{1}{3}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$;
Für n allg.: $\frac{(b-a)}{2n} \cdot \frac{1}{3}(f(a) + 4(a+h) + \dots + 4f(b-h) + f(b))$ S_n : Beachte **gerade Anzahl an Teilintervallen!**; Für 2n Teilintervalle, 2n+1 Knoten mit gleicher Länge $h = \frac{b-a}{2n}$; $S_2 = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$;

Newton-Cotes Regeln

| Basierend auf äquidistanten Knoten $t_j = \frac{j}{k}$ | Grad des Interpolationspolynoms α_i | Methode | Ordnung p |
|--|--|---------------------|-----------|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | Trapez | 2 |
| 2 | $\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$ | Simpson | 4 |
| 3 | $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ -Rule | 4 |
| 4 | $\frac{1}{90}, \frac{3}{90}, \frac{3}{90}, \frac{1}{90}, \frac{8}{90}$ | Milne | 6 |

d.h. exakt für $\int x^k dx$ ($k=0,1,\dots,5$)

Falls α_i positiv. Integrationsregeln stabil; $k \leq 7$ & $k = 9 \Rightarrow$ positive Gewichte;

10.6 Ordnung Integrationsregel
Eine Integrationsregel hat Ordnung p, wenn sie für Polynome vom Grad $\leq p-1$ exakte Werte liefert; T_1 Ordnung 2 \Rightarrow exakt für Polynome Grad ≤ 1 ; Ordnung Newton-Cotes Regeln: mind. Ordnung k+1 (k: GRad des Interpolationspolynoms); **Beweis der Ordnung:** $1 = \int_0^1 x^0 dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx \stackrel{!}{=}$;

10.7 Fehler Quadratur

Für (globalen) Fehler $e_{In} = \int_a^b f(x) dx - I_n$ einer Quadraturformel I_n der Ordnung p auf $[a, b]$ gilt: $|e_{In}| = (b-a)h^p K |f^{(p)}(\xi)|$, $\xi \in [a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ & $|e_{In}| \leq (b-a)h^p K \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(p)}(x)|$;

10.8 Fehler T_n
Der Fehler ist proportional zu h^2 ; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor 1/4; Ein Integral kann beliebig genau approx. werden, falls h entsprechend klein gewählt wird. **Aber** Rundungsfehler bei vielen Rechenoperationen, verschlechtert wieder das Ergebnis. Vorteil von Verfahren höherer Ordnung: Weniger Teilintervalle nötig. $|e_{Tn}| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, $K = \frac{1}{12}$, $h = \frac{b-a}{n}$
10.9 Fehler S_n

Der Fehler ist proportional zu h^4 ; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor $\frac{1}{16}$; $|e_{Sn}| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$, $h = \frac{(b-a)}{2n}$, $K = \frac{1}{180}$
10.10 Grenzen NeCo
viele äquidistante Knoten \rightarrow Gewichte negativ \rightarrow Verfahren instabil; geschlossene NeCoRe \rightarrow Funktionsauswertung an RB \rightarrow Problem mit Singularitäten. größtmögliche Ordnung unreichbar wegen äquidistanten Knoten; **Lösung:**
10.11 GauQua
11 Allgemein
11.1 Symbole
Stichprobenstandardabweichung $\hat{=}$ s; Standardabweichung $\hat{=}$ σ
11.2 Abl.
 $x^n \hat{=} nx^{n-1}$

$$\sin x \hat{=} \cos x; \cos x \hat{=} -\sin x; \tan x \hat{=} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x; \cot x \hat{=} -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x;$$
$$e^x \hat{=} e^x; a^x \hat{=} (\ln a) \cdot a^x;$$
$$\ln x \hat{=} \frac{1}{x}; \log_a x \hat{=} \frac{1}{(\ln a) \cdot x};$$

11.3 Abl.Regeln
Faktorregel $y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$;
Summenregel $y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow y' = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x)$;
Produktregel $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$;
 $y = u \cdot v \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot x'$;
Quotientenregel $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;
Kettenregel $f'(x) = F'(u)u'(x) \hat{=} F'(u)$: Ableitung der Äußerer Funktion; $u'(x)$: Ableitung der Inneren Funktion

11.4 Integralregel, elementar
Faktorregel $\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx$;
Summenregel $\int_a^b [f_1(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$;
Vertauschungsregel $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$;
 $\int_a^a f(x) dx = 0$; $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ für $(a \leq c \leq b)$;

11.5 Berechnung best. Integr.
 $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
11.6 Potenzen
 $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $a \neq 0$; $!(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$; $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ für $b \neq 0$;
 $a > 0$: $a^b = e^{b \ln a}$

11.7 Wurzel
 $\sqrt{a^2} = |a|$; $b = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;
 $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot n}} = \sqrt[n^2]{a}$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = (a^{\frac{1}{n}}) \cdot (b^{\frac{1}{n}}) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ für } b > 0$$

$\Rightarrow m, n \in \mathbb{N}^*$; $a \geq 0$, $b \geq 0$
11.8 Abc-Formel
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_{1,2} = \frac{2a}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$

11.9 Bin.Formel
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1. Binom; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; 2. Binom; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 3. Binom;

11.10 Einigungen

◦ Beim Runden mind. eine Nachkommastelle.