R:sd(x)1 BeschreibendeStatistik  $s = \sqrt{s}$  Streuungsmaß mit gleicher Einheit 1.1 Begriffe wie beobachteten Daten  $x_i.\bar{x}$  minimiert 1.1.1 Beschreibende/Deskriptive die "quadratische Verlustfunktionöder Statistik die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an. Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakteri-1.5 p-Quantile

Hilfszettel zur Klausur von JD., Seite 1 von 4

schaulich gemacht.

theorie bewertet.

1.2 Lagemaße

1.2.2 Mittelwert

1.4 Streuungsmaße

1.4.1 Spannweite

Verschiebungssatz:

 $\max x_i$  -  $\min x_i$ 

malen)

R:mean(x)

Schwerpunkt

 $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ 

1.3 Median

R:median(x)

1.1.3 Grundgesamtheit

1.2.1 Modalwerte  $x_{mod}$ 

siert und durch geeignete Grafiken an-

Aus beobachtete Daten werden Schlüsse

gezogen und diese im Rahmen vorgege-

bener Modelle der Wahrscheinlichkeits-

 $\Omega$ : Grundgesamtheit  $\omega$ :Element oder Ob-

jekt der Grundgesamtheit diskret(<30

Ausprägungen), stetig(≥30 Ausprägun-

Am häufigsten auftretende Ausprägun-

gen (insbesondere bei qualitativen Merk-

ten.**Empfindlich**gegemüber Ausreißern.

Liegt in der Mitt der sortierten Daten  $x_i$ .

Unempfindlich gegenüber Ausreißern.

 $x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), \text{ falls n gerade} \end{cases}$ 

1.4.2 Stichprbenvarianz s<sup>2</sup>

 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}^2) = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_i^2)$ 

schen Abweichung vom Mittelwert

gen), univariat(p=1), mulivariat(p>1)

### ten $x_i$ ca. im Verhältnis p: (1-p) d.h. $\hat{F}(x_p) \approx p$ ; 1. Quartil = 0.25-Quantil; Me-1.1.2 Schließende/Induktive Stadian = 0.5-Quantil; 3. Quartil = 0.75-

1.4.3 Stichproben-

### Quartil; 1.6 Interquartilsabstand I $I = x_{0.75} - x_{0.25}$ . Ist ein weiterer Streuungsparameter.

R:quantile(x, p). Teilt die **sortierten** Da-

### 1.7 Chebyshev $\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$ , für alle $k \ge 1 \overline{x}$ der

### Durchschnitt, s > 0 die Stichproben-Standardabweichung von Beobachtungs- $|x_i - \overline{x}| < k \cdot s$ ; Für eine beliebige Zahl $k \ge 1$ liegen mehr als $100 \cdot (1 - \frac{1}{L^2})$ Pro-

zent der Daten im Intervall von 
$$\overline{x} - ks$$
 bis  $\overline{x} + ks$ . **Speziell:**Für  $k = 2$  liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um  $\overline{x}$ . Für  $k = 3$  liegen mehr als 89% der Daten im 3s-Bereich um  $\overline{x}$ . **Komplement Formulierung:**  $\overline{S}_k = \{i | |x_i - \overline{x}| \ge k \cdot s\}; \frac{N(\overline{S}_k)}{n} \le \frac{1}{k^2};$ 

Die Ungleichheit lifert nur eine sehr grobe Abschätzung, ist aber unabhängig von der Verteilung der Daten. Empirische Regeln 68% der Daten im Bereich um 
$$\overline{x} \pm s$$
. 95% um  $\overline{x} \pm 2s$ . 99.7% um  $\overline{x} \pm 3s$ . 1.8 Korrelation

Grafische Zusammenhang zwischen mul-

tivariaten Daten y und y durch ein

Streudiagramm. Kennzahlen zur Unter-

### 1.8.1 Empirische Kovarians

suchung des Zusammenhangs:

 $\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - n \overline{x} \overline{y}) \right)$ 

rer Zusammenhang.

 $n\bar{x}^2$ ) Gemittelte Summe der quadrati- Für den Bereich  $|\pm 0,7|$   $\hat{b}is$  bis  $\pm 1 \Rightarrow$  linea-

R:cov(x, y);  $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) =$ 

R:cor(x, x);  $r = \frac{s_{xy}}{s_x x_y}$ ; Näherungsweise lin.

Zusammenhang zw. x und y, falls  $|\mathbf{r}| \approx 1$ .

## 1.8.3 Regressionsgerade y $y = mx + t \text{ mit } m = r \cdot \frac{s_y}{s} \text{ und } t = \overline{y} - m \cdot \overline{x};$

### standardabweichung 2.1 Begriffe **Ergebnisraum** $\Omega$ : Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments **Elementarereignis** $\omega \in \Omega$ : einzelnes Ele-

ment von  $\Omega$ 

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Ereignis** $E \subseteq \Omega$ : beliebige Teilmenge des Ergebnisraums  $\Omega$  heißt sicheres Ereignis, Ø heißt unmögliches Ereignis **Vereinigung**  $E \cup F$ : Ereignis E oder Ereignis F treten ein.  $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ : mindestens ein Ereignis  $E_i$ tritt ein.

**Zurücklegen**:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ **Schnitt**  $E \cap F$ : Ereignis E und Ereignis F mit Beachtung der Reihenfolge, mit Zutreten ein. rücklegen: n<sup>k</sup>  $\bigcap_{i=1}^n E_i$  alle Ereignisse  $E_i$  treten ein. **Ge**ohne Beachtung der Reihenfolge, mit **genereignis**  $\overline{E} = \Omega / E$ : Ereignis E tritt Zurücklegen  $\binom{n+k-1}{k}$ nicht ein (Komplement von E) 2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit **Disjunkte Ereignisse**E und F:  $E \cap F = \emptyset$  $P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$ 2.2 De Morgan'schen Regeln  $E_1 \cup E_2 = E_1 \cap E_2$  $\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$ 

# 2.3.1 Satz 2.1

2.3 Wahrscheinlichkeit

 $0 \le P(E) \le 1$ ;  $P(\Omega) = 1$ ;

 $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ 

### (Übungsaufgabe!!! Ergänzen) 2.4 Laplace-Experiment Zufallsexperimente mit n gleich wahr-

 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ 

### Elementarereignissen. scheinlichen Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit P(E) für $E \subseteq \Omega$ aus: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$

Anzahl der Möglihckeiten für ein k-

stufiges Zufallsexperiment mit  $n_i$  Varianten im i-ten Schritt:  $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ 

## 2.5 Kombinatorik

 $\frac{\text{M\"achtigkeit von E}}{\text{M\"achtigkeit von }\Omega} = \frac{|E|}{\Omega} \mathbf{text}$ 

### 2.5.1 Allgmeines Zählprinzip

ren Elementen  $n = sum_k^{i=1} n_i$ :  $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_1!}$  $F = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$  Tafel

 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ , falls  $E_i \cap E_j = \emptyset$   $P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$ 

 $P(\overline{F}) = P(\overline{F} \cap E) + P(\overline{F} \cap E)$ E Ē

2.6.3 Vierfeldertafel

 $P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E})$ P(FAE) P(FAE) P(F) P(FAE) P(FAE) P(F) P(E) P(E) 1 Satz 2.2 oben:  $P(E \cap$ 

Information über das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert, d.h. falls  $P(E|F) = P(E)oderP(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ 

2.5.3 Anzahl k-elementigen Teil-  $= P(F) - P(F \cap \overline{E}) = P(E) - P(\overline{F} \cap E); P(\overline{F}|E) =$ 

mengen einer n-elementigen 1 - P(F|E)

Menge k-maliges Ziehen aus

einer n-elementigen Menge

ohne Zurücklegen =  $k \le n$ .

Zurücklegen:  $\frac{n!}{(n-k)!}$ 

2.6.1 Satz 2.2

 $P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$ 

 $\sum -1$ 

lichkeit

2.6.2 Satz der totalen Wahrschein-

Sei  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n E_i$  mit  $E_i \cap E_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ 

d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte

Zerlegung bzw. eine Partition von  $\Omega$ . So-

 $P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i)$ .

Summe der Äste des Wahrscheinlich-

keitsbaums zu allen Schnitten  $F \cap E_i$ 

mit Zurücklegen = k > n möglich.

mit Beachtung der Reihenfolge, ohne

ohne Beachtung der Reihenfolge, ohne

Es gilt Falls die Ereignisse E, F unabhängig sind, dann sind auch:  $E, \overline{F}$ 

2.6.4 Formel von Bayes

 $P(F|E_k) \cdot P(E_k)$ 

 $P(F|E_i) \cdot P(E_i)$ 

len Wahrscheinlichkeit.

Hilfreich, wenn man man  $P(F|E_i)$  kennt,

aber nicht  $P(E_k|F)$  Satz 2.4  $P(E_k|F) =$ 

Nur Nenner!P(F) aus dem Satz der tota-

2.6.5 Stochastische Unabhängig-

**Uebung** Die Ereignisse E und F heißen

(stochastisch) unabhängig, wenn die

 $\overline{E}$ ,  $\overline{F}$  unabhängig **Bemerkung** 

· Stochastische Unabhängigkeit bedeutet nicht notwendigerweise eine kausale Abhängigkeit · Veranschaulichung mit Venn Dia-

 $P(E) = \frac{1}{2} = P(E(F))$ gramm stock unabhanging P(E)= 1 < P(EIF)

 $P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$  $\emptyset \neq P(A) \cdot P(B)$  da P(A) > 0 und

•  $A, B \neq \emptyset$  und  $A \cap B = \emptyset$ 

 $\Omega$  auf  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto X(\omega) = \text{heißt Zufallsvariable (ZV). x}$ € R. heißt Realisation der ZV X.

• Diskrete ZV:  $X(\Omega) = x_1, ..., x_2 (n \in$  $\mathbb{N}$ ); z.B. X = "Augensumme beim"

• Stetige ZV:  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ; "z.B. Körper-

### => A, B stochastisch abhängig 3 Zufallsvariable Abbildung des abstrakte Ergebnisraums

größe eines Menschen"

## 2.5.2 Permutationen

### Anzahl einer n-elementigen Menge nmaliges Ziehen ohne Zurücklgen mit Beachtung der Reihenfolge: n unterscheid**bare Elemente**: $n! = n \cdot (n-1) t extb f ... 2 \cdot 1$ k Klassen mit je $n_i$ nicht unterscheidba-

von JD., Seite 2 von 4 • Dichtefunktion fx  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 3.1 Verteilungsfunktion-allg. • Verteilungsfunktion F(x) ist stetig Die Wahrscheinlichkeit P(B) für ein Ermit  $F'(x) = f(x); P(X = x_i) = 0$ 

### eignis B in **R** wird zurückgefürht auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden

Hilfszettel zur Klausur

Ereignisse in  $\Omega$ . Für jedes  $X \in \mathbb{R}$  ist die Verteilungsfunktion F:  $\mathbb{R} \to [0,1]$  einer ZV X definiert durch:  $F(x) = P(X \le x)$ •  $0 \le F(x) \le 1$ •  $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0 \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ 

### monoton wachsend • P(X > x) = 1 - F(x)

•  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ 3.2 Diskrete ZVs

### Für eine diskrete ZV X mit $X(\Omega) =$ $x_1,...,x_n$ ( n endlich oder abzählbar

3.3 Stegite ZVs

unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch:  $p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), \text{falls } x_i \in X(\Omega) \\ 0, sonst \end{cases}$ 

Treppenfunktion mit Sprüngen bei der Realisation von  $x_i$ . Stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeits-

### dichte f $f: \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definiert durch $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

•  $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$  und F'(x) = f(x)

## $\int_{\mathbf{Untergrenze}}^{x} \mathbf{Es}$ wird normal mit - Inte-3.5 Zusammenfassung

3.5.1 Diskrete ZV Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p(x) \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1x_i$  ist Realisation der ZV.

• Verteilungsfunktion 
$$F(x)$$
 ist rechtsseitig stetige **Treppenfunktion**. **Sprunghöhen:** $P(X = x_i) = F(x_i) - \lim_{x \to x_i-} \neq 0$ 

•  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \ne P(a \le b)$ 

 $X \leq b$ 

### 3.6 Erwartungswert Der Erwartungswert E[X] = einer ZV X ist der Schwerpunkt ihrer Verteilung

3.5.2 Stetige ZV

### or der durchschnittliche zu erwartende Wert der ZV. • diskrete ZV: $E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$ • stetige ZV: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

•  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = P(a \le b)$ 

 $X \le b$ ) =  $F(a \le X < b) = P(a < X < b)$ 

• E[b] = b• E[aX + b] = aE[X] + b•  $E[X_i + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$ 

ZV ist konstant. E[X] verhält sich linear.

Eigenschaften von E[X]:

• 
$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$
3.6.1 Satz 3.1

### Sei Y = g(X) eine Funktion der ZV X. Dann gilt: • für diskrete ZV:E[g(X)]

 $\sum_{i=1}^{n} g(x) \cdot p(x_i)$ 

• für stetige ZV:  $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ f(x)dx. Das vertauschen von E und g nur bei linearen Funktionen  $m\ddot{o}glich. \Rightarrow g(E[X])$ 

## dratisches Streungsmaß. $\sigma^2 = Var[X] =$

g(X)Die Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche

> • Var[b] = 0•  $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

Dimension von die ZV X.

 $Z = \frac{X - \mu}{\mu} = \frac{x}{\mu} - \frac{\mu(konstant)}{\mu(konstant)}$ 

### 3.7.1 Satz 3.2

 $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$  Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das einfach stehende x quadriert nicht f(x)!!! 3.8 Z-Transformation, Standardisie-Sei X eine ZV mit  $\mu$  und  $\sigma$ . Dann ist  $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$ 3.10.1 Varianz einer Summe von •  $Var[X_i + ... + X_n]$  $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{i} Cov[X_i, X_i]; Var[X_1 +$  $X_2$ ] =  $Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2]$ 

• Falls  $X_i, X_i$  paarweise unabhängig

!!!:  $Var[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$ 

### 3.11 Overview $\mu \sigma$ 3.11.1 E[X] $E[aX + b] = AE[X] + b; EX_1 + ... + E_n =$

 $\sum_{i=1}^{n} E[X_i];$ Falls  $X_1, X_2$  unabhängig:  $E[X_i] = \mu = E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)] =$ Die Varianz einer ZV X mit  $\mu$  ist ein qua-  $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[x_{i}]=\frac{1}{n}\cdot n\cdot \mu=\mu$ 

3.11.2 Varianz

3.9 Kovarianz

• Cov[X, Y] = Cov[Y, X]

• Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]

• Cov[X,X] = Var[X]

Eigenschaften:

Cov[X,Y]=0

3.10 Satz 3.3

## $E[(X-)^2]$ falls x stetig $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)$

 $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$ Falls  $X_i$ ,  $X_j$  parweise unabhängig:  $Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$  $Var[X_i] = \sigma^2 \Longrightarrow Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}(x_1 + ... +$ 

 $|x_n| = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ 3.12 Quantile Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F(x) und 0 . Dann ist das p-

Quantil definiert als der Wert  $x_p \in \mathbb{R}$  für den gilt:  $F(x_p) \ge p$ . p-Quantil einer stetigen ZV mit streng monoton wachsenden  $F(x)x_p = F^{-1}(p)d$ . h. umkehrbar.

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg; Wahrschein-Alle Werte  $\{x_1,...,x_n\}$ einer ZV X sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlichlichkeit:**P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p;**Verteilung:**  $X \sim B_{1,p}$  p ist Erfolgswahrkeit  $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ ; Verteilung

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y) scheinlichkeit;  $E[X] = p = \sum x_i \cdot p(x_i) = 1$ . definiert durch Cov[X,Y] = $p(1); Var[X] = p(1-p) = E[X^2] - (E[X])^2 =$ E[(X - E[X])(Y - E[Y]) Die Kovarianz  $p - p^2 = p(1 - p);$ beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X und Y. Je stärker diese Korrelieren, desto (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz. 4.1.2 Binominal verteilung Falls X, Y stochastisch unabhängig  $\Rightarrow$ Anzahl der Erfolge beim n-maligen

### Ziehenmit Zurücklegen; Wahr-

4 Spezielle Verteilung

4.1 Diskrete Verteilung

4.1.1 Bernouilliverteilung

scheinlichkeit  $P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k$  $(1 - p)^{n-k}, k \in [0, 1, ..., n]$ ; Verteilung  $X \sim B_{n,p}$ ; E[X] = np; Var[X] =np(1 - p); **R:** dbinom(k,n,p)=P(X=k) ≜Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion; pbinom(k,n,p)=F(k)≜Verteilungsfunktion; qbinom(q,n,p)=q-Quantil;

rbinom(k,n,p)≘kbinomialverteilte Zu-

4.1.3 Hypergeometrische Vertei-

Anzahl der Erfolge beim n-maligen

Ziehen ohne Zurücklegen aus einer

Menge mit M Elementen, die Erfolg be-

deuten, und N Elementen, die Misserfolg

bedeuten. Gesamtumfang = M + N;

Wahrscheinlichkeit P(X = k) =

fallszahlen;

lung

phyper(k, M, N, n) = F(k);

4.1.4 Poisson-Verteilung

Verteilung der seltenen Ereignisse Häu-

nem Kontinuum. Die durchschnittlich

zu erwartende Anzahl der Erfolge  $\lambda$  pro

## n Zufallszahlen zwischen a und b;

### 4.2.2 Normalverteilung Beschreibt viele reale Situationen,

 $Var[X] = \lambda \mathbf{R} : \frac{d}{pois}(k, \lambda) = P(X = k);$ 

 $X \sim U_{\{x_1,...,x_n\}}; E[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \overline{x};$ 

 $Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}^2$ ; **R:** sample(1:

(N,n) n Zufallszahlen zwischen 1 und

Zufallszahlen aus einem Intervall [a, b];

**Dichte:**  $f(x) = \frac{1}{h-a}$  für  $x \in [a,b]$ ;

**Verteilung:**  $X \sim U_{[a,b]}$ ;  $E[X] = \frac{a+b}{2}$ ;

 $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \mathbf{R} : \frac{d}{dunif}(x, a, b) = f(x);$ 

puni f(x, a, b) = F(x); runi f(n) = n Zufalls-

zahlen zwischen 0 und 1; runi f(n, a, b) =

 $dnorm(x, \mu, \sigma) = f(x); pnorm(x, \mu, \sigma) =$ 

F(x); qnorm $(q, \mu, \sigma)$ : q - Quantil; Maxi-

malstelle von f(x) bei  $x = \mu$ ; Wende-

**stelle** von f(x) bei  $x = \mu \pm \sigma$ ; E[aX + b] =

Dichte:

4.2.1 Stetige Gleichverteilung

ppois $(k, \lambda) = F(k)$ ;

4.1.5 Gleichverteilung

4.2 Gleichverteilung

ist insbesondere Grenzverteilung unabhängiger Summen;

unabhängiger Summen; Dichte:  

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (-\frac{1}{2} (\frac{x-\mu}{\sigma})^2);$$
 Verteilung:  
 $X \sim N_{\mu,\sigma^2}; E[X] = \mu; Var[X] = \sigma^2; R:$ 

 $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{k}}, k \in \{0,1,...,min\{n,M\}\};$  **Ver**aE[X] + b;  $Var[aX + b] = a^2Var[X]$ ;  $X \sim N_{\mu,\sigma^2} \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu+b,a^2\sigma^2}$  und teilung  $X \sim H_{M,N,n}$ ;  $E[X] = n \frac{M}{M+N}$ ;  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  ~  $N_{0,1}$ ;  $X_1$  ~  $N_{\mu_1,\sigma_1^2}$  und  $X_2$  ~  $\frac{M}{M+N}$   $\hat{=}$  Tref ferwahrscheinlichkeit;

 $Var[X] = n \frac{M}{M+N} (1 - \frac{M}{M+N}) \frac{M+N-n}{M+N-1};$   $\rightarrow 1$  falls n klein im Verhältnis zu  $N_{\mu_2,\sigma_2^2} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2};$  $X_1, X_2$  stochastisch unabhängig M+N; **R**: dhyper(k, M, N, n) = P(X = k);

4.2.3 Standardnormalverteilung

Dichte:  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{1}{2}x^2)}$ ; Verteilung

 $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ ; Quantile:  $\phi(-x) = 1$ figkeit punktförmiger Ereignisse in ei- $\phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p} \text{ z.B. } -x_{0.25} = x_{0.75};$ 

 $X \sim P_{\lambda}$ ;  $E[X] = \lambda, da \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k}}{k!} e^{-\lambda} =$ 

Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt.  $k \in \mathbb{N}_0 \rightarrow diskret$  Wahrscheinlich- $\mathbf{keit}P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \text{ mit } \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)$ k) = 1,  $da \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ ; Verteilung

 $e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} = \lambda;$  werte:  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$ 

Hilfszettel zur Klausur von **JD**., Seite 3 von 4 4.2.4 Exponentialverteilung Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei  $Y_t \sim P_{\lambda t}$  im Intervall [0,t]von t Zeiteinheiten, dann beschreibt

Seien  $X_i$  (i = 1,...,n) unabhängige identi-

$$pexp(x, \lambda) = F(x)$$
; Eigenschaft: Eine exponentialverteile ZV X ist gedächtnislos, d.h.  $P(X > s + t)|X > t = P(X > s)$ ; Verteilungsfunktion

die Exponentialverteilung die Wartezeit

X bis zum Eintreten eines Ereignis-

ses; Dichte- und Verteilungsfunktion:

 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \ge 0)$  und F(x) = 1 -

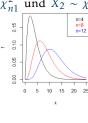
 $e^{-\lambda x}$ ; Verteilung:  $X \sim Exp_{\lambda}$ ; E[X] =

 $\frac{1}{1} \Rightarrow$  Berechnung mit partieller Integra-

tion;  $Var[X] = \frac{1}{12}$ ; **R**:  $dexp(x, \lambda) = f(x)$ ;

### 4.2.5 Chiquadrat-Verteilung $Z_1,...,Z_n$ seien unabhängige, standard-

normalverteilte ZV  $\Rightarrow X = Z_1^2 + Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden; Anwendungsmodell: Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung:**  $X \sim \chi_n^2$ ; E[X] =n; Var[X] = 2n; **R**:  $\frac{d}{d}chisq(x,n) = f(x)$ ; ppchisq(x,n) = F(x); Eigenschaft:  $X_1 \sim$  $\chi_{n_1}^2$  und  $X_2 \sim \chi_2^2 \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi_{n_1 + n_2}$ 



### 4.2.6 t-Verteilung $Z \sim N_{0.1}$ und $X \sim \chi_n^2 \Rightarrow Y = \frac{Z}{X}$ ist t-

verteilt mit n Freiheitsgraden; Anwendungsmodell: Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; Verteilung:  $Y \sim t_n$ ; E[Y] = 0 für n > 1;  $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$ für n > 2; **R**:  $\frac{d}{dt}(y, n) = f(x)$ ; pt(y, n) = F(x);  $qt(y,n) = F^{-1}(x)$ ; Eigenschaften: Für  $n \to \infty$ 

der Dichtefunktion  $\Rightarrow -y_p = x_{1-p}$ 

Abbildung Dichtefunktion 5 Zentraler Grenzwertsatz  $\mu\sigma^2$  bekannt aber nicht die Verteilung 5.1 ZGWS

sche verteilte (i.i.d) ZV mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dann gilt für hin-

reichend große n (>30) und  $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}$ 

näherungsweise: 
$$\sum_{i=1}^{n} X_{i} \sim N_{n\mu,n\sigma^{2}} \& \\ \frac{\sum_{i=1}^{X_{i}-n\mu} X_{i}}{\sqrt{n\cdot\sigma}} \sim N_{0,1} \\ \sum X_{i} \text{ bezieht sich auf Y; } \sum X_{i}-n\mu \text{ bezieht sich auf } X_{i}; \ \overline{X} \sim N_{\mu,\frac{\sigma^{2}}{\eta}} \& \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}; \\ \text{Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn}$$

die  $X_i$  abhängig und nicht identisch ver-

teilt sind, vorausgesetzt kein  $X_i$  ist deut-

lich dominanter?! als die anderen. Für 5.4.2 Stichprobenvarianz die Voraussetzung des ZGW ist, dass damit  $\sum_{i=1}^{n} X_i$  oder  $\overline{X}$  bei **hinreichend großem n** normalverteilt sind. Faustregel: **Je** schiefer die Verteilung der  $X_i$ **desto** größer muss n sein: n>30: falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung); n>15: falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist(Binomialverteilung);  $n \le 15$ : falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;

## 5.2 $\phi$ $\phi(-a) = 1 - \phi(a); \phi(a) =$ $1 - \phi(-a)$ ; $P(-a < Z < a) = \phi(a) - \phi(-a) =$ $\phi(a) - (1 - \phi(a)) = 2\phi(a) - 1$ or $1 - \phi(-a) - \phi(-a)$ $\phi(-a) = 1 - 2\phi(-a)$

ren bet unbekannter varianz; **verteiting**: 
$$Y \sim t_n$$
;  $E[Y] = 0$  für  $n > 1$ ;  $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$  für  $n > 2$ ; **R:**  $dt(y,n) = f(x)$ ;  $pt(y,n) = F(x)$ ;  $qt(y,n) = F^{-1}(x)$ ; **Eigenschaften**: Für  $n \rightarrow \infty$ :  $t_n \rightarrow N_{0,1}$ ; Achsensymmetrie  $-qnorm(p) = qnorm(1-p) \Leftrightarrow der Dichtefunktion  $\Rightarrow -y_p = x_{1-p} - \phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(1-p)$  **Zusammenhang**$ 

Aufgabentypen: Seien  $X_i$  i.i.d. ZV mit  $\mu$  und  $\sigma^2$ , aber unbekannter Verteilung. Dann sind  $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$  und  $Z_2 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$ näherungsweise standardnormalverteilt. • Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für  $\sum X_i, \overline{X}, Z_1$  oder  $Z_2$  berech-

• Es lässt sich n bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke k und Wahrscheinlichkeit p gilt:  $P(Z_i >$  $k \ge p$  or  $P(-k \le Z_i \le k) \ge p$ 5.4 Stichprobenverteilungen für nor $qnorm(1-\frac{\alpha}{2})$ 

malverteilte Grundgesamtheiten

## für Erwartungswert $\mu$ , d. h. $E[\overline{X}] = \mu$

5.4.1 Stichprobenmittel

die  $X_i$  nicht normalverteilt sein müssen., Die Stichprobenfunktion  $S^2$  $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$  $n\overline{X}^2$ )ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz  $\sigma^2$ , d. h.  $E[S^2] = \sigma^2$ ;  $E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}\sum X_i] =$  $\frac{1}{n}E[\sum X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}n\mu = \mu;$  $Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n^2}Var[\sum X_i] =$  $\frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ; Seien  $X_i(i = 1,...,n)$  un-

### $N_{0,1}$ ; $\frac{(n-1)S^2 = \sum (x-\overline{x})^2}{\sigma^2 \Rightarrow \text{Standardisierung}} \sim \chi_{n-1}^2$ ; **Bei** unbekannter Varianz: $\frac{X-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$ ; 6 Konfidenzintervall 6.1 Begriffe Irrtumswahrscheinlichkeit = $\alpha$ ; Konfi-

denzniveau =  $1 - \alpha$  = ; Konfidenzintervall 6.2 Punkschätzer E[X]: Stichprobenmittel:  $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ;

äbhängige normalverteilte ZV mit

Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dann

gilt: bei unbekannter Varianz:  $\frac{X-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$  ~

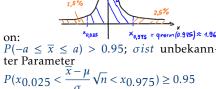
## Varianz: Stichprobenvarianz: $s^2 =$

 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ ; Schätzwert für wahren Parameter, aber keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung, Geringe Sicherheit für wahren Parameter;

mit vorgegebener Sicherheit; Voror Testgröße **TG** (häufig  $\bar{x}$ ) ist bekannt gabe (95% or 99%); Dichtefunktibis auf einen Parameter, z.B. μ, für den eine Hypothese aufgestellt wird. TG ~  $N_{u,\sigma^2}$ ; Nullhypothese:  $H_0$ : Angezweifelte Aussage, der widersprochen werden

Intervall für wahren Parameter,

6.3 Intervallschätzer



 $-1.96; N_{0.1}; 1.96;$ 6.4  $\mu$ , unbekannt,  $\sigma^2$ , bekannt  $I = ]\overline{X} - \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$ 

Die Stichprobenfunktion 
$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$
 ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für Erwartungswert  $\mu$ , d. h. $E[\overline{X}] = \mu$  5.4.2 Stichprobenvarianz

# 6.5 $\mu \& \sigma^2$ , unbekannt

 $I = \overline{X} - t_{n-1}^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1}^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}$ 

### 6.6 Zusammenfassung Wie verändert sich das $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall, n-größer ⇒ kürzer; 1- $\alpha$ größer $\Rightarrow$ I länger; Für

6.7 Aufgabentypen

 $\frac{L}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$ **Geg:** n, 1- $\alpha$ ; **Ges:** I s.o. **Geg:**  $\overline{X}$ ,  $\sigma$ , 1 –  $\alpha$ , L;  $L = 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ; Ges: n;  $\sqrt{n} > 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 

 $\frac{\alpha}{2}$ ) $\frac{\sigma}{L}$  Geg: n, I, L; Ges: 1-  $\alpha$ ; 1 -  $\frac{\alpha}{2}$  =

### 7 Hypothesentests Basierend auf n unabhängig und iden-

tisch Verteilte (i.i.d) Zufallsvariablen

 $X_1,...,X_n$  (Messungen) soll eine Entschei-Wird dann  $H_0$  verworfen, spricht man dung getroffen werden, ob eine Hypothevon einer signifikanten Schlussfolgerung. se für einen unbekannten Erwartungs-Kann  $H_0$  nicht verworfen werden, dann wert  $\mu$  gültig ist or nicht. lässt sich keine Aussage über den Fehler 7.1 Def

### $\alpha$ = Signifikanzniveau/ Fehlerwahrscheinlichkeit TG = Prüfgröße; TG\* =

standardisierte Prüfgröße; siginifikante Schlussfolgerung =  $H_0$  verworfen  $\rightarrow$  klassischer Parametertest; schwache Schlussfolgerung =  $H_0$  wird nicht verworfen  $\rightarrow$ klassischer Parametertest. p-Wert = beob-

kann, wenn die Stichprobe einen Gegenbeweis liefert.  $H_0: \mu = \mu_0$ ; Gegenhypo**these**  $H_1$ : Gegenteil von  $H_0$  z.B.  $H_1 \neq \mu_0$ ; 7.3 Ablehnungsbereich, Fehler 1. & 2. Treffen der Testentscheidung, basie-

5% φ-1/0,95)≈ 1,645

rend auf einer konkreten Stichprobe  $\{x_1,...,x_n\}$ ; Berechnung der Realisation  $tg = TG(x_1,...,x_n)$  der Prüfgröße TG; **Ab**lehnungsbereich / Kritischer Bereich C: Werte der Testgröße, die für H1, sprechen & bei Gültigkeit von  $H_0$  mit Wahrscheinlichkeit  $\leq \alpha$  (meist 0.1, 0.05, or 0.01) auftreten. Fehler 1. Art:α ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  verworfen wird, obwohl sie richtig ist. **Ånnahmebereich:** Komplement C des Ablehnungsbereichs.  $H_0$  kann nicht abgeleht werden, falls  $tg \in \overline{C}(P(tg \in \overline{C}) \ge 1 - \alpha)$ . Fehler 2. Art: Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Testentscheidung

H<sub>0</sub> wird nicht abgelehnt

7.2 Null- und Gegenhypothese

Modell: Verteilung der Grundgesamtheit

## 7.4 Klassischer Parametertest $H_0$ wird abgelehnt, falls tg =

 $TG(x_1,...,x_n) \in C$ ;  $H_0$  wird angenommen falls  $tg = TG(x_1,...,x_n) \in \overline{C}$ ; Der kritische Bereich ergibt sich analog zu den Konfidenzintervallen durch die

Vorgabe eines kleinen Signifikanzniveau α d.h. max. Wahrscheinlichkeit für

Fehler 1. Art, mit standardisierter Prüfgröße TG\* gilt:  $P(TG \in C) \le \alpha \Leftrightarrow TG^* \in$  $]-\infty; \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})[\cup]\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}); \infty[; P(TG \in$  $\overline{C}$ )  $\geq 1 - \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})];$ 

### 2. Art treffen & man spricht von einer schwachen Schlussfolgerung.

7.5 Zweiseitiger Gauß Test  $H_0: \mu = \mu_0$  gegen  $H_1: \mu \neq \mu_0$ ;  $\overline{X} \sim$ 

 $N_{\mu_0,\sigma_0^2/n} \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \sim N_{0,1}; P_{\mu 0}(\overline{X} \in$  $C) \le \alpha \Leftrightarrow |TG| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma_0} \sqrt{n} > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2});$ 

# achtetes Signifikanzniveau

Falls p - Wert > 10%: keine Signifikanz Hilfszettel zur Klausur von **JD**., Seite 4 von 4 Zusammenhang I & Hypothesen-**Testentscheidung:**  $H_0$  wird abgelehnt, tests zweiseitig falls  $|TG| > \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ ;  $H_0$  wird angenom-

7.6.2 rechtsseitig  $H_0: \mu \le \mu_0 \text{ gegen } H_1: \mu > \mu_0$  $P_{\mu 0}(\overline{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} < \sigma$ 

 $\phi^{-1}(\alpha)$ ; **Testentscheidung:**  $H_0$  wird abgelehnt falls,  $TG < \phi^{-1}(\alpha)$ ;  $H_0$ wird angenommen, falls  $TG \ge \phi^{-1}(\alpha)$ ; linksseitig: 1 verteilung der Testgröße

7.7 Varianten Gauß Test,  $\sigma^2$  bekannt,  $\mu$ unbekannt Prüfgröße $tg = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$ ;

men, falls  $|TG| \le \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ 

 $H_0: \mu \ge \mu_0 \text{ gegen } H_1: \mu < \mu_0$ 

7.6 Einseitiger Gauß Test

7.6.1 linksseitig

 $\mu = \mu_0 \mid \mu \neq \mu_0 \mid |tg| > \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$  $2(1 - \Phi(tg))$  $\mu \le \mu_0 \mid \mu > \mu_0 \mid$  $tg > \Phi^{-1} (1 - \alpha)$  $\mu \ge \mu_0 \mid \mu < \mu_0 \mid$  $tg < \Phi^{-1}(\alpha)$ 

**7.8 t-Test,**  $\mu$ ,  $\sigma^2$  unbekannt Prüfgröße  $tg = \frac{X - \mu_0}{S} \sqrt{n}$  $H_0 \mid H_1 \mid H_0$  ablehnen, falls  $\mu = \mu_0 \mid \mu \neq \mu_0 \mid |tg| > t_{n-1}^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \mid 2(1 - t_{n-1}(|tg|))$  $\mu \le \mu_0 \mid \mu > \mu_0 \mid$  $tg > t_{n-1}^{-1} (1 - \alpha)$  $tg < t_{n-1}^{-1}(\alpha)$  $\mu \ge \mu_0 \mid \mu < \mu_0 \mid$ 7.9 p-Wert

### Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von $H_0$

den beobachteten Wert tg der Prüfgröße or einen noch stärker von  $\mu_0$  abweichenden Wert zu bekommen. Der p-Wert zu einer Hypothese  $H_0$  ist der kleinste Wert von  $\alpha$ , für den  $H_0$  noch abgelehnt werden kann. **Je kleiner** der Wert, **desto** kleiner ist der Fehler 1. Art & umso signifikanter ist die Testentscheidung.

Nice to know Anhand des p-Werts kann man für beliebige Werte von  $\alpha$  eine Testentscheidung treffen; Falls p - Wert < 1%: sehr hohe Signifi-

Falls  $1\% \le p - Wert < 5\%$ : hohe Signifi-Falls  $5\% \le p - Wert \le 10\%$ : Signifikanz

zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ ;  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $\mu_0 \notin I$ ;  $H_0$  wird angenommen, falls  $\mu_0 \in I$ ; Das Konfidenzniveau

ist der Annahmebereich von H<sub>0</sub> zum Signifikanzniveau  $\alpha$ ; 7.11 Zusammenfassung klass. Hy-

### Signifikanzniveau $\alpha$ wird vorgegeben; $\alpha$ & Verteilung der Testgröße unter $H_0$ wir der Ablehnungsbereich ermittelt. Je kleiner (größer) $\alpha$ , desto kleiner (größ-

ter) ist der Ablehnungsbereich;

 $!: \alpha \& C$  hängen **nicht von** der konkreten Stichprobe ab;  $H_0$  wird abgelehnt, falls der ermittelte Wert der Testgröße (beobachteter Wert) in C liegt. !: Die tg hängt von der konkreten Stichprobe ab. Sie ist eine ZV. 7.12 Test mittels p-Wert  $\alpha$  wird vorgegeben. Berechnung des p-Werts anhand der kon-kreten Stichprobe mit der Verteilung der

Tg unter  $H_0$ ; !:Der p-Wert hängt von der konkreten Stichprobe ab, ist eine ZV. zweistiliger  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $p - Wert \le \alpha$ .; 8 Fehleranalyse

### rechtsschie Derzeit ausgeklammert 9 Interpolation linksschigt Zu gegebenen Punkten $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$

ist nicht eindeutig! Abhängig von der Funktionsklasse), so dass  $G(x_i) = y_i, i =$ 0, ..., n (Interpolations bedingung). Interpolation ist ungeeignet für verauschte Daten. Lösung: Approximation der kleinsten Ouadrate. 9.1 Begriffe

mit  $x_i \neq x_i$  für  $i \neq j$  eine Funktion G (dies

## 

ten"berechnen 9.2 Vandermonde/klassisch Unterschiedliche Darstellungen für ein Interpolations polynom  $G(x) = p_n(x)$ vom Grad n haben unterschiedliche Eigenschaften bei der nume-

Dividierende Differenzen 

Koeffizien-

ten ci lassen sich rekursiv durch wie-

derholte Bildung von "Differenzquotien-

# Berechnung. Monombasis:

 $x^0, x^1, x^2, x^3, ...; p_n(x) = a_n x^n + ... +$  $a_1x^1 + a_0x^0$ ; **Ziel:** Bestimmung d. Koeffizienten  $a_0, a_1, ..., a_n$  sodass  $a_0, a_1, ..., a_n$  $p_n(x_i) = y_i = a_n x_i^n + ... + a_1 x_i^1 + a_0 x^0$  für i = 0, ..., n; Für die eindeutige Lösung n+1  $a_1$ ) $x + a_0$ ; Allg.:  $p_n(x) = (...(a_n x + a_{n-1})x + a_n)$ Gleichungen: Interpolationsbedingun- ... +  $a_1$ )x +  $a_0$ ; Aufwand: n Mult.

9.7 Interpolationsfehler hinreichend glatt ist &

eindeutige Interpolationspolynom von Gradn n, dann gilt fürn den Interpolationsfehler:  $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)...(x - x_n)$ 

falls alle  $x_i$  verschieden); Rechenaufmit  $\theta \in [x_0; x_n]$ Vergleichbar zum Restglied bei der Taylorreihenentwicklung; Bemerkung: θ unbekannt, daher nur Fehlerabschätzung; Fehler ist Abhängig von der Verteilung der Stützstellen; Der Fehler ist bei großen n an den Intervallrändern deutlich größer, als in der Intervallmitte

## Runge Funktion $(f) = \frac{1}{1+25x^2}$ äquidistan-

den gegebenen Stützstellen liegen; Extrastellen, dichter an den Intervallgrenzen. polation (Näherungwerte für x-Werte au-9.7.2 Chebyshev-Punkte Darstellung des Interpolanten, die auf haben die Eigenschaft; senkrechte Projektion von gleichverteilten Punkten auf che Hinzunahme weiterer Punkte er-

**Vorteile:** Rechenaufwand  $\mathcal{O}(n^2)$  Gleitpunktoperationen; Hinzufügen weiterer Stützstellen ohne großen Aufwand. Andere Koeffizienten bleiben unverändert. 9.5 Dividierende Differenzen

9.6 Effizienz

Die Koeffizientenmatrix ist die sog. Van-

dermonde Matrix; Eigenschaften: Die

Vandermonde Matrix ist nicht singulär(

wand:  $\mathcal{O}(n^3)$ ; Für große n sehr schlecht

konditioniert & als Allgemeiner Ansatz

**2 Formeln**;  $p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$ ;  $L_k(x) \prod_{j=0; j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - y_j}$ ; Jede Basis-

funktion  $L_k(x)$  ist ein Polynom vom Grad

 $\leq n$ ; **Bemerkung:** Findet Anwendung bei

Numerischer Integration; Wenn Stützstel-

keine Neuberechnung; Rechenaufwand

 $\mathcal{O}((n+1)^2)$ ; Kommen neue Stützpunkte

hinzu ⇒ Neuberechnung!; Die Interpola-

tionspolynome liefern nur sinnvolle Nä-

**herungswerte** für x-Werte, die zwischen

ßerhalb der Stützstellen ) kann zu großen

ein gestaffeltes LGS führt & einfa-

Abweichungen führen.

 $c_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$ 

Polynom vom Grad n

tionsbedingungen?

9.4 Newton

ungeeignet.

9.3 Lagrange

## 9.6.1 klasisch $p_n(x) = a_n x^n + ... + a_0$ ; **Aufwand:** 2n-1 Mult.

9.6.2 Horner Schema

 $p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 + a_0 = ((a_3 + a_2)x + a_1)x + a_0$ 

### 9.7.1 Wahl der Stüztstellen len $x_i$ gleich bleiben & nur $y_i$ ändern $\Rightarrow$

te Stützstellen das Interpolationspolynom nicht immer gegen die zugrundelieturformel; K≜ Fehlerkonstante des Vergende stetige Funktion konvergiert, wenn die Anzahl der Stützstellen & damit 10.2 Newton-Cotes der Grad des Polynoms wächst. Lösung: Nicht-aquidistante Verteilung der Stütz-

dem Einheitskreis.  $t_k = cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k =$ laubt.  $p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + ... +$ 1, ..., n, auf - 1, 1[; Invtervall: a, b[:  $x_k =$  $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k$ .  $\Rightarrow$  Fehler wird gleichmäßiger verteiltund Konvergenz erreicht. Das Resultierende LGS für die Koeffizi-9.8 Schwächen der Polynominterpolaenten  $c_i$  hat gestaffelte Form. Interpola-

### Hoher Rechenaufwand bei meist keiner hoher Differenzierbarkeitsgrad benötigt wird; RB kann Interpolationsfehler sehr groß sein; Bei wachsenden n ist es un-

Jede Funktion  $S_i$  ist ein Polynom vom

Grad  $n \le k$ ; S(x) ist (k-1) - mal stetig dif-

ferenzierbar, d.h. für alle  $x_i$  (i = 1, ..., n-1)

möglich eine Konvergenz gegen die zu interpolierenden Funktion sicherzustellen;  $\hat{\mathbf{R}}$ : approx  $\hat{=}$  lin Interpolation; Spline ≜ Spline interpolation; Bibliotheken für Polynominterpolation; 9.9 Spline

gilt:  $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$ ;

### 9.9.1 Kubisch

**Ansatz:**  $S_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i)^2$  $d_i(x-x_i)^3$ ; Gleichungssystem: 4n Parameter  $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, ..., n - 1)$ ; 2n Interpolationsbedingungen: am Rand je nur eine.  $S_i x_i = y_i$ ;  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  für

# 10.2.1 Trapezregel

 $\sum f(t_i) \int_0^1 L_i(t) dt$ 

 $T_1: \int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{2}(f(0)+f(1)); \int_a^b f(x)dx \approx$  $\frac{(b-a)}{2}$  (f(a) + f(b));  $T_n$ : Für Teilintervalle mit gleicher Länge:  $h = \frac{b-a}{n}$ ;  $T_n = h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) +$ 

 $(i = 0, 1, ..., n - 1) \Rightarrow$  Stetigkeit; **Stetig**-

**keit der 1. Abl:**  $S_{i}'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}); \Leftrightarrow$ 

 $S'_{i}(x_{i+1}) - S'_{i+1}(x_{i+1}) = 0$ ; für i = 0, 1, ..., n -

2; Stetigkeit der 2. Abl.:  $S_i''(x_{i+1}) =$ 

 $S_{i+1}^{"}(x_{i+1}); S_{i}^{"}(x_{i+1}) - S_{i+1}^{"}(x_{i}+1) = 0;$ 

für i = 0, 1, ..., n - 2); natürlicher Rand-

**bedingungen:**  $S_0''(x_0) = 0$ ;  $S_{n-1}''(x_n) = 0$ ;

nach geschickter Umformung der Glei-

chungen hat das LGS Tridiagonalform.

**Rechenaufwand** O(n) Gleitpunktopera-

Verbesserung der Näherung: Aufteilung

in kleine Teilintervalle & Summe von

Rechtecksflächen bilden; Interpolations

mit Polynom höheren Gredes durch dis-

 $p_k = \text{Interpolationspolynom}$ ;  $I_n = \text{Quadra-}$ 

Das Intergral des  $p_k$  diens al Appr. für

das Int. von f(x);  $\int_0^1 f(t)dt \approx \int_0^1 p_k(t)dt =$ 

 $\sum_{i=0}^k \alpha_j f(t_j)$  Das Interpolationspolynom

muss nicht explizit aufgestellt werden, es dient vorab der Bestimmung der Ge-

wichte  $\alpha_i$ ;  $\int_0^1 p_k(t) = \int_0^1 \sum f(t_i) L_i(t) dt =$ 

tionen.

10 NumInt

krete Punkte.

10.1 Def

fahrens.

10.2.2 SimpsonRegel

 $S_1: \int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(0.5) + f(1));$  $\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b));$ 

Für n allg.:  $\frac{(b-a)}{2n} \frac{1}{3} (f(a) + 4(a+h) +$ 

... + 4f(b-h) + f(b)  $S_n$ : Beachte

gerade Anzahl an Teilinvervallen!;

Für 2n Teilintervalle, 2n+1 Knoten

mit gleicher Länge  $h = \frac{b-a}{2n}$ ;  $S_2 =$ 

 $\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4));$ 

Für n = 1:  $\frac{(b-a)}{2\cdot 1} \frac{1}{3} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b));$ 





Falls  $\alpha_i$  positiv. Integrationsregeln stabil;  $k \le 7\&\bar{k} = 9 \Rightarrow \text{positive Gewichte; Bei}$ halbierung der Intervalle Nachfrage vervierfacht or versechszehnfacht sich der Fehler?

### 10.3 Ordnung Integrationsregel

Eine Integrationsregel hat Ordnung p, wenn sie für Polynome vom Grad ≤ p-1 exakte Werte liefert;  $T_1$  Ordnung 2  $\Rightarrow$  exakt für Polynome Grad  $\leq 1$ ; Ordnung Newton-Cotes Regeln: mind. Ordnung k+1 (k: GRad des Interpolationspolynoms); **Beweis der Ordnung:** 1 =  $\int_0^1 x^0 dx \stackrel{!}{=} ; \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx \stackrel{!}{=} ; \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \stackrel{!}{=} ;$  $\frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 \stackrel{!}{=};$ 

### 10.4 Fehler Quadratur

Für (globalen ) Fehler  $e_{In} = \int_{a}^{b} f(x) dx - I_{n}$ einer Quadraturformel  $I_n$  der Ordnung pauf [a, b] gilt:  $|e_{In}| = (b-a)h^p K|f^{(p)}(\xi)|.\xi \in$  $]a,b[,h = \frac{b-a}{n} \& |e_{In}| \le (b-a)h^p K \cdot$  $max_{a \le x \le b} |f^{(p)}(x)|;$ 10.5 Fehler  $T_n$ 

Der Fehler ist proportional zu  $h^2$ ; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor  $\frac{1}{4}$ ; Ein Integral kann beliebig genau approx. werden, falls h entsprechend klein gewählt wird. Aber Rundungsfehler bei vielen Rechenoperationen, verschlechtert wieder das Ergebnis. Vorteil von Verfahren höherer Ordnung: Weniger Teilintervalle nötig.  $|e_{T_n}| \le \frac{h^2}{12}(b-a)max_{a \le x \le b}|f''(x)|, K =$ 

$$\frac{1}{12}$$
,  $h = \frac{b-a}{n}$ 
**10.6** Fehler  $S_n$ 

$$|e_{Sn}| \le \frac{h^4}{180}(b-a)max_{a \le x \le b}|f^4(x)|, h = \frac{(b-a)}{2n}, K = \frac{1}{180}$$

### 11 Allgemein 11.1 Symbole

Stichprobenstandardabweichung \(\hat{\pm}\) s; Standardabweichung  $\hat{=}\sigma$ 

### 11.2 Abl.

$$sinx \triangleq cosx; cosx \triangleq -sinx; tanx \triangleq \frac{1}{cos^2x} = 1$$

$$tan^2x; cotx \triangleq -\frac{1}{sin^2x} = -1 - cot^2x;$$

$$e^x \triangleq e^x; a^x \triangleq (\ln a) \cdot a^x;$$

$$\ln x \triangleq \frac{1}{x}; \log_a x \triangleq \frac{1}{(\ln a) \cdot x};$$

### 11.3 Abl.Regeln

**Faktorregel**  $y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$ ; Summerregel  $y = f_1(x) + f_2(x) + ... +$  $f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$ ; **Pro**duktregel  $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u;$  $y = u \cdot v \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot x';$ Quotientenregel  $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ; Kettenregel  $f'(x) = F'(u)u'(x) = \hat{F}'(u)$ : Ableitung der Äußeren Funktion; u'(x): Ableitung der Inneren Funktion 11.4 Integralregel, elementar **Faktorregel**  $\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx$ ; **Summenregel**  $\int_a^b [f_1(x) + ... + f_n(x)]dx =$  $\int_{a}^{b} f_{1}(x)dx + ... + \int_{a}^{b} f_{n}(x)dx$ ; Vertauschungsregel  $\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$ ;  $\int_a^a f(x)dx = 0$ ;  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx +$  $\int_{a}^{b} f(x)dx \text{ für } (a \le c \le b);$ 11.5 Berechnung best. Integr.  $\int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$ 

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$
**11.6 Potenzen**

$$a^{0} = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n} text f r a \neq 0$$

$$!(a^{m})^{n} = (a^{n})^{m} = a^{m\cdot n}$$

$$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$$

$$\frac{a^{n}}{b^{n}} = (\frac{a}{b})^{n} \text{ für } b \neq 0$$

$$m, n \in \mathbb{N}^{*};$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a > 0, b > 0:$$
beliebig reele
$$Exponenten$$

$$a > 0: a^{b}$$

$$= e^{b \ln a}$$

### 11.7 Wurzel

$$\sqrt{a^2} = |a|; b = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}};$$
$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m}{\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

### 11.9 Bin.Formel

**11.9** Bin. Formel 
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
 1. Binom;  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + b^2$  1. Binom;  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + b^2$ ;  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ; 2. Binom;  $(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + b^2$ ;  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ; 2. Binom;  $(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  $(a-b)^4 = a^4 + 4a^3b + b^2$ ;  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  $(a-b)^4 = a^4 + 4a^3b + b^2$ ;  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + ab^2 + b^3$ ;  $(a-b)^4 = a^4 + a^3b + b^4$ ;  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + ab^2 + b^3$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + ab^2 + b^3$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + ab^2 + b^3$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + ab^2 + ab^3 + b^3$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + ab^2 + ab^3 + b^3$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + ab^2 + ab^3 + b^3$ ;  $(a+b)^3 = a^3 + ab^3 + ab^$ 

11.10 Einigungen

(3)

 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  3. Binom;

· Beim Runden mind. eine Nachkommastelle.