R:sd(x)1 BeschreibendeStatistik  $s = \sqrt{s}$  Streuungsmaß mit gleicher Einheit 1.1 Begriffe wie beobachteten Daten  $x_i.\bar{x}$  minimiert 1.1.1 Beschreibende/Deskriptive die "quadratische Verlustfunktionöder Statistik die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an. Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakteri-1.5 p-Quantile siert und durch geeignete Grafiken an-R:quantile(x, p). Teilt die sortierten Daschaulich gemacht. ten  $x_i$  ca. im Verhältnis p: (1-p) d.h. 1.1.2 Schließende/Induktive Sta-Quantil; 3. Quartil = 0.75-Quartil; 1.6 Interquartilsabstand I Aus beobachtete Daten werden Schlüsse gezogen und diese im Rahmen vorgegeungsparameter. bener Modelle der Wahrscheinlichkeits-1.7 Chebyshev theorie bewertet.

### $\Omega$ : Grundgesamtheit $\omega$ :Element oder Objekt der Grundgesamtheit diskret(<30

1.1.3 Grundgesamtheit

Hilfszettel zur Klausur von JD., Seite 1 von 4

Ausprägungen), stetig(≥30 Ausprägungen), univariat(p=1), mulivariat(p>1) 1.2 Lagemaße 1.2.1 Modalwerte  $x_{mod}$ Am häufigsten auftretende Ausprägungen (insbesondere bei qualitativen Merk-

### malen) 1.2.2 Mittelwert, quantitativ

R:mean(x)Schwerpunkt ten.**Empfindlich**gegemüber Ausreißern.  $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ 1.3 Median, quantitativ

### R:median(x)Liegt in der Mitt der sortierten Daten $x_i$ .

Unempfindlich gegenüber Ausreißern.

 $x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), \text{ falls n gerade} \end{cases}$ 

## 1.4 Streuungsmaße 1.4.1 Spannweite

 $\max x_i - \min x_i$ 

1.4.2 Stichprobenvarianz  $s^2$ 

### Verschiebungssatz: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}^2) = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2)$ $n\bar{x}^2$ ) Gemittelte Summe der quadrati-

schen Abweichung vom Mittelwert

## $\hat{F}(x_p) \approx p$ ; $\hat{F} = \text{kummul. rel. Häufigkeit}$ ; 1. Quartil = 0.25-Quantil; Median = 0.5-

1.4.3 Stichproben-

 $I = x_{0.75} - x_{0.25}$ . Ist ein weiterer Streu-

### $\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$ , für alle $k \ge 1 \overline{x}$ der Durchschnitt, s > 0 die Stichproben-

Standardabweichung von Beobachtungswerten  $x_1,...,x_n$ . Sei  $S_k = \{i, 1 \le i \le n : |x_i - \overline{x}| < k \cdot s\}$ ; Für eine beliebige Zahl  $k \ge 1$  liegen mehr als  $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$  Prozent der Daten im Intervall von  $\bar{x} - ks$  bis  $\overline{x} + ks$ . **Speziell:**Für k = 2 liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um  $\bar{x}$ . Für

k=3 liegen mehr als 89% der Daten im

3s-Bereich um 
$$\overline{x}$$
. Komplement Formulie-  
rung:  $\overline{S}_k = \{i | |x_i - \overline{x}| \ge k \cdot s\}; \frac{N(\overline{S}_k)}{n} \le \frac{1}{k^2};$   
Die Ungleichheit lifert nur eine sehr grobe Abschätzung, ist aber unabhängig  
von der Verteilung der Daten. Empirische Regeln 68% der Daten im Bereich

1.8 Korrelation Grafische Zusammenhang zwischen multivariaten Daten x und y durch ein Streudiagramm. Kennzahlen zur Untersuchung des Zusammenhangs: 1.8.1 Empirische Kovarianz

um  $\overline{x} \pm s$ . 95% um  $\overline{x} \pm 2s$ . 99.7% um  $\overline{x} \pm 3s$ .

## R:cov(x, y); $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) =$

 $S_{xv} < 0$  fallend; 1.8.2 Empirische Korrellationsko-

 $\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)-n\overline{xy}); S_{xy}>0 \text{ steigend};$ 

# R:cor(x,x); $r = \frac{s_{xy}}{s_x x_y}$ ; Näherungsweise lin.

Zusammenhang zw. x und y, falls  $|r| \approx 1$ ; Bemerkung: -Der Korrelationskoeffizient kann nur einen statistischen Zusammenhang beschreiben, keinen Kausalen; -Den Korrelationskoeffizient immer im Zusammenhang mit den Streudiagramm sehen (Anscombe-Quartett).

1.8.3 Regressionsgerade y  $y = mx + t \text{ mit } m = r \cdot \frac{s_y}{s_m} \text{ und } t = \overline{y} - m \cdot \overline{x};$ 

# standardabweichung

Für den Bereich  $|\pm 0.7|$  bis  $\pm 1 \Rightarrow$  linearer Zusammenhang. 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung 2.1 Begriffe **Ergebnisraum**  $\Omega$ : Menge aller möglichen

### Ergebnisse eines Experiments **Elementarereignis** $\omega \in \Omega$ : einzelnes Element von Q **Ereignis** $E \subseteq \Omega$ : beliebige Teilmenge des Ergebnisraums $\Omega$ heißt sicheres Ereignis, Ø heißt unmögliches Ereignis **Vereinigung** $E \cup F$ : Ereignis E oder Ereig-

Ereignis  $E_i$ tritt ein.

2.3 Wahrscheinlichkeit

2.4 Laplace-Experiment

 $0 \le P(E) \le 1$ ;  $P(\Omega) = 1$ ;

2.3.1 Satz 2.1

 $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ 

treten ein.

nis F treten ein.  $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ : mindestens ein **Schnitt**  $E \cap F$ : Ereignis E und Ereignis F  $P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$  $\bigcap_{i=1}^n E_i$  alle Ereignisse  $E_i$  treten ein. **Ge**genereignis  $\overline{E} = \Omega / E$ : Ereignis E tritt

#### nicht ein (Komplement von E) **Disjunkte Ereignisse**E und F: $E \cap F = \emptyset$ 2.2 De Morgan'schen Regeln $P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$ $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$ $\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$

 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ , falls  $E_i \cap E_j = \emptyset$ 

### $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ (Übungsaufgabe!!! Ergänzen)

#### Zufallsexperimente mit n gleich wahr- d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte scheinlichen Elementarereignissen. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit P(E) für $E \subseteq \Omega$ aus:

 $P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$  $\frac{\text{M\"achtigkeit von E}}{\text{M\"achtigkeit von }\Omega} = \frac{|E|}{\Omega} \mathbf{text}$ 2.5 Kombinatorik

### 2.5.1 Allgmeines Zählprinzip Anzahl der Möglihckeiten für ein k-

2.5.2 Permutationen

stufiges Zufallsexperiment mit  $n_i$  Vari-

anten im i-ten Schritt:  $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ 

### Anzahl einer n-elementigen Menge n-

maliges Ziehen ohne Zurücklgen mit Beachtung der Reihenfolge: n unterscheid**bare Elemente**:  $n! = n \cdot (n-1) t ext b f \dots 2 \cdot 1$ k Klassen mit je  $n_i$  nicht unterscheidbaren Elementen  $n = sum_k^{i=1} n_i$ :  $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_1!}$ 

mit Beachtung der Reihenfolge, mit Zurücklegen: nk ohne Beachtung der Reihenfolge, mit Zurücklegen  $\binom{n+k-1}{k}$ 2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Zurücklegen**:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ 

ohne Zurücklegen =  $k \le n$ . mit Zurücklegen = k > n möglich.

mit Beachtung der Reihenfolge, ohne

ohne Beachtung der Reihenfolge, ohne

## 2.6.1 Satz 2.2

Zurücklegen:  $\frac{n!}{(n-k)!}$ 

 $P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$  $\sum -1$ 

lichkeit

# 2.6.2 Satz der totalen Wahrschein-

Sei  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n E_i$  mit  $E_i \cap E_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ 

2.5.3 Anzahl k-elementigen Teil-  $= P(F) - P(F \cap \overline{E}) = P(E) - P(\overline{F} \cap E); P(\overline{F}|E) =$ 

mengen einer n-elementigen 1 - P(F|E)

Menge k-maliges Ziehen aus

einer n-elementigen Menge

Zerlegung bzw. eine Partition von  $\Omega$ . So- $P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i)$ 

Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten  $F \cap E_i$ 



2.6.3 Vierfeldertafel

### $P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E})$ $P(\overline{F}) = P(\overline{F} \cap E) + P(\overline{F} \cap E)$

E Ē P(FAE) P(FAE) P(F) P(FAE) P(FAE) P(F) P(E) P(E) | 1 Satz 2.2 oben:  $P(E \cap$ 

 $\overline{E}$ ,  $\overline{F}$  unabhängig **Bemerkung** · Stochastische Unabhängigkeit be-

gig sind, dann sind auch:

2.6.4 Formel von Bayes

 $P(F|E_k) \cdot P(E_k)$ 

 $P(F|E_i) \cdot P(E_i)$ 

len Wahrscheinlichkeit.

nicht ändert, d.h. falls

Hilfreich, wenn man man  $P(F|E_i)$  kennt,

aber nicht  $P(E_k|F)$  Satz 2.4  $P(E_k|F) =$ 

Nur Nenner!P(F) aus dem Satz der tota-

2.6.5 Stochastische Unabhängig-

**Uebung** Die Ereignisse E und F heißen

(stochastisch) unabhängig, wenn die

Information über das Eintreten des einen

Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für

das Eintreten des anderen Ereignisses

 $P(E|F) = P(E)oderP(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ 

Es gilt Falls die Ereignisse E, F unabhän-

- deutet nicht notwendigerweise eine kausale Abhängigkeit · Veranschaulichung mit Venn Dia-

 $E, \overline{F}$ 

 $P(E) = \frac{1}{2} = P(E(F))$ gramm stock unabhängig P(E) = 1 < P(E| 7) •  $A, B \neq \emptyset$  und  $A \cap B = \emptyset$  $P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$  $\emptyset \neq P(A) \cdot P(B)$  da P(A) > 0 und

## 3 Zufallsvariable

## Abbildung des abstrakte Ergebnisraums

### $\Omega$ auf $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ,

 $\omega \mapsto X(\omega) = \text{heißt Zufallsvariable (ZV). x}$ € R. heißt Realisation der ZV X.

• Diskrete ZV:  $X(\Omega) = x_1, ..., x_2 (n \in$  $\mathbb{N}$ ); z.B. X = "Augensumme beim"

=> A, B stochastisch abhängig

• Stetige ZV:  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ; "z.B. Körpergröße eines Menschen"

 $F = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$  Tafel

von JD., Seite 2 von 4 • Dichtefunktion fx  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 3.1 Verteilungsfunktion-allg. • Verteilungsfunktion F(x) ist stetig Die Wahrscheinlichkeit P(B) für ein Er-

### eignis B in **R** wird zurückgefürht auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden

Hilfszettel zur Klausur

Ereignisse in  $\Omega$ . Für jedes  $X \in \mathbb{R}$  ist die Verteilungsfunktion F:  $\mathbb{R} \to [0,1]$  einer ZV X definiert durch:  $F(x) = P(X \le x)$ •  $0 \le F(x) \le 1$ •  $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0 \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ 

•  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ 3.2 Diskrete ZVs

Für eine diskrete ZV X mit 
$$X(\Omega) = x_1,...,x_n$$
 ( n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch:

 $p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), \text{falls } x_i \in X(\Omega) \\ 0, sonst \end{cases}$ Es gilt: •  $F(x) = (P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$ 

bei der Realisation von  $x_i$ .

3.3 Stegite ZVs

 $X \leq b$ 

 $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ 

 $\sum_{i=1}^{n} g(x) \cdot p(x_i)$ Stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte f  $f: \mathbb{R} \to [0, \infty]$  definiert durch

## • $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ und

F'(x) = f(x)• F(x) ist stetig &  $P(a < X \le b) =$  $P(a \le X \le b)$  wegen P(X = a) = 03.4 Verteilungsfunktion

# $\int_{\mathbf{Untergrenze}}^{x} \mathbf{Es}$ wird normal mit - Inte-

3.5 Zusammenfassung 3.5.1 Diskrete ZV

- Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p(x) \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1x_i$  ist Realisation der ZV. • Verteilungsfunktion F(x) ist rechts-
- seitig stetige Treppenfunktion. **Sprunghöhen:** $P(X = x_i) = F(x_i) \lim_{x \to x_i -} \neq 0$ •  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \ne P(a \le b)$

3.5.2 Stetige ZV

3.6 Erwartungswert

- mit  $F'(x) = f(x); P(X = x_i) = 0$ •  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = P(a \le b)$  $X \le b$ ) =  $F(a \le X < b) = P(a < X < b)$
- Der Erwartungswert E[X] = einer ZV X ist der Schwerpunkt ihrer Verteilung

### or der durchschnittliche zu erwartende Wert der ZV. • diskrete ZV: $E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$

- stetige ZV:  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$ ZV ist konstant. E[X] verhält sich linear. Eigenschaften von E[X]:
  - E[b] = b• E[aX + b] = aE[X] + b•  $E[X_i + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$
- 3.6.1 Satz 3.1

### Sei Y = g(X) eine Funktion der ZV X. Dann gilt: • für diskrete ZV:E[g(X)]

• für stetige ZV:  $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ f(x)dx. Das vertauschen von E und g nur bei linearen Funktionen  $m\ddot{o}glich. \Rightarrow g(E[X])$ Die Varianz einer ZV X mit  $\mu$  ist ein qua-  $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[x_{i}]=\frac{1}{n}\cdot n\cdot \mu=\mu$ 

## dratisches Streungsmaß. $\sigma^2 = Var[X] =$

g(X)Die Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche

 $E[(X-)^2]$  falls x stetig  $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)$ 

- Var[b] = 0•  $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$
- 3.7.1 Satz 3.2

Dimension von die ZV X.

 $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$  Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das einfach stehende x quadriert nicht f(x)!!! 3.8 Z-Transformation, Standardisie-

Sei X eine ZV mit  $\mu$  und  $\sigma$ . Dann ist  $Z = \frac{X - \mu}{\mu} = \frac{x}{\mu} - \frac{\mu(konstant)}{\mu(konstant)}$ 

(betragsmäßig) größer ist die Kovarianz. Falls X, Y stochastisch unabhängig  $\Rightarrow$ Cov[X,Y]=03.10 Satz 3.3  $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$ 

3.10.1 Varianz einer Summe von

### $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{i} Cov[X_i, X_i]; Var[X_1 +$ $X_2$ ] = $Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2]$

•  $Var[X_i + ... + X_n]$ 

!!!:  $Var[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$ 3.11 Overview  $\mu \sigma$ 

• Falls  $X_i, X_i$  paarweise unabhängig

3.11.1 E[X]

3.9 Kovarianz

• Cov[X, Y] = Cov[Y, X]

• Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y)

E[(X - E[X])(Y - E[Y]) Die Kovarianz

beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X

und Y. Je stärker diese Korrelieren, desto

definiert durch Cov[X, Y] =

• Cov[X,X] = Var[X]

Eigenschaften:

 $E[aX + b] = AE[X] + b; EX_1 + ... + E_n =$  $\sum_{i=1}^{n} E[X_i];$ Falls  $X_1, X_2$  unabhängig:

 $E[X_i] = \mu = E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)] =$ 

## 3.11.2 Varianz

Falls  $X_i$ ,  $X_j$  parweise unabhängig:

 $Var[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$ 

 $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$ 

 $|x_n| = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ 3.12 Quantile Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F(x) und 0 . Dann ist das p-Quantil definiert als der Wert  $x_p \in \mathbb{R}$  für den gilt:

 $F(x_p) \ge p$ . p-Quantil einer stetigen

ZV mit streng monoton wachsenden

 $F(x)x_p = F^{-1}(p)d$ . h. umkehrbar.

 $Var[X_i] = \sigma^2 \Longrightarrow Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}(x_1 + ... +$ 

Alle Werte  $\{x_1,...,x_n\}$ einer ZV X sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlich**-

ppois $(k, \lambda) = F(k)$ ;

scheinlichkeit;  $E[X] = p = \sum x_i \cdot p(x_i) = 1$ .  $p(1); Var[X] = p(1-p) = E[X^2] - (E[X])^2 =$ 

### Anzahl der Erfolge beim n-maligen Ziehenmit Zurücklegen; Wahr-

qbinom(q,n,p)=q-Quantil;

lung

fallszahlen;

4.1.2 Binominal verteilung

4 Spezielle Verteilung

 $p - p^2 = p(1 - p);$ 

4.1 Diskrete Verteilung

4.1.1 Bernouilliverteilung

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei

Erfolg und 0 bei Misserfolg; Wahrschein-

**lichkeit:**P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p;**Verteilung:**  $X \sim B_{1,p}$  p ist Erfolgswahr-

scheinlichkeit  $P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k$  $(1 - p)^{n-k}, k \in [0, 1, ..., n]$ ; Verteilung  $X \sim B_{n,p}$ ; E[X] = np; Var[X] =np(1 - p); **R**: dbinom(k,n,p)=P(X=k) ≜Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion; pbinom(k,n,p)=F(k)≜Verteilungsfunktion;

rbinom(k,n,p)≜kbinomialverteilte Zu-

4.1.3 Hypergeometrische Vertei-

Anzahl der Erfolge beim n-maligen

Ziehen ohne Zurücklegen aus einer

ist insbesondere Grenzverteilung  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)};$  Verteilung:

Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten, und N Elementen, die Misserfolg bedeuten. Gesamtumfang = M + N; Wahrscheinlichkeit P(X = k) =malstelle von f(x) bei  $x = \mu$ ; Wende- $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{k}}, k \in \{0,1,...,min\{n,M\}\};$  **Verstelle** von f(x) bei  $x = \mu \pm \sigma$ ; E[aX + b] =

teilung  $X \sim H_{M,N,n}$ ;  $E[X] = n \frac{M}{M+N}$ ;  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  ~  $N_{0,1}$ ;  $X_1$  ~  $N_{\mu_1,\sigma_1^2}$  und  $X_2$  ~  $\frac{M}{M+N}$   $\hat{=} Tref ferwahrscheinlichkeit;$  $Var[X] = n \frac{M}{M+N} (1 - \frac{M}{M+N}) \frac{M+N-n}{M+N-1};$   $\rightarrow 1$  falls n klein im Verhältnis zu  $N_{\mu_2,\sigma_2^2} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2};$ 

 $X_1, X_2$  stochastisch unabhängig M+N; **R**: dhyper(k, M, N, n) = P(X = k); 4.2.3 Standardnormalverteilung

### 4.1.4 Poisson-Verteilung

phyper(k, M, N, n) = F(k);

nem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge  $\lambda$  pro Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt.  $k \in \mathbb{N}_0 \rightarrow diskret$  Wahrscheinlich- $\mathbf{keit}P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \text{ mit } \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)$ k) = 1,  $da \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ ; Verteilung  $X \sim P_{\lambda}$ ;  $E[X] = \lambda, da \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k}}{k!} e^{-\lambda} =$  $e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} = \lambda;$  werte:  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$ 

Verteilung der seltenen Ereignisse Häu-

figkeit punktförmiger Ereignisse in ei-

keit  $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ ; Verteilung  $X \sim U_{\{x_1,...,x_n\}}; E[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \overline{x};$ 

4.1.5 Gleichverteilung

 $Var[X] = \lambda \mathbf{R} : \frac{d}{pois}(k, \lambda) = P(X = k);$ 

 $Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2$ ; **R:** sample(1 :N, n)  $\hat{=}$  n Zufallszahlen zwischen 1 und

4.2 Gleichverteilung 4.2.1 Stetige Gleichverteilung

### Zufallszahlen aus einem Intervall [a, b]; **Dichte:** $f(x) = \frac{1}{h-a}$ für $x \in [a,b]$ ;

4.2.2 Normalverteilung

### Beschreibt viele reale Situationen,

unabhängiger Summen; Dichte:

 $X \sim N_{u.\sigma^2}$ ;  $E[X] = \mu$ ;  $Var[X] = \sigma^2$ ; **R**:

aE[X] + b;  $Var[aX + b] = a^2Var[X]$ ;  $X \sim N_{\mu,\sigma^2} \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu+b,a^2\sigma^2}$  und

Dichte:  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{1}{2}x^2)}$ ; Verteilung

 $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ ; Quantile:  $\phi(-x) = 1$ 

 $\phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p} \text{ z.B. } -x_{0.25} = x_{0.75};$ 

**Verteilung:**  $X \sim U_{[a,b]}$ ;  $E[X] = \frac{a+b}{2}$ ;

 $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \mathbf{R} : \frac{d}{dunif}(x, a, b) = f(x);$ 

punif(x, a, b) = F(x); runif(n) = n Zufalls-

zahlen zwischen 0 und 1; runif(n, a, b) =

n Zufallszahlen zwischen a und b;

 $dnorm(x, \mu, \sigma) = f(x); pnorm(x, \mu, \sigma) =$ F(x); qnorm $(q, \mu, \sigma)$ : q - Quantil; **Maxi**-

Hilfszettel zur Klausur von **JD**., Seite 3 von 4 4.2.4 Exponentialverteilung Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei  $Y_t \sim P_{\lambda t}$  im Intervall [0,t]von t Zeiteinheiten, dann beschreibt

Seien  $X_i$  (i = 1,...,n) unabhängige identi-

$$pexp(x, \lambda) = F(x)$$
; Eigenschaft: Eine exponentialverteile ZV X ist gedächtnislos, d.h.  $P(X > s + t)|X > t = P(X > s)$ ; Verteilungsfunktion

die Exponentialverteilung die Wartezeit

X bis zum Eintreten eines Ereignis-

ses; Dichte- und Verteilungsfunktion:

 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \ge 0)$  und F(x) = 1 -

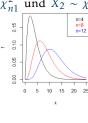
 $e^{-\lambda x}$ ; Verteilung:  $X \sim Exp_{\lambda}$ ; E[X] =

 $\frac{1}{1} \Rightarrow$  Berechnung mit partieller Integra-

tion;  $Var[X] = \frac{1}{12}$ ; **R**:  $dexp(x, \lambda) = f(x)$ ;

### 4.2.5 Chiquadrat-Verteilung $Z_1,...,Z_n$ seien unabhängige, standard-

normalverteilte ZV  $\Rightarrow X = Z_1^2 + Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden; Anwendungsmodell: Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung:**  $X \sim \chi_n^2$ ; E[X] =n; Var[X] = 2n; **R**:  $\frac{d}{d}chisq(x,n) = f(x)$ ; ppchisq(x,n) = F(x); Eigenschaft:  $X_1 \sim$  $\chi_{n_1}^2$  und  $X_2 \sim \chi_2^2 \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi_{n_1 + n_2}$ 



### 4.2.6 t-Verteilung $Z \sim N_{0.1}$ und $X \sim \chi_n^2 \Rightarrow Y = \frac{Z}{X}$ ist t-

verteilt mit n Freiheitsgraden; Anwendungsmodell: Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; Verteilung:  $Y \sim t_n$ ; E[Y] = 0 für n > 1;  $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$ für n > 2; **R**:  $\frac{d}{dt}(y, n) = f(x)$ ; pt(y, n) = F(x);  $qt(y,n) = F^{-1}(x)$ ; Eigenschaften: Für  $n \to \infty$ 

der Dichtefunktion  $\Rightarrow -y_p = x_{1-p}$ 

Abbildung Dichtefunktion 5 Zentraler Grenzwertsatz  $\mu\sigma^2$  bekannt aber nicht die Verteilung 5.1 ZGWS

sche verteilte (i.i.d) ZV mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dann gilt für hin-

reichend große n (>30) und  $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}$ 

näherungsweise: 
$$\sum_{i=1}^{n} X_{i} \sim N_{n\mu,n\sigma^{2}} \& \\ \frac{\sum_{i=1}^{X_{i}-n\mu} X_{i}}{\sqrt{n\cdot\sigma}} \sim N_{0,1} \\ \sum X_{i} \text{ bezieht sich auf Y; } \sum X_{i}-n\mu \text{ bezieht sich auf } X_{i}; \ \overline{X} \sim N_{\mu,\frac{\sigma^{2}}{\eta}} \& \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}; \\ \text{Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn}$$

die  $X_i$  abhängig und nicht identisch ver-

teilt sind, vorausgesetzt kein  $X_i$  ist deut-

lich dominanter?! als die anderen. Für 5.4.2 Stichprobenvarianz die Voraussetzung des ZGW ist, dass damit  $\sum_{i=1}^{n} X_i$  oder  $\overline{X}$  bei **hinreichend großem n** normalverteilt sind. Faustregel: **Je** schiefer die Verteilung der  $X_i$ **desto** größer muss n sein: n>30: falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung); n>15: falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist(Binomialverteilung);  $n \le 15$ : falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;

## 5.2 $\phi$ $\phi(-a) = 1 - \phi(a); \phi(a) =$ $1 - \phi(-a)$ ; $P(-a < Z < a) = \phi(a) - \phi(-a) =$ $\phi(a) - (1 - \phi(a)) = 2\phi(a) - 1$ or $1 - \phi(-a) - \phi(-a)$ $\phi(-a) = 1 - 2\phi(-a)$

ren bet unbekannter varianz; **verteiting:** 
$$Y \sim t_n$$
;  $E[Y] = 0$  für  $n > 1$ ;  $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$  für  $n > 2$ ; **R:**  $\frac{d}{dt}(y,n) = f(x)$ ;  $pt(y,n) = F(x)$ ;  $\frac{d}{dt}(y,n) = F^{-1}(x)$ ; **Eigenschaften:** Für  $n \rightarrow \infty$ :  $t_n \rightarrow N_{0,1}$ ; Achsensymmetrie  $t_n \rightarrow N_{0,1}$ ; Achsensymmetrie  $t_n \rightarrow N_{0,1}$ ; Achsensymmetrie  $t_n \rightarrow N_{0,1}$ ;  $t_n \rightarrow N_{0$ 

Aufgabentypen: Seien  $X_i$  i.i.d. ZV mit  $\mu$  und  $\sigma^2$ , aber unbekannter Verteilung. Dann sind  $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$  und  $Z_2 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$ näherungsweise standardnormalverteilt. • Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für  $\sum X_i, \overline{X}, Z_1$  oder  $Z_2$  berech-

• Es lässt sich n bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke k und Wahrscheinlichkeit p gilt:  $P(Z_i >$  $k \ge p$  or  $P(-k \le Z_i \le k) \ge p$ 5.4 Stichprobenverteilungen für nor $qnorm(1-\frac{\alpha}{2})$ 

malverteilte Grundgesamtheiten

## für Erwartungswert $\mu$ , d. h. $E[\overline{X}] = \mu$

5.4.1 Stichprobenmittel

die  $X_i$  nicht normalverteilt sein müssen., Die Stichprobenfunktion  $S^2$  $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$  $n\overline{X}^2$ )ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz  $\sigma^2$ , d. h.  $E[S^2] = \sigma^2$ ;  $E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}\sum X_i] =$  $\frac{1}{n}E[\sum X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}n\mu = \mu;$  $Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n^2}Var[\sum X_i] =$  $\frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ; Seien  $X_i(i = 1,...,n)$  un-

### $N_{0,1}$ ; $\frac{(n-1)S^2 = \sum (x-\overline{x})^2}{\sigma^2 \Rightarrow \text{Standardisierung}} \sim \chi_{n-1}^2$ ; **Bei** unbekannter Varianz: $\frac{X-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$ ; 6 Konfidenzintervall 6.1 Begriffe Irrtumswahrscheinlichkeit = $\alpha$ ; Konfi-

denzniveau =  $1 - \alpha$  = ; Konfidenzintervall 6.2 Punkschätzer E[X]: Stichprobenmittel:  $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ;

äbhängige normalverteilte ZV mit

Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dann

gilt: bei unbekannter Varianz:  $\frac{X-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$  ~

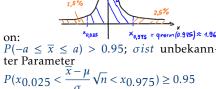
## Varianz: Stichprobenvarianz: $s^2 =$

 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ ; Schätzwert für wahren Parameter, aber keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung, Geringe Sicherheit für wahren Parameter;

mit vorgegebener Sicherheit; Voror Testgröße **TG** (häufig  $\bar{x}$ ) ist bekannt gabe (95% or 99%); Dichtefunktibis auf einen Parameter, z.B. μ, für den eine Hypothese aufgestellt wird. TG ~  $N_{u,\sigma^2}$ ; Nullhypothese:  $H_0$ : Angezweifelte Aussage, der widersprochen werden

Intervall für wahren Parameter,

6.3 Intervallschätzer



 $-1.96; N_{0.1}; 1.96;$ 6.4  $\mu$ , unbekannt,  $\sigma^2$ , bekannt  $I = ]\overline{X} - \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$ 

Die Stichprobenfunktion 
$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$
 ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für Erwartungswert  $\mu$ , d. h. $E[\overline{X}] = \mu$  5.4.2 Stichprobenvarianz

# 6.5 $\mu \& \sigma^2$ , unbekannt

 $I = \overline{X} - t_{n-1}^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1}^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}$ 

### 6.6 Zusammenfassung Wie verändert sich das $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall, n-größer ⇒ kürzer; 1- $\alpha$ größer $\Rightarrow$ I länger; Für

6.7 Aufgabentypen

 $\frac{L}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$ **Geg:** n, 1- $\alpha$ ; **Ges:** I s.o. **Geg:**  $\overline{X}$ ,  $\sigma$ , 1 –  $\alpha$ , L;  $L = 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ; Ges: n;  $\sqrt{n} > 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 

 $\frac{\alpha}{2}$ ) $\frac{\sigma}{L}$  Geg: n, I, L; Ges: 1-  $\alpha$ ; 1 -  $\frac{\alpha}{2}$  =

### 7 Hypothesentests Basierend auf n unabhängig und iden-

tisch Verteilte (i.i.d) Zufallsvariablen

 $X_1,...,X_n$  (Messungen) soll eine Entschei-Wird dann  $H_0$  verworfen, spricht man dung getroffen werden, ob eine Hypothevon einer signifikanten Schlussfolgerung. se für einen unbekannten Erwartungs-Kann  $H_0$  nicht verworfen werden, dann wert  $\mu$  gültig ist or nicht. lässt sich keine Aussage über den Fehler 7.1 Def

#### $\alpha$ = Signifikanzniveau/ Fehlerwahrscheinlichkeit TG = Prüfgröße; TG\* =

standardisierte Prüfgröße; siginifikante Schlussfolgerung =  $H_0$  verworfen  $\rightarrow$  klassischer Parametertest; schwache Schlussfolgerung =  $H_0$  wird nicht verworfen  $\rightarrow$ klassischer Parametertest. p-Wert = beob-

kann, wenn die Stichprobe einen Gegenbeweis liefert.  $H_0: \mu = \mu_0$ ; Gegenhypo**these**  $H_1$ : Gegenteil von  $H_0$  z.B.  $H_1 \neq \mu_0$ ; 7.3 Ablehnungsbereich, Fehler 1. & 2. Treffen der Testentscheidung, basie-

5% φ-1/0,95)≈ 1,645

rend auf einer konkreten Stichprobe  $\{x_1,...,x_n\}$ ; Berechnung der Realisation  $tg = TG(x_1,...,x_n)$  der Prüfgröße TG; **Ab**lehnungsbereich / Kritischer Bereich C: Werte der Testgröße, die für H1, sprechen & bei Gültigkeit von  $H_0$  mit Wahrscheinlichkeit  $\leq \alpha$  (meist 0.1, 0.05, or 0.01) auftreten. Fehler 1. Art:α ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  verworfen wird, obwohl sie richtig ist. **Ånnahmebereich:** Komplement C des Ablehnungsbereichs.  $H_0$  kann nicht abgeleht werden, falls  $tg \in \overline{C}(P(tg \in \overline{C}) \ge 1 - \alpha)$ . Fehler 2. Art: Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Testentscheidung

H<sub>0</sub> wird nicht abgelehnt

7.2 Null- und Gegenhypothese

Modell: Verteilung der Grundgesamtheit

## 7.4 Klassischer Parametertest $H_0$ wird abgelehnt, falls tg =

 $TG(x_1,...,x_n) \in C$ ;  $H_0$  wird angenommen falls  $tg = TG(x_1,...,x_n) \in \overline{C}$ ; Der kritische Bereich ergibt sich analog zu den Konfidenzintervallen durch die

Vorgabe eines kleinen Signifikanzniveau α d.h. max. Wahrscheinlichkeit für

Fehler 1. Art, mit standardisierter Prüfgröße TG\* gilt:  $P(TG \in C) \le \alpha \Leftrightarrow TG^* \in$  $]-\infty; \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})[\cup]\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}); \infty[; P(TG \in$  $\overline{C}$ )  $\geq 1 - \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})];$ 

### 2. Art treffen & man spricht von einer schwachen Schlussfolgerung.

7.5 Zweiseitiger Gauß Test  $H_0: \mu = \mu_0$  gegen  $H_1: \mu \neq \mu_0$ ;  $\overline{X} \sim$ 

 $N_{\mu_0,\sigma_0^2/n} \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \sim N_{0,1}; P_{\mu 0}(\overline{X} \in$  $C) \le \alpha \Leftrightarrow |TG| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma_0} \sqrt{n} > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2});$ 

# achtetes Signifikanzniveau

Falls p - Wert > 10%: keine Signifikanz Hilfszettel zur Klausur von **JD**., Seite 4 von 4 Zusammenhang I & Hypothesen-**Testentscheidung:**  $H_0$  wird abgelehnt, tests zweiseitig falls  $|TG| > \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ ;  $H_0$  wird angenom-

men, falls  $|TG| \le \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ 7.6 Einseitiger Gauß Test 7.6.1 linksseitig

## $H_0: \mu \ge \mu_0 \text{ gegen } H_1: \mu < \mu_0$ 7.6.2 rechtsseitig

## $H_0: \mu \le \mu_0 \text{ gegen } H_1: \mu > \mu_0$

 $P_{\mu 0}(\overline{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} < \sigma$  $\phi^{-1}(\alpha)$ ; **Testentscheidung:**  $H_0$  wird abgelehnt falls,  $TG < \phi^{-1}(\alpha)$ ;  $H_0$ wird angenommen, falls  $TG \ge \phi^{-1}(\alpha)$ ; linksseitig: 1 verteilung der Testgröße

7.7 Varianten Gauß Test,  $\sigma^2$  bekannt,  $\mu$ unbekannt

# Prüfgröße $tg = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$ ; $\mu = \mu_0 \mid \mu \neq \mu_0 \mid |tg| > \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

 $\mu \le \mu_0 \mid \mu > \mu_0 \mid$  $tg > \Phi^{-1} (1 - \alpha)$  $\mu \ge \mu_0 \mid \mu < \mu_0 \mid$  $tg < \Phi^{-1}(\alpha)$ **7.8 t-Test,**  $\mu$ ,  $\sigma^2$  unbekannt

Prüfgröße  $tg = \frac{X - \mu_0}{S} \sqrt{n}$  $H_0 \mid H_1 \mid H_0$  ablehnen, falls  $\mu = \mu_0 \mid \mu \neq \mu_0 \mid |tg| > t_{n-1}^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \mid 2(1 - t_{n-1}(|tg|))$  $\mu \le \mu_0 \mid \mu > \mu_0 \mid$  $tg > t_{n-1}^{-1} (1 - \alpha)$  $tg < t_{n-1}^{-1}(\alpha)$  $\mu \ge \mu_0 \mid \mu < \mu_0 \mid$ 7.9 p-Wert

## Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von $H_0$

den beobachteten Wert tg der Prüfgröße or einen noch stärker von  $\mu_0$  abweichen-

den Wert zu bekommen. Der p-Wert zu einer Hypothese  $H_0$  ist der kleinste Wert von  $\alpha$ , für den  $H_0$  noch abgelehnt werden kann. **Je kleiner** der Wert, **desto** kleiner ist der Fehler 1. Art & umso signifikanter ist die Testentscheidung. Nice to know Anhand des p-Werts kann man für beliebige Werte von  $\alpha$  eine

### Testentscheidung treffen; Falls p - Wert < 1%: sehr hohe Signifi-Falls $1\% \le p - Wert < 5\%$ : hohe Signifi-

Falls  $5\% \le p - Wert \le 10\%$ : Signifikanz

### zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ ; $H_0$ wird abgelehnt, falls $\mu_0 \notin I$ ; $H_0$ wird angenommen, falls $\mu_0 \in I$ ; Das Konfidenzniveau

ist der Annahmebereich von H<sub>0</sub> zum Signifikanzniveau  $\alpha$ ; 7.11 Zusammenfassung klass. Hy-

### Signifikanzniveau $\alpha$ wird vorgegeben; $\alpha$ & Verteilung der Testgröße unter $H_0$ wir der Ablehnungsbereich ermittelt. Je kleiner (größer) $\alpha$ , desto kleiner (größter) ist der Ablehnungsbereich;

 $!: \alpha \& C$  hängen **nicht von** der konkreten

Stichprobe ab;  $H_0$  wird abgelehnt, falls der ermittelte Wert der Testgröße (beobachteter Wert) in C liegt. !: Die tg hängt von der konkreten Stichprobe ab. Sie ist eine ZV. 7.12 Test mittels p-Wert  $\alpha$  wird vorgegeben. Berechnung des p-Werts anhand der kon-kreten Stichprobe mit der Verteilung der Tg unter  $H_0$ ; !:Der p-Wert hängt von der konkreten

zweischiger  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $p - Wert \le \alpha$ .; 9.4 Newton 8 Fehleranalyse ein gestaffeltes LGS führt & einfarechtsschie Derzeit ausgeklammert che Hinzunahme weiterer Punkte er-9 Interpolation laubt.  $p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + ... +$ linksschigt Zu gegebenen Punkten  $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$ 

Stichprobe ab, ist eine ZV.

### mit $x_i \neq x_i$ für $i \neq j$ eine Funktion G (dies ist nicht eindeutig! Abhängig von der Funktionsklasse), so dass $G(x_i) = y_i, i =$

0, ..., n (Interpolations bedingung). Interpolation ist ungeeignet für verauschte Daten. Lösung: Approximation der kleinsten Ouadrate. 9.1 Begriffe 

Dividierende Differenzen 

Koeffizien-

ten ci lassen sich rekursiv durch wie-

derholte Bildung von "Differenzquotien-

ten"berechnen 9.2 Vandermonde/klassisch Unterschiedliche Darstellungen für ein Interpolations polynom  $G(x) = p_n(x)$ vom Grad n haben unterschiedliche Eigenschaften bei der nume-Berechnung. Monombasis:

## $x^0, x^1, x^2, x^3, ...; p_n(x) = a_n x^n + ... +$ $a_1x^1 + a_0x^0$ ; **Ziel:** Bestimmung d. Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ sodass

 $a_0, a_1, ..., a_n$  $p_n(x_i) = y_i = a_n x_i^n + ... + a_1 x_i^1 + a_0 x^0$  für i = 9.7 Interpolationsfehler hinreichend glatt ist &

eindeutige Interpolati- $S'_{i}(x_{i+1}) - S'_{i+1}(x_{i+1}) = 0$ ; für i = 0, 1, ..., n onspolynom von Gradn n, dann gilt fürn den Interpolationsfehler: 2; Stetigkeit der 2. Abl.:  $S_i''(x_{i+1}) =$  $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)...(x - x_n)$  $S_{i+1}^{"}(x_{i+1}); S_{i}^{"}(x_{i+1}) - S_{i+1}^{"}(x_{i}+1) = 0;$ für i = 0, 1, ..., n - 2); natürlicher Rand**bedingungen:**  $S_0''(x_0) = 0$ ;  $S_{n-1}''(x_n) = 0$ ; nach geschickter Umformung der Gleichungen hat das LGS Tridiagonalform.

Vandermonde Matrix ist nicht singulär (falls alle 
$$x_i$$
 verschieden); Rechenaufwand:  $\mathcal{O}(n^3)$ ; Für große n sehr schlecht konditioniert & als Allgemeiner Ansatz ungeeignet.

9.3 Lagrange
2 Formeln;  $p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$ ;  $L_k(x) \prod_{j=0; j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-y_j}$ ; Jede Basis-

#### Runge Funktion $(f) = \frac{1}{1+25x^2}$ äquidistante Stützstellen das Interpolationspolylen $x_i$ gleich bleiben & nur $y_i$ ändern $\Rightarrow$ keine Neuberechnung; Rechenaufwand

Nicht-aquidistante Verteilung der Stützstellen, dichter an den Intervallgrenzen. 9.7.2 Chebyshev-Punkte

dem Einheitskreis.  $t_k = cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k =$ 

1, ..., n, auf - 1, 1; Invtervall: a, b:  $x_k =$ 

Das Resultierende LGS für die Koeffizienten  $c_i$  hat gestaffelte Form. Interpola-

**Vorteile:** Rechenaufwand  $\mathcal{O}(n^2)$  Gleitpunktoperationen; Hinzufügen weiterer

Stützstellen ohne großen Aufwand. Andere Koeffizienten bleiben unverändert. 9.5 Dividierende Differenzen

# 9.6 Effizienz

Die Koeffizientenmatrix ist die sog. Van-

dermonde Matrix; Eigenschaften: Die

Vandermonde Matrix ist nicht singulär(

wand:  $\mathcal{O}(n^3)$ ; Für große n sehr schlecht

konditioniert & als Allgemeiner Ansatz

funktion  $L_k(x)$  ist ein Polynom vom Grad

 $\mathcal{O}((n+1)^2)$ ; Kommen neue Stützpunkte

hinzu ⇒ Neuberechnung!; Die Interpola-

tionspolynome liefern nur sinnvolle Nä-

**herungswerte** für x-Werte, die zwischen

den gegebenen Stützstellen liegen; Extra-

polation (Näherungwerte für x-Werte au-

ßerhalb der Stützstellen ) kann zu großen

Abweichungen führen.

 $c_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$ 

Polynom vom Grad n

tionsbedingungen?

ungeeignet.

9.3 Lagrange

## 9.6.1 klasisch $p_n(x) = a_n x^n + ... + a_0$ ; **Aufwand:** 2n-1 Mult.

## 9.6.2 Horner Schema

 $p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 + a_0 = ((a_3 + a_2)x + a_1)x + a_0$ 0, ..., n; Für die eindeutige Lösung n+1  $a_1$ ) $x + a_0$ ; Allg.:  $p_n(x) = (...(a_n x + a_{n-1})x + a_n)$ Gleichungen: Interpolationsbedingun- ... +  $a_1$ )x +  $a_0$ ; Aufwand: n Mult.

#### $\leq n$ ; **Bemerkung:** Findet Anwendung bei 9.7.1 Wahl der Stüztstellen Numerischer Integration; Wenn Stützstel-

nom nicht immer gegen die zugrundeliegende stetige Funktion konvergiert, wenn die Anzahl der Stützstellen & damit der Grad des Polynoms wächst. Lösung:

### Darstellung des Interpolanten, die auf haben die Eigenschaft; senkrechte Projektion von gleichverteilten Punkten auf

 $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k$ .  $\Rightarrow$  Fehler wird gleichmäßiger verteiltund Konvergenz erreicht. 9.8 Schwächen der Polynominterpola-

#### Hoher Rechenaufwand bei meist keiner hoher Differenzierbarkeitsgrad benötigt wird; RB kann Interpolationsfehler sehr groß sein; Bei wachsenden n ist es unmöglich eine Konvergenz gegen die zu

interpolierenden Funktion sicherzustellen;  $\hat{\mathbf{R}}$ : approx  $\hat{=}$  lin Interpolation; Spline ≜ Spline interpolation; Bibliotheken für Polynominterpolation; 9.9 Spline Jede Funktion  $S_i$  ist ein Polynom vom

**Ansatz:**  $S_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i)^2$  $d_i(x-x_i)^3$ ; Gleichungssystem: 4n Parameter  $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, ..., n - 1)$ ; 2n In-

gilt:  $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$ ;

9.9.1 Kubisch

 $S_1: \int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(0.5) + f(1));$ 

Grad  $n \le k$ ; S(x) ist (k-1) - mal stetig differenzierbar, d.h. für alle  $x_i$  (i = 1, ..., n-1)

 $\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b));$ 

10.2.2 SimpsonRegel

 $T_1: \int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{2}(f(0)+f(1)); \int_a^b f(x)dx \approx$ 

10.2.1 Trapezregel

 $\sum f(t_i) \int_0^1 L_i(t) dt$ 

10.2 Newton-Cotes

 $\frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b));$  $T_n$ : Für Teilintervalle mit gleicher Länge:

 $(i = 0, 1, ..., n - 1) \Rightarrow$  Stetigkeit; **Stetig**-

**keit der 1. Abl:**  $S_{i}'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}); \Leftrightarrow$ 

**Rechenaufwand** O(n) Gleitpunktopera-

Verbesserung der Näherung: Aufteilung

in kleine Teilintervalle & Summe von

Rechtecksflächen bilden; Interpolations

mit Polynom höheren Gredes durch dis-

 $p_k = \text{Interpolationspolynom}$ ;  $I_n = \text{Quadra-}$ turformel; Kê Fehlerkonstante des Ver-

fahrens.; Singularität \(\hat{=}\) isolierter Punkt,

Das Intergral des  $p_k$  diens al Appr. für

das Int. von f(x);  $\int_0^1 f(t)dt \approx \int_0^1 p_k(t)dt =$ 

 $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(t_i)$  Das Interpolationspolynom

muss nicht explizit aufgestellt werden, es dient vorab der Bestimmung der Ge-

wichte  $\alpha_i$ ;  $\int_0^1 p_k(t) = \int_0^1 \sum f(t_i) L_i(t) dt = \int_0^1 \sum f(t_i) L_i(t) dt$ 

der ungewöhnliches Verhalten zeigt;

tionen.

10 NumInt

krete Punkte.

10.1 Def

 $h = \frac{b-a}{n}$ ;  $T_n = h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) +$ 

Für n allg.:  $\frac{(b-a)}{2n} \frac{1}{3} (f(a) + 4(a+h) +$ 

Für n = 1:  $\frac{(b-a)}{2\cdot 1} \frac{1}{3} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b));$ 

... + 4f(b-h) + f(b)  $S_n$ : Beachte gerade Anzahl an Teilinvervallen!;

Für 2n Teilintervalle, 2n+1 Knoten

mit gleicher Länge  $h = \frac{b-a}{2n}$ ;  $S_2 =$ terpolationsbedingungen: am Rand je  $\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4));$ nur eine.  $S_i x_i = y_i$ ;  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  für



Simpson 3/Rule d.h. exakt für [xkdx (k=0,1,-5

Falls  $\alpha_i$  positiv. Integrationsregeln stabil;  $k \le 7 \& k = 9 \Rightarrow$  positive Gewichte; Bei halbierung der Intervalle Nachfrage vervierfacht or versechszehnfacht sich der Fehler?

### 10.3 Ordnung Integrationsregel

Eine Integrationsregel hat Ordnung p, wenn sie für Polynome vom Grad ≤ p-1 exakte Werte liefert;  $T_1$  Ordnung 2  $\Rightarrow$  exakt für Polynome Grad  $\leq$  1; Ordnung Newton-Cotes Regeln: mind. Ordnung k+1 (k: GRad des Interpolationspolynoms); **Beweis der Ordnung:** 1 =  $\int_0^1 x^0 dx \stackrel{!}{=} ; \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx \stackrel{!}{=} ; \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \stackrel{!}{=} ;$  $\frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 \stackrel{!}{=};$ 

### 10.4 Fehler Quadratur

Für (globalen ) Fehler  $e_{In} = \int_{a}^{b} f(x) dx - I_{n}$ einer Quadraturformel  $I_n$  der Ordnung pauf [a, b] gilt:  $|e_{In}| = (b-a)h^p K|f^{(p)}(\xi)|.\xi \in$  $|a,b|, h = \frac{b-a}{n} \& |e_{In}| \le (b-a)h^p K$  $\max_{a \le x \le b} |f^{(p)}(x)|;$ 

### 10.5 Fehler $T_n$

Der Fehler ist proportional zu  $h^2$ ; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor  $\frac{1}{4}$ ; Ein Integral kann beliebig genau approx. werden, falls h entsprechend klein gewählt wird. Aber Rundungsfehler bei vielen Rechenoperationen, verschlechtert wieder das Ergebnis. Vorteil von Verfahren höherer Ordnung: Weniger Teilintervalle nö-

tig. 
$$|e_{T_n}| \le \frac{h^2}{12}(b-a)max_{a \le x \le b}|f''(x)|, K = \frac{1}{12}, h = \frac{b-a}{n}$$

### 10.6 Fehler $S_n$

Der Fehler ist proportional zu  $h^4$ ; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor  $\frac{1}{16}$ ;  $|e_{Sn}| \leq$  $\frac{h^4}{180}(b-a)max_{a\leq x\leq b}|f^4(x)|, h=\frac{(b-a)}{2n}, K=$ 

#### 10.7 Grenzen NeCo

viele äquidistante Knoten → Gewichte negativ → Verfahren instabil; geschlossene NeCoRe → Funktionsauswertung an RB → Problem mit Singularitäten. größtmögliche Ordnung unerreichbar wegen äquidistanten Knoten; **Lösung:** 

#### 10.8 GauQua

#### 11 Allgemein

### 11.1 Symbole

Stichprobenstandardabweichung \( \hat{\pm} \) s; Standardabweichung  $\hat{=}\sigma$ 

#### 11.2 Abl.

 $x^n = nx^{n-1}$ sinx = cosx; cosx = -sinx;  $tanx = \frac{1}{cos^2x} = 1 + \frac{1}{cos^2x}$  $\frac{\tan^2 x; \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x;}{\tan^2 x; \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x;}$   $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x_{1,2} = \frac{2a}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$  $\ln x = \frac{1}{x}$ ;  $\log_a x = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$ ;

### 11.3 Abl.Regeln

**Faktorregel**  $y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$ ; Summerregel  $y = f_1(x) + f_2(x) + ... +$  $f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$ ; **Pro**duktregel  $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u;$  $y = u \cdot v \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot x';$ Quotientenregel  $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ; Kettenregel  $f'(x) = F'(u)u'(x) = \hat{F}'(u)$ : Ableitung der Äußeren Funktion; u'(x): Ableitung der Inneren Funktion

### 11.4 Integralregel, elementar

**Faktorregel**  $\int_{a}^{b} C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_{a}^{b} f(x) dx$ ;  $(a+b)^{2} = a^{2} + 2ab + b^{2}$  1. Binom:  $(a+b)^{3} = a^{2} + b^{2} = a^{2}$ Summerregel  $\int_a^b [f_1(x) + ... + f_n(x)] dx = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + a^2b + a^3b +$  $\int_{a}^{b} f_{1}(x)dx + ... + \int_{a}^{b} f_{n}(x)dx$ ; Vertauschungsregel  $\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$ ;  $\int_a^a f(x)dx = 0; \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx =$  $\int_{a}^{b} f(x)dx \text{ für } (a \le c \le b);$ 11.5 Berechnung best. Integr.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

### 11.6 Potenzen

11.6 Potenze 
$$e^{-n} = \frac{1}{2}$$

$$a^{0} = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n} text f r a \neq 0$$

$$!(a^{m})^{n} = (a^{n})^{m} = a^{m \cdot n}$$

$$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$$

$$\frac{a^{n}}{b^{n}} = (\frac{a}{b})^{n} \text{ für } b \neq 0$$

$$m, n \in \mathbb{N}^{*};$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a > 0, b > 0:$$
beliebig reele
Exponenten
$$a > 0: a^{b}$$

$$= e^{b \ln a}$$

### 11.7 Wurzel

$$\sqrt{a^2} = |a|; b = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}};$$
$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m}{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m]{a}}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}}) \cdot (b^{\frac{1}{n}}) = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m]{a}}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}}) \cdot (b^{\frac{1}{n}}) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a}$$

### 11.8 Abc-Formel

$$_{2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a};\,x_{1,2}=\frac{2a}{-b\mp\sqrt{b^{2}-4ac}}$$

### 11.9 Bin.Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
 1. Binom;  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ 

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
; 2. Binom;  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ;  $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ 

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
 3. Binom;

### 11.10 Einigungen

· Beim Runden mind. eine Nachkommastelle.