# 1 BeschreibendeStatistik

## 1.1 Begriffe

]

### 1.1.1 Beschreibende/Deskriptive Statistik

Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakterisiert und durch geeignete Grafiken anschaulich gemacht.

### 1.1.2 Schließende/Induktive Statistik

Aus beobachtete Daten werden Schlüsse gezogen und diese im Rahmen vorgegebener Modelle der Wahrscheinlichkeitstheorie bewertet.

### 1.1.3 Grundgesamtheit

$\Omega$: Grundgesamtheit $\omega$:Element oder Objekt der Grundgesamtheit diskret(<30 Ausprägungen), stetig(≥30 Ausprägungen), univariat(p=1), mulivariat(p>1)

## 1.2 Lagemaße

### 1.2.1 Modalwerte $x_{mod}$

Am häufigsten auftretende Ausprägungen (insbesondere bei **qualitativen** Merkmalen)

### 1.2.2 Mittelwert

R:$mean(x)$
Schwerpunkt der Daten.**Empfindlich**gegemüber Ausreißern.
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

## 1.3 Median

R:$median(x)$
Liegt in der Mitt der sortierten Daten $x_i$. **Unempfindlich** gegenüber Ausreißern.

$$x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), \text{falls n gerade} \end{cases} \qquad (1)$$

## 1.4 Streuungsmaße

### 1.4.1 Spannweite

max $x_i$ - min $x_i$

### 1.4.2 Stichprbenverians $s^2$

R:$var(x)$
**Verschiebungssatz:**
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^2) = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2)$ Gemittelte Summe der quadratischen Abweichung vom Mittelwert

### 1.4.3 Stichprobenstandardabweichung

R:$sd(x)$
$s = \sqrt{s}$ Streuungsmaß mit gleicher Einheit wie beobachteten Daten $x_i$.$\overline{x}$ minimiert die "quadratische Verlustfunktionöder die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an.

## 1.5 p-Quantile

R:$quantile(x,p)$. Teilt die **sortierten** Daten $x_i$ ca. im Verhältnis p: (1-p) d.h. $\hat{F}(x_p) \approx p$; 1. Quartil = 0.25-Quantil; Median = 0.5-Quantil; 3. Quartil = 0.75-Quartil;

## 1.6 Interquartilsabstand I

$I = x_{0.75} - x_{0.25}$. Ist ein weiterer Streuungsparameter.

## 1.7 Chebyshev

$\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$, für alle k ≥ 1 $\overline{x}$ der Durchschnitt, s > 0 die Stichproben-Standardabweichung von Beobachtungswerten $x_1,...,x_n$. Sei $S_k = \{i, 1 \le i \le n : |x_i - \overline{x}| < k \cdot s\}$; Für eine beliebige Zahl k ≥ 1 liegen mehr als $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$ Prozent der Daten im Intervall von $\overline{x} - ks$ bis $\overline{x} + ks$. **Speziell:**Für k = 2 liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um $\overline{x}$. Für k=3 liegen mehr als 89% der Daten im 3s-Bereich um $\overline{x}$. **Komplement Formulierung:** $\overline{S}_k = \{i||x_i - \overline{x}| \ge k \cdot s\}$; $\frac{N(\overline{S}_k)}{n} \le \frac{1}{k^2}$;
Die Ungleichheit lifert nur eine **sehr grobe Abschätzung**, ist aber unabhängig von der Verteilung der Daten. **Empirische Regeln** 68% der Daten im Bereich um $\overline{x} \pm s$. 95% um $\overline{x} \pm 2s$. 99.7% um $\overline{x} \pm 3s$.

## 1.8 Korrelation

Grafische Zusammenhang zwischen multivariaten Daten y und y durch ein Streudiagramm. Kennzahlen zur Untersuchung des Zusammenhangs:

### 1.8.1 Empirische Kovarians

R:$cov(x,y)$; $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - n\overline{xy})$

### 1.8.2 Empirische Korrellationskoeffizient r

R:$cor(x,y)$; $r = \frac{s_{xy}}{s_x x_y}$; Näherungsweise lin. Zusammenhang zw. x und y, falls |r| ≈1.

### 1.8.3 Regressionsgerade y

$y = mx + t$ mit $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $t = \overline{y} - m \cdot \overline{x}$

# 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 2.1 Begriffe

**Ergebnisraum** $\Omega$: Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments
**Elementarereignis** $\omega \in \Omega$: einzelnes Element von $\Omega$
**Ereignis**$E \subseteq \Omega$: beliebige Teilmenge des Ergebnisraums $\Omega$ heißt sicheres Ereignis, $\emptyset$ heißt unmögliches Ereignis
**Vereinigung** $E \cup F$: Ereignis E oder Ereignis F treten ein. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$: mindestens ein Ereignis $E_i$tritt ein.
**Schnitt** $E \cap F$: Ereignis E und Ereignis F treten ein.
$\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ alle Ereignisse $E_i$ treten ein. **Gegenereignis** $\overline{E} = \Omega / E$: Ereignis E tritt nicht ein (Komplement von E)
**Disjunkte Ereignisse**E und F: $E \cap F = \emptyset$

## 2.2 De Morgan'schen Regeln

$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$
$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$

## 2.3 Wahrscheinlichkeit

$0 \le P(E) \le 1$; P($\Omega$) = 1;
P($\bigcup_{i=1}^{\infty}$) = $\sum_{i=1}^{\infty}$ P($E_i$), falls $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \ne j$

### 2.3.1 Satz 2.1

P($\overline{E}$) = 1 -P(E)
P($E \cup F$) = P(E)+ P(F) - P($E \cap F$)
(Übungsaufgabe!!! Ergänzen)

## 2.4 Laplace-Experiment

Zufallsexperimente mit n gleich wahrscheinlichen Elementarereignissen. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit P(E) für $E \subseteq \Omega$ aus:
P(E) $= \frac{Anzahlder f r Egnstigen Ereignisse}{Anzahlder m glichen Ereignisse} = \frac{Mchtigkeit von E}{Mchtigkeit von \Omega} = \frac{|E|}{\Omega}$ **text**

## 2.5 Kombinatorik

### 2.5.1 Allgmeines Zählprinzip

Anzahl der Möglichkeiten für ein k-stufiges Zufallsexperiment mit $n_i$ Varianten im i-ten Schritt: $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$

### 2.5.2 Permutationen

Anzahl einer n-elementigen Menge n-maliges Ziehen ohne Zurücklgen mit Beachtung der Reihenfolge: **n unterscheidbare Elemente**: $n! = n \cdot (n-1) textbf...2 \cdot 1$
**k Klassen mit je $n_i$ nicht unterscheidbaren Elementen** $n = sum_k^{i=1} n_i$: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$

### 2.5.3 Anzahl k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge k-maliges Ziehen aus einer n-elementigen Menge

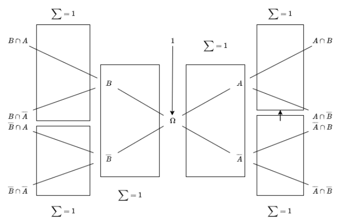
ohne Zurücklegen = $k \le n$.
mit Zurücklegen = $k > n$ möglich.
**mit Beachtung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen**: $\frac{n!}{(n-k)!}$
**ohne Beachtung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen**: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
**mit Beachtung der Reihenfolge, mit Zurücklegen**: $n^k$
**ohne Beachtung der Reihenfolge, mit Zurücklegen** $\binom{n+k-1}{k}$

## 2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F))}{P(F)}$

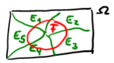
### 2.6.1 Satz 2.2

$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$
$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$



### 2.6.2 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ mit $E_i \cap E_j = \varnothing$ für $i \ne j$ d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte Zerlegung bzw. eine Partition von $\Omega$. Somit gilt:
$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)$
Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten $F \cap E_i$



### 2.6.3 Vierfeldertafel

$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E})$
$P(\overline{F}) = P(\overline{F} \cap E) + P(\overline{F} \cap E)$

| | E | $\overline{E}$ | |
|---|---|---|---|
| F | $P(F \cap E)$ | $P(F \cap \overline{E})$ | P(F) |
| $\overline{F}$ | $P(\overline{F} \cap E)$ | $P(\overline{F} \cap \overline{E})$ | $P(\overline{F})$ |
| | P(E) | $P(\overline{E})$ | 1 |

**Satz 2.2** $P(E \cap F)P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$ **Tafel** $= P(F) - P(F \cap \overline{E}) = P(E) - P(\overline{F} \cap E)$; $P(\overline{F}|E) = 1 - P(F|E)$

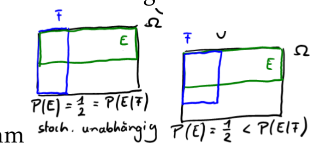
### 2.6.4 Formel von Bayes

Hilfreich, wenn man man $P(F|E_i)$ kennt, aber nicht $P(E_k|F)$ **Satz 2.4** $P(E_k|F) = \frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)}}$
**Nur Nenner!**P(F) aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

### 2.6.5 Stochastische Unabhängigkeit

**Uebung** Die Ereignisse E und F heißen (stochastisch) unabhängig, wenn die Information über das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert, d.h. falls
$\underbrace{P(E|F)}= P(E) oder P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$
$= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$
**Es gilt** Falls die Ereignisse E, F unabhängig sind, dann sind auch:

$E, \overline{F}$
$\overline{E}, F$
$\overline{E}, \overline{F}$ unabhängig **Bemerkung**

- Stochastische Unabhängigkeit bedeutet nicht notwendigerweise eine kausale Abhängigkeit
- Veranschaulichung mit Venn Diagramm 

- $A, B \ne \varnothing$ und $A \cap B = \varnothing$
  $P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$
  $\varnothing \ne P(A) \cdot P(B)$ da P(A) > 0 und P(B)> 0
  => A, B stochastisch abhängig

# 3 Zufallsvariable

Abbildung des **abstrakte** Ergebnisraums $\Omega$ auf $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$ = heißt Zufallsvariable (ZV). x ∈ R. heißt Realisation der ZV X.

- Diskrete ZV: $X(\Omega) = x_1, ..., x_2 (n \in \mathbb{N})$; z.B. X = "Augensumme beim Würfeln "
- Stetige ZV: $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$; "z.B. Körpergröße eines Menschen"

## 3.1 Verteilungsfunktion-allg.

Die Wahrscheinlichkeit P(B) für ein Ereignis B in $\mathbb{R}$ wird zurückgeführt auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Ereignisse in $\Omega$. Für jedes $X \in \mathbb{R}$ ist die

Hilfszettel zur Klausur
von **JD.**, Seite 2 von 4

Verteilungsfunktion F: $\mathbb{R} \to [0,1]$ einer ZV X definiert durch:
F(x) = P(X ≤ x)

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$ $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
- monoton wachsend
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

### 3.2 Diskrete ZVs

Für eine diskrete ZV X mit $X(\Omega) = x_1, ..., x_n$ ( n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch:

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), \text{falls } x_i \in X(\Omega) \\ 0, sonst \end{cases} \qquad (2)$$

**Es gilt:**

- $F(x) = (P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- F(x) ist eine rechtseitig stetige **Treppenfunktion** mit **Sprüngen** bei der Realisation von $x_i$.

### 3.3 Stegite ZVs

Stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte f $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definiert durch
$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$
**Es gilt:**

- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ und $F'(x) = f(x)$
- F(x) ist stetig & $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$ wegen $P(X = a) = 0$

### 3.4 Verteilungsfunktion

$\int^x_{\textbf{Untergrenze}}$ Es wird normal mit - Integriert.

### 3.5 Zusammenfassung

#### 3.5.1 Diskrete ZV

- Wahrscheinlichkeitsverteilung p(x) $\sum_i^n p(x_i) = 1 x_i$ ist Realisation der ZV.
- Verteilungsfunktion F(x) ist rechtsseitig stetige **Treppenfunktion. Sprunghöhen:**$P(X = x_i) = F(x_i) - \lim_{x \to x_i -} \neq 0$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \neq P(a \leq X \leq b)$

#### 3.5.2 Stetige ZV

- Dichtefunktion fx $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Verteilungsfunktion $F(x)$ ist stetig mit $F'(x) = f(x); P(X = x_i) = 0$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = F(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

### 3.6 Erwartungswert

Der Erwartungswert $E[X] =$ einer ZV X ist der **Schwerpunkt** ihrer Verteilung or der durchschnittlich zu erwartende Wert der ZV.

- diskrete ZV: $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$
- stetige ZV: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

ZV ist konstant. E[X] verhält sich linear. Eigenschaften von $E[X]$:

- $E[b] = b$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[\underbrace{X_i + ... + X_n}] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$
- $\sum_{i=1}^n x_i$

#### 3.6.1 Satz 3.1

Sei Y = g(X) eine Funktion der ZV X. Dann gilt:

- für diskrete ZV:$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x) \cdot p(x_i)$
- für stetige ZV: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{infty} g(x) \cdot f(x)dx$. Das vertauschen von E und g nur bei **linearen** Funktionen möglich. ⇒ g(E[X])

### 3.7 Varianz

Die Varianz einer ZV X mit μ ist ein quadratisches Streungsmaß. $\sigma^2 = Var[X] = E[\underbrace{(X-)^2}] \overset{\text{falls x stetig}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)$
g(X)
Die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche Dimension wie die ZV X.

- $Var[b] = 0$
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

#### 3.7.1 Satz 3.2

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ **Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das einfach stehende x quadriert <u>nicht</u> f(x)!!!**

### 3.8 Z-Transformation, Standardisierung

Sei X eine ZV mit μ und $\sigma$. Dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} - \frac{\mu(konstant)}{\sigma}$

### 3.9 Kovarianz

Eigenschaften:

- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$
- $Cov[X, X] = Var[X]$
- $Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]$

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y) ist definiert durch $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])$ Die Kovarianz beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X und Y. **Je** stärker diese Korrelieren, **desto** (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz. Falls $X, Y stochastisch\ unabhängig \Rightarrow Cov[X, Y] = 0$

### 3.10 Satz 3.3

$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

#### 3.10.1 Varianz einer Summe von ZV

- $Var[X_i + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov[X_i, X_j]$; $Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2]$
- Falls $X_i, X_j$ paarweise unabhängig !!!: $Var[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$

### 3.11 Overview μ $\sigma$

#### 3.11.1 E[X]

$E[aX + b] = AE[X] + b; EX_1 + ... + E_n = \sum_{i=1}^n E[X_i]$;
Falls $X_1, X_2$ unabhängig:
$E[X_i] = \mu => E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{E[x_i]} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

#### 3.11.2 Varianz

$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$
Falls $X_i, X_j$ parweise unabhängig:
$Va[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$
$Var[X_i] = \sigma^2 => Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

### 3.12 Quantile

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F(x) und 0 < p < 1. Dann ist das p-Quantil definiert als der Wert $x_p \in \mathbb{R}$ für den gilt:
$F(x_p) \geq p$. p-Quantil einer stetigen ZV mit **streng monoton wachsenden** F(x:)$x_p = F^{-1}(p)$d. h. umkehrbar.

## 4 Spezielle Verteilung

### 4.1 Diskrete Verteilung

#### 4.1.1 Bernouilliverteilung

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg; **Wahrscheinlichkeit:**$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$; **Verteilung:** $X \sim B_{1,p}$ p ist Erfolgswahrscheinlichkeit; $E[X] = p = \sum x_i \cdot p(x_i) = 1 \cdot p(1)$; $Var[X] = p(1-p) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1 - p)$;

#### 4.1.2 Binominalverteilung

Anzahl der Erfolge beim n-maligen Ziehen**mit Zurücklegen**; **Wahrscheinlichkeit** $P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, k \in 0, 1, ..., n$; **Verteilung** $X \sim B_{n,p}$; $E[X] = np$; $Var[X] = np(1 - p)$; **R:** dbinom(k,n,p)=P(X=k) ≙Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion; pbinom(k,n,p)=F(k) ≙Verteilungsfunktion; qbinom(q,n,p)≙q-Quantil; rbinom(k,n,p)≙kbinomialverteilte Zufallszahlen;

#### 4.1.3 Hypergeometrische Verteilung

Anzahl der Erfolge beim **n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen** aus einer Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten, und N Elementen, die Misserfolg bedeuten. $Gesamtumfang = M + N$; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, k \in \{0, 1, ..., min\{n, M\}\}$; **Verteilung** $X \sim H_{M,N,n}$; $E[X] = n\frac{M}{M+N}$; $\frac{M}{M+N} \hat{=} Trefferwahrscheinlichkeit$; $Var[X] = n\frac{M}{M+N}(1 - \frac{M}{M+N})\frac{M+N-n}{M+N-1}$; $\to 1$ falls n klein im Verhältnis zu M+N; **R:** $dhyper(k, M, N, n) = P(X = k)$; $phyper(k, M, N, n) = F(k)$;

#### 4.1.4 Poisson-Verteilung

**Verteilung der seltenen Ereignisse** Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in einem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge $\lambda$ pro Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt. $k \in \mathbb{N}_0 \to diskret$ **Wahrscheinlichkeit**$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1, da \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$; **Verteilung** $X \sim P_\lambda$; $E[X] = \lambda, da \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$; $Var[X] = \lambda$ **R:** $dpois(k, \lambda) = P(X = k)$; $ppois(k, \lambda) = F(k)$;

#### 4.1.5 Gleichverteilung

Alle Werte $\{x_1, ..., x_n\}$einer ZV X sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$; **Verteilung** $X \sim U_{\{x_1,...,x_n\}}$; $E[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k = \overline{x}$; $Var[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2 - \overline{x}^2$; **R:** $sample(1 : N, n)$≙ n Zufallszahlen zwischen 1 und N

### 4.2 Gleichverteilung

#### 4.2.1 Stetige Gleichverteilung

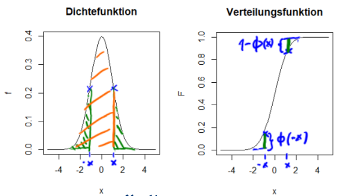
Zufallszahlen aus einem Intervall $[a, b]$; **Dichte:** $f(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in [a, b]$; **Verteilung:** $X \sim U_{[a,b]}$; $E[X] = \frac{a+b}{2}$; $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ **R:** $dunif(x, a, b) = f(x)$; $punif(x, a, b) = F(x)$; $runif(n)$≙ n Zufallszahlen zwischen 0 und 1; $runif(n, a, b)$≙ n Zufallszahlen zwischen a und b;

#### 4.2.2 Normalverteilung

Beschreibt viele reale Situationen, ist insbesondere Grenzverteilung unabhängiger Summen; **Dichte:** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)}$; **Verteilung:** $X \sim N_{\mu,\sigma^2}$; $E[X] = \mu$; $Var[X] = \sigma^2$; **R:** $dnorm(x, \mu, \sigma) = f(x)$; $pnorm(x, \mu, \sigma) = F(x)$; $qnorm(q, \mu, \sigma) : q - Quantil$; **Maximalstelle** von $f(x)$ bei $x = \mu$; **Wendestelle** von $f(x)$ bei $x = \mu \pm \sigma$; $E[aX + b] = aE[X] + b$; $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$; $X \sim N_{\mu,\sigma^2} \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu+b, a^2\sigma^2}$ und $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$; $X_1 \sim N_{\mu_1,\sigma_1^2}$ und $X_2 \sim N_{\mu_2,\sigma_2^2} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$; $X_1, X_2$ stochastisch unabhängig

#### 4.2.3 Standardnormalverteilung

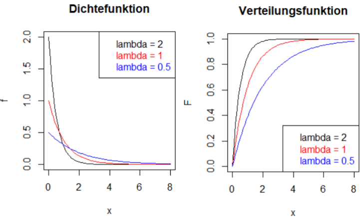
**Dichte:** $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{1}{2}x^2)}$; **Verteilung** $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt$; **Quantile:** $\phi(-x) = 1 - \phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p}$ z.B. $-x_{0.25} = x_{0.75}$;




**Schätzwerte:** $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$

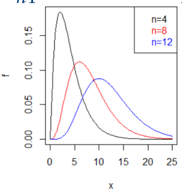
### 4.2.4 Exponentialverteilung

Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei $Y_t \sim P_{\lambda t}$ im Intervall $[0,t]$ von $t$ Zeiteinheiten, dann beschreibt die Exponentialverteilung die Wartezeit $X$ bis zum Eintreten eines Ereignisses; **Dichte- und Verteilungsfunktion:** $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}(x \geq 0)$ und $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; **Verteilung:** $X \sim Exp_\lambda$; $E[X] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ Berechnung mit partieller Integration; $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$; **R:** $dexp(x,\lambda) = f(x)$; $pexp(x,\lambda) = F(x)$; **Eigenschaft:** Eine exponentialverteile ZV X ist gedächtnislos, d.h. $P(X > s+t)|X > t = P(X > s)$;




### 4.2.5 Chiquadrat-Verteilung

$Z_1,...,Z_n$ seien unabhängige, standardnormalverteilte ZV $\Rightarrow X = Z_1^2 + +Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung:** $X \sim \chi_n^2$; $E[X] = n$; $Var[X] = 2n$; **R:** $dchisq(x,n) = f(x)$; $pchisq(x,n) = F(x)$; **Eigenschaft:** $X_1 \sim \chi^2_{n1}$ und $X_2 \sim \chi_2^2 \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi_{n_1+n_2}$




### 4.2.6 t-Verteilung

$Z \sim N_{0,1}$ und $X \sim \chi_n^2 \Rightarrow Y = \frac{Z}{\frac{X}{\sqrt{n}}}$ ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; **Verteilung:** $Y \sim t_n$; $E[Y] = 0$ für $n > 1$; $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$ für $n > 2$; **R:** $dt(y,n) \hat{=} f(x)$; $pt(y,n) \hat{=} F(x)$; **Eigenschaften:** Für $n \to \infty : t_n \to N_{0,1}$; Achsensymmetrie der Dichtefunktion $\Rightarrow -y_p = x_{1-p}$

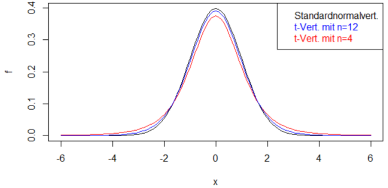



Abbildung Dichtefunktion

## 5 Zentraler Grenzwertsatz

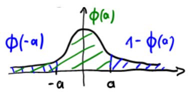
$\mu\sigma^2$ bekannt aber nicht die Verteilung

### 5.1 ZGW

Seien $X_i (i = 1,...,n)$ unabhängige identische verteilte (**i.i.d**) ZV mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$. Dann gilt für hinreichend große n ( >30) und $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n$ näherungsweise: $\sum_{i=1}^n X_i \sim N_{n\mu,n\sigma^2}$ & $\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \sim N_{0,1}$ $\sum X_i$ bezieht sich auf Y; $\sum X_i - n\mu$ bezieht sich auf $X_i$; $\overline{X} \sim N_{\mu,\frac{\sigma^2}{n}}$ & $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$;

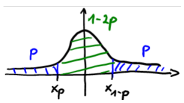
Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn die $X_i$ abhängig und nicht identisch verteilt sind, vorausgesetzt kein $X_i$ ist deutlich dominanter?! als die anderen.Für die Voraussetzung des ZGW ist, dass die $X_i$ nicht normalverteilt sein müssen., damit $\sum_{i=1}^n X_i$ oder $\overline{X}$ bei **hinreichend großem n** normalverteilt sind. Faustregel: **Je** schiefer die Verteilung der $X_i$ , **desto** größer muss n sein: **n>30:** falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung); **n>15:** falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist(Binomialverteilung); $n \leq 15$: falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;

### 5.2 $\phi$

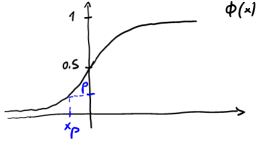



$\phi(-a) = 1-\phi(a)$; $\phi(a) = 1-\phi(-a)$; $P(-a < Z < a) = \phi(a)-\phi(-a) = \phi(a)-(1-\phi(a)) = 2\phi(a)-1$ or $1-\phi(-a)-\phi(-a) = 1-2\phi(-a)$

### 5.3 $\phi( -1)$




$-x_p = x_{1-p} \Leftrightarrow -qnorm(p) = qnorm(1-p) \Leftrightarrow -\phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(1-p)$ **Zusammenhang**




$\phi^{-1}(p) = x_p$;

**Aufgabentypen:** Seien $X_i$ i.i.d. ZV mit $\mu$ und $\sigma^2$, aber unbekannter Verteilung. Dann sind $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ und $Z_2 = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$ näherungsweise standardnormalverteilt.

- Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für $\sum X_i, \overline{X}, Z_1$ oder $Z_2$ berechnen.
- Es lässt sich n bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke $k$ und Wahrscheinlichkeit $p$ gilt: $P(Z_i > k) \geq p$ or $P(-k \leq Z_i \leq k) \geq p$

### 5.4 Stichprobenverteilungen für normalverteilte Grundgesamtheiten

#### 5.4.1 Stichprobenmittel

Die Stichprobenfunktion $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für Erwartungswert $\mu$, d. h.$E[\overline{X}] = \mu$

#### 5.4.2 Stichprobenvarianz

Die Stichprobenfunktion $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2)$ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz $\sigma^2$, d. h. $E[S^2] = \sigma^2$; $E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n}E[\sum X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}n\mu = \mu$; $Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n^2}Var[\sum X_i] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$; Seien $X_i (i = 1,...,n)$ unabhängige normalverteilte ZV mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$. Dann gilt: **bei unbekannter Varianz:** $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N_{0,1}$; $\frac{(n-1)S^2 = \sum(x-\overline{x})^2}{\sigma^2 \Rightarrow \text{Standardisierung}} \sim \chi^2_{n-1}$; **Bei unbekannter Varinanz:** $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$;

## 6 Konfidenzintervall

## 7 Allgemein

### 7.1 Symbole

Stichprobenstandardabweichung $\hat{=}$ s; Standardabweichung $\hat{=}\sigma$

### 7.2 Ableitungsregeln

**Faktorregel** $y = C\cdot f(x) \Rightarrow y' = C\cdot f'(x)$; **Summenregel** $y = f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_n'(x)$; **Produktregel** $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'\cdot u$; $y = u\cdot v\cdot x \Rightarrow y' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot x'$; **Quotientenregel** $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$; **Kettenregel** $f'(x) = F'(u)u'(x) \hat{=} F'(u)$ : Ableitung der Äußeren Funktion; $u'(x)$ : Ableitung der Inneren Funktion

### 7.3 Integralregel, elementar

**Faktorregel** $\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot\int_a^b f(x)dx$; **Summenregel** $\int_a^b [f_1(x)+...+f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx$; **Vertauschungsregel** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für $(a \leq c \leq b)$;

### 7.4 Potenzen

$$\left.\begin{array}{l} a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ ;a^m\cdot a^n = a^{m+n} \\ ;\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} textfra \neq 0 \\ !(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m\cdot n} \\ a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n \\ \frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n \text{ für } b \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} m,n \in \mathbb{N}^*; \\ a,b \in \mathbb{R} \\ a>0, b>0: \\ \text{beliebig reele} \\ \text{Exponenten} \\ a>0: a^b \\ = e^{b\ln a} \end{array}$$