

# 1 Beschreibende Statistik

## 1.1 Begriffe

### 1.1.1 Beschreibende/Deskriptive Statistik

Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakterisiert und durch geeignete Grafiken anschaulich gemacht.

### 1.1.2 Schließende/Induktive Statistik

Aus beobachtete Daten werden Schlüsse gezogen und diese im Rahmen vorgegebener Modelle der Wahrscheinlichkeitstheorie bewertet.

### 1.1.3 Grundgesamtheit

$\Omega$ : Grundgesamtheit  $\omega$ : Element oder Objekt der Grundgesamtheit diskret ( $<30$  Ausprägungen), stetig ( $\geq 30$  Ausprägungen), univariat ( $p=1$ ), multivariat ( $p>1$ ); Diskrete Merkmale haben eine abzählbare Anzahl möglicher Ausprägungen. Stetige Merkmale haben eine nicht abzählbare (=überabzählbar) Anzahl möglicher Ausprägungen.

## 1.2 Lagemaße

### 1.2.1 Modalwerte $x_{mod}$

Am häufigsten auftretende Ausprägungen (insbesondere bei qualitativen Merkmalen)

### 1.2.2 Mittelwert, quantitativ

$R: mean(x)$   
Schwerpunkt der Daten. Empfindlich gegenüber Ausreißern.  
 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

### 1.3 Median, quantitativ

$R: median(x)$   
Liegt in der Mitt der sortierten Daten  $x_i$ . Unempfindlich gegenüber Ausreißern.

$$x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (1)$$

## 1.4 Streuungsmaße

### 1.4.1 Spannweite

$$\max x_i - \min x_i$$

## 1.4.2 Stichprobenvarianz $s^2$

$R: var(x)$

Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)$$
 Gemittelte Summe der quadratischen Abweichung vom Mittelwert

### 1.4.3 Stichprobenstandardabweichung

$R: sd(x)$

$s = \sqrt{s^2}$  Streuungsmaß mit gleicher Einheit wie beobachteten Daten  $x_i$ .  $\bar{x}$  minimiert die "quadratische Verlustfunktion" oder die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an.

## 1.5 p-Quantile

$R: quantile(x, p)$ . Teilt die sortierten Daten  $x_i$  ca. im Verhältnis  $p$ :  $(1-p)$  d.h.  $\hat{F}(x_p) \approx p$ ;  $\hat{F} \triangleq$  kummul. rel. Häufigkeit; 1. Quartil = 0.25-Quantil; Median = 0.5-Quantil; 3. Quartil = 0.75-Quantil;

$$x_p \begin{cases} x_{\lceil np \rceil}, & np \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}), & np \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (2)$$

## 1.6 Interquartilsabstand I

$I = x_{0.75} - x_{0.25}$ . Ist ein weiterer Streuungsparameter.

## 1.7 Chebyshev

$\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$ , für alle  $k \geq 1$   $\bar{x}$  der Durchschnitt,  $s > 0$  die Stichproben-Standardabweichung von Beobachtungswerten  $x_1, \dots, x_n$ . Sei  $S_k = \{i, 1 \leq i \leq n : |x_i - \bar{x}| < k \cdot s\}$ ; Für eine beliebige Zahl  $k \geq 1$  liegen mehr als  $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$  Prozent der Daten im Intervall von  $\bar{x} - ks$  bis  $\bar{x} + ks$ . **Speziell:** Für  $k = 2$  liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um  $\bar{x}$ . Für  $k = 3$  liegen mehr als 89% der Daten im 3s-Bereich um  $\bar{x}$ . **Komplement Formulierung:**  $\bar{S}_k = \{i || x_i - \bar{x}| \geq k \cdot s\}$ ;  $\frac{N(\bar{S}_k)}{n} \leq \frac{1}{k^2}$ ; Die Ungleichheit liefert nur eine **sehr grobe Abschätzung**, ist aber unabhängig von der Verteilung der Daten. **Empirische Regeln** 68% der Daten im Bereich um  $\bar{x} \pm s$ . 95% um  $\bar{x} \pm 2s$ . 99.7% um  $\bar{x} \pm 3s$ .

**1.8 Korrelation**  
Grafische Zusammenhang zwischen multivariaten Daten  $x$  und  $y$  durch ein Streudiagramm. Kennzahlen zur Untersuchung des Zusammenhangs:

### 1.8.1 Empirische Kovarianz

$$R: cov(x, y); s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}); S_{xy} > 0 \text{ steigend}; S_{xy} < 0 \text{ fallend};$$

## 1.8.2 Empir. Korrel.koeff. r

$R: cor(x, y); r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ ; Näherungsweise lin.

Zusammenhang zw.  $x$  und  $y$ , falls  $|r| \approx 1$ ; **Bemerkung:** -Der Korrelationskoeffizient kann nur einen statistischen Zusammenhang beschreiben, keinen Kausalen; -Den Korrelationskoeffizient immer im Zusammenhang mit den Streudiagramm sehen (Anscombe-Quartett).

### 1.8.3 Regressionsgerade y

$y = mx + t$  mit  $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$  und  $t = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$ ; Für den Bereich  $|\pm 0,7|$  bis  $\pm 1 \Rightarrow$  linearer Zusammenhang.

## 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 2.1 Begriffe

**Ergebnisraum  $\Omega$ :** Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments

**Elementarereignis  $\omega \in \Omega$ :** einzelnes Element von  $\Omega$

**Ereignis  $E \subseteq \Omega$ :** beliebige Teilmenge des Ergebnisraums  $\Omega$  heißt sicheres Ereignis,  $\emptyset$  heißt unmögliches Ereignis

**Vereinigung  $E \cup F$ :** Ereignis E oder Ereignis F treten ein.  $\bigcup_{i=1}^n E_i$ : mindestens ein Ereignis  $E_i$  tritt ein.

**Schnitt  $E \cap F$ :** Ereignis E und Ereignis F treten ein.  $\bigcap_{i=1}^n E_i$  alle Ereignisse  $E_i$  treten ein. **Ge-**

**generereignis  $\bar{E} = \Omega / E$ :** Ereignis E tritt nicht ein (Komplement von E)

**Disjunkte Ereignisse** E und F:  $E \cap F = \emptyset$

### 2.2 De Morgan'schen Regeln

$$\overline{E_1 \cup E_2} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$$

$$\overline{E_1 \cap E_2} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$$

### 2.3 Wahrscheinlichkeit

$0 \leq P(E) \leq 1$ ;  $P(\Omega) = 1$ ;

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ , falls  $E_i \cap E_j = \emptyset$  für  $i \neq j$

**2.3.1 Satz 2.1**

$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$  (Übungsaufgabe!!! Ergänzen)

**2.4 Laplace-Experiment**

Zufallsexperimente mit  $n$  gleich wahrscheinlichen Elementarereignissen. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit  $P(E)$  für  $E \subseteq \Omega$  aus:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}} = \frac{\text{Mächtigkeit von } E}{\text{Mächtigkeit von } \Omega} = \frac{|E|}{n}$$

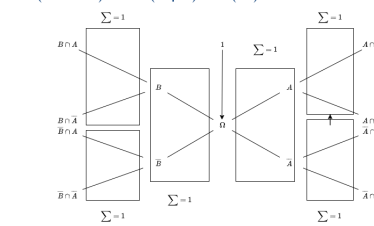
### 2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

## 2.5.1 Satz 2.2

$$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$$

$$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$$

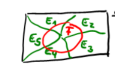


### 2.5.2 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n E_i$  mit  $E_i \cap E_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte Zerlegung bzw. eine Partition von  $\Omega$ . Somit gilt:

$$P(F) = \sum_{i=1}^n P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^n P(F|E_i) \cdot P(E_i)$$

Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten  $F \cap E_i$



### 2.5.3 Vierfeldertafel

$$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \bar{E})$$

$$P(\bar{F}) = P(\bar{F} \cap E) + P(\bar{F} \cap \bar{E})$$

	E	$\bar{E}$	
F	$P(F \cap E)$	$P(F \cap \bar{E})$	$P(F)$
$\bar{F}$	$P(\bar{F} \cap E)$	$P(\bar{F} \cap \bar{E})$	$P(\bar{F})$
	$P(E)$	$P(\bar{E})$	1

**Satz 2.2 oben:**  $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$  **Tafel**  $= P(F) - P(F \cap \bar{E}) = P(E) - P(\bar{F} \cap E); P(\bar{F}|E) = 1 - P(F|E)$

### 2.5.4 Formel von Bayes

Hilfreich, wenn man  $P(F|E_i)$  kennt, aber nicht  $P(E_k|F)$  **Satz 2.4**  $P(E_k|F) = \frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_{i=1}^n P(F|E_i) \cdot P(E_i)}$

$$P(E_k|F) = \frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_{i=1}^n P(F|E_i) \cdot P(E_i)}$$

**Nur Nenner!**  $P(F)$  aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

### 2.5.5 Stochastische Unabhängigkeit

**Übung** Die Ereignisse E und F heißen (stochastisch) unabhängig, wenn die Information über das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für

das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert, d.h. falls  $P(E|F) = P(E)$  or  $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$

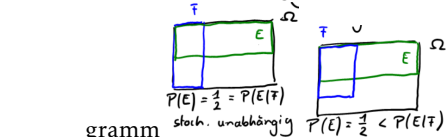
$$= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

**Es gilt** Falls die Ereignisse E, F unabhängig sind, dann sind auch:  $\circ E, \bar{F}$ ;  $\circ \bar{E}, F$ ;  $\circ \bar{E}, \bar{F}$  unabhängig

### Bemerkung

- Stochastische Unabhängigkeit bedeutet nicht notwendigerweise eine kausale Abhängigkeit

- Veranschaulichung mit Venn Diagramm



- $A, B \neq \emptyset$  und  $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$$

$$\emptyset \neq P(A) \cdot P(B) \text{ da } P(A) > 0 \text{ und } P(B) > 0$$

$$\Rightarrow A, B \text{ stochastisch abhängig}$$

## 3 Zufallsvariable

Abbildung des **abstrakte** Ergebnisraums  $\Omega$  auf  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto X(\omega)$  heißt Zufallsvariable (ZV).  $x \in \mathbb{R}$  heißt Realisation der ZV  $X$ .

- Diskrete ZV:  $X(\Omega) = x_1, \dots, x_2 (n \in \mathbb{N})$ ; z.B. X = "Augensumme beim Würfeln"

- Stetige ZV:  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ; "z.B. Körpergröße eines Menschen"

### 3.1 Verteilungsfunktion-allg.

Die Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  für ein Ereignis B in  $\mathbb{R}$  wird zurückgeführt auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Ereignisse in  $\Omega$ . Für jedes  $X \in \mathbb{R}$  ist die Verteilungsfunktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  einer ZV  $X$  definiert durch:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- $F(x) = (P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i))$
- $F(x)$  ist eine rechtseitig stetige **Treppenfunktion** mit **Sprüngen** bei der Realisation von  $x_i$ .

**3.3 Stetige ZVs**  
Stetige ZV  $X$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  definiert durch

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$   
**Es gilt:**

- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  und  $F'(x) = f(x)$
- $F(x)$  ist stetig &  $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$  wegen  $P(X = a) = 0$

**3.4 Verteilungsfunktion**  
**Untergrenze** Es wird normal mit - integriert.

**3.5 Zusammenfassung**  
**3.5.1 Diskrete ZV**

- Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p(x) \sum_i^n p(x_i) = 1$   $x_i$  ist Realisation der ZV.
- Verteilungsfunktion  $F(x)$  ist rechtsseitig stetige **Treppenfunktion**. **Sprunghöhen:**  $P(X = x_i) = F(x_i) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x) \neq 0$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \neq P(a \leq X \leq b)$

**3.5.2 Stetige ZV**

- Dichtefunktion  $f_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- Verteilungsfunktion  $F(x)$  ist stetig mit  $F'(x) = f(x); P(X = x_i) = 0$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = F(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

**3.6 Erwartungswert**  
Der Erwartungswert  $E[X] =$  einer ZV  $X$  ist der **Schwerpunkt** ihrer Verteilung **or** der durchschnittliche zu erwartende Wert der ZV.

- diskrete ZV:  $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$
- stetige ZV:  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

ZV ist konstant.  $E[X]$  verhält sich linear. Eigenschaften von  $E[X]$ :

- $E[b] = b$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$
- $\sum_{i=1}^n x_i$

**3.6.1 Satz 3.1**  
Sei  $Y = g(X)$  eine Funktion der ZV  $X$ . Dann gilt:

- für diskrete ZV:  $E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot p(x_i)$
- für stetige ZV:  $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$ . Das vertauschen von  $E$  und  $g$  nur bei **linearen** Funktionen möglich.  $\Rightarrow g(E[X])$

**3.7 Varianz**  
Die Varianz einer ZV  $X$  mit  $\mu$  ist ein quadratisches Streuungsmaß.  $\sigma^2 = Var[X] = E[(X - \mu)^2] \stackrel{\text{falls } x \text{ stetig}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)$

$g(X)$   
Die Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{Var[X]}$  hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche Dimension von die ZV  $X$ .  
•  $Var[b] = 0$   
•  $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

**3.7.1 Satz 3.2**  
 $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$  **Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das ein-fach stehende x quadriert nicht f(x)!!!**

**3.8 Z-Transformation, Standardisierung**  
Sei  $X$  eine ZV mit  $\mu$  und  $\sigma$ . Dann ist  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} - \frac{\mu(\text{konstant})}{\sigma}$   
**3.9 Kovarianz**  
Eigenschaften:

- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$
- $Cov[X, X] = Var[X]$
- $Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]$

Die Kovarianz zweier ZV ( $X, Y$ ) ist definiert durch  $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ . Die Kovarianz beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV  $X$  und  $Y$ . Je stärker diese Korrelieren, desto (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz. Falls  $X, Y$  stochastisch unabhängig  $\Rightarrow Cov[X, Y] = 0$

**3.10 Satz 3.3**  
 $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

**3.10.1 Varianz einer Summe von ZV**

- $Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov[X_i, X_j]$ ;  $Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2]$
- Falls  $X_i, X_j$  paarweise unabhängig !!!:  $Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$

**3.11 Overview  $\mu, \sigma$**   
**3.11.1  $E[X]$**

$E[aX + b] = AE[X] + b; EX_1 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^n E[X_i]$ ;  
Falls  $X_1, X_2$  unabhängig:  
 $E[X_i] = \mu \Rightarrow E[\bar{X}] = E[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$   
 $\mu$

**3.11.2 Varianz**

$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$   
Falls  $X_i, X_j$  paarweise unabhängig:  
 $Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$   
 $Var[X_i] = \sigma^2 \Rightarrow Var[\bar{X}] = Var[\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

**3.12 Quantile**

Sei  $X$  eine ZV mit Verteilungsfunktion  $F(x)$  und  $0 < p < 1$ . Dann ist das  $p$ -Quantil definiert als der Wert  $x_p \in \mathbb{R}$  für den gilt:  
 $F(x_p) \geq p$ .  $p$ -Quantil einer stetigen ZV mit **streng monoton wachsenden**  $F(x): x_p = F^{-1}(p)$  d. h. umkehrbar.

**4 Spezielle Verteilung**

**4.1 Diskrete Verteilung**

**4.1.1 Bernouilliverteilung**

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg; **Wahrscheinlichkeit:**  $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$ ; **Verteilung:**  $X \sim B_{1,p}$   $p$  ist Erfolgswahrscheinlichkeit;  $E[X] = p = \sum x_i \cdot p(x_i) = 1 \cdot p(1); Var[X] = p(1 - p) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1 - p)$ ;

**4.1.2 Binominalverteilung**

Anzahl der Erfolge beim  $n$ -maligen Ziehen mit Zurücklegen; **Wahrscheinlichkeit**  $P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ; **Verteilung**  $X \sim B_{n,p}$ ;  $E[X] = np$ ;  $Var[X] = np(1 - p)$ ; **R:**  $d\text{binom}(k, n, p) = P(X = k)$   $\hat{=}$  Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion;  $p\text{binom}(k, n, p) = F(k)$   $\hat{=}$  Verteilungsfunktion;  $q\text{binom}(q, n, p) \hat{=}$   $q$ -Quantil;  $r\text{binom}(k, n, p) \hat{=}$   $k$ binomialverteilte Zufallszahlen;

**4.1.3 Hypergeometrische Verteilung**

Anzahl der Erfolge beim  **$n$ -maligen Ziehen ohne Zurücklegen** aus einer Menge mit  $M$  Elementen, die Erfolg bedeuten, und  $N$  Elementen, die Misserfolg bedeuten. **Gesamtumfang**  $= M + N$ ; **Wahrscheinlichkeit**  $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-k}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, \min\{n, M\}\}$ ; **Verteilung**  $X \sim H_{M, N, n}$ ;  $E[X] = n \frac{M}{M+N}$ ;  $\frac{M}{M+N} \hat{=}$  **Trefferwahrscheinlichkeit**;  $Var[X] = n \frac{M}{M+N} (1 - \frac{M}{M+N}) \frac{M+N-n}{M+N-1}$ ;  $\rightarrow 1$  falls  $n$  klein im Verhältnis zu  $M+N$ ; **R:**  $d\text{hyper}(k, M, N, n) = P(X = k)$ ;  $p\text{hyper}(k, M, N, n) = F(k)$ ;

**4.1.4 Poisson-Verteilung**

**Verteilung der seltenen Ereignisse** Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in einem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge  $\lambda$  pro Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt.  $k \in \mathbb{N}_0 \rightarrow$  **diskret Wahrscheinlichkeit**  $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1, da \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ ; **Verteilung**  $X \sim P_{\lambda}$ ;  $E[X] = \lambda, da \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$ ;  $Var[X] = \lambda$  **R:**  $d\text{pois}(k, \lambda) = P(X = k)$ ;  $p\text{pois}(k, \lambda) = F(k)$ ;

**4.1.5 Gleichverteilung**

Alle Werte  $\{x_1, \dots, x_n\}$  einer ZV  $X$  sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlichkeit**  $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ ; **Verteilung**  $X \sim U_{\{x_1, \dots, x_n\}}$ ;  $E[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}$ ;  $Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2$ ; **R:**  $sample(1 : N, n) \hat{=}$   $n$  Zufallszahlen zwischen 1 und  $N$

**4.2 Gleichverteilung**

**4.2.1 Stetige Gleichverteilung**

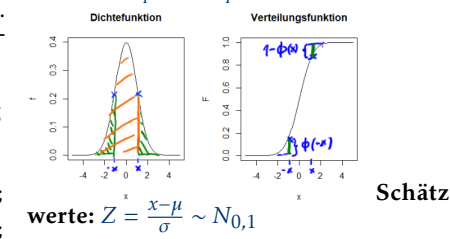
Zufallszahlen aus einem Intervall  $[a, b]$ ; **Dichte:**  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  für  $x \in [a, b]$ ; **Verteilung:**  $X \sim U_{[a, b]}$ ;  $E[X] = \frac{a+b}{2}$ ;  $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$  **R:**  $d\text{unif}(x, a, b) = f(x)$ ;  $p\text{unif}(x, a, b) = F(x)$ ;  $r\text{unif}(n, a, b) \hat{=}$   $n$  Zufallszahlen zwischen 0 und 1;  $r\text{unif}(n, a, b) \hat{=}$   $n$  Zufallszahlen zwischen  $a$  und  $b$ ;

**4.2.2 Normalverteilung**

Beschreibt viele reale Situationen, ist insbesondere Grenzverteilung unabhängiger Summen; **Dichte:**  $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ ; **Verteilung:**  $X \sim N_{\mu, \sigma^2}$ ;  $E[X] = \mu$ ;  $Var[X] = \sigma^2$ ; **R:**  $d\text{norm}(x, \mu, \sigma) = f(x)$ ;  $p\text{norm}(x, \mu, \sigma) = F(x)$ ;  $q\text{norm}(q, \mu, \sigma) : q - \text{Quantil}$ ; **Maximalstelle** von  $f(x)$  bei  $x = \mu$ ; **Wendestelle** von  $f(x)$  bei  $x = \mu \pm \sigma$ ;  $E[aX + b] = aE[X] + b$ ;  $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$ ;  $X \sim N_{\mu, \sigma^2} \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu + b, a^2 \sigma^2}$  und  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N_{0, 1}$ ;  $X_1 \sim N_{\mu_1, \sigma_1^2}$  und  $X_2 \sim N_{\mu_2, \sigma_2^2} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ ;  $X_1, X_2$  stochastisch unabhängig

**4.2.3 Standardnormalverteilung**

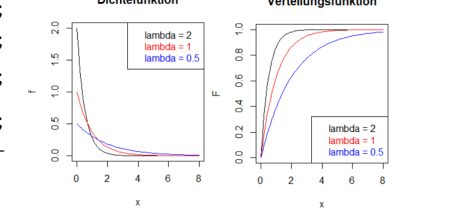
**Dichte:**  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ; **Verteilung**  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ ; **Quantile:**  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p}$  z.B.  $-x_{0.25} = x_{0.75}$ ;



**Schätzwerte:**  $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N_{0, 1}$

**4.2.4 Exponentialverteilung**

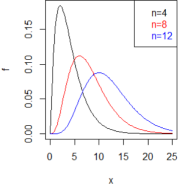
Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei  $Y_t \sim P_{\lambda t}$  im Intervall  $[0, t]$  von  $t$  Zeiteinheiten, dann beschreibt die Exponentialverteilung die Wartezeit  $X$  bis zum Eintreten eines Ereignisses; **Dichte- und Verteilungsfunktion:**  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$  und  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ; **Verteilung:**  $X \sim Exp_{\lambda}$ ;  $E[X] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$  Berechnung mit partieller Integration;  $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ ; **R:**  $d\text{exp}(x, \lambda) = f(x)$ ;  $p\text{exp}(x, \lambda) = F(x)$ ; **Eigenschaft:** Eine exponentialverteilte ZV  $X$  ist gedächtnislos, d.h.  $P(X > s + t) | X > t = P(X > s)$ ;





### 4.2.5 Chiquadrat-Verteilung

$Z_1, \dots, Z_n$  seien unabhängige, standard-normalverteilte ZV  $\Rightarrow X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$  hat Chiquadratverteilung mit  $n$  Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung:**  $X \sim \chi_n^2$ ;  $E[X] = n$ ;  $Var[X] = 2n$ ; **R:**  $dchisq(x, n) = f(x)$ ;  $pchisq(x, n) = F(x)$ ; **Eigenschaft:**  $X_1 \sim \chi_{n_1}^2$  und  $X_2 \sim \chi_{n_2}^2 \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$



### 4.2.6 t-Verteilung

$Z \sim N_{0,1}$  und  $X \sim \chi_n^2 \Rightarrow Y = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$  ist t-verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; **Verteilung:**  $Y \sim t_n$ ;  $E[Y] = 0$  für  $n > 1$ ;  $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$  für  $n > 2$ ; **R:**  $dt(y, n) \hat{=} f(x)$ ;  $pt(y, n) \hat{=} F(x)$ ;  $qt(y, n) \hat{=} F^{-1}(x)$ ; **Eigenschaften:** Für  $n \rightarrow \infty : t_n \rightarrow N_{0,1}$ ; Achsensymmetrie der Dichtefunktion  $\Rightarrow -y_p = x_{1-p}$

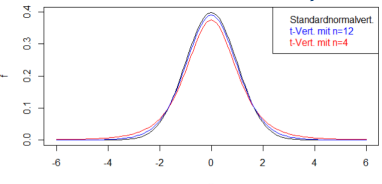


Abbildung Dichtefunktion

### 5 Zentraler Grenzwertsatz

#### 5.1 ZGWS

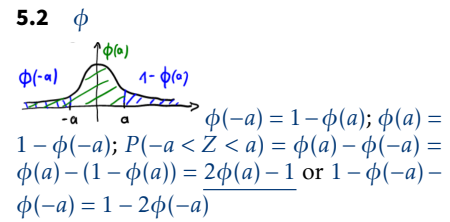
$\mu, \sigma^2$  bekannt aber nicht die Verteilung  
Seien  $X_i (i = 1, \dots, n)$  unabhängige identische verteilte (i.i.d) ZV mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dann gilt für hinreichend große  $n$  ( $> 30$ ) und  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  näherungsweise:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N_{n\mu, n\sigma^2} \text{ \& } \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \sim N_{0,1}$$

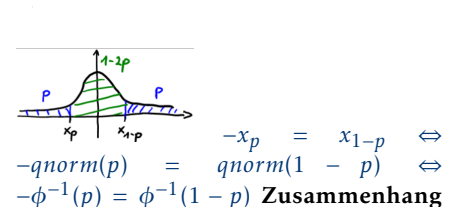
$\sum X_i$  bezieht sich auf  $Y$ ;  $\sum X_i - n\mu$  bezieht sich auf  $X_i$ ;  $\bar{X} \sim N_{\mu, \frac{\sigma^2}{n}}$  &  $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N_{0,1}$ ;

Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn die  $X_i$  abhängig und nicht identisch ver-

teilt sind, vorausgesetzt kein  $X_i$  ist deutlich dominanter?! als die anderen. Für die Voraussetzung des ZGW ist, dass die  $X_i$  nicht normalverteilt sein müssen., damit  $\sum_{i=1}^n X_i$  oder  $\bar{X}$  bei **hinreichend großem  $n$**  normalverteilt sind. Faustregel: Je schiefer die Verteilung der  $X_i$ , desto größer muss  $n$  sein:  **$n > 30$** : falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung);  **$n > 15$** : falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist (Binomialverteilung);  **$n \leq 15$** : falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;



### 5.3 $\phi^{-1}$



**Aufgabentypen:** Seien  $X_i$  i.i.d. ZV mit  $\mu$  und  $\sigma^2$ , aber unbekannter Verteilung. Dann sind  $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$  und  $Z_2 = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  näherungsweise standardnormalverteilt.

- Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für  $\sum X_i, \bar{X}, Z_1$  oder  $Z_2$  berechnen.
- Es lässt sich **n** bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke  $k$  und Wahrscheinlichkeit  $p$  gilt:  $P(Z_i > k) \geq p$  or  $P(-k \leq Z_i \leq k) \geq p$

### 5.4 Stichprobenverteilungen für normalverteilte Grundgesamtheiten

#### 5.4.1 Stichprobenmittel

Die Stichprobenfunktion  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für Erwartungswert  $\mu$ , d. h.  $E[\bar{X}] = \mu$

### 5.4.2 Stichprobenvarianz

Die Stichprobenfunktion  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)$  ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz  $\sigma^2$ , d. h.  $E[S^2] = \sigma^2$ ;  $E[\bar{X}] = E[\frac{1}{n} \sum X_i] = \frac{1}{n} E[\sum X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$ ;  $Var[\bar{X}] = Var[\frac{1}{n} \sum X_i] = \frac{1}{n^2} Var[\sum X_i] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ; Seien  $X_i (i = 1, \dots, n)$  unabhängige normalverteilte ZV mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dann gilt: **bei unbekannter Varianz:**  $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N_{0,1}$ ;  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ ; **Bei unbekannter Varianz:**  $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$ ;

### 6 Konfidenzintervall

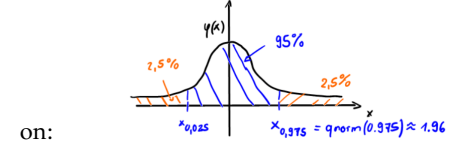
**6.1 Begriffe**  
Irrtumswahrscheinlichkeit =  $\alpha$ ; Konfidenzniveau =  $1 - \alpha$ ; Konfidenzintervall =  $I$

### 6.2 Punktschätzer

$E[X]$ : Stichprobenmittel:  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ; Varianz: Stichprobenvarianz:  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ; Schätzwert für wahren Parameter, aber keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung, Geringe Sicherheit für wahren Parameter;

### 6.3 Intervallschätzer

Intervall für wahren Parameter, mit vorgegebener Sicherheit; Vorgabe (95% or 99%); Dichtefunktion

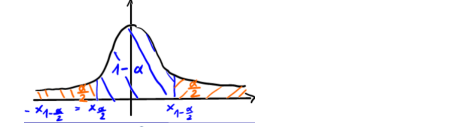


on:  $P(-a \leq \bar{x} \leq a) > 0.95$ ;  $\sigma$  ist unbekannter Parameter  
 $P(x_{0.025} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < x_{0.975}) \geq 0.95$   
 $-1.96; N_{0,1}; 1.96$ ;

### 6.4 $\mu$ , unbekannt, $\sigma^2$ , bekannt

$$I = ]\bar{X} - \underbrace{\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{qnorm(1 - \frac{\alpha}{2})}, \bar{X} + \underbrace{\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{qnorm(1 - \frac{\alpha}{2})}]$$

$1-\alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
90%	5%	$\phi^{-1}(0.95) \approx 1.645$
95%	2.5%	$\phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$
99%	0.5%	$\phi^{-1}(0.995) \approx 2.576$



### 6.5 $\mu$ & $\sigma^2$ , unbekannt

$$I = ]\bar{X} - t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}[$$

### 6.6 Zusammenfassung

Wie verändert sich das  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall,  $n$ -größer  $\Rightarrow I$  kürzer;  $1 - \alpha$  größer  $\Rightarrow I$  länger; Für  $\frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$

### 6.7 Aufgabentypen

**Geg:**  $n, 1-\alpha$ ; **Ges:** I s.o. **Geg:**  $\bar{X}, \sigma, 1-\alpha, L$ ;  $L = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ; **Ges:**  $n; \sqrt{n} > 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{L}$  **Geg:**  $n, L$ ; **Ges:**  $1-\alpha; 1 - \frac{\alpha}{2} = \phi(\frac{L\sqrt{n}}{2\sigma})$

### 7 Hypothesentests

Basierend auf  $n$  unabhängig und identisch Verteilte (i.i.d) Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  (Messungen) soll eine Entscheidung getroffen werden, ob eine Hypothese für einen unbekannten Erwartungswert  $\mu$  gültig ist or nicht.

#### 7.1 Def

$\alpha$  = Signifikanzniveau/ Fehlerwahrscheinlichkeit  $TG$  = Prüfgröße;  $TG^*$  = standardisierte Prüfgröße; signifikante Schlussfolgerung =  $H_0$  verworfen  $\rightarrow$  klassischer Parametertest; schwache Schlussfolgerung =  $H_0$  wird nicht verworfen  $\rightarrow$  klassischer Parametertest.  $p$ -Wert = beobachtetes Signifikanzniveau

#### 7.2 Null- und Gegenhypothese

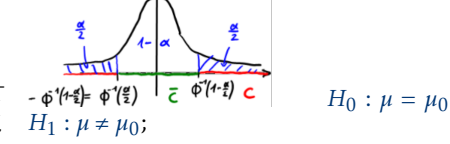
**Modell:** Verteilung der Grundgesamtheit or Testgröße  $TG$  (häufig  $\bar{x}$ ) ist bekannt bis auf einen Parameter, z.B.  $\mu$ , für den eine Hypothese aufgestellt wird.  $TG \sim N_{\mu, \sigma^2}$ ; **Nullhypothese:**  $H_0$ : Angezweifelte Aussage, der widersprochen werden kann, wenn die Stichprobe einen Gegenbeweis liefert.  $H_0 : \mu = \mu_0$ ; **Gegenhypothese**  $H_1$ : Gegenteil von  $H_0$  z.B.  $H_1 \neq \mu_0$ ;

#### 7.3 Ablehnungsbereich, Fehler 1. & 2.

Treffen der Testentscheidung, basierend auf einer konkreten Stichprobe  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ; Berechnung der Realisation  $tg = TG(x_1, \dots, x_n)$  der Prüfgröße  $TG$ ; **Ablehnungsbereich / Kritischer Bereich C:** Werte der Testgröße, die für  $H_1$  sprechen & bei Gültigkeit von  $H_0$  mit Wahrscheinlichkeit  $\leq \alpha$  (meist 0.1, 0.05, or 0.01) auftreten. **Fehler 1. Art:**  $\alpha$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  verworfen wird, obwohl sie richtig ist. **Annahmebereich:** Komplement  $\bar{C}$  des Ablehnungsbereichs.  $H_0$  kann nicht abgelehnt werden, falls  $tg \in \bar{C} (P(tg \in \bar{C}) \geq 1 - \alpha)$ . **Fehler 2. Art:** Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  nicht

abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Realität	Testentscheidung $H_0$ wird (nicht) abgelehnt	$H_0$ wird abgelehnt.
$H_0$ ist wahr.	richtig	falsch (Wsk: Fehler 1. Art) $\alpha$ wird vergg.
$H_0$ ist falsch.	falsch (Wsk: Fehler 2. Art)	richtig



### 7.4 Klassischer Parameterstest

$H_0$  wird abgelehnt, falls  $tg = TG(x_1, \dots, x_n) \in C$ ;  $H_0$  wird angenommen falls  $tg = TG(x_1, \dots, x_n) \in \bar{C}$ ; Der kritische Bereich ergibt sich analog zu den Konfidenzintervallen durch die Vorgabe eines kleinen Signifikanzniveau  $\alpha$  d.h. max. Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art, mit standardisierter Prüfgröße  $TG^*$  gilt:  $P(TG \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG^* \in ]-\infty; \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})] \cup [\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}); \infty[$ ;  $P(TG \in \bar{C}) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})]$ ; Wird dann  $H_0$  verworfen, spricht man von einer signifikanten Schlussfolgerung. Kann  $H_0$  nicht verworfen werden, dann lässt sich keine Aussage über den Fehler 2. Art treffen & man spricht von einer schwachen Schlussfolgerung.

### 7.5 Zweiseitiger Gauß Test

$H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ;  $\bar{X} \sim N_{\mu_0, \sigma_0^2/n} \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \sim N_{0,1}$ ;  $P_{\mu_0}(\bar{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow |TG| = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ ; **Testentscheidung:**  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $|TG| > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ ;  $H_0$  wird angenommen, falls  $|TG| \leq \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$

### 7.6 Einseitiger Gauß Test

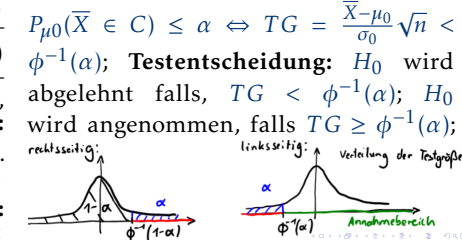
#### 7.6.1 linksseitig

$H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$

#### 7.6.2 rechtsseitig

$H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$

$P_{\mu_0}(\bar{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} > \phi^{-1}(\alpha)$ ; **Testentscheidung:**  $H_0$  wird abgelehnt falls,  $TG > \phi^{-1}(\alpha)$ ;  $H_0$  wird angenommen, falls  $TG \leq \phi^{-1}(\alpha)$ ;



7.7 Varianten Gauß Test,  $\sigma^2$  bekannt,  $\mu$  unbekannt

PrüfgröÙe  $g = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$ ;

$H_0$	$H_1$	$H_0$ ablehnen, falls	p-Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ tg  > \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$	$2(1 - \Phi( tg ))$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$tg > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$	$1 - \Phi(tg)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$tg < \Phi^{-1}(\alpha)$	$\Phi(tg)$

7.8 t-Test,  $\mu, \sigma^2$  unbekannt

PrüfgröÙe  $tg = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$

$H_0$	$H_1$	$H_0$ ablehnen, falls	p-Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ tg  > t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$	$2(1 - \Phi( tg ))$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$tg > t_{n-1}^{-1}(1 - \alpha)$	$1 - t_{n-1}(tg)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$tg < t_{n-1}^{-1}(\alpha)$	$t_{n-1}(tg)$

7.9 p-Wert

Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von  $H_0$  den beobachteten Wert tg der PrüfgröÙe oder einen noch stärker von  $\mu_0$  abweichenden Wert zu bekommen. Der p-Wert zu einer Hypothese  $H_0$  ist der kleinste Wert von  $\alpha$ , für den  $H_0$  noch abgelehnt werden kann. Je kleiner der Wert, desto kleiner ist der Fehler 1. Art & umso signifikanter ist die Testentscheidung. Nice to know Anhand des p-Werts kann man für beliebige Werte von  $\alpha$  eine Testentscheidung treffen; Falls  $p - Wert < 1\%$  : sehr hohe Signifikanz Falls  $1\% \leq p - Wert < 5\%$  : hohe Signifikanz Falls  $5\% \leq p - Wert \leq 10\%$  : Signifikanz Falls  $p - Wert > 10\%$  : keine Signifikanz

7.10 Zusammenhang I & Hypothesentests zweiseitig

zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ ;  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $\mu_0 \notin I$ ;  $H_0$  wird angenommen, falls  $\mu_0 \in I$ ; Das Konfidenzniveau ist der Annahmebereich von  $H_0$  zum Signifikanzniveau  $\alpha$ ;

7.11 Zusammenfassung klass. Hypo.test

Signifikanzniveau  $\alpha$  wird vorgegeben;  $\alpha$  & Verteilung der TestgröÙe unter  $H_0$  wir der Ablehnungsbereich ermittelt. Je kleiner (größer)  $\alpha$ , desto kleiner (größer) ist der Ablehnungsbereich; !:  $\alpha$  & C hängen nicht von der konkreten Stichprobe ab;  $H_0$  wird abgelehnt, falls der ermittelte Wert der TestgröÙe (beobachteter Wert) in C liegt. !: Die tg hängt von der konkreten Stichprobe ab. Sie ist eine ZV.

7.12 Test mittels p-Wert  $\alpha$  wird vorgegeben. Berechnung des p-Werts anhand der konkreten Stichprobe mit der Verteilung der Tg unter  $H_0$  !: Der p-Wert hängt von der konkreten Stichprobe ab, ist eine ZV.  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $p - Wert \leq \alpha$ ;

8 Fehleranalyse

Derzeit ausgeklammert 9 Interpolation Zu gegebenen Punkten  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$  mit  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  eine Funktion G ( dies ist nicht eindeutig! Abhängig von der Funktionsklasse ), so dass  $G(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$  (Interpolationsbedingung). Interpolation ist ungeeignet für verauschte Daten. Lösung: Approximation der kleinsten Quadrate.

9.1 Begriffe

Extrapolation  $\triangleq$  Näherungswerte für x-Werte außerhalb der Stützstellen; Dividierende Differenzen  $\triangleq$  Koeffizienten  $c_i$  lassen sich rekursiv durch wiederholte Bildung von "Differenzquotienten" berechnen

9.2 Vandermonde/klassisch

Unterschiedliche Darstellungen für ein Interpolationspolynom  $G(x) = p_n(x)$  vom Grad n haben unterschiedliche Eigenschaften bei der numerischen Berechnung. Monombasis:  $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots; p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ ; Ziel: Bestimmung d. Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sodass  $p_n(x_i) = y_i = a_n x_i^n + \dots + a_1 x_i^1 + a_0 x^0$  für  $i = 0, \dots, n$ ; Für die eindeutige Lösung n+1 Gleichungen: Interpolationsbedingungen;

In Matrixform: 
$$\begin{pmatrix} x_0^0 & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^0 & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^0 & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^0 & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix ist die sog. Vandermonde Matrix; Eigenschaften: Die Vandermonde Matrix ist nicht singulär ( falls alle  $x_i$  verschieden); Rechenaufwand:  $O(n^3)$ ; Für große n sehr schlecht konditioniert & als Allgemeiner Ansatz ungeeignet.

9.3 Lagrange

2 Formeln;  $p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$ ;  $L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ ; Jede Basisfunktion  $L_k(x)$  ist ein Polynom vom Grad  $\leq n$ ; Bemerkung: Findet Anwendung bei Numerischer Integration; Wenn Stützstellen  $x_i$  gleich bleiben & nur  $y_i$  ändern  $\Rightarrow$  keine Neuberechnung; Rechenaufwand  $O((n+1)^2)$ ; Kommen neue Stützpunkte hinzu  $\Rightarrow$  Neuberechnung!; Die Interpolation

polynome liefern nur sinnvolle Näherungswerte für x-Werte, die zwischen den gegebenen Stützstellen liegen; Extrapolation ( Näherungswerte für x-Werte außerhalb der Stützstellen ) kann zu großen Abweichungen führen.

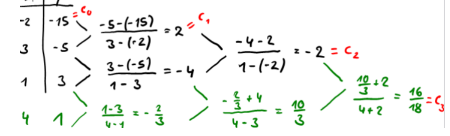
9.4 Newton

Darstellung des Interpolanten, die auf ein gestaffeltes LGS führt & einfache Hinzunahme weiterer Punkte erlaubt.  $p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$

Polynom vom Grad n Das Resultierende LGS für die Koeffizienten  $c_i$  hat gestaffelte Form. Interpolationsbedingungen?

Vorteile: Rechenaufwand  $O(n^2)$  Gleitpunktoperationen; Hinzufügen weiterer Stützstellen ohne großen Aufwand. Andere Koeffizienten bleiben unverändert.

9.5 Dividierende Differenzen



9.6 Effizienz

9.6.1 klasisch

$p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ; Aufwand: 2n-1 Mult.

9.6.2 Horner Schema

$p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = ((a_3 + a_2)x + a_1)x + a_0$ ; Allg.:  $p_n(x) = (\dots(a_n x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0$ ; Aufwand: n Mult.

9.7 Interpolationsfehler

Falls f hinreichend glatt ist &  $p_n$  das eindeutige Interpolationspolynom von Grad n, dann gilt für den Interpolationsfehler:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

mit  $\theta \in [x_0; x_n]$  Vergleichbar zum Restglied bei der Taylorreihenentwicklung; Bemerkung:  $\theta$  unbekannt, daher nur Fehlerabschätzung; Fehler ist Abhängig von der Verteilung der Stützstellen; Der Fehler ist bei großen n an den Intervallrändern deutlich größer, als in der Intervallmitte

9.7.1 Wahl der Stützstellen

Runge Funktion  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  äquidistante Stützstellen das Interpolationspolynom nicht immer gegen die zugrundeliegende stetige Funktion konvergiert, wenn die Anzahl der Stützstellen & damit

der Grad des Polynoms wächst. Lösung: Nicht-äquidistante Verteilung der Stützstellen, dichter an den Intervallgrenzen.

9.7.2 Chebyshev-Punkte

haben die Eigenschaft; senkrechte Projektion von gleichverteilten Punkten auf dem Einheitskreis.  $t_k = \cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n}), k = 1, \dots, n$ , auf  $[-1, 1]$ ; Invtervall:  $[a, b]$ :  $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k$ .  $\Rightarrow$  Fehler wird gleichmäßiger verteilt und Konvergenz erreicht.

9.8 Schwächen der Polynominterpolation

Hoher Rechenaufwand bei meist keiner hoher Differenzierbarkeitsgrad benötigt wird; RB kann Interpolationsfehler sehr groß sein; Bei wachsenden n ist es unmöglich eine Konvergenz gegen die zu interpolierenden Funktion sicherzustellen; R: approx  $\triangleq$  lin Interpolation; Spline  $\triangleq$  Spline interpolation; Bibliotheken für Polynominterpolation;

9.9 Spline

Jede Funktion  $S_i$  ist ein Polynom vom Grad  $n \leq k$ ;  $S(x)$  ist  $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar, d.h. für alle  $x_i (i = 1, \dots, n-1)$  gilt:  $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$ ;

9.9.1 Kubisch

Ansatz:  $S_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ ; Gleichungssystem: 4n Parameter  $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, \dots, n-1)$ ; 2n Interpolationsbedingungen: am Rand je nur eine.  $S_i x_i = y_i$ ;  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  für  $(i = 0, 1, \dots, n-1) \Rightarrow$  Stetigkeit; Stetigkeit der 1. Abl:  $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ ;  $\Leftrightarrow S_i'(x_{i+1}) - S_{i+1}'(x_{i+1}) = 0$ ; für  $i = 0, 1, \dots, n-2$ ; Stetigkeit der 2. Abl.:  $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$ ;  $S_i''(x_{i+1}) - S_{i+1}''(x_{i+1}) = 0$  ; für  $i = 0, 1, \dots, n-2$ ; natürlicher Randbedingungen:  $S_0''(x_0) = 0$ ;  $S_{n-1}''(x_n) = 0$ ;

nach geschickter Umformung der Gleichungen hat das LGS Tridiagonalform. Rechenaufwand  $O(n)$  Gleitpunktoperationen. 10 NumInt Verbesserung der Näherung: Aufteilung in kleine Teilintervalle & Summe von Rechtecksflächen bilden; Interpolations mit Polynom höheren Grades durch diskrete Punkte.

10.1 Def

$p_k \triangleq$  Interpolationspolynom;  $I_n \triangleq$  Quadraturreformel;  $K \triangleq$  Fehlerkonstante des Verfahrens; Singularität  $\triangleq$  isolierter Punkt, der ungewöhnliches Verhalten zeigt;

10.2 Newton-Cotes

Das Integral des  $p_k$  diens al Appr. für das Int. von  $f(x)$ ;  $\int_0^1 f(t) dt \approx \int_0^1 p_k(t) dt = \sum_{j=0}^k \alpha_j f(t_j)$  Das Interpolationspolynom muss nicht explizit aufgestellt werden, es dient vorab der Bestimmung der Gewichte  $\alpha_j$ ;  $\int_0^1 p_k(t) = \int_0^1 \sum f(t_j) L_j(t) dt = \sum f(t_j) \int_0^1 L_j(t) dt$

10.2.1 Trapezregel

$T_1 : \int_0^1 f(t) dt \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$ ;  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$ ;  $T_n$  : Für Teilintervalle mit gleicher Länge:  $h = \frac{b-a}{n}$ ;  $T_n = h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2})$ ;

10.2.2 SimpsonRegel

$S_1 : \int_0^1 f(t) dt \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(0.5) + f(1))$ ;  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$ ; Für n = 1:  $\frac{(b-a)}{2 \cdot 1} \frac{1}{3}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$ ; Für n allg.:  $\frac{(b-a)}{2n} \frac{1}{3}(f(a) + 4(a+h) + \dots + 4f(b-h) + f(b))$   $S_n$  : Beachte gerade Anzahl an Teilintervallen!; Für 2n Teilintervalle, 2n+1 Knoten mit gleicher Länge  $h = \frac{b-a}{2n}$ ;  $S_2 = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$ ;

Newton-Cotes Regeln

Basierend auf äquidistanten Knoten $t_j = \frac{j}{n}$			
$k$	$\alpha_i$	Methode	Ordnung p
1	$\frac{1}{2}$	Trapez	2
2	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	Simpson	4
3	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$ -Rule	4
4	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	Milne	6

d.h. exakt für  $\int x^k dx (k=0, 1, \dots, p)$

Falls  $\alpha_j$  positiv. Integrationsregeln stabil;  $k \leq 7$  &  $k = 9 \Rightarrow$  positive Gewichte; Bei halbierung der Intervalle Nachfrage vervierfacht oder versechszehnfacht sich der Fehler?

10.3 Ordnung Integrationsregel

Eine Integrationsregel hat Ordnung p, wenn sie für Polynome vom Grad  $\leq p-1$  exakte Werte liefert;  $T_1$  Ordnung 2  $\Rightarrow$  exakt für Polynome Grad  $\leq 1$ ; Ordnung Newton-Cotes Regeln: mind. Ordnung k+1 (k: Grad des Interpolationspolynoms); Beweis der Ordnung:  $1 = \int_0^1 x^0 dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx \stackrel{!}{=}$ ;

10.4 Fehler Quadratur

Für (globalen) Fehler  $e_{In} = \int_a^b f(x) dx - I_n$  einer Quadraturformel  $I_n$  der Ordnung p

auf  $[a, b]$  gilt:  $|e_{In}| = (b - a)h^p K |f^{(p)}(\xi)| \cdot \xi \in ]a, b[, h = \frac{b-a}{n}$  &  $|e_{In}| \leq (b - a)h^p K \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(p)}(x)|$  ;

### 10.5 Fehler $T_n$

Der Fehler ist proportional zu  $h^2$ ; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor  $\frac{1}{4}$ ; Ein Integral kann beliebig genau approx. werden, falls h entsprechend klein gewählt wird. **Aber** Rundungsfehler bei vielen Rechenoperationen, verschlechtert wieder das Ergebnis. Vorteil von Verfahren höherer Ordnung: Weniger Teilintervalle nötig.  $|e_{T_n}| \leq \frac{h^2}{12} (b - a) \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ ,  $K = \frac{1}{12}$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$

### 10.6 Fehler $S_n$

Der Fehler ist proportional zu  $h^4$ ; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor  $\frac{1}{16}$ ;  $|e_{S_n}| \leq \frac{h^4}{180} (b - a) \max_{a \leq x \leq b} |f^4(x)|$ ,  $h = \frac{(b-a)}{2n}$ ,  $K = \frac{1}{180}$

### 10.7 Grenzen NeCo

viele äquidistante Knoten  $\rightarrow$  Gewichte negativ  $\rightarrow$  Verfahren instabil; geschlossene NeCoRe  $\rightarrow$  Funktionsauswertung an RB  $\rightarrow$  Problem mit Singularitäten. größtmögliche Ordnung unerreichbar wegen äquidistanten Knoten; **Lösung:**

### 10.8 GauQua

### 11 Allgemein

#### 11.1 Symbole

Stichprobenstandardabweichung  $\hat{=}$  s; Standardabweichung  $\hat{=}\sigma$

#### 11.2 Abl.

$$\begin{array}{l} x^n \hat{=} n x^{n-1} \\ \sin x \hat{=} \cos x; \cos x \hat{=} -\sin x; \tan x \hat{=} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x; \cot x \hat{=} -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x; \\ e^x \hat{=} e^x; a^x \hat{=} (\ln a) \cdot a^x; \\ \ln x \hat{=} \frac{1}{x}; \log_a x \hat{=} \frac{1}{(\ln a) \cdot x}; \end{array}$$

### 11.3 Abl.Regeln

**Faktorregel**  $y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$ ;

**Summenregel**  $y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$ ; **Produktregel**  $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$ ;  $y = u \cdot v \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot x'$ ;

**Quotientenregel**  $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ;

**Kettenregel**  $f'(x) = F'(u)u'(x) \hat{=} F'(u)$  : Ableitung der Äußeren Funktion;  $u'(x)$  : Ableitung der Inneren Funktion

### 11.4 Integralregel, elementar

**Faktorregel**  $\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx$ ;

**Summenregel**  $\int_a^b [f_1(x) + \dots + f_n(x)] dx =$

$\int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$ ; **Vertau-**

**schungsregel**  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ ;

$\int_a^a f(x) dx = 0$ ;  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  für  $(a \leq c \leq b)$ ;

### 11.5 Berechnung best. Integr.

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

### 11.6 Potenzen

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$\left. \begin{array}{l} a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ !(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \\ \frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n \text{ für } b \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m, n \in \mathbb{N}^*; \\ a, b \in \mathbb{R} \\ a > 0, b > 0 : \\ \text{beliebig reele} \\ \text{Exponenten} \\ a > 0 : a^b \\ = e^{b \ln a} \end{array}$$

### 11.7 Wurzel

$\sqrt[n]{a^2} = |a|$ ;  $b = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}$ ;  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ;  
 $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = (a^{\frac{1}{n}}) \cdot (b^{\frac{1}{n}}) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  für  $b > 0$   
 $\Rightarrow m, n \in \mathbb{N}^*$ ;  $a \geq 0, b \geq 0$

### 11.8 Abc-Formel

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ;  $x_{1,2} = \frac{2a}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$

### 11.9 Bin.Formel

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  1. Binom;  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ; 2. Binom;  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ;  $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  3. Binom;

### 11.10 Einigungen

- Beim Runden mind. eine Nachkommastelle.