R:sd(x)1 BeschreibendeStatistik  $s = \sqrt{s}$  Streuungsmaß mit gleicher Einheit 1.1 Begriffe wie beobachteten Daten  $x_i.\bar{x}$  minimiert 1.1.1 Beschreibende/Deskriptive die "quadratische Verlustfunktionöder Statistik die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an. Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakteri-1.5 p-Quantile

Hilfszettel zur Klausur von JD., Seite 1 von 4

schaulich gemacht.

theorie bewertet.

1.2 Lagemaße

1.2.2 Mittelwert

1.4 Streuungsmaße

1.4.1 Spannweite

Verschiebungssatz:

 $\max x_i$  -  $\min x_i$ 

malen)

R:mean(x)

Schwerpunkt

 $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ 

1.3 Median

R:median(x)

1.1.3 Grundgesamtheit

1.2.1 Modalwerte  $x_{mod}$ 

siert und durch geeignete Grafiken an-

Aus beobachtete Daten werden Schlüsse

gezogen und diese im Rahmen vorgege-

bener Modelle der Wahrscheinlichkeits-

 $\Omega$ : Grundgesamtheit  $\omega$ :Element oder Ob-

jekt der Grundgesamtheit diskret(<30

Ausprägungen), stetig(≥30 Ausprägun-

Am häufigsten auftretende Ausprägun-

gen (insbesondere bei qualitativen Merk-

ten.**Empfindlich**gegemüber Ausreißern.

Liegt in der Mitt der sortierten Daten  $x_i$ .

Unempfindlich gegenüber Ausreißern.

 $x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), \text{ falls n gerade} \end{cases}$ 

1.4.2 Stichprbenvarianz s<sup>2</sup>

 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}^2) = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_i^2)$ 

schen Abweichung vom Mittelwert

gen), univariat(p=1), mulivariat(p>1)

### ten $x_i$ ca. im Verhältnis p: (1-p) d.h. $\hat{F}(x_p) \approx p$ ; 1. Quartil = 0.25-Quantil; Me-1.1.2 Schließende/Induktive Stadian = 0.5-Quantil; 3. Quartil = 0.75-

1.4.3 Stichproben-

## Quartil; 1.6 Interquartilsabstand I $I = x_{0.75} - x_{0.25}$ . Ist ein weiterer Streuungsparameter.

R:quantile(x, p). Teilt die **sortierten** Da-

## 1.7 Chebyshev $\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$ , für alle $k \ge 1 \overline{x}$ der

## Durchschnitt, s > 0 die Stichproben-Standardabweichung von Beobachtungs- $|x_i - \overline{x}| < k \cdot s$ ; Für eine beliebige Zahl $k \ge 1$ liegen mehr als $100 \cdot (1 - \frac{1}{L^2})$ Pro-

zent der Daten im Intervall von  $\bar{x} - ks$  bis  $\overline{x} + ks$ . **Speziell:**Für k = 2 liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um  $\bar{x}$ . Für k=3 liegen mehr als 89% der Daten im 3s-Bereich um  $\bar{x}$ . Komplement Formulie-

rung:  $\overline{S}_k = \{i | |x_i - \overline{x}| \ge k \cdot s\}; \frac{N(S_k)}{n} \le \frac{1}{k^2};$ Die Ungleichheit lifert nur eine sehr grobe Abschätzung, ist aber unabhängig von der Verteilung der Daten. Empirische Regeln 68% der Daten im Bereich um  $\overline{x} \pm s$ . 95% um  $\overline{x} \pm 2s$ . 99.7% um  $\overline{x} \pm 3s$ .

## Grafische Zusammenhang zwischen multivariaten Daten y und y durch ein Streudiagramm. Kennzahlen zur Untersuchung des Zusammenhangs:

## 1.8.1 Empirische Kovarians R:cov(x, y); $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) =$

1.8 Korrelation

 $\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - n \overline{x} \overline{y}) \right)$ 

rer Zusammenhang.

R:cor(x, x);  $r = \frac{s_{xy}}{s_x x_y}$ ; Näherungsweise lin.

# Zusammenhang zw. x und y, falls $|\mathbf{r}| \approx 1$ .

1.8.3 Regressionsgerade y  $y = mx + t \text{ mit } m = r \cdot \frac{s_y}{s} \text{ und } t = \overline{y} - m \cdot \overline{x};$  $n\bar{x}^2$ ) Gemittelte Summe der quadrati- Für den Bereich  $|\pm 0,7|$   $\hat{b}is$  bis  $\pm 1 \Rightarrow$  linea-

### standardabweichung 2.1 Begriffe **Ergebnisraum** $\Omega$ : Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments **Elementarereignis** $\omega \in \Omega$ : einzelnes Ele-

Ø heißt unmögliches Ereignis

 $0 \le P(E) \le 1$ ;  $P(\Omega) = 1$ ;

 $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ 

ment von  $\Omega$ 

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Ereignis** $E \subseteq \Omega$ : beliebige Teilmenge des

Ereignis  $E_i$ tritt ein. **Schnitt**  $E \cap F$ : Ereignis E und Ereignis F treten ein.  $\bigcap_{i=1}^n E_i$  alle Ereignisse  $E_i$  treten ein. **Gegenereignis**  $\overline{E} = \Omega / E$ : Ereignis E tritt nicht ein (Komplement von E) **Disjunkte Ereignisse**E und F:  $E \cap F = \emptyset$ 

2.2 De Morgan'schen Regeln  $E_1 \cup E_2 = E_1 \cap E_2$  $\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$ 2.3 Wahrscheinlichkeit

# 2.3.1 Satz 2.1

### 2.4 Laplace-Experiment Zufallsexperimente mit n gleich wahr-Elementarereignissen. scheinlichen

 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ 

(Übungsaufgabe!!! Ergänzen)

## Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit P(E) für $E \subseteq \Omega$ aus: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$

## 2.5 Kombinatorik 2.5.1 Allgmeines Zählprinzip

 $\frac{\text{M\"achtigkeit von E}}{\text{M\"achtigkeit von }\Omega} = \frac{|E|}{\Omega} \mathbf{text}$ 

## 2.5.2 Permutationen

Anzahl der Möglihckeiten für ein k-

stufiges Zufallsexperiment mit  $n_i$  Varianten im i-ten Schritt:  $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ 

Anzahl einer n-elementigen Menge nmaliges Ziehen ohne Zurücklgen mit Beachtung der Reihenfolge: n unterscheid-

Ergebnisraums  $\Omega$  heißt sicheres Ereignis, mit Beachtung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen:  $\frac{n!}{(n-k)!}$ **Vereinigung**  $E \cup F$ : Ereignis E oder Ereigohne Beachtung der Reihenfolge, ohne nis F treten ein.  $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ : mindestens ein **Zurücklegen**:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ mit Beachtung der Reihenfolge, mit Zu-

rücklegen: nk ohne Beachtung der Reihenfolge, mit Zurücklegen  $\binom{n+k-1}{k}$ 2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$ 

## 2.6.1 Satz 2.2 $P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$

lichkeit

ohne Zurücklegen =  $k \le n$ .

mit Zurücklegen = k > n möglich.



Sei  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n E_i$  mit  $E_i \cap E_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ 

## 2.6.2 Satz der totalen Wahrschein-

2.5.3 Anzahl k-elementigen Teil-  $= P(F) - P(F \cap \overline{E}) = P(E) - P(\overline{F} \cap E); P(\overline{F}|E) =$ 

2.6.4 Formel von Bayes

 $P(F|E_k) \cdot P(E_k)$ 

 $P(F|E_i) \cdot P(E_i)$ 

len Wahrscheinlichkeit.

nicht ändert, d.h. falls

gig sind, dann sind auch:

 $E, \overline{F}$ 

Hilfreich, wenn man man  $P(F|E_i)$  kennt,

aber nicht  $P(E_k|F)$  Satz 2.4  $P(E_k|F) =$ 

Nur Nenner!P(F) aus dem Satz der tota-

2.6.5 Stochastische Unabhängig-

**Uebung** Die Ereignisse E und F heißen

(stochastisch) unabhängig, wenn die

Information über das Eintreten des einen

Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für

das Eintreten des anderen Ereignisses

 $P(E|F) = P(E)oderP(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ 

Es gilt Falls die Ereignisse E, F unabhän-

 $\overline{E}$ ,  $\overline{F}$  unabhängig **Bemerkung** 

ne kausale Abhängigkeit

· Stochastische Unabhängigkeit be-

· Veranschaulichung mit Venn Dia-

deutet nicht notwendigerweise ei-

mengen einer n-elementigen 1 - P(F|E)

Menge k-maliges Ziehen aus

einer n-elementigen Menge

d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte Zerlegung bzw. eine Partition von  $\Omega$ . So- $P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i)$ .

Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten  $F \cap E_i$ 

2.6.3 Vierfeldertafel

## Abbildung des abstrakte Ergebnisraums $P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E})$

 $\Omega$  auf  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ,

 $P(E) = \frac{1}{2} = P(E(F))$ gramm stock unabhanging P(E)= 1 < P(EIF)

 $\emptyset \neq P(A) \cdot P(B)$  da P(A) > 0 und => A, B stochastisch abhängig

3 Zufallsvariable

•  $A, B \neq \emptyset$  und  $A \cap B = \emptyset$ 

 $P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$ 

 $\omega \mapsto X(\omega) = \text{heißt Zufallsvariable (ZV). x}$ € R. heißt Realisation der ZV X.

• Diskrete ZV:  $X(\Omega) = x_1, ..., x_2 (n \in$  $\mathbb{N}$ ); z.B. X = "Augensumme beim"

P(FAE) P(FAE) P(F) P(FAE) P(FAE) P(F) **bare Elemente**:  $n! = n \cdot (n-1) t extb f ... 2 \cdot 1$ P(E) P(E) 1 Satz 2.2 oben:  $P(E \cap$ k Klassen mit je  $n_i$  nicht unterscheidba-• Stetige ZV:  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ ; "z.B. Körperren Elementen  $n = sum_k^{i=1} n_i$ :  $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_1!}$  $F = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$  Tafel größe eines Menschen"

 $P(\overline{F}) = P(\overline{F} \cap E) + P(\overline{F} \cap E)$ 

E Ē

von JD., Seite 2 von 4 • Dichtefunktion fx  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 3.1 Verteilungsfunktion-allg. • Verteilungsfunktion F(x) ist stetig Die Wahrscheinlichkeit P(B) für ein Ermit  $F'(x) = f(x); P(X = x_i) = 0$ 

## eignis B in **R** wird zurückgefürht auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden

Hilfszettel zur Klausur

Ereignisse in  $\Omega$ . Für jedes  $X \in \mathbb{R}$  ist die Verteilungsfunktion F:  $\mathbb{R} \to [0,1]$  einer ZV X definiert durch:  $F(x) = P(X \le x)$ •  $0 \le F(x) \le 1$ •  $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0 \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ 

## monoton wachsend • P(X > x) = 1 - F(x)

• 
$$P(A < X \le b) = F(b) - F(a)$$
  
• **2.1 3.2 Diskrete ZVs**

Für eine diskrete ZV X mit 
$$X(\Omega) = x_1,...,x_n$$
 ( n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeits-

funktion definiert durch:  $p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), \text{falls } x_i \in X(\Omega) \\ 0, sonst \end{cases}$ Es gilt:

Treppenfunktion mit Sprüngen bei der Realisation von  $x_i$ . 3.3 Stegite ZVs Stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte f  $f: \mathbb{R} \to [0, \infty]$  definiert durch

# $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

•  $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$  und F'(x) = f(x)• F(x) ist stetig &  $P(a < X \le b) =$  $P(a \le X \le b)$  wegen P(X = a) = 0

## 3.4 Verteilungsfunktion $\int_{\mathbf{Untergrenze}}^{x} \mathbf{Es}$ wird normal mit - Inte-

# 3.5 Zusammenfassung 3.5.1 Diskrete ZV

## $p(x) \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1x_i$ ist Realisation der ZV. • Verteilungsfunktion F(x) ist rechtsseitig stetige Treppenfunktion. **Sprunghöhen:** $P(X = x_i) = F(x_i) -$

 $\lim_{x \to x_i -} \neq 0$ 

 $X \leq b$ 

Wahrscheinlichkeitsverteilung

•  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \ne P(a \le b)$ 

3.6 Erwartungswert Der Erwartungswert E[X] = einer ZV

•  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = P(a \le b)$ 

 $X \le b$ ) =  $F(a \le X < b) = P(a < X < b)$ 

3.5.2 Stetige ZV

- X ist der Schwerpunkt ihrer Verteilung or der durchschnittliche zu erwartende Wert der ZV.
  - diskrete ZV:  $E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$ • stetige ZV:  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
- ZV ist konstant. E[X] verhält sich linear. Eigenschaften von E[X]: • E[b] = b
  - E[aX + b] = aE[X] + b•  $E[X_i + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$
- 3.6.1 Satz 3.1

## Sei Y = g(X) eine Funktion der ZV X. Dann gilt: • für diskrete ZV:E[g(X)]

 $\sum_{i=1}^{n} g(x) \cdot p(x_i)$ 

• für stetige ZV:  $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ f(x)dx. Das vertauschen von E und g nur bei linearen Funktionen  $m\ddot{o}glich. \Rightarrow g(E[X])$ 

## Die Varianz einer ZV X mit $\mu$ ist ein qua- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[x_{i}]=\frac{1}{n}\cdot n\cdot \mu=\mu$ dratisches Streungsmaß. $\sigma^2 = Var[X] =$

g(X)Die Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche

 $E[(X-)^2]$  falls x stetig  $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)$ 

- Var[b] = 0•  $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$
- 3.7.1 Satz 3.2

Dimension von die ZV X.

 $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$  Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das einfach stehende x quadriert nicht f(x)!!! 3.8 Z-Transformation, Standardisie-

Sei X eine ZV mit  $\mu$  und  $\sigma$ . Dann ist  $Z = \frac{X - \mu}{\mu} = \frac{x}{\mu} - \frac{\mu(konstant)}{\mu(konstant)}$ 

Falls X, Y stochastisch unabhängig  $\Rightarrow$ Cov[X,Y]=03.10 Satz 3.3  $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$ 3.10.1 Varianz einer Summe von

# $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{i} Cov[X_i, X_i]; Var[X_1 +$ $X_2$ ] = $Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2]$

•  $Var[X_i + ... + X_n]$ 

!!!:  $Var[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$ 3.11 Overview  $\mu \sigma$ 

• Falls  $X_i, X_i$  paarweise unabhängig

3.11.1 E[X]

3.9 Kovarianz

• Cov[X, Y] = Cov[Y, X]

• Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y)

E[(X - E[X])(Y - E[Y]) Die Kovarianz

beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X

und Y. Je stärker diese Korrelieren, desto

(betragsmäßig) größer ist die Kovarianz.

definiert durch Cov[X, Y] =

• Cov[X,X] = Var[X]

Eigenschaften:

## $E[aX + b] = AE[X] + b; EX_1 + ... + E_n =$ $\sum_{i=1}^{n} E[X_i];$ Falls $X_1, X_2$ unabhängig:

 $E[X_i] = \mu = E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)] =$ 

## 3.11.2 Varianz

Falls  $X_i$ ,  $X_j$  parweise unabhängig:

 $Var[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$ 

 $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$ 

 $|x_n| = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ 3.12 Quantile Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F(x) und 0 . Dann ist das p-Quantil definiert als der Wert  $x_p \in \mathbb{R}$  für den gilt:

 $Var[X_i] = \sigma^2 \Longrightarrow Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}(x_1 + ... +$ 

# Alle Werte $\{x_1,...,x_n\}$ einer ZV X sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlich**-

keit  $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ ; Verteilung

ppois $(k, \lambda) = F(k)$ ;

4.1.5 Gleichverteilung

Erfolg und 0 bei Misserfolg; Wahrschein**lichkeit:**P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p;**Verteilung:**  $X \sim B_{1,p}$  p ist Erfolgswahr-

 $X \sim U_{\{x_1,...,x_n\}}; E[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \overline{x};$ 

 $Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}^2$ ; **R:** sample(1:

(N,n) n Zufallszahlen zwischen 1 und 4.2 Gleichverteilung

 $Var[X] = \lambda \mathbf{R} : \frac{d}{pois}(k, \lambda) = P(X = k);$ 

Zufallszahlen aus einem Intervall [a, b]; **Dichte:**  $f(x) = \frac{1}{h-a}$  für  $x \in [a,b]$ ;

4.2.1 Stetige Gleichverteilung

 $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \mathbf{R} : \frac{d}{dunif}(x, a, b) = f(x);$ puni f(x, a, b) = F(x); runi f(n) = n Zufalls-

n Zufallszahlen zwischen a und b;

4.2.2 Normalverteilung Beschreibt viele reale Situationen,

ist insbesondere Grenzverteilung unabhängiger Summen;

 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right);$  Verteilung:

 $X \sim N_{u.\sigma^2}$ ;  $E[X] = \mu$ ;  $Var[X] = \sigma^2$ ; **R**:

 $dnorm(x, \mu, \sigma) = f(x); pnorm(x, \mu, \sigma) =$ 

F(x); qnorm $(q, \mu, \sigma)$ : q - Quantil; Maximalstelle von f(x) bei  $x = \mu$ ; Wende**stelle** von f(x) bei  $x = \mu \pm \sigma$ ; E[aX + b] =

Dichte:

aE[X] + b;  $Var[aX + b] = a^2Var[X]$ ;  $X \sim N_{\mu,\sigma^2} \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu+b,a^2\sigma^2}$  und  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  ~  $N_{0,1}$ ;  $X_1$  ~  $N_{\mu_1,\sigma_1^2}$  und  $X_2$  ~  $N_{\mu_2,\sigma_2^2} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2};$ 

 $X_1, X_2$  stochastisch unabhängig 4.2.3 Standardnormalverteilung

Dichte:  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{1}{2}x^2)}$ ; Verteilung

 $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ ; Quantile:  $\phi(-x) = 1$  $\phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p} \text{ z.B. } -x_{0.25} = x_{0.75};$ 

nem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge  $\lambda$  pro

 $p(1); Var[X] = p(1-p) = E[X^2] - (E[X])^2 =$  $p - p^2 = p(1 - p);$ 

## 4.1.2 Binominal verteilung Anzahl der Erfolge beim n-maligen Ziehenmit Zurücklegen; Wahr-

fallszahlen;

4 Spezielle Verteilung

4.1 Diskrete Verteilung

4.1.1 Bernouilliverteilung

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei

scheinlichkeit;  $E[X] = p = \sum x_i \cdot p(x_i) = 1$ .

 $(1 - p)^{n-k}, k \in [0, 1, ..., n]$ ; Verteilung **Verteilung:**  $X \sim U_{[a,b]}$ ;  $E[X] = \frac{a+b}{2}$ ;  $X \sim B_{n,p}$ ; E[X] = np; Var[X] =np(1 - p); **R:** dbinom(k,n,p)=P(X=k) ≜Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion; pbinom(k,n,p)=F(k)zahlen zwischen 0 und 1; runi f(n, a, b) =≜Verteilungsfunktion; qbinom(q,n,p)=q-Quantil; rbinom(k,n,p)≘kbinomialverteilte Zu-

scheinlichkeit  $P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k$ 

## 4.1.3 Hypergeometrische Verteilung Anzahl der Erfolge beim n-maligen

Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten, und N Elementen, die Misserfolg bedeuten. Gesamtumfang = M + N; Wahrscheinlichkeit P(X = k) =

 $\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{k}}, k \in \{0,1,...,min\{n,M\}\};$  **Ver**teilung  $X \sim H_{M,N,n}$ ;  $E[X] = n \frac{M}{M+N}$ ;  $\frac{M}{M+N}$   $\hat{=}$  Tref ferwahrscheinlichkeit;

 $Var[X] = n \frac{M}{M+N} (1 - \frac{M}{M+N}) \frac{M+N-n}{M+N-1};$   $\rightarrow 1$  falls n klein im Verhältnis zu M+N; **R**: dhyper(k, M, N, n) = P(X = k); phyper(k, M, N, n) = F(k);

## 4.1.4 Poisson-Verteilung Verteilung der seltenen Ereignisse Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in ei-

Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt.  $k \in \mathbb{N}_0 \rightarrow diskret$  Wahrscheinlich- $\mathbf{keit}P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \text{ mit } \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)$ k) = 1,  $da \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ ; Verteilung  $e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} = \lambda;$  werte:  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$ 

 $F(x_p) \ge p$ . p-Quantil einer stetigen  $X \sim P_{\lambda}$ ;  $E[X] = \lambda, da \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k}}{k!} e^{-\lambda} =$ ZV mit streng monoton wachsenden  $F(x)x_p = F^{-1}(p)d$ . h. umkehrbar.

Hilfszettel zur Klausur von **JD**., Seite 3 von 4 4.2.4 Exponentialverteilung Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei  $Y_t \sim P_{\lambda t}$  im Intervall [0,t]von t Zeiteinheiten, dann beschreibt

Seien  $X_i$  (i = 1,...,n) unabhängige identi-

tion; 
$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$
; **R**:  $\frac{d}{dexp}(x,\lambda) = f(x)$ ;  $\frac{d}{dexp}(x,\lambda) = f(x)$ ; **Eigenschaft:** Eine exponentialverteile ZV X ist gedächtnislos, d.h.  $P(X > s + t)|X > t = P(X > s)$ ;  $\frac{d}{dexp}(x,\lambda) = \frac{d}{dexp}(x,\lambda) = \frac{d$ 

die Exponentialverteilung die Wartezeit

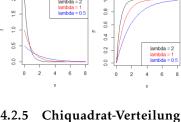
X bis zum Eintreten eines Ereignis-

ses; Dichte- und Verteilungsfunktion:

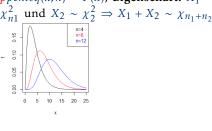
 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \ge 0)$  und F(x) = 1 -

 $e^{-\lambda x}$ ; Verteilung:  $X \sim Exp_{\lambda}$ ; E[X] =

 $\frac{1}{1} \Rightarrow$  Berechnung mit partieller Integra-



 $Z_1,...,Z_n$  seien unabhängige, standardnormalverteilte ZV  $\Rightarrow X = Z_1^2 + Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden; Anwendungsmodell: Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung:**  $X \sim \chi_n^2$ ; E[X] = $n; Var[X] = 2n; \mathbf{R}: \frac{d}{d}chisq(x,n) = f(x);$ ppchisq(x,n) = F(x); Eigenschaft:  $X_1 \sim$ 



# 4.2.6 t-Verteilung

 $Z \sim N_{0.1}$  und  $X \sim \chi_n^2 \Rightarrow Y = \frac{Z}{X}$  ist tverteilt mit n Freiheitsgraden; Anwendungsmodell: Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; Verteilung:  $Y \sim t_n$ ; E[Y] = 0 für n > 1;  $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$ für n > 2; **R**:  $\frac{d}{dt}(y, n) = f(x)$ ; pt(y, n) = F(x);

 $qt(y,n) = F^{-1}(x)$ ; Eigenschaften: Für  $n \to \infty$ der Dichtefunktion  $\Rightarrow -y_p = x_{1-p}$ 

## 5.1 ZGWS

sche verteilte (i.i.d) ZV mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dann gilt für hinreichend große n (>30) und  $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}$ näherungsweise:  $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N_{n\mu,n\sigma^2} \&$ 

$$\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \sim N_{0,1}$$

$$\sum X_i \text{ bezieht sich auf Y; } \sum X_i - n\mu \text{ bezieht}$$

$$\text{sich auf } X_i; \ \overline{X} \sim N_{\mu, \frac{\sigma^2}{n}} \& \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N_{0,1};$$

$$\text{Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn}$$

$$\text{die } X_i \text{ abhängig und nicht identisch verteilt sind, voraussgesetzt kein } X_i \text{ ist deutlich dominanter?! als die anderen.Für}$$

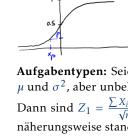
$$\text{die Veraussetzung des } \overline{XCW} \text{ ict. dass}$$

$$\text{5.4.2 Stichprobenvarianz}$$

die Voraussetzung des ZGW ist, dass die  $X_i$  nicht normalverteilt sein müssen., Die Stichprobenfunktion  $S^2$ damit  $\sum_{i=1}^{n} X_i$  oder  $\overline{X}$  bei **hinreichend großem n** normalverteilt sind. Faustregel: **Je** schiefer die Verteilung der  $X_i$ **desto** größer muss n sein: n>30: falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung); n>15: falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist(Binomialverteilung);  $n \le 15$ : falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;

# 5.2 $\phi$ $\phi(-a) = 1 - \phi(a); \phi(a) =$

$$Y \sim t_n$$
;  $E[Y] = 0$  für  $n > 1$ ;  $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$   
für  $n > 2$ ; **R:**  $\frac{d}{dt}(y, n) = f(x)$ ;  $pt(y, n) = F(x)$ ;  $qt(y, n) = F^{-1}(x)$ ; **Eigenschaften:** Für  $n \rightarrow \infty$ :  $t_n \rightarrow N_{0,1}$ ; Achsensymmetrie  $-qnorm(p) = qnorm(1 - p) \Leftrightarrow$ 



Aufgabentypen: Seien  $X_i$  i.i.d. ZV mit  $\mu$  und  $\sigma^2$ , aber unbekannter Verteilung. Dann sind  $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$  und  $Z_2 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$ näherungsweise standardnormalverteilt. • Es lassen sich Wahrscheinlichkei-

• Es lässt sich n bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke k und Wahrscheinlichkeit p gilt:  $P(Z_i >$  $k \ge p$  or  $P(-k \le Z_i \le k) \ge p$ 5.4 Stichprobenverteilungen für nor $qnorm(1-\frac{\alpha}{2})$ malverteilte Grundgesamtheiten

# für Erwartungswert $\mu$ , d. h. $E[\overline{X}] = \mu$

 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$  $n\overline{X}^2$ )ist eine erwartungstreue Schätz-

# $1 - \phi(-a)$ ; $P(-a < Z < a) = \phi(a) - \phi(-a) =$ $\phi(a) - (1 - \phi(a)) = 2\phi(a) - 1$ or $1 - \phi(-a) - \phi(-a)$ $\phi(-a) = 1 - 2\phi(-a)$

# $-\phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(1-p)$ Zusammenhang

# ten für $\sum X_i, \overline{X}, Z_1$ oder $Z_2$ berech-

5.4.1 Stichprobenmittel

funktion für die Varianz  $\sigma^2$ , d. h.  $E[S^2] = \sigma^2$ ;  $E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}\sum X_i] =$  $\frac{1}{n}E[\sum X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}n\mu = \mu;$  $Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n^2}Var[\sum X_i] =$  $\frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ; Seien  $X_i(i = 1,...,n)$  unäbhängige normalverteilte ZV mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dann

## unbekannter Varianz: $\frac{X-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$ ; 6 Konfidenzintervall 6.1 Begriffe Irrtumswahrscheinlichkeit = $\alpha$ ; Konfidenzniveau = $1 - \alpha$ = ; Konfidenzintervall

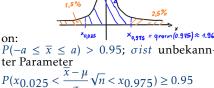
6.2 Punkschätzer E[X]: Stichprobenmittel:  $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ;

# Varianz: Stichprobenvarianz: $s^2 =$

 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ ; Schätzwert für wahren Parameter, aber keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung, Geringe Sicherheit für wahren Parameter;

mit vorgegebener Sicherheit; Voror Testgröße **TG** (häufig  $\bar{x}$ ) ist bekannt gabe (95% or 99%); Dichtefunktibis auf einen Parameter, z.B. μ, für den eine Hypothese aufgestellt wird. TG ~  $N_{u,\sigma^2}$ ; Nullhypothese:  $H_0$ : Angezweifel-

Intervall für wahren Parameter,



 $P(x_{0.025} < \frac{x - \mu}{\sigma} \sqrt{n} < x_{0.975}) \ge 0.95$  $-1.96; N_{0.1}; 1.96;$ 6.4  $\mu$ , unbekannt,  $\sigma^2$ , bekannt  $I = ]\overline{X} - \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$ 

Die Stichprobenfunktion  $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$  ist eine erwartungstreue Schätzfunktion  $\overline{X} + \phi^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} [$ ; 95% 2,5% \$\phi^{-1}(0,375) ≈ 1,96

6.3 Intervallschätzer

Konfidenzintervall, n-größer ⇒ 6.7 Aufgabentypen

gilt: bei unbekannter Varianz:  $\frac{X-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$  ~  $N_{0,1}$ ;  $\frac{(n-1)S^2 = \sum (x-\overline{x})^2}{\sigma^2 \Rightarrow \text{Standardisierung}} \sim \chi_{n-1}^2$ ; **Bei** 

# ter Parameter

5% φ-1/0,95)≈ 1,645

6.5  $\mu \& \sigma^2$ , unbekannt

## $I = \overline{X} - t_{n-1}^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1}^{-1} (1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}$ 6.6 Zusammenfassung Wie verändert sich das $(1 - \alpha)$ -

## kürzer; 1- $\alpha$ größer $\Rightarrow$ I länger; Für $\frac{L}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$ **Geg:** n, 1- $\alpha$ ; **Ges:** I s.o. **Geg:** $\overline{X}$ , $\sigma$ , 1 – $\alpha$ , L;

 $\frac{\alpha}{2}$ ) $\frac{\sigma}{L}$  Geg: n, I, L; Ges: 1-  $\alpha$ ; 1 -  $\frac{\alpha}{2}$  =

### 7 Hypothesentests Basierend auf n unabhängig und iden-

 $L = 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ; Ges: n;  $\sqrt{n} > 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 

tisch Verteilte (i.i.d) Zufallsvariablen

 $X_1,...,X_n$  (Messungen) soll eine Entscheidung getroffen werden, ob eine Hypothese für einen unbekannten Erwartungswert  $\mu$  gültig ist or nicht. lässt sich keine Aussage über den Fehler

## 7.1 Def $\alpha$ = Signifikanzniveau/ Fehlerwahr-

Schlussfolgerung =  $H_0$  verworfen  $\rightarrow$  klassischer Parametertest; schwache Schlussfolgerung =  $H_0$  wird nicht verworfen  $\rightarrow$ klassischer Parametertest. p-Wert = beobachtetes Signifikanzniveau

Kann  $H_0$  nicht verworfen werden, dann

## scheinlichkeit TG = Prüfgröße; TG\* =

 $C) \le \alpha \Leftrightarrow |TG| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma_0} \sqrt{n} > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2});$ 

Treffen der Testentscheidung, basierend auf einer konkreten Stichprobe  $\{x_1,...,x_n\}$ ; Berechnung der Realisation  $tg = TG(x_1,...,x_n)$  der Prüfgröße TG; **Ab**lehnungsbereich / Kritischer Bereich C: Werte der Testgröße, die für H1, sprechen & bei Gültigkeit von  $H_0$  mit Wahrscheinlichkeit  $\leq \alpha$  (meist 0.1, 0.05, or 0.01) auftreten. Fehler 1. Art:α ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  verworfen wird, obwohl sie richtig ist. **Ånnahmebereich:** Komplement C des Ablehnungsbereichs.  $H_0$  kann nicht abgeleht werden, falls  $tg \in \overline{C}(P(tg \in \overline{C}) \ge 1 - \alpha)$ . Fehler 2. Art:

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  nicht

abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

7.2 Null- und Gegenhypothese

Modell: Verteilung der Grundgesamtheit

te Aussage, der widersprochen werden

kann, wenn die Stichprobe einen Gegen-

beweis liefert.  $H_0: \mu = \mu_0$ ; Gegenhypo-

**these**  $H_1$ : Gegenteil von  $H_0$  z.B.  $H_1 \neq \mu_0$ ;

7.3 Ablehnungsbereich, Fehler 1. & 2.

Testentscheidung

H<sub>0</sub> wird nicht abgelehnt

## 7.4 Klassischer Parametertest $H_0$ wird abgelehnt, falls tg = $TG(x_1,...,x_n) \in C$ ; $H_0$ wird angenom-

## men falls $tg = TG(x_1,...,x_n) \in \overline{C}$ ; Der kritische Bereich ergibt sich analog zu den Konfidenzintervallen durch die Vorgabe eines kleinen Signifikanzniveau

α d.h. max. Wahrscheinlichkeit für

Fehler 1. Art, mit standardisierter Prüfgröße TG\* gilt:  $P(TG \in C) \le \alpha \Leftrightarrow TG^* \in$ 

 $]-\infty; \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})[\cup]\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}); \infty[; P(TG \in$  $\overline{C}$ )  $\geq 1 - \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})];$ Wird dann  $H_0$  verworfen, spricht man von einer signifikanten Schlussfolgerung.

### 2. Art treffen & man spricht von einer schwachen Schlussfolgerung. 7.5 Zweiseitiger Gauß Test

standardisierte Prüfgröße; siginifikante

 $H_0: \mu = \mu_0$  gegen  $H_1: \mu \neq \mu_0$ ;  $\overline{X} \sim$  $N_{\mu_0,\sigma_0^2/n} \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \sim N_{0,1}; P_{\mu 0}(\overline{X} \in$ 

Hilfszettel zur Klausur von JD., Seite 4 von 4

**Testentscheidung:**  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $|TG| > \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ ;  $H_0$  wird angenommen, falls  $|TG| \le \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ 7.6 Einseitiger Gauß Test

# 7.6.1 linksseitig

$$H_0: \mu \ge \mu_0 \text{ gegen } H_1: \mu < \mu_0$$

## 7.6.2 rechtsseitig

$$\frac{H_0: \mu \le \mu_0 \text{ gegen } H_1: \mu > \mu_0}{P_{\mu 0}(\overline{X} \in C)} \le \alpha \Leftrightarrow TG = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n} < 0$$

$$\phi^{-1}(\alpha)$$
; **Testentscheidung:**  $H_0$  wird abgelehnt falls,  $TG < \phi^{-1}(\alpha)$ ;  $H_0$  wird angenommen, falls  $TG \ge \phi^{-1}(\alpha)$ ; results so it is the second of the second o

## 7.7 Varianten Gauß Test, $\sigma^2$ bekannt, $\mu$ unbekannt

Prüfgröße $tg = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0} \sqrt{n}$ ;  $\mu = \mu_0 \mid \mu \neq \mu_0 \mid |tg| > \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$  $2(1 - \Phi(tg))$  $\mu \le \mu_0 \mid \mu > \mu_0 \mid$  $tg > \Phi^{-1} (1 - \alpha)$  $\mu \ge \mu_0 \mid \mu < \mu_0 \mid$ 

**7.8 t-Test,**  $\mu$ ,  $\sigma^2$  unbekannt

Prüfgröße $tg = \frac{X - \mu_0}{S} \sqrt{n}$ $H_0 \mid H_1 \mid H_0 \text{ ablehnen, falls } \mid p$ -Wer			
$H_0$	$H_1$	H <sub>0</sub> ablehnen, falls	p-Wert
		$ tg >t_{n-1}^{-1}\left(1-rac{lpha}{2} ight)$	
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$tg > t_{n-1}^{-1} \left(1 - \alpha\right)$	$1-t_{n-1}(tg$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$tg < t_{n-1}^{-1}(\alpha)$	$t_{n-1}(tg)$

## 7.9 p-Wert Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von $H_0$

den beobachteten Wert tg der Prüfgröße or einen noch stärker von  $\mu_0$  abweichenden Wert zu bekommen. Der p-Wert zu einer Hypothese  $H_0$  ist der kleinste Wert von  $\alpha$ , für den  $H_0$  noch abgelehnt werden kann. **Je kleiner** der Wert, **desto** kleiner ist der Fehler 1. Art & umso signifikanter ist die Testentscheidung. Nice to know Anhand des p-Werts kann man für beliebige Werte von  $\alpha$  eine  $x^0, x^1, x^2, x^3, ...; p_n(x) = a_n x^n + ... +$ Testentscheidung treffen; Falls p - Wert < 1%: sehr hohe Signifi-

Falls  $1\% \le p - Wert < 5\%$ : hohe Signifi-

Falls  $5\% \le p - Wert \le 10\%$ : Signifikanz

Zusammenhang I & Hypothesen-

## tests zweiseitig zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ ; $H_0$ wird ab-

Falls p - Wert > 10%: keine Signifikanz

gelehnt, falls  $\mu_0 \notin I$ ;  $H_0$  wird angenommen, falls  $\mu_0 \in I$ ; Das Konfidenzniveau ist der Annahmebereich von H<sub>0</sub> zum Signifikanzniveau  $\alpha$ ; 7.11 Zusammenfassung klass. Hy-

## Signifikanzniveau $\alpha$ wird vorgegeben; $\alpha$ & Verteilung der Testgröße unter $H_0$

wir der Ablehnungsbereich ermittelt. Je kleiner (größer)  $\alpha$ , desto kleiner (größter) ist der Ablehnungsbereich;  $!: \alpha \& C$  hängen **nicht von** der konkreten Stichprobe ab;  $H_0$  wird abgelehnt, falls der ermittelte Wert der Testgröße (beobachteter Wert) in C liegt. !: Die tg hängt von der konkreten Stichprobe ab. Sie ist eine ZV. 7.12 Test mittels p-Wert

## $\alpha$ wird vorgegeben.

Berechnung des p-Werts anhand der kon-kreten Stichprobe mit der Verteilung der Tg unter  $H_0$ ; !:Der p-Wert hängt von der konkreten

## 8 Fehleranalyse rechtsschie Derzeit ausgeklammert

9 Interpolation

## linksschigt Zu gegebenen Punkten $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$

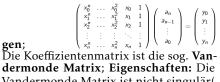
mit  $x_i \neq x_i$  für  $i \neq j$  eine Funktion G (dies ist nicht eindeutig! Abhängig von der Funktionsklasse), so dass  $G(x_i) = y_i, i =$ 0, ..., n (Interpolations bedingung). Interpolation ist ungeeignet für verauschte Daten. Lösung: Approximation der kleinsten Ouadrate.

## 9.1 Begriffe

Dividierende Differenzen 

Koeffizienten ci lassen sich rekursiv durch wiederholte Bildung von "Differenzquotienten"berechnen

9.2 Vandermonde/klassisch Unterschiedliche Darstellungen für ein 9.6 Effizienz Interpolationspolynom  $G(x) = p_n(x)$ vom Grad n haben unterschiedliche Eigenschaften bei der nume $a_1x^1 + a_0x^0$ ; **Ziel:** Bestimmung d. Koeffizienten  $a_0, a_1, ..., a_n$  sodass  $p_n(x_i) = y_i = a_n x_i^n + ... + a_1 x_i^1 + a_0 x^0$  für i =



Vandermonde Matrix ist nicht singulär( falls alle  $x_i$  verschieden); Rechenaufwand:  $\mathcal{O}(n^3)$ ; Für große n sehr schlecht konditioniert & als Allgemeiner Ansatz ungeeignet.

## 9.3 Lagrange **2 Formeln**; $p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$ ; $L_k(x) \prod_{j=0; j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - y_j}$ ; Jede Basis-

funktion  $L_k(x)$  ist ein Polynom vom Grad  $\leq n$ ; **Bemerkung:** Findet Anwendung bei Numerischer Integration; Wenn Stützstellen  $x_i$  gleich bleiben & nur  $y_i$  ändern  $\Rightarrow$ keine Neuberechnung; Rechenaufwand  $\mathcal{O}((n+1)^2)$ ; Kommen neue Stützpunkte hinzu ⇒ Neuberechnung!; Die Interpola-

Stichprobe ab, ist eine ZV. zweistiliger  $H_0$  wird abgelehnt, falls  $p - Wert \le \alpha$ .;

Gleichungen: Interpolationsbedingun- ... +  $a_1$ )x +  $a_0$ ; Aufwand: n Mult.

# 10 Allgemein

9.7 Interpolationsfehler

### 10.1 Symbole Standardabweichung $\hat{=}\sigma$ 10.2 Abl.

 $x^n \triangleq nx^{n-1}$ sinx = cosx; cosx = -sinx;  $tanx = \frac{1}{cos^2x} = 1 + \frac{1}{cos^2x}$  $tan^2x; \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x;$  $e^{x} = e^{x}$ ;  $a^{x} = (\ln a) \cdot a^{x}$ ;

## 10.3 Abl.Regeln **Faktorregel** $y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$ ;

 $\ln x = \frac{1}{x}$ ;  $\log_a x = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$ ;

 $f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$ ; **Produktregel**  $v = u \cdot v \Rightarrow v' = u' \cdot v + v' \cdot u$ ;  $y = u \cdot v \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot x';$ Quotientenregel  $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ;

Summerregel  $y = f_1(x) + f_2(x) + ... +$ 

Kettenregel  $f'(x) = F'(u)u'(x) = \hat{F}'(u)$ : Ableitung der Äußeren Funktion; u'(x): Ableitung der Inneren Funktion tionspolynome liefern nur sinnvolle Nä-

**Faktorregel**  $\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx$ ;  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + a^2b + a^3b + a^3b$ 

10.4 Integralregel, elementar

Darstellung des Interpolanten, die auf ein gestaffeltes LGS führt & einfache Hinzunahme weiterer Punkte erlaubt.  $p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + ... +$  $c_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$ 

**herungswerte** für x-Werte, die zwischen

den gegebenen Stützstellen liegen; Extra-

polation (Näherungwerte für x-Werte au-

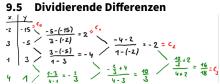
ßerhalb der Stützstellen ) kann zu großen

Abweichungen führen.

9.4 Newton

Polynom vom Grad n Das Resultierende LGS für die Koeffizienten  $c_i$  hat gestaffelte Form. Interpolationsbedingungen?

**Vorteile:** Rechenaufwand  $\mathcal{O}(n^2)$  Gleitpunktoperationen; Hinzufügen weiterer Stützstellen ohne großen Aufwand. Andere Koeffizienten bleiben unverändert.



## 9.6.1 klasisch

Berechnung. **Monombasis:**  $p_n(x) = a_n x^n + ... + a_0$ ; **Aufwand:** 2n-1 Mult.

## 9.6.2 Horner Schema

$$p_n(x_i) = y_i = a_n x_i^n + ... + a_1 x_i^1 + a_0 x^0$$
 für i =  $p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 + a_0 = ((a_3 + a_2)x + a_1)x + a_0$ ; Allg.:  $p_n(x) = (...(a_n x + a_{n-1})x + a_n x^2 + a_n x^$ 

10.8 Bin.Formel

 $6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ 

 $6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ 

 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ;  $x_{1,2} = \frac{2a}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$ 0

 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  1. Binom:  $(a+b)^3 =$ 

 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ; 2. Binom;  $(a-b)^3 =$ 

 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ;  $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b +$ 

10.7 Abc-Formel

Summerregel 
$$\int_a^b [f_1(x) + ... + f_n(x)] dx =$$
  
 $\int_a^b f_1(x) dx + ... + \int_a^b f_n(x) dx$ ; Vertauschungsregel  $\int_a^b f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ ;

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0; \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx \text{ für } (a \le c \le b);$$
**10.5** Potenzen

$$a^{0} = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n} text f r a \neq 0$$

$$!(a^{m})^{n} = (a^{n})^{m} = a^{m \cdot n}$$

$$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$$

$$m, n \in \mathbb{N}^{*};$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a > 0, b > 0:$$
beliebig reele
Exponenten
$$a > 0: a^{b}$$

## 10.6 Wurzel

 $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$  für  $b \neq 0$ 

 $x^{-n} = \frac{1}{n}$ 

$$\sqrt{a^2} = |a|; b = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}};$$
$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

 $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$ 

 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a} \frac{1}{n} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m]{a}$ 

 $= e^{b \ln a}$ 

(3)

$$\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = (a^{\frac{1}{n}}) \cdot (b^{\frac{1}{n}}) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(a_3 + a_2)x + \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ für } b > 0$$
It.  $\Rightarrow m, n \in \mathbb{N}^*; a \ge 0, b \ge 0$ 

10.9 Einigungen

kommastelle.

 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  3. Binom:

Beim Runden mind. eine Nach-