1 BeschreibendeStatistik

1.1 Beschreibende/Deskriptive Statistik

Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakterisiert und durch geeignete Grafiken anschaulich gemacht.

1.2 Schließende/Induktive Statistik

Aus beobachtete Daten werden Schlüsse gezogen und diese im Rahmen vorgegebener Modelle der Wahrscheinlichkeitstheorie bewertet.

1.3 Grundgesamtheit

Ω: Grundgesamtheit ω:Element oder Objekt der Grundgesamtheit diskret(<30 Ausprägungen), stetig(≥30 Ausprägungen), univariat(p=1), mulivariat(p>1); Diskrete Merkmale haben eine abzählbare Anzahl möglicher Ausprägungen. Stetige Merkmale habne eine nicht abzählbare (=überabzählbar) Anzahl möglicher Ausprägungen.

Lagemaße

1.4 Modalwerte x_{mod}

Am häufigsten auftretende Ausprägungen (insbesondere bei **qualitativen** Merkmalen)

1.5 Mittelwert, quantitativ

R:*mean(x)*
Schwerpunkt der Daten.**Empfindlich**gegenüber Ausreißern.
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

1.6 Median, quantitativ

R:*median(x)*
Liegt in der Mitt der sortierten Daten x_i.
Unempfindlich gegenüber Ausreißern.

$$x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), \text{falls n gerade} \end{cases} \qquad (1)$$

Streuungsmaße

1.7 Spannweite

max x_i - min x_i

1.8 Stichprobenvarianz s^2

R:*var(x)*
Verschiebungssatz:
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^2) = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2)$ Gemittelte Summe der quadratischen Abweichung vom Mittelwert

1.9 Stichpr.standardabw.

R:*sd(x)*
$s = \sqrt{s}$ Streuungsmaß mit gleicher Einheit wie beobachteten Daten x_i.$\overline{x}$ minimiert die "quadratische Verlustfunktionöder die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an.

1.10 p-Quantile

R:*quantile(x, p)*. Teilt die **sortierten** Daten x_i ca. im Verhältnis p: (1-p) d.h. $\hat{F}(x_{p}) \approx p$; $\hat{F} \triangleq$ kummul. rel. Häufigkeit; 1. Quartil = 0.25-Quantil; Median = 0.5-Quantil; 3. Quartil = 0.75-Quantil;

$$x_p \begin{cases} x_{floor(np)+1}, np \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}, np \notin \mathbb{N}) \end{cases} \qquad (2)$$

1.11 Interquartilsabstand I

$I = x_{0.75} - x_{0.25}$. Ist ein weiterer Streuungsparameter.

1.12 Chebyshev

$\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$, für alle k ≥ 1 $\overline{x}$ der Durchschnitt, s > 0 die Stichproben-Standardabweichung von Beobachtungswerten $x_1, ..., x_n$. Sei $S_k = \{i, 1 \le i \le n : |x_i - \overline{x}| < k \cdot s\}$; Für eine beliebige Zahl k ≥ 1 liegen mehr als $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$ Prozent der Daten im Intervall von $\overline{x} - ks$ bis $\overline{x} + ks$. **Speziell:**Für k = 2 liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um $\overline{x}$. Für k=3 liegen mehr als 89% der Daten im 3s-Bereich um $\overline{x}$. **Komplement Formulierung:** $\overline{S}_k = \{i||x_i - \overline{x}| \ge k \cdot s\}$; $\frac{N(\overline{S}_k)}{n} \le \frac{1}{k^2}$;
Die Ungleichheit lifert nur eine **sehr grobe Abschätzung**, ist aber unabhängig von der Verteilung der Daten. **Empirische Regeln** 68% der Daten im Bereich um $\overline{x} \pm s$. 95% um $\overline{x} \pm 2s$. 99.7% um $\overline{x} \pm 3s$.

1.13 Korrelation

Grafische Zusammenhang zwischen multivariaten Daten x und y durch ein Streudiagramm. Kennzahlen zur Untersuchung des Zusammenhangs:

1.14 Empirische Kovarianz

R:*cov(x, y)*; $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\overline{xy})$; $S_{xy} > 0$ steigend; $S_{xy} < 0$ fallend;

1.15 Empir. Korrelk.koeff. r

R:*cor(x, y)*; $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$; Näherungsweise lin. Zusammenhang zw. x und y, falls |r| ≈1;
Bemerkung: -Der Korrelationskoeffizient kann nur einen statistischen Zusammenhang beschreiben, keinen Kausalen;
-Den Korrelationskoeffizient immer im Zusammenhang mit den Streudiagramm sehen (Anscombe-Quartett).

1.16 Regressionsgerade y

$y = mx + t$ mit $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $t = \overline{y} - m \cdot \overline{x}$;
Für den Bereich |±0,7|*bis* bis ±1 ⇒ linearer Zusammenhang.

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Begriffe

Ergebnisraum Ω: Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments
Elementarereignis $\omega \in \Omega$: einzelnes Element von Ω
Ereignis$E \subseteq \Omega$: beliebige Teilmenge des Ergebnisraums Ω heißt sicheres Ereignis, $\emptyset$ heißt unmögliches Ereignis
Vereinigung $E \cup F$: Ereignis E oder Ereignis F treten ein. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$: mindestens ein Ereignis $E_i$tritt ein.
Schnitt $E \cap F$: Ereignis E und Ereignis F treten ein.
$\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ alle Ereignisse E_i treten ein. **Gegenereignis** $\overline{E} = \Omega / E$: Ereignis E tritt nicht ein (Komplement von E)
Disjunkte EreignisseE und F: $E \cap F = \emptyset$

2.2 De Morgan'schen Regeln

$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$
$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$

2.3 Wahrscheinlichkeit

$0 \le P(E) \le 1$; P(Ω) = 1;
P($\bigcup_{i=1}^{\infty}$) = $\sum_{i=1}^{\infty}$ P(E_i), falls $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$

2.3.1 Satz 2.1

P($\overline{E}$) = 1 -P(E)
P($E \cup F$) = P(E)+ P(F) - P($E \cap F$) (Übungsaufgabe!!! Ergänzen)

2.4 Laplace-Experiment

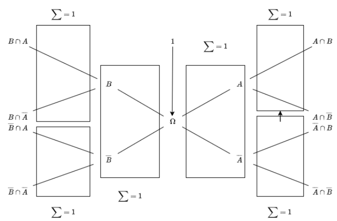
Zufallsexperimente mit n gleich wahrscheinlichen Elementarereignissen. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit P(E) für $E \subseteq \Omega$ aus:
P(E) = $\frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}} = \frac{\text{Mächtigkeit von E}}{\text{Mächtigkeit von }\Omega} = \frac{|E|}{n}$

2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

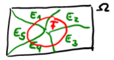
2.5.1 Satz 2.2

$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$
$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$



2.5.2 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ mit $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$ d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte Zerlegung bzw. eine Partition von Ω. Somit gilt:
$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)$
Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten $F \cap E_i$



2.5.3 Vierfeldertafel

$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E})$
$P(\overline{F}) = P(\overline{F} \cap E) + P(\overline{F} \cap E)$

	E	Ē	
F	P(F∩E)	P(F∩Ē)	P(F)
F̄	P(F̄∩E)	P(F̄∩Ē)	P(F̄)
	P(E)	P(Ē)	1

Satz 2.2 oben: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$ **Tafel** $= P(F) - P(F \cap \overline{E}) = P(E) - P(\overline{F} \cap E)$; $P(\overline{F}|E) = 1 - P(F|E)$

2.5.4 Formel von Bayes

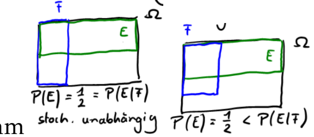
Hilfreich, wenn man man $P(F|E_i)$ kennt, aber nicht $P(E_k|F)$ **Satz 2.4** $P(E_k|F) = \frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)}}$

Nur Nenner!P(F) aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

2.5.5 Stochastische Unabhängigkeit

Übung Die Ereignisse E und F heißen (stochastisch) unabhängig, wenn die Information über das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert, d.h. falls
$\underbrace{P(E|F)}_{= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}} = P(E)$ or $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$
Es gilt Falls die Ereignisse E, F unabhängig sind, dann sind auch: $\circ E, \overline{F}$; $\circ \overline{E}, F$; $\circ \overline{E}, \overline{F}$ unabhängig
Bemerkung

- Stochastische Unabhängigkeit bedeutet nicht notwendigerweise eine kausale Abhängigkeit
- Veranschaulichung mit Venn Diagramm



- $A, B \neq \emptyset$ und $A \cap B = \emptyset$
$P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$
$\emptyset \neq P(A) \cdot P(B)$ da P(A) > 0 und P(B)> 0
=> A, B stochastisch abhängig

3 Zufallsvariable

Abbildung des **abstrakte** Ergebnisraums Ω auf $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$ = heißt Zufallsvariable (ZV). x ∈ R. heißt Realisation der ZV X.

- Diskrete ZV: $X(\Omega) = x_1, ..., x_2 (n \in \mathbb{N})$; z.B. X = "Augensumme beim Würfeln "
- Stetige ZV: $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$; "z.B. Körpergröße eines Menschen"

3.1 Verteilungsfunktion-allg.

Die Wahrscheinlichkeit P(B) für ein Ereignis B in $\mathbb{R}$ wird zurückgeführt auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Ereignisse in Ω. Für jedes $X \in \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion F: $\mathbb{R} \to [0, 1]$ einer ZV X definiert durch:
F(x) = P(X ≤ x)

- $0 \le F(x) \le 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$ $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- monoton wachsend
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

3.2 Diskrete ZVs

Für eine diskrete ZV X mit $X(\Omega) = x_1, ..., x_n$ (n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch:

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), \text{falls } x_i \in X(\Omega) \\ 0, sonst \end{cases} \qquad (3)$$

Es gilt:

- $F(x) = (P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$
- F(x) ist eine rechtseitig stetige **Treppenfunktion** mit **Sprüngen** bei der Realisation von x_i.

3.3 Stegite ZVs

Stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte f $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definiert durch
$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$
Es gilt:

- $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ und $F'(x) = f(x)$
- F(x) ist stetig & $P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$ wegen $P(X = a) = 0$

3.4 Verteilungsfunktion

$\int^x_{\text{Untergrenze}}$ Es wird normal mit - Integriert.

3.5 Zusammenfassung

3.5.1 Diskrete ZV

- Wahrscheinlichkeitsverteilung p(x) $\sum_i^n p(x_i) = 1 x_i$ ist Realisation der ZV.
- Verteilungsfunktion F(x) ist rechtsseitig stetige **Treppenfunktion**. **Sprunghöhen:** $P(X=x_i) = F(x_i) - \lim_{x \to x_i-} \neq 0$
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \neq P(a \le X \le b)$

3.5.2 Stetige ZV

- Dichtefunktion fx $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Verteilungsfunktion $F(x)$ ist stetig mit $F'(x) = f(x); P(X = x_i) = 0$
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = P(a \le X \le b) = F(a \le X < b) = P(a < X < b)$

3.6 Erwartungswert

Der Erwartungswert $E[X] =$ einer ZV X ist der **Schwerpunkt** ihrer Verteilung or der durchschnittliche zu erwartende Wert der ZV.

- diskrete ZV: $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$
- stetige ZV: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

ZV ist konstant. E[X] verhält sich linear. Eigenschaften von $E[X]$:

- $E[b] = b$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[\underbrace{X_i + ... + X_n}] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$
- $\sum_{i=1}^n x_i$

3.6.1 Satz 3.1

Sei Y = g(X) eine Funktion der ZV X. Dann gilt:

- für diskrete ZV: $E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x) \cdot p(x_i)$
- für stetige ZV: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$. Das vertauschen von E und g nur bei **linearen** Funktionen möglich. ⇒ g(E[X])

3.7 Varianz

Die Varianz einer ZV X mit μ ist ein quadratisches Streungsmaß. $\sigma^2 = Var[X] = \underbrace{E[(X-\mu)^2]}_{g(X)} \overset{\text{falls x stetig}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)$

Die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche Dimension von die ZV X.

- $Var[b] = 0$
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

3.7.1 Satz 3.2

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ **Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das einfach stehende x quadriert nicht f(x)!!!**

3.8 Z-Transformation, Standardisierung

Sei X eine ZV mit μ und σ. Dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{x}{\sigma} - \frac{\mu(konstant)}{\sigma}$

3.9 Kovarianz

Eigenschaften:

- $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$
- $Cov[X,X] = Var[X]$
- $Cov[aX,Y] = aCov[X,Y]$

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y) ist definiert durch $Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ Die Kovarianz beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X und Y. **Je** stärker diese Korrelieren, **desto** (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz. Falls X, Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow$ $Cov[X,Y] = 0$

3.10 Satz 3.3

$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

3.10.1 Varianz einer Summe von ZV

- $Var[X_i + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov[X_i, X_j]$; $Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2]$
- Falls X_i, X_j paarweise unabhängig **!!!:** $Var[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$

3.11 Overview μ σ

3.11.1 E[X]

$E[aX + b] = AE[X] + b; EX_1 + ... + E_n = \sum_{i=1}^n E[X_i]$;
Falls X_1, X_2 unabhängig:
$E[X_i] = \mu => E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)] = \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^n E[x_i]}_{\mu} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

3.11.2 Varianz

$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$
Falls X_i, X_j parweise unabhängig:
$Var[X_1 + ... + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$
$Var[X_i] = \sigma^2 => Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

3.12 Quantile

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F(x) und 0 < p < 1. Dann ist das p-Quantil definiert als der Wert $x_p \in \mathbb{R}$ für den gilt: $F(x_p) \ge p$. p-Quantil einer stetigen ZV mit **streng monoton wachsenden** F(x:)$x_p = F^{-1}(p)$d. h. umkehrbar.

4 Spezielle Verteilung

4.1 Diskrete Verteilung

4.1.1 Bernouilliverteilung

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg; **Wahrscheinlichkeit:** $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$; **Verteilung:** $X \sim B_{1,p}$ p ist Erfolgswahrscheinlichkeit; $E[X] = p = \sum x_i \cdot p(x_i) = 1 \cdot p(1)$; $Var[X] = p(1-p) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$;

4.1.2 Binominalverteilung

Anzahl der Erfolge beim n-maligen Ziehen **mit Zurücklegen**; **Wahrscheinlichkeit** $P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k \in 0,1,...,n$; **Verteilung** $X \sim B_{n,p}$; $E[X] = np$; $Var[X] = np(1-p)$; **R:** dbinom(k,n,p)=P(X=k) ≙Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion; pbinom(k,n,p)=F(k) ≙Verteilungsfunktion; qbinom(q,n,p)≙q-Quantil; rbinom(k,n,p)≙kbinomialverteilte Zufallszahlen;

4.1.3 Hypergeometrische Verteilung

Anzahl der Erfolge beim **n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen** aus einer Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten, und N Elementen, die Misserfolg bedeuten. $Gesamtumfang = M + N$; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, k \in \{0,1,...,min\{n,M\}\}$; **Verteilung** $X \sim H_{M,N,n}$; $E[X] = n\frac{M}{M+N}$; $\frac{M}{M+N} \hat{=} Trefferwahrscheinlichkeit$; $Var[X] = n\frac{M}{M+N}(1 - \frac{M}{M+N})\frac{M+N-n}{M+N-1}$; → 1 falls n klein im Verhältnis zu M+N; **R:** $dhyper(k,M,N,n) = P(X = k)$; $phyper(k,M,N,n) = F(k)$;

4.1.4 Poisson-Verteilung

Verteilung der seltenen Ereignisse Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in einem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge λ pro Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt. $k \in \mathbb{N}_0 \to diskret$ **Wahrscheinlichkeit** $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ mit $\sum_{k=0}^\infty P(X = k) = 1, da \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$; **Verteilung** $X \sim P_\lambda$; $E[X] = \lambda, da \sum_{k=0}^\infty k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^\infty \lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$; $Var[X] = \lambda$ **R:** $dpois(k,\lambda) = P(X = k)$; $ppois(k,\lambda) = F(k)$;

4.1.5 Gleichverteilung

Alle Werte $\{x_1,...,x_n\}$einer ZV X sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$; **Verteilung** $X \sim U_{\{x_1,...,x_n\}}$; $E[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k = \overline{x}$; $Var[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2 - \overline{x}^2$; **R:** $sample(1:N,n)$≙ n Zufallszahlen zwischen 1 und N

4.2 Gleichverteilung

4.2.1 Stetige Gleichverteilung

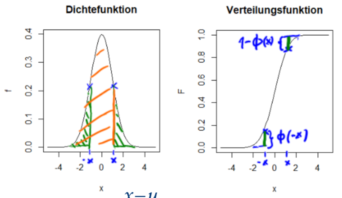
Zufallszahlen aus einem Intervall $[a,b]$; **Dichte:** $f(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in [a,b]$; **Verteilung:** $X \sim U_{[a,b]}$; $E[X] = \frac{a+b}{2}$; $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ **R:** $dunif(x,a,b) = f(x)$; $punif(x,a,b) = F(x)$; $runif(n)$≙ n Zufallszahlen zwischen 0 und 1; $runif(n,a,b)$≙ n Zufallszahlen zwischen a und b;

4.2.2 Normalverteilung

Beschreibt viele reale Situationen, ist insbesondere Grenzverteilung unabhängiger Summen; **Dichte:** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)}$; **Verteilung:** $X \sim N_{\mu,\sigma^2}$; $E[X] = \mu$; $Var[X] = \sigma^2$; **R:** $dnorm(x,\mu,\sigma) = f(x)$; $pnorm(x,\mu,\sigma) = F(x)$; $qnorm(q,\mu,\sigma) : q - Quantil$; **Maximalstelle** von $f(x)$ bei $x = \mu$; **Wendestelle** von $f(x)$ bei $x = \mu \pm \sigma$; $E[aX + b] = aE[X] + b$; $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$; $X \sim N_{\mu,\sigma^2} \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu+b,a^2\sigma^2}$ und $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$; $X_1 \sim N_{\mu_1,\sigma_1^2}$ und $X_2 \sim \underbrace{N_{\mu_2,\sigma_2^2}} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$; X_1, X_2 stochastisch unabhängig

4.2.3 Standardnormalverteilung

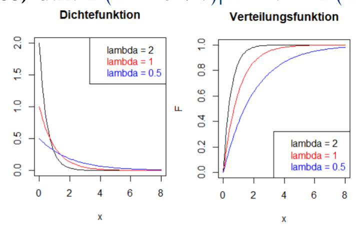
Dichte: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{1}{2}x^2)}$; **Verteilung** $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt$; **Quantile:** $\phi(-x) = 1 - \phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p}$ z.B. $-x_{0.25} = x_{0.75}$;



Schätzwerte: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$

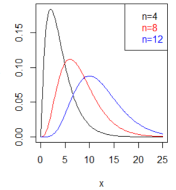
4.2.4 Exponentialverteilung

Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei $Y_t \sim P_{\lambda t}$ im Intervall $[0,t]$ von t Zeiteinheiten, dann beschreibt die Exponentialverteilung die Wartezeit X bis zum Eintreten eines Ereignisses; **Dichte- und Verteilungsfunktion:** $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}(x \ge 0)$ und $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; **Verteilung:** $X \sim Exp_\lambda$; $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ ⇒ Berechnung mit partieller Integration; $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$; **R:** $dexp(x,\lambda) = f(x)$; $pexp(x,\lambda) = F(x)$; **Eigenschaft:** Eine exponentialverteilte ZV X ist gedächtnislos, d.h. $P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$;



4.2.5 Chiquadrat-Verteilung

$Z_1,...,Z_n$ seien unabhängige, standardnormalverteilte ZV $\Rightarrow X = Z_1^2 + + Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung:** $X \sim \chi_n^2$; $E[X] = n$; $Var[X] = 2n$; **R:** $dchisq(x,n) = f(x)$; $ppchisq(x,n) = F(x)$; **Eigenschaft:** $X_1 \sim \chi_{n1}^2$ und $X_2 \sim \chi_{n2}^2 \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi_{n1+n2}$



4.2.6 t-Verteilung

$Z \sim N_{0,1}$ und $X \sim \chi^2_n \Rightarrow Y = \frac{Z}{\frac{X}{\sqrt{n}}}$ ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; **Verteilung:** $Y \sim t_n$; $E[Y] = 0$ für $n > 1$; $Var[Y] = \frac{n}{n-2}$ für $n > 2$; **R:** $dt(y,n) \hat{=} f(x)$; $pt(y,n) \hat{=} F(x)$; $qt(y,n) \hat{=} F^{-1}(x)$; **Eigenschaften:** Für $n \to \infty$: $t_n \to N_{0,1}$; Achsensymmetrie der Dichtefunktion $\Rightarrow -y_p = x_{1-p}$

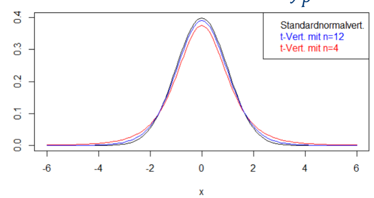


Abbildung Dichtefunktion

5 Zentraler Grenzwertsatz

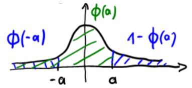
$\mu \sigma^2$ bekannt aber nicht die Verteilung

5.1 ZGWS

Seien $X_i (i = 1, ..., n)$ unabhängige identische verteilte **(i.i.d)** ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt für hinreichend große n (>30) und $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n$ näherungsweise: $\sum_{i=1}^n X_i \sim N_{n\mu, n\sigma^2}$ & $\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \sim N_{0,1}$ $\sum X_i$ bezieht sich auf Y; $\sum X_i - n\mu$ bezieht sich auf X_i; $\overline{X} \sim N_{\mu, \frac{\sigma^2}{n}}$ & $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$;

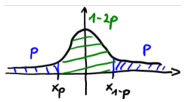
Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn die X_i abhängig und nicht identisch verteilt sind, vorausgesetzt kein X_i ist deutlich dominanter?! als die anderen.Für die Voraussetzung des ZGW ist, dass die X_i nicht normalverteilt sein müssen., damit $\sum_{i=1}^n X_i$ oder $\overline{X}$ bei **hinreichend großem n** normalverteilt sind. Faustregel: **Je** schiefer die Verteilung der X_i , **desto** größer muss n sein: **n>30**: falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung); **n>15:** falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist(Binomialverteilung); $\boldsymbol{n \leq 15}$: falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;

5.2 ϕ

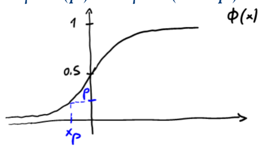


$\phi(-a) = 1 - \phi(a)$; $\phi(a) = 1 - \phi(-a)$; $P(-a < Z < a) = \phi(a) - \phi(-a) = \phi(a) - (1 - \phi(a)) = 2\phi(a) - 1$ or $1 - \phi(-a) - \phi(-a) = 1 - 2\phi(-a)$

5.3 ϕ^{-1}



$-x_p = x_{1-p} \Leftrightarrow -qnorm(p) = qnorm(1-p) \Leftrightarrow -\phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(1-p)$ **Zusammenhang**



$\phi^{-1}(p) = x_p$; **Aufgabentypen:** Seien X_i i.i.d. ZV mit μ und σ^2, aber unbekannter Verteilung. Dann sind $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ und $Z_2 = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$ näherungsweise standardnormalverteilt.

- Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für $\sum X_i, \overline{X}, Z_1$ oder Z_2 berechnen.
- Es lässt sich n bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke k und Wahrscheinlichkeit p gilt: $P(Z_i > k) \geq p$ or $P(-k \leq Z_i \leq k) \geq p$

5.4 Stichprobenverteilungen für normalverteilte Grundgesamtheiten

5.4.1 Stichprobenmittel

Die Stichprobenfunktion $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für Erwartungswert μ, d. h.$E[\overline{X}] = \mu$

5.4.2 Stichprobenvarianz

Die Stichprobenfunktion $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2)$ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2, d. h. $E[S^2] = \sigma^2$; $E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n}E[\sum X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}n\mu = \mu$; $Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n^2}Var[\sum X_i] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$; Seien $X_i (i = 1, ..., n)$ unabhängige normalverteilte ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt: **bei unbekannter Varianz:** $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N_{0,1}$; $\frac{(n-1)S^2 = \sum(x - \overline{x})^2}{\sigma^2 \Rightarrow \text{Standardisierung}} \sim \chi^2_{n-1}$; **Bei unbekannter Varianz:** $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$;

6 Konfidenzintervall

6.1 Begriffe

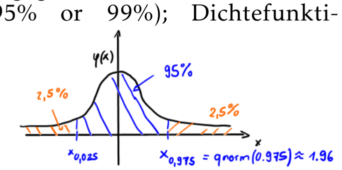
Irrtumswahrscheinlichkeit = α; Konfidenzniveau = $1 - \alpha =$; Konfidenzintervall = I

6.2 Punkschätzer

E[X]: Stichprobenmittel: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$; Varianz: Stichprobenvarianz: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$; Schätzwert für wahren Parameter, aber keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung, Geringe Sicherheit für wahren Parameter;

6.3 Intervallschätzer

Intervall für wahren Parameter, mit vorgegebener Sicherheit; Vorgabe (95% or 99%); Dichtefunktion:



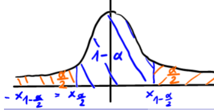
$P(-a \leq \overline{x} \leq a) > 0.95$; σist unbekannter Parameter
$P(\underbrace{x_{0.025}} < \underbrace{\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}} < \underbrace{x_{0.975}}) \geq 0.95$
$-1.96; N_{0,1}; 1.96$;

6.4 μ, unbekannt, σ^2, bekannt

$I =]\overline{X}\text{-}\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$
$\underbrace{\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}_{qnorm(1-\frac{\alpha}{2})}$

$1-\alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
90%	5%	$\phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}645$
95%	2,5%	$\phi^{-1}(0{,}975) \approx 1{,}96$
99%	0,5%	$\phi^{-1}(0{,}995) \approx 2{,}576$

$\overline{X} + \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}[$;



6.5 μ & σ^2, unbekannt

$I =]\overline{X}\text{-}t^{-1}_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t^{-1}_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}}[$

6.6 Zusammenfassung

Wie verändert sich das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall, n-größer $\Rightarrow$ I kürzer; 1-α größer $\Rightarrow$ I länger; Für $\frac{L}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

6.7 Aufgabentypen

Geg: n, 1-α; **Ges:** I s.o. **Geg:** $\overline{X}, \sigma, 1 - \alpha, L$; $L = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; **Ges:** n; $\sqrt{n} > 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{L}$ **Geg:** n, I, L; **Ges:** 1- α; $1 - \frac{\alpha}{2} = \phi(\frac{L\sqrt{n}}{2\sigma})$

7 Hypothesentests

Basierend auf n unabhängig und identisch Verteilte (i.i.d) Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$(Messungen) soll eine Entscheidung getroffen werden, ob eine Hypothese für einen unbekannten Erwartungswert μ gültig ist or nicht.

7.1 Def

α = Signifikanzniveau/ Fehlerwahrscheinlichkeit TG = Prüfgröße; TG* = standardisierte Prüfgröße; siginifikante Schlussfolgerung = H_0 verworfen $\to$ klassischer Parametertest; schwache Schlussfolgerung = H_0 wird nicht verworfen $\to$ klassischer Parametertest. p-Wert = beobachtetes Signifikanzniveau

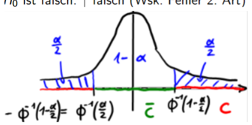
7.2 Null- und Gegenhypothese

Modell: Verteilung der Grundgesamtheit or Testgröße **TG** (häufig $\overline{x}$) ist bekannt bis auf einen Parameter, z.B. μ, für den eine Hypothese aufgestellt wird. $TG \sim N_{\mu,\sigma^2}$; **Nullhypothese:** H_0: Angezweifelte Aussage, der widersprochen werden kann, wenn die Stichprobe einen Gegenbeweis liefert. $H_0 : \mu = \mu_0$; **Gegenhypothese** H_1: Gegenteil von H_0 z.B. $H_1 \neq \mu_0$;

7.3 Ablehnungsbereich, Fehler 1. & 2.

Treffen der Testentscheidung, basierend auf einer konkreten Stichprobe $\{x_1, ..., x_n\}$; Berechnung der Realisation $tg = TG(x_1, ..., _x n)$ der Prüfgröße TG; **Ablehnungsbereich / Kritischer Bereich C:** Werte der Testgröße, die für H1, sprechen & bei Gültigkeit von H_0 mit Wahrscheinlichkeit $\leq \alpha$ (meist 0.1, 0.05, or 0.01) auftreten.**Fehler 1. Art:**α ist die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 verworfen wird, obwohl sie richtig ist. **Annahmebereich:** Komplement $\overline{C}$ des Ablehnungsbereichs. H_0 kann nicht abgeleht werden, falls $tg \in \overline{C}(P(tg \in \overline{C}) \geq 1 - \alpha)$.**Fehler 2. Art:** Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

	Testentscheidung	
Realität	H_0 wird (nicht abgelehnt) angenommen	H_0 wird abgelehnt.
H_0 ist wahr.	richtig	falsch (Wsk: Fehler 1. Art) α wird vorgeg.
H_0 ist falsch.	falsch (Wsk: Fehler 2. Art)	richtig



$H_0 : \mu = \mu_0$; $H_1 : \mu \neq \mu_0$;

7.4 Klassischer Parametertest

H_0 wird abgelehnt, falls $tg = TG(x_1, ..., x_n) \in C$; H_0 wird angenommen falls $tg = TG(x_1, ..., x_n) \in \overline{C}$; Der kritische Bereich ergibt sich analog zu den Konfidenzintervallen durch die Vorgabe eines kleinen Signifikanzniveau α d.h. max. Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art, mit standardisierter Prüfgröße TG* gilt: $P(TG \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG^* \in]-\infty; \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})[\cup]\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}); \infty[$; $P(TG \in \overline{C}) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})]$; Wird dann H_0 verworfen, spricht man von einer signifikanten Schlussfolgerung. Kann H_0 nicht verworfen werden, dann lässt sich keine Aussage über den Fehler 2. Art treffen & man spricht von einer schwachen Schlussfolgerung.

7.5 Zweiseitiger Gauß Test

$H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$; $\overline{X} \sim N_{\mu_0, \sigma_0^2/n} \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \sim N_{0,1}$; $P_{\mu 0}(\overline{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow |TG| = \frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0}\sqrt{n} > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$; **Testentscheidung:** H_0 wird abgelehnt, falls $|TG| > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$; H_0 wird angenommen, falls $|TG| \leq \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$

7.6 Einseitiger Gauß Test

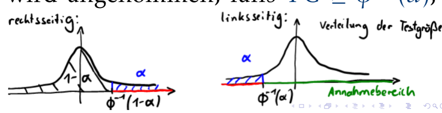
7.6.1 linksseitig

$H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$

7.6.2 rechtsseitig

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

$P_{\mu 0}(\overline{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} < \phi^{-1}(\alpha)$; **Testentscheidung:** H_0 wird abgelehnt falls, $TG < \phi^{-1}(\alpha)$; H_0 wird angenommen, falls $TG \geq \phi^{-1}(\alpha)$;



7.7 Varianten Gauß Test, σ^2 bekannt, μ unbekannt

Prüfgröße$tg = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$;

H_0	H_1	H_0 ablehnen, falls	p-Wert	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert tg\rvert > \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$	$2(1 - \Phi(\lvert tg\rvert))$	zweiseitig Test
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$tg > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$	$1 - \Phi(tg)$	rechtsseitig Test
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$tg < \Phi^{-1}(\alpha)$	$\Phi(tg)$	linksseitig Test

7.8 t-Test, $\mu, \sigma^2 unbekannt$

Prüfgröße $tg = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$

H_0	H_1	H_0 ablehnen, falls	p-Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert tg \rvert > t_{n-1}^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	$2(1-t_{n-1}(\lvert tg \rvert))$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$tg > t_{n-1}^{-1}(1-\alpha)$	$1-t_{n-1}(tg)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$tg < t_{n-1}^{-1}(\alpha)$	$t_{n-1}(tg)$

7.9 p-Wert

Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von H_0 den beobachteten Wert tg der Prüfgröße or einen noch stärker von μ_0 abweichenden Wert zu bekommen. Der p-Wert zu einer Hypothese H_0 ist der kleinste Wert von α, für den H_0 noch abgelehnt werden kann. **Je kleiner** der Wert, **desto kleiner** ist der Fehler 1. Art & umso signifikanter ist die Testentscheidung. **Nice to know** Anhand des p-Werts kann man für beliebige Werte von α eine Testentscheidung treffen;
Falls $p-Wert < 1\%$: sehr hohe Signifikanz
Falls $1\% \leq p-Wert < 5\%$: hohe Signifikanz
Falls $5\% \leq p-Wert \leq 10\%$: Signifikanz
Falls $p-Wert > 10\%$: keine Signifikanz

7.10 Zusammenhang I & Hypothesentests zweiseitig

zum Konfidenzniveau $1-\alpha$; H_0 wird abgelehnt, falls $\mu_0 \notin I$; H_0 wird angenommen, falls $\mu_0 \in I$; Das Konfidenzniveau ist der Annahmebereich von H_0 zum Signifikanzniveau α;

7.11 Zusammenfassung klass. Hypo.test

Signifikanzniveau α wird vorgegeben;
α & Verteilung der Testgröße unter H_0 wir der Ablehnungsbereich ermittelt. **Je kleiner (größer)** α **, desto kleiner (größer)** ist der Ablehnungsbereich;
!: $\alpha \& C$ hängen **nicht von** der konkreten Stichprobe ab;
H_0 wird abgelehnt, falls der ermittelte Wert der Testgröße (beobachteter Wert) in C liegt. **!:** Die tg hängt von der konkreten Stichprobe ab. Sie ist eine ZV.

7.12 Test mittels p-Wert

α wird vorgegeben.
Berechnung des p-Werts anhand der konkreten Stichprobe mit der Verteilung der Tg unter H_0;
!:Der p-Wert hängt von der konkreten Stichprobe ab, ist eine ZV.
H_0 wird abgelehnt, falls $p-Wert \leq \alpha$.;

8 Fehleranalyse

Derzeit ausgeklammert

9 Interpolation

Zu gegebenen Punkten $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ eine Funktion G (dies ist nicht eindeutig! Abhängig von der Funktionsklasse), so dass $G(x_i) = y_i, i = 0, ..., n$ (Interpolationsbedingung). Interpolation ist **ungeeignet** für verrauschte Daten. Lösung: Approximation der kleinsten Quadrate.

9.1 Begriffe

Extrapolation $\hat{=}$ Näherungwerte für x-Werte außerhalb der Stützstellen; Dividierende Differenzen $\hat{=}$ Koeffizienten c_i lassen sich rekursiv durch wiederholte Bildung von "Differenzquotienten"berechnen

9.2 Vandermonde/klassisch

Unterschiedliche Darstellungen für ein Interpolationspolynom $G(x) = p_n(x)$ vom Grad n haben unterschiedliche Eigenschaften bei der numerischen Berechnung.**Monombasis:** $x^0, x^1, x^2, x^3, ...; p_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0$; **Ziel:** Bestimmung d. Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ sodass $p_n(x_i) = y_i = a_n x_i^n + ... + a_1 x_i^1 + a_0 x^0$ für i = 0, ..., n; **Für die eindeutige Lösung n+1 Gleichungen: Interpolationsbedingungen;**

In Matrixform:

$$\begin{array}{ccccc} x_i^n & & x_i^2 & x_i & x_i^0=1 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_0^n & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^n & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix ist die sog. **Vandermonde Matrix**; **Eigenschaften:** Die Vandermonde Matrix ist nicht singulär(falls alle x_i verschieden); Rechenaufwand: $\mathcal{O}(n^3)$; Für große n sehr schlecht konditioniert & als Allgemeiner Ansatz ungeeignet.

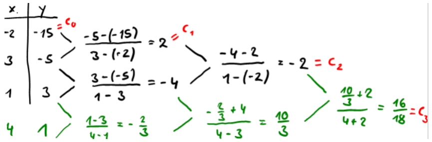
9.3 Lagrange

2 Formeln; $p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$; $L_k(x) \prod_{j=0;j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-y_j}$; Jede Basisfunktion $L_k(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$; **Bemerkung:** Findet Anwendung bei Numerischer Integration; Wenn Stützstellen x_i gleich bleiben & nur y_i ändern $\Rightarrow$ keine Neuberechnung; Rechenaufwand $\mathcal{O}((n+1)^2)$; Kommen neue Stützpunkte hinzu $\Rightarrow$ Neuberechnung!; Die Interpolationspolynome liefern nur sinnvolle **Näherungswerte** für x-Werte, die zwischen den gegebenen Stützstellen liegen; Extrapolation (Näherungswerte für x-Werte außerhalb der Stützstellen) kann zu großen Abweichungen führen.

9.4 Newton

Darstellung des Interpolanten, die auf ein gestaffeltes LGS führt & einfache Hinzunahme weiterer Punkte erlaubt. $\underbrace{p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + ... + c_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}$
Polynom vom Grad n
Das Resultierende LGS für die Koeffizienten c_i hat gestaffelte Form. **Interpolationsbedingungen?**
Vorteile: Rechenaufwand $\mathcal{O}(n^2)$ Gleitpunktoperationen; Hinzufügen weiterer Stützstellen ohne großen Aufwand. Andere Koeffizienten bleiben unverändert.

9.5 Dividierende Differenzen



9.6 Effizienz

9.6.1 klasisch

$p_n(x) = a_n x^n + ... + a_0$; **Aufwand:** 2n-1 Mult.

9.6.2 Horner Schema

$p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 + a_0 = ((a_3 + a_2)x + a_1)x + a_0$; Allg.: $p_n(x) = (...(a_n x + a_{n-1})x + ... + a_1)x + a_0$; **Aufwand:** n Mult.

9.7 Interpolationsfehler

Falls f hinreichend glatt ist & p_n das eindeutige Interpolationspolynom von Gradn n, dann gilt fürn den Interpolationsfehler: $\underbrace{f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n)}$
mit $\theta \in [x_0; x_n]$
Vergleichbar zum Restglied bei der Taylorreihenentwicklung; **Bemerkung:** θ unbekannt, daher nur Fehlerabschätzung; Fehler ist Abhängig von der Verteilung der Stützstellen; Der Fehler ist bei großen n an den Intervallrändern deutlich größer, als in der Intervallmitte

9.7.1 Wahl der Stützstellen

Runge Funktion $(f) = \frac{1}{1+25x^2}$ äquidistante Stützstellen das Interpolationspolynom nicht immer gegen die zugrundeliegende stetige Funktion konvergiert, wenn die Anzahl der Stützstellen & damit der Grad des Polynoms wächst.**Lösung:** Nicht-aquidistante Verteilung der Stützstellen, dichter an den Intervallgrenzen.

9.7.2 Chebyshev-Punkte

haben die Eigenschaft; senkrechte Projektion von gleichverteilten Punkten auf dem Einheitskreis. $t_k = cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, ..., n, auf]-1, 1[$; Invtervall: $]a, b[: x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k$. $\Rightarrow$ Fehler wird gleichmäßiger verteiltund Konvergenz erreicht.

9.8 Schwächen der Polynominterpolation

Hoher Rechenaufwand bei meist keiner hoher Differenzierbarkeitsgrad benötigt wird; RB kann Interpolationsfehler sehr groß sein; Bei wachsenden n ist es unmöglich eine Konvergenz gegen die zu interpolierenden Funktion sicherzustellen; **R:** approx $\hat{=}$ lin Interpolation; Spline $\hat{=}$ Spline interpolation; Bibliotheken für Polynominterpolation;

9.9 Spline

Jede Funktion S_i ist ein Polynom vom Grad $n \leq k$; $S(x)$ ist $(k-1)$ - mal stetig differenzierbar, d.h. für alle $x_i (i = 1, ..., n-1)$ gilt: $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$;

9.9.1 Kubisch

Ansatz: $S_i = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$; **Gleichungssystem:** 4n Parameter $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, ..., n-1)$; **2n Interpolationsbedingungen:** am Rand je nur eine. $S_i x_i = y_i$; $Si(x_{i+1}) = y_{i+1}$ für $(i = 0, 1, ..., n-1) \Rightarrow$ Stetigkeit; **Stetigkeit der 1. Abl:** $S_i^{'}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{'}(x_{i+1})$; $\Leftrightarrow S_i^{'}(x_{i+1}) - S_{i+1}^{'}(x_{i+1}) = 0$; für $i = 0, 1, ..., n-2$; **Stetigkeit der 2. Abl.:** $S_i^{''}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{''}(x_{i+1})$; $S_i^{''}(x_{i+1}) - S_{i+1}^{''}(x_i + 1) = 0$; für $i = 0, 1, ..., n-2$); **natürlicher Randbedingungen:** $S_0^{''}(x_0) = 0$; $S_{n-1}^{''}(x_n) = 0$; nach geschickter Umformung der Gleichungen hat das LGS Tridiagonalform. **Rechenaufwand** $\mathcal{O}(n)$ Gleitpunktoperationen.

10 NumInt

Verbesserung der Näherung: Aufteilung in kleine Teilintervalle & Summe von Rechtecksflächen bilden; Interpolations mit Polynom höheren Gredes durch diskrete Punkte.

10.1 Def

$p_k \hat{=}$ Interpolationspolynom; $I_n \hat{=}$ Quadraturformel; $K \hat{=}$ Fehlerkonstante des Verfahrens.; Singularität $\hat{=}$ isolierter Punkt, der ungewöhnliches Verhalten zeigt;

10.2 Newton-Cotes

Das Intergral des p_k diens al Appr. für das Int. von f(x); $\int_0^1 f(t)dt \approx \int_0^1 p_k(t)dt = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j f(t_j)$ Das Interpolationspolynom muss nicht explizit aufgestellt werden, es dient vorab der Bestimmung der Gewichte α_j; $\int_0^1 p_k(t) = \int_0^1 \sum f(t_j) L_j(t)dt = \sum f(t_j) \int_0^1 L_j(t)dt$

10.2.1 Trapezregel

$T_1 : \int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$; $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$;
T_n : Für Teilintervalle mit gleicher Länge: $h = \frac{b-a}{n}$; $T_n = h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2})$;

10.2.2 SimpsonRegel

$S_1 : \int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(0.5) + f(1))$; $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$;
Für n = 1: $\frac{(b-a)}{2\cdot 1}\frac{1}{3}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$;
Für n allg.: $\frac{(b-a)}{2n}\frac{1}{3}(f(a) + 4(a+h) + ... + 4f(b-h) + f(b))$ S_n : **Beachte gerade Anzahl an Teilinvervallen!**; Für 2n Teilintervalle, 2n+1 Knoten mit gleicher Länge $h = \frac{b-a}{2n}$; $S_2 = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$;

Newton-Cotes Regeln

Basierend auf äquidistanten Knoten $t_j = \frac{j}{k}$

Grad des Interpolationspolynoms

k	α_i					Methode	Ordnung p
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapez	2
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			Simpson	4
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$-Rule	4
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	Milne	6

d.h. exakt für $\int_0^1 x^k dx$ $(k=0,1,...,5)$

Falls α_i positiv. Integrationsregeln stabil; $k \leq 7 \& k = 9 \Rightarrow$ positive Gewichte; Bei halbierung der Intervalle **Nachfrage** vervierfacht oder versechszehnfacht sich der Fehler?

10.3 Ordnung Integrationsregel

Eine Integrationsregel hat Ordnung p, wenn sie für Polynome vom Grad $\leq$ p-1 exakte Werte liefert; T_1 Ordnung 2 $\Rightarrow$ exakt für Polynome Grad $\leq$ 1; Ordnung Newton-Cotes Regeln: mind. Ordnung k+1 (k: GRad des Interpolationspolynoms); **Beweis der Ordnung:** $1 = \int_0^1 x^0 dx \stackrel{!}{=}$; $\frac{1}{2} = \int_0^1 x dx \stackrel{!}{=}$; $\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \stackrel{!}{=}$; $\frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 \stackrel{!}{=}$;

10.4 Fehler Quadratur

Für (globalen) Fehler $e_{In} = \int_a^b f(x)dx - I_n$ einer Quadraturformel I_n der Ordnung p auf $[a, b]$ gilt: $|e_{In}| = (b-a)h^p K |f^{(p)}(\xi)|.\xi \in]a, b[, h = \frac{b-a}{n}$ & $|e_{In}| \leq (b-a)h^p K \cdot max_{a \leq x \leq b}|f^{(p)}(x)|$;

10.5 Fehler T_n

Der Fehler ist proportional zu h^2; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor $\frac{1}{4}$; Ein Integral kann beliebig genau approx. werden, falls h entsprechend klein gewählt wird. **Aber** Rundungsfehler bei vielen Rechenoperationen, verschlechtert wieder das Ergebnis. Vorteil von Verfahren höherer Ordnung: Weniger Teilintervalle nötig. $|e_{T_n}| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|, K = \frac{1}{12}, h = \frac{b-a}{n}$

10.6 Fehler S_n

Der Fehler ist proportional zu h^4; Eine Halbierung der Intervalllänge reduziert den Fehler um den Faktor $\frac{1}{16}$; $|e_{S_n}| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)max_{a\leq x\leq b}|f^4(x)|, h = \frac{(b-a)}{2n}, K = \frac{1}{180}$

10.7 Grenzen NeCo

viele äquidistante Knoten $\rightarrow$ Gewichte negativ $\rightarrow$ Verfahren instabil; geschlossene NeCoRe $\rightarrow$ Funktionsauswertung an RB $\rightarrow$ Problem mit Singularitäten. größtmögliche Ordnung unerreichbar wegen äquidistanten Knoten; **Lösung:**

10.8 GauQua

11 Allgemein

11.1 Symbole

Stichprobenstandardabweichung $\hat{=}$ s; Standardabweichung $\hat{=}\sigma$

11.2 Abl.

$x^n \hat{=} nx^{n-1}$

$sinx \hat{=} cosx$; $cosx \hat{=} -sinx$; $tanx \hat{=} \frac{1}{cos^2x} = 1 + tan^2x$; $cotx \hat{=} -\frac{1}{sin^2x} = -1 - cot^2x$;

$e^x \hat{=} e^x$; $a^x \hat{=} (\ln a)\cdot a^x$;

$\ln x \hat{=} \frac{1}{x}$; $\log_a x \hat{=} \frac{1}{(\ln a)\cdot x}$;

11.3 Abl.Regeln

Faktorregel $y = C\cdot f(x) \Rightarrow y' = C\cdot f'(x)$; **Summenregel** $y = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$; **Produktregel** $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'\cdot u$; $y = u\cdot v\cdot x \Rightarrow y' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot x'$; **Quotientenregel** $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$; **Kettenregel** $f'(x) = F'(u)u'(x) \hat{=} F'(u)$: Ableitung der Äußeren Funktion; $u'(x)$: Ableitung der Inneren Funktion

11.4 Integralregel, elementar

Faktorregel $\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot\int_a^b f(x)dx$; **Summenregel** $\int_a^b [f_1(x) + ... + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx$; **Vertauschungsregel** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für $(a \leq c \leq b)$;

11.5 Berechnung best. Integr.

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

11.6 Potenzen

$x^{-n} = \frac{1}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ a^m\cdot a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} textfra \neq 0 \\ !(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m\cdot n} \\ a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n \\ \frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n \text{ für } b \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} m, n \in \mathbb{N}^*; \\ a, b \in \mathbb{R} \\ a > 0, b > 0: \\ \text{ beliebig reele} \\ \text{Exponenten} \\ a > 0: a^b \\ = e^{b\ln a} \end{array}$$

11.7 Wurzel

$\sqrt{a^2} = |a|$; $b = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = (a^{\frac{1}{n}})\cdot(b^{\frac{1}{n}}) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ für } b > 0$$

$\Rightarrow m, n \in \mathbb{N}^*; a \geq 0, b \geq 0$

11.8 Abc-Formel

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_{1,2} = \frac{2a}{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}$

11.9 Bin.Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1. Binom; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; 2. Binom; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 3. Binom;

11.10 Einigungen

- Beim Runden mind. eine Nachkommastelle.