

1 Beschreibende Statistik
1.1 Begriffe
1.1.1 Beschreibende/Deskriptive Statistik

Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakterisiert und durch geeignete Grafiken anschaulich gemacht.

1.1.2 Schließende/Induktive Statistik

Aus beobachtete Daten werden Schlüsse gezogen und diese im Rahmen vorgegebener Modelle der Wahrscheinlichkeitstheorie bewertet.

1.1.3 Grundgesamtheit

Ω : Grundgesamtheit ω : Element oder Objekt der Grundgesamtheit diskret (<30 Ausprägungen), stetig (≥ 30 Ausprägungen), univariat ($p=1$), multivariat ($p>1$)

1.2 Lagemaße

1.2.1 Modalwerte x_{mod}

Am häufigsten auftretende Ausprägungen (insbesondere bei qualitativen Merkmalen)

1.2.2 Mittelwert

R: $mean(x)$
Schwerpunkt der Daten. Empfindlich gegenüber Ausreißern.

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

1.3 Median

R: $median(x)$

Liegt in der Mitt der sortierten Daten x_i . Unempfindlich gegenüber Ausreißern.

$$x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

1.4 Streuungsmaße

1.4.1 Spannweite

$\max x_i - \min x_i$

1.4.2 Stichprobenvarianz s^2

R: $var(x)$
Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)$$
 Gemittelte Summe der quadratischen Abweichung vom Mittelwert

1.4.3 Stichprobenstandardabweichung

R: $sd(x)$
 $s = \sqrt{s}$ Streuungsmaß mit gleicher Einheit wie beobachteten Daten x_i . \bar{x} minimiert die "quadratische Verlustfunktion" oder die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an.

1.5 p-Quantile

R: $quantile(x, p)$. Teilt die sortierten Daten x_i ca. im Verhältnis p : $(1-p)$ d.h. $\hat{F}(x_p) \approx p$; 1. Quartil = 0.25-Quantil; Median = 0.5-Quantil; 3. Quartil = 0.75-Quantil;

1.6 Interquartilsabstand I

$I = x_{0.75} - x_{0.25}$. Ist ein weiterer Streuungsparameter.

1.7 Chebyshev

$\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$, für alle $k \geq 1$ \bar{x} der Durchschnitt, $s > 0$ die Stichproben-Standardabweichung von Beobachtungswerten x_1, \dots, x_n . Sei $S_k = \{i, 1 \leq i \leq n : |x_i - \bar{x}| < k \cdot s\}$. Für eine beliebige Zahl $k \geq 1$ liegen mehr als $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$ Prozent der Daten im Intervall von $\bar{x} - ks$ bis $\bar{x} + ks$. **Speziell:** Für $k = 2$ liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um \bar{x} . Für $k = 3$ liegen mehr als 89% der Daten im 3s-Bereich um \bar{x} . **Komplement Formulierung:** $\bar{S}_k = \{i | |x_i - \bar{x}| \geq k \cdot s\}$; $\frac{N(\bar{S}_k)}{n} \leq \frac{1}{k^2}$;

Die Ungleichheit liefert nur eine sehr grobe Abschätzung, ist aber unabhängig von der Verteilung der Daten. **Empirische Regeln** 68% der Daten im Bereich um $\bar{x} \pm s$. 95% um $\bar{x} \pm 2s$. 99.7% um $\bar{x} \pm 3s$.

1.8 Korrelation

Grafische Zusammenhang zwischen multivariaten Daten x und y durch ein Streudiagramm. Kennzahlen zur Untersuchung des Zusammenhangs:

1.8.1 Empirische Kovarians

R: $cov(x, y)$; $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
 $\frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})$

1.8.2 Empirische Korrelationskoeffizient r

R: $cor(x, x)$; $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$; Näherungsweise lin. Zusammenhang zw. x und y , falls $|r| \approx 1$.

1.8.3 Regressionsgerade y

$y = mx + t$ mit $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $t = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$;
Für den Bereich $[-0.7, 0.7]$ bis $\pm 1 \Rightarrow$ linearer Zusammenhang.

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung
2.1 Begriffe

Ergebnisraum Ω : Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments
Elementarereignis $\omega \in \Omega$: einzelnes Element von Ω

Ereignis $E \subseteq \Omega$: beliebige Teilmenge des Ergebnisraums Ω heißt sicheres Ereignis, \emptyset heißt unmögliches Ereignis
Vereinigung $E \cup F$: Ereignis E oder Ereignis F treten ein. $\bigcup_{i=1}^n E_i$: mindestens ein Ereignis E_i tritt ein.

Schnitt $E \cap F$: Ereignis E und Ereignis F treten ein.
 $\bigcap_{i=1}^n E_i$ alle Ereignisse E_i treten ein. **Generereignis** $\bar{E} = \Omega \setminus E$: Ereignis E tritt nicht ein (Komplement von E)

Disjunkte Ereignisse E und F: $E \cap F = \emptyset$

2.2 De Morgan'schen Regeln

$\overline{E_1 \cup E_2} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$
 $\overline{E_1 \cap E_2} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$

2.3 Wahrscheinlichkeit

$0 \leq P(E) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$;
 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$, falls $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$

2.3.1 Satz 2.1

$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ (Übungsaufgabe!!! Ergänzen)

2.4 Laplace-Experiment

Zufallsexperimente mit n gleich wahrscheinlichen Elementarereignissen. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ für $E \subseteq \Omega$ aus:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}} = \frac{\text{Mächtigkeit von } E}{\text{Mächtigkeit von } \Omega} = \frac{|E|}{|\Omega|} \text{ text}$$

2.5 Kombinatorik

2.5.1 Allgemeines Zählprinzip

Anzahl der Möglichkeiten für ein k-stufiges Zufallsexperiment mit n_i Varianten im i-ten Schritt: $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

2.5.2 Permutationen

Anzahl einer n-elementigen Menge n-maliges Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge: **n unterscheidbare Elemente:** $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
k Klassen mit je n_i nicht unterscheidbaren Elementen $n = \sum_{i=1}^k n_i$; $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

2.5.3 k-elementiges Teil-mengen einer n-elementigen Menge k-maliges Ziehen aus einer n-elementigen Menge

ohne Zurücklegen = $k \leq n$.
mit Zurücklegen = $k > n$ möglich.

mit Beachtung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen: $\frac{n!}{(n-k)!}$

ohne Beachtung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

mit Beachtung der Reihenfolge, mit Zurücklegen: n^k

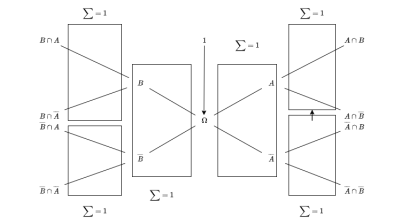
ohne Beachtung der Reihenfolge, mit Zurücklegen: $\binom{n+k-1}{k}$

2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

2.6.1 Satz 2.2

$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$
 $P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$



2.6.2 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^n E_i$ mit $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$ d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte Zerlegung bzw. eine Partition von Ω . So mit gilt:

$P(F) = \sum_{i=1}^n P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^n P(F|E_i) \cdot P(E_i)$

Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten $F \cap E_i$



2.6.3 Vierfeldertafel

$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \bar{E})$
 $P(\bar{F}) = P(\bar{F} \cap E) + P(\bar{F} \cap \bar{E})$

	E	\bar{E}	
F	$P(F \cap E)$	$P(F \cap \bar{E})$	$P(F)$
\bar{F}	$P(\bar{F} \cap E)$	$P(\bar{F} \cap \bar{E})$	$P(\bar{F})$
	$P(E)$	$P(\bar{E})$	1

Satz 2.2 oben: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$ **Tafel**

$= P(F) - P(F \cap \bar{E}) = P(E) - P(\bar{F} \cap E); P(\bar{F}|E) = 1 - P(F|E)$

2.6.4 Formel von Bayes

Hilfreich, wenn man man $P(F|E_i)$ kennt, aber nicht $P(E_k|F)$ **Satz 2.4** $P(E_k|F) = \frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_{i=1}^n P(F|E_i) \cdot P(E_i)}$

Nur Nenner! $P(F)$ aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

2.6.5 Stochastische Unabhängigkeit

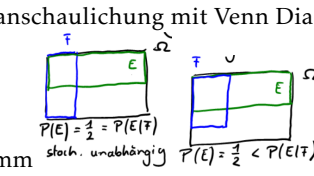
Uebung Die Ereignisse E und F heißen (stochastisch) unabhängig, wenn die Information über das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert, d.h. falls $P(E|F) = P(E)$ oder $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$

$$= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Es gilt Falls die Ereignisse E, F unabhängig sind, dann sind auch:

\bar{E}, \bar{F}
 \bar{E}, F
 \bar{E}, \bar{F} unabhängig **Bemerkung**

- Stochastische Unabhängigkeit bedeutet nicht notwendigerweise eine kausale Abhängigkeit
- Veranschaulichung mit Venn Diagramm



- $A, B \neq \emptyset$ und $A \cap B = \emptyset$
 $P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$
 $\emptyset \neq P(A) \cdot P(B)$ da $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$
 $\Rightarrow A, B$ stochastisch abhängig

3 Zufallsvariable

Abbildung des **abstrakte** Ergebnisraums Ω auf \mathbb{R} . Eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$ heißt Zufallsvariable (ZV). $x \in \mathbb{R}$ heißt Realisation der ZV X .

- Diskrete ZV: $X(\Omega) = x_1, \dots, x_2 (n \in \mathbb{N})$; z.B. X = "Augensumme beim Würfeln"
- Stetige ZV: $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$; z.B. Körpergröße eines Menschen"

3.1 Verteilungsfunktion-allg.
Die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ für ein Ereignis B in \mathbb{R} wird zurückgeführt auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Ereignisse in Ω . Für jedes $X \in \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ einer ZV X definiert durch:
 $F(x) = P(X \leq x)$

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- monoton wachsend
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

3.2 Diskrete ZVs
Für eine diskrete ZV X mit $X(\Omega) = x_1, \dots, x_n$ (n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch:

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & \text{falls } x_i \in X(\Omega) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

Es gilt:

- $F(x) = (P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- $F(x)$ ist eine rechtseitig stetige Treppenfunktion mit Sprüngen bei der Realisation von x_i .

3.3 Stetige ZVs
Stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ definiert durch
 $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$
Es gilt:

- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ und $F'(x) = f(x)$
- $F(x)$ ist stetig & $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$ wegen $P(X = a) = 0$

3.4 Verteilungsfunktion
 $\int_{\text{Untergrenze}}^x$ Es wird normal mit - integriert.

3.5 Zusammenfassung

3.5.1 Diskrete ZV

- Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x) \sum_i^n p(x_i) = 1$ x_i ist Realisation der ZV.
- Verteilungsfunktion $F(x)$ ist rechtsseitig stetige Treppenfunktion. Sprunghöhen: $P(X = x_i) = F(x_i) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x) \neq 0$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \neq P(a \leq X < b)$

3.5.2 Stetige ZV

- Dichtefunktion $f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- Verteilungsfunktion $F(x)$ ist stetig mit $F'(x) = f(x); P(X = x_i) = 0$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = P(a < X < b)$

3.6 Erwartungswert
Der Erwartungswert $E[X]$ einer ZV X ist der Schwerpunkt ihrer Verteilung oder der durchschnittliche zu erwartende Wert der ZV.

- diskrete ZV: $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$
- stetige ZV: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

ZV ist konstant. $E[X]$ verhält sich linear. Eigenschaften von $E[X]$:

- $E[b] = b$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$
- $\sum_{i=1}^n x_i$

3.6.1 Satz 3.1

Sei $Y = g(X)$ eine Funktion der ZV X . Dann gilt:

- für diskrete ZV: $E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot p(x_i)$
- für stetige ZV: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$. Das Vertauschen von E und g nur bei linearen Funktionen möglich. $\Rightarrow g(E[X])$

3.7 Varianz

Die Varianz einer ZV X mit μ ist ein quadratisches Streuungsmaß. $\sigma^2 = Var[X] = E[(X - \mu)^2]$ falls x stetig $\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$
 $g(X)$
Die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche Dimension von die ZV X .

- $Var[b] = 0$
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

3.7.1 Satz 3.2

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das einfach stehende x quadriert nicht $f(x)$!!!

3.8 Z-Transformation, Standardisierung

Sei X eine ZV mit μ und σ . Dann ist $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{x - \mu}{\sigma}$ (konstant)

3.9 Kovarianz
Eigenschaften:

- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$
- $Cov[X, X] = Var[X]$
- $Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]$

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y) ist definiert durch $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ Die Kovarianz beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X und Y . Je stärker diese Korrelieren, desto (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz. Falls X, Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow Cov[X, Y] = 0$

3.10 Satz 3.3
 $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

3.10.1 Varianz einer Summe von ZV

- $Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i] + 2 \sum_{i < j} Cov[X_i, X_j]$
- Falls X_i, X_j paarweise unabhängig !!!: $Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$

3.11 Overview μ, σ

3.11.1 $E[X]$

$E[aX + b] = AE[X] + b; EX_1 + \dots + EX_n = \sum_{i=1}^n E[X_i];$
Falls X_1, X_2 unabhängig:
 $E[X_i] = \mu \Rightarrow E[X] = E[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

3.11.2 Varianz

$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$
Falls X_i, X_j paarweise unabhängig:
 $Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$
 $Var[X_i] = \sigma^2 \Rightarrow Var[X] = Var[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

3.12 Quantile

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und $0 < p < 1$. Dann ist das p -Quantil definiert als der Wert $x_p \in \mathbb{R}$ für den gilt:
 $F(x_p) \geq p$. p -Quantil einer stetigen ZV mit streng monoton wachsenden $F(x): x_p = F^{-1}(p)$ d. h. umkehrbar.

4 Spezielle Verteilung
4.1 Diskrete Verteilung

4.1.1 Bernoulli-Verteilung

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg; **Wahrscheinlichkeit:** $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$; **Verteilung:** $X \sim B_{1,p}$ p ist Erfolgswahrscheinlichkeit; $E[X] = p = \sum x_i \cdot p(x_i) = 1 \cdot p(1); Var[X] = p(1-p) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1 - p)$;

4.1.2 Binominalverteilung

Anzahl der Erfolge beim n -maligen Ziehen mit Zurücklegen; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$; **Verteilung** $X \sim B_{n,p}$; $E[X] = np$; $Var[X] = np(1 - p)$; **R:** $dbinom(k, n, p) = P(X = k) \triangleq$ Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion; **p** $binom(q, n, p) \triangleq q$ -Quantil; **r** $binom(k, n, p) \triangleq$ binomialverteilte Zufallszahlen;

4.1.3 Hypergeometrische Verteilung

Anzahl der Erfolge beim n -maligen Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten, und N Elementen, die Misserfolg bedeuten. **Gesamtumfang** $= M + N$; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, \min\{n, M\}\}$; **Verteilung** $X \sim H_{M, N, n}$; $E[X] = n \cdot \frac{M}{M+N}$; $\frac{M}{M+N} \triangleq$ Trefferwahrscheinlichkeit; $Var[X] = n \cdot \frac{M}{M+N} (1 - \frac{M}{M+N}) \cdot \frac{M+N-n}{M+N-1}$; $\rightarrow 1$ falls n klein im Verhältnis zu $M+N$; **R:** $dhyper(k, M, N, n) = P(X = k)$; **p** $hyper(k, M, N, n) = F(k)$;

4.1.4 Poisson-Verteilung

Verteilung der seltenen Ereignisse Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in einem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge λ pro Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt. $k \in \mathbb{N}_0 \rightarrow$ **diskret Wahrscheinlichkeit** $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1, da \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$; **Verteilung** $X \sim P_{\lambda}$; $E[X] = \lambda, da \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$;

$Var[X] = \lambda$ **R:** $dpois(k, \lambda) = P(X = k)$; **p** $pois(k, \lambda) = F(k)$;

4.1.5 Gleichverteilung

Alle Werte $\{x_1, \dots, x_n\}$ einer ZV X sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlichkeit** $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$; **Verteilung** $X \sim U_{\{x_1, \dots, x_n\}}$; $E[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}$; $Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2$; **R:** $sample(1, N, n) \triangleq n$ Zufallszahlen zwischen 1 und N

4.2 Gleichverteilung

4.2.1 Stetige Gleichverteilung

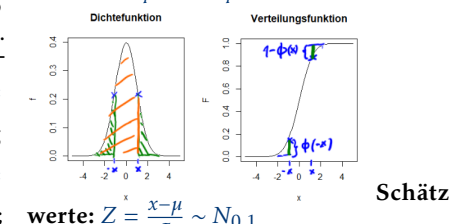
Zufallszahlen aus einem Intervall $[a, b]$; **Dichte:** $f(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in [a, b]$; **Verteilung:** $X \sim U_{[a, b]}$; $E[X] = \frac{a+b}{2}$; $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ **R:** $dunif(x, a, b) = f(x)$; $punif(x, a, b) = F(x)$; $runif(n) \triangleq n$ Zufallszahlen zwischen 0 und 1; $runif(n, a, b) \triangleq n$ Zufallszahlen zwischen a und b ;

4.2.2 Normalverteilung

Beschreibt viele reale Situationen, ist insbesondere Grenzverteilung unabhängiger Summen; **Dichte:** $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot (-\frac{1}{2} (\frac{x-\mu}{\sigma})^2)$; **Verteilung:** $X \sim N_{\mu, \sigma^2}$; $E[X] = \mu$; $Var[X] = \sigma^2$; **R:** $dnorm(x, \mu, \sigma) = f(x)$; $pnorm(x, \mu, \sigma) = F(x)$; **q** $norm(q, \mu, \sigma) = q$ -Quantil; **Maximalstelle** von $f(x)$ bei $x = \mu$; **Wendestelle** von $f(x)$ bei $x = \mu \pm \sigma$; $E[aX + b] = aE[X] + b$; $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$; $X \sim N_{\mu, \sigma^2} \Rightarrow aX + b \sim N_{a\mu + b, a^2 \sigma^2}$ und $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N_{0, 1}$; $X_1 \sim N_{\mu_1, \sigma_1^2}$ und $X_2 \sim N_{\mu_2, \sigma_2^2} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N_{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$; X_1, X_2 stochastisch unabhängig

4.2.3 Standardnormalverteilung

Dichte: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2} x^2}$; **Verteilung** $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$; **Quantile:** $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \Rightarrow -x_p = x_{1-p}$ z.B. $-x_{0.25} = x_{0.75}$;



Schätz-
werte: $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N_{0, 1}$

4.2.4 Exponentialverteilung

Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei $Y_t \sim P_{\lambda t}$ im Intervall $[0, t]$ von t Zeiteinheiten, dann beschreibt die Exponentialverteilung die Wartezeit X bis zum Eintreten eines Ereignisses; **Dichte- und Verteilungsfunktion:** $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$ und $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; **Verteilung:** $X \sim \text{Exp}_{\lambda}$; $E[X] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ Berechnung mit partieller Integration; $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$; **R:** $\text{dexp}(x, \lambda) = f(x)$; $\text{pexp}(x, \lambda) = F(x)$; **Eigenschaft:** Eine exponentialverteilte ZV X ist gedächtnislos, d.h. $P(X > s + t) | X > t = P(X > s)$;



4.2.5 Chiquadrat-Verteilung

Z_1, \dots, Z_n seien unabhängige, standard-normalverteilte ZV $\Rightarrow X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung:** $X \sim \chi_n^2$; $E[X] = n$; $\text{Var}[X] = 2n$; **R:** $\text{dchisq}(x, n) = f(x)$; $\text{pchisq}(x, n) = F(x)$; **Eigenschaft:** $X_1 \sim \chi_{n_1}^2$ und $X_2 \sim \chi_{n_2}^2 \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$



4.2.6 t-Verteilung

$Z \sim N_{0,1}$ und $X \sim \chi_n^2 \Rightarrow Y = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; **Verteilung:** $Y \sim t_n$; $E[Y] = 0$ für $n > 1$; $\text{Var}[Y] = \frac{n}{n-2}$ für $n > 2$; **R:** $\text{dt}(y, n) \hat{=} f(x)$; $\text{pt}(y, n) \hat{=} F(x)$; $\text{qt}(y, n) \hat{=} F^{-1}(x)$; **Eigenschaften:** Für $n \rightarrow \infty$: $t_n \Rightarrow N_{0,1}$; Achsensymmetrie der Dichtefunktion $\Rightarrow -y_p = x_{1-p}$



Abbildung Dichtefunktion

5 Zentraler Grenzwertsatz

μ, σ^2 bekannt aber nicht die Verteilung

5.1 ZGWS

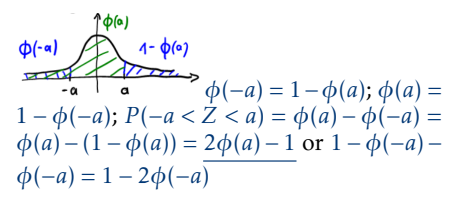
Seien $X_i (i = 1, \dots, n)$ unabhängige identische verteilte (i.i.d) ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann gilt für hinreichend große n (> 30) und $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ näherungsweise:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N_{n\mu, n\sigma^2} \text{ \& } \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \sim N_{0,1}$$

$\sum X_i$ bezieht sich auf Y ; $\sum X_i - n\mu$ bezieht sich auf X_i ; $\bar{X} \sim N_{\mu, \frac{\sigma^2}{n}}$ & $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N_{0,1}$

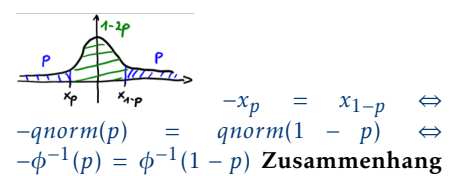
Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn die X_i abhängig und nicht identisch verteilt sind, vorausgesetzt kein X_i ist deutlich dominanter?! als die anderen. Für die Voraussetzung des ZGW ist, dass die X_i nicht normalverteilt sein müssen., damit $\sum_{i=1}^n X_i$ oder \bar{X} bei **hinreichend großem** n normalverteilt sind. Faustregel: **Je** schiefer die Verteilung der X_i , **desto** größer muss n sein: $n > 30$: falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung); $n > 15$: falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist (Binomialverteilung); $n \leq 15$: falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;

5.2 ϕ



$$\phi(-a) = 1 - \phi(a); \phi(a) = 1 - \phi(-a); P(-a < Z < a) = \phi(a) - \phi(-a) = \phi(a) - (1 - \phi(a)) = 2\phi(a) - 1 \text{ or } 1 - \phi(-a) - \phi(-a) = 1 - 2\phi(-a)$$

5.3 ϕ^{-1}



$\phi^{-1}(p) = x_p$; **Aufgabentypen:** Seien X_i i.i.d. ZV mit μ und σ^2 , aber unbekannter Verteilung. Dann sind $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ und $Z_2 = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ näherungsweise standardnormalverteilt.

- Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für $\sum X_i, \bar{X}, Z_1$ oder Z_2 berechnen.
- Es lässt sich n bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke k und Wahrscheinlichkeit p gilt: $P(Z_i > k) \geq p$ or $P(-k \leq Z_i \leq k) \geq p$

5.4 Stichprobenverteilungen für normalverteilte Grundgesamtheiten

5.4.1 Stichprobenmittel

Die Stichprobenfunktion $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für Erwartungswert μ , d. h. $E[\bar{X}] = \mu$

5.4.2 Stichprobenvarianz

Die Stichprobenfunktion $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2 , d. h. $E[S^2] = \sigma^2$; $E[\bar{X}] = E[\frac{1}{n} \sum X_i] = \frac{1}{n} E[\sum X_i] = \frac{1}{n} \sum E[X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$; $\text{Var}[\bar{X}] = \text{Var}[\frac{1}{n} \sum X_i] = \frac{1}{n^2} \text{Var}[\sum X_i] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$; Seien $X_i (i = 1, \dots, n)$ unabhängige normalverteilte ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann gilt: **bei unbekannter Varianz:** $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N_{0,1}$; $\frac{(n-1)S^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2 \Rightarrow \text{Standardisierung}} \sim \chi_{n-1}^2$; **Bei unbekannter Varianz:** $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$;

6 Konfidenzintervall

6.1 Begriffe

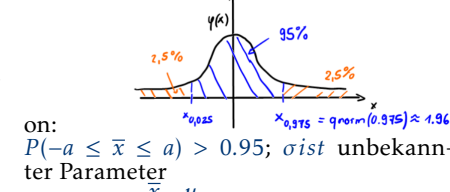
Irrtumswahrscheinlichkeit = α ; Konfidenzniveau = $1 - \alpha$; Konfidenzintervall = I

6.2 Punktschätzer

$E[X]$: Stichprobenmittel: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$; Varianz: Stichprobenvarianz: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$; Schätzwert für wahren Parameter, aber keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung, Geringe Sicherheit für wahren Parameter;

6.3 Punktschätzer

Intervall für wahren Parameter, mit vorgegebener Sicherheit; Vorgabe (95% or 99%); Dichtefunktion

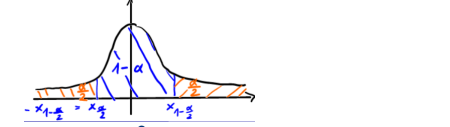


on: $P(-a \leq \bar{x} \leq a) > 0.95$; σ ist unbekannter Parameter $P(x_{0.025} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < x_{0.975}) \geq 0.95$

6.4 μ , unbekannt, σ^2 , bekannt

$$I = [\bar{X} - \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

$1-\alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
90%	5%	$\phi^{-1}(0.95) \approx 1.645$
95%	2.5%	$\phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$
99%	0.5%	$\phi^{-1}(0.995) \approx 2.576$



6.5 μ & σ^2 , unbekannt

$$I = [\bar{X} - t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

6.6 Zusammenfassung

Wie verändert sich das $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall, n -größer \Rightarrow I kürzer; $1 - \alpha$ größer \Rightarrow I länger; Für $\frac{L}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$

6.7 Aufgabentypen

Geg: $n, 1-\alpha$; **Ges:** I s.o. **Geg:** $\bar{X}, \sigma, 1-\alpha, L$; $L = 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; **Ges:** $n; \sqrt{n} > 2\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{\sigma}{L}$ **Geg:** n, I, L ; **Ges:** $1-\alpha; 1 - \frac{\alpha}{2} = \phi(\frac{L\sqrt{n}}{2\sigma})$

7 Hypothesentests

Basierend auf n unabhängig und identisch Verteilte (i.i.d) Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n (Messungen) soll eine Entscheidung getroffen werden, ob eine Hypothese für einen unbekannten Erwartungswert μ gültig ist oder nicht.

7.1 Def

α = Signifikanzniveau/ Fehlerwahrscheinlichkeit TG = Prüfgröße; TG^* = standardisierte Prüfgröße; signifikante Schlussfolgerung = H_0 verworfen \rightarrow klassischer Parametertest; schwache Schlussfolgerung = H_0 wird nicht verworfen \rightarrow klassischer Parametertest. p -Wert = beobachtetes Signifikanzniveau

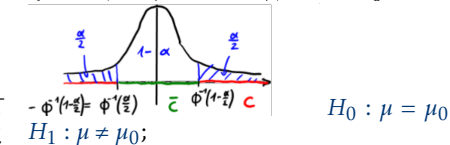
7.2 Null- und Gegenhypothese

Modell: Verteilung der Grundgesamtheit or Testgröße TG (häufig \bar{x}) ist bekannt bis auf einen Parameter, z.B. μ , für den eine Hypothese aufgestellt wird. $TG \sim N_{\mu, \sigma^2}$; **Nullhypothese:** H_0 : Angezweifelte Aussage, der widersprochen werden kann, wenn die Stichprobe einen Gegenbeweis liefert. $H_0 : \mu = \mu_0$; **Gegenhypothese** H_1 : Gegenteil von H_0 z.B. $H_1 \neq \mu_0$;

7.3 Ablehnungsbereich, Fehler 1. & 2.

Treffen der Testentscheidung, basierend auf einer konkreten Stichprobe $\{x_1, \dots, x_n\}$; Berechnung der Realisation $tg = TG(x_1, \dots, x_n)$ der Prüfgröße TG ; **Ablehnungsbereich / Kritischer Bereich C:** Werte der Testgröße, die für H_1 sprechen & bei Gültigkeit von H_0 mit Wahrscheinlichkeit $\leq \alpha$ (meist 0.1, 0.05, or 0.01) auftreten. **Fehler 1. Art:** α ist die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 verworfen wird, obwohl sie richtig ist. **Annahmebereich:** Komplement \bar{C} des Ablehnungsbereichs. H_0 kann nicht abgelehnt werden, falls $tg \in \bar{C} (P(tg \in \bar{C}) \geq 1 - \alpha)$. **Fehler 2. Art:** Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Realität	Testentscheidung H_0 wird nicht abgelehnt	H_0 wird abgelehnt.
H_0 ist wahr.	richtig	falsch (Wsk: Fehler 1. Art) α wird verringert
H_0 ist falsch.	falsch (Wsk: Fehler 2. Art)	richtig



$$H_0 : \mu = \mu_0; H_1 : \mu \neq \mu_0;$$

7.4 Klassischer Parametertest

H_0 wird abgelehnt, falls $tg = TG(x_1, \dots, x_n) \in C$; H_0 wird angenommen falls $tg = TG(x_1, \dots, x_n) \in \bar{C}$; Der kritische Bereich ergibt sich analog zu den Konfidenzintervallen durch die Vorgabe eines kleinen Signifikanzniveaus α d.h. max. Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art, mit standardisierter Prüfgröße TG^* gilt: $P(TG \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [-\infty; \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})] \cup [\phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}); \infty]$; $P(TG \in \bar{C}) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})]$; Wird dann H_0 verworfen, spricht man von einer signifikanten Schlussfolgerung. Kann H_0 nicht verworfen werden, dann lässt sich keine Aussage über den Fehler 2. Art treffen & man spricht von einer schwachen Schlussfolgerung.

7.5 Zweiseitiger Gauß Test

$H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$; $\bar{X} \sim N_{\mu_0, \sigma_0^2/n} \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N_{0,1}$; $P_{\mu_0}(\bar{X} \in C) \leq \alpha \Leftrightarrow |TG| = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$

