1 BeschreibendeStatistik

1.1 Beschreibende/Deskriptive Statistik

Beobachtete Daten werden durch geeignete statistische Kennzahlen charakterisiert und durch geeignete Grafiken anschaulich gemacht.

1.2 Schließende/Induktive Statistik

Aus beobachtete Daten werden Schlüsse gezogen und diese im Rahmen vorgegebener Modelle der Wahrscheinlichkeitstheorie bewertet.

1.3 Grundgesamtheit

Ω: Grundgesamtheit ω:Element oder Objekt der Grundgesamtheit diskret(<30 Ausprägungen), stetig(≥30 Ausprägungen), univariat(p=1), mulivariat(p>1); Diskrete Merkmale haben eine abzählbare Anzahl möglicher Ausprägungen. Stetige Merkmale habne eine nicht abzählbare (=überabzählbar) Anzahl möglicher Ausprägungen.

Lagemaße

1.4 Modalwerte x_{mod}

Am häufigsten auftretende Ausprägungen (insbesondere bei **qualitativen** Merkmalen)

1.5 Mittelwert, quantitativ

R:$mean(x)$
Schwerpunkt der Daten.**Empfindlich**gegenüber Ausreißern.
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

1.6 Median, quantitativ

R:$median(x)$
Liegt in der Mitt der sortierten Daten x_i. **Unempfindlich** gegenüber Ausreißern.

$$x_{0.5} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), \text{ falls n gerade} \end{cases}$$

Streuungsmaße

1.7 Stichprobenvarianz s^2

R:$var(x)$
Verschiebungssatz:
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^2) = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2)$ Gemittelte Summe der quadratischen Abweichung vom Mittelwert

1.8 Stichpr.standardabw.

R:$sd(x)$
$s = \sqrt{s}$ Streuungsmaß mit gleicher Einheit wie beobachteten Daten x_i.$\overline{x}$ minimiert die "quadratische Verlustfunktionöder die Varianz gibt das Minimum der Fehlerquadrate an.

1.9 p-Quantile

R:$quantile(x,p)$. Teilt die **sortierten** Daten x_i ca. im Verhältnis p: (1-p) d.h. $\hat{F}(x_p) \approx p$; $\hat{F} \triangleq$ kummul. rel. Häufigkeit; 1. Quartil = 0.25-Quantil; Median = 0.5-Quantil; 3. Quartil = 0.75-Quartil;

$$x_p \begin{cases} x_{floor(np)+1}, np \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{np} + x_{np+1}, np \notin \mathbb{N}) \end{cases}$$

1.10 Boxplot

Interquartilsabstand$I = x_{0.75} - x_{0.25}$. Innerhalb der Box 50% aller Stichproben; $1/4$ je zu $I_{min} \& zu I_{max}$ Whiskers zeigen die Spannweite = max x_i - min x_i

1.11 Chebyshev

$\frac{N(S_k)}{n} > 1 - \frac{1}{k^2}$, für alle k ≥ 1; $\overline{x}$ der Durchschnitt, s > 0 die Stichproben-Standardabweichung von Beobachtungswerten $x_1, ..., x_n$. Sei $S_k = \{i, 1 \leq i \leq n : |x_i - \overline{x}| < k \cdot s\}$; Für eine beliebige Zahl k ≥ 1 liegen mehr als $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$ Prozent der Daten im Intervall von $\overline{x} - ks$ bis $\overline{x} + ks$. **Speziell:**Für k = 2 liegen mehr als 75% der Daten im 2s-Bereich um $\overline{x}$. Für k=3 liegen mehr als 89% der Daten im 3s-Bereich um $\overline{x}$. **Komplement Formulierung:** $\overline{S}_k = \{i||x_i - \overline{x}| \geq k \cdot s\}$; $\frac{N(\overline{S}_k)}{n} \leq \frac{1}{k^2}$;
Die Ungleichheit lifert nur eine **sehr grobe Abschätzung**, ist aber unabhängig von der Verteilung der Daten. **Empirische Regeln** 68% der Daten im Bereich um $\overline{x} \pm s$. 95% um $\overline{x} \pm 2s$. 99.7% um $\overline{x} \pm 3s$.

1.12 Korrelation

Grafische Zusammenhang zwischen multivariaten Daten x und y durch ein Streudiagramm. Kennzahlen zur Untersuchung des Zusammenhangs:

1.13 Empirische Kovarianz

R:$cov(x,y)$; $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\overline{xy})$; $S_{xy} > 0$ steigend; $S_{xy} < 0$ fallend;

1.14 Empir. Korrelk.koeff. r

R:$cor(x,y)$; $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$; Näherungsweise lin. Zusammenhang zw. x und y, falls |r| ≈1; **Bemerkung**: -Der Korrelationskoeffizient kann nur einen statistischen Zusammenhang beschreiben, keinen Kausalen; -Den Korrelationskoeffizient immer im Zusammenhang mit den Streudiagramm sehen (Anscombe-Quartett).

1.15 Regressionsgerade y

$y = mx + t$ mit $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ und $t = \overline{y} - m \cdot \overline{x}$;
Für den Bereich $|\pm 0{,}7| bis$ bis $\pm 1 \Rightarrow$ linearer Zusammenhang.

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Begriffe

Ergebnisraum Ω: Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments
Elementarereignis $\omega \in \Omega$: einzelnes Element von Ω
Ereignis$E \subseteq \Omega$: beliebige Teilmenge des Ergebnisraums Ω heißt sicheres Ereignis, $\emptyset$ heißt unmögliches Ereignis
Vereinigung $E \cup F$: Ereignis E oder Ereignis F treten ein. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$: mindestens ein Ereignis $E_i$tritt ein.
Schnitt $E \cap F$: Ereignis E und Ereignis F treten ein.
$\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ alle Ereignisse E_i treten ein. **Gegenereignis** $\overline{E} = \Omega / E$: Ereignis E tritt nicht ein (Komplement von E)
Disjunkte EreignisseE und F: $E \cap F = \emptyset$

2.2 De Morgan'schen Regeln

$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$
$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$

2.3 Wahrscheinlichkeit

$0 \leq P(E) \leq 1$; P(Ω) = 1;
P($\bigcup_{i=1}^{\infty}$) = $\sum_{i=1}^{\infty}$ P(E_i), falls $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$

2.4 Satz 2.1

P($\overline{E}$) = 1 -P(E)
P($E \cup F$) = P(E)+ P(F) - P($E \cap F$)
(Übungsaufgabe!!! Ergänzen)

2.5 Laplace-Experiment

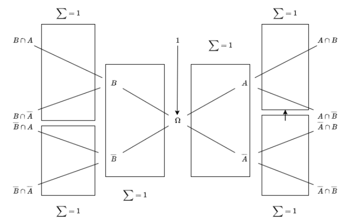
Zufallsexperimente mit n gleich wahrscheinlichen Elementarereignissen. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit P(E) für $E \subseteq \Omega$ aus:
P(E) = $\frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}} = \frac{\text{Mächtigkeit von E}}{\text{Mächtigkeit von }\Omega} = \frac{|E|}{n}$

2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

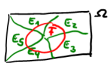
2.7 Satz 2.2

$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$
$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$



2.8 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ mit $E_i \cap E_j = \varnothing$ für $i \neq j$ d.h. die Ereignisse bilde eine disjunkte Zerlegung bzw. eine Partition von Ω. Somit gilt:
$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)$
Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten $F \cap E_i$



2.9 Vierfeldertafel

$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E})$
$P(\overline{F}) = P(\overline{F} \cap E) + P(\overline{F} \cap \overline{E})$

	E	$\overline{E}$	
F	P(F∩E)	P(F∩$\overline{E}$)	P(F)
$\overline{F}$	P($\overline{F}$∩E)	P($\overline{F}$∩$\overline{E}$)	P($\overline{F}$)
	P(E)	P($\overline{E}$)	1

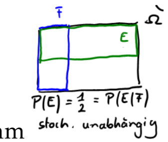
Satz 2.2 oben: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$ **Tafel** $= P(F) - P(F \cap \overline{E}) = P(E) - P(\overline{F} \cap E)$; $P(\overline{F}|E) = 1 - P(F|E)$

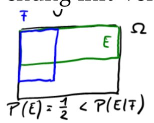
2.10 Formel von Bayes

Hilfreich, wenn man man $P(F|E_i)$ kennt, aber nicht $P(E_k|F)$ **Satz 2.4** $P(E_k|F) = \frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)}}$
Nur Nenner!P(F) aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

2.11 Stochastische Unabhängigkeit

Übung Die Ereignisse E und F heißen (stochastisch) unabhängig, wenn die Information über das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert, d.h. falls
$\underbrace{P(E|F) = P(E)}$ or $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$
$\underbrace{}= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$
Es gilt Falls die Ereignisse E, F unabhängig sind, dann sind auch: ∘$E, \overline{F}$; ∘$\overline{E}, F$; ∘$\overline{E}, \overline{F}$ unabhängig
Bemerkung
∘ Stochastische Unabhängigkeit bedeutet nicht notwendigerweise eine kausale Abhängigkeit; ∘ Veranschaulichung mit Venn Diagramm





∘ $A, B \neq \varnothing$ und $A \cap B = \varnothing$
$P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$
$\varnothing \neq P(A) \cdot P(B)$ da P(A) > 0 und P(B)> 0
=> A, B stochastisch abhängig

3 Zufallsvariable

Abbildung des **abstrakte** Ergebnisraums Ω auf $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$ = heißt Zufallsvariable (ZV). x ∈ R. heißt Realisation der ZV X.
∘ Diskrete ZV: $X(\Omega) = x_1, ..., x_2 (n \in \mathbb{N})$; z.B. X = "Augensumme beim Würfeln "
∘ Stetige ZV: $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$; "z.B. Körpergröße eines Menschen"

3.1 Verteilungsfunktion-allg.

Die Wahrscheinlichkeit P(B) für ein Ereignis B in $\mathbb{R}$ wird zurückgeführt auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Ereignisse in Ω. Für jedes $X \in \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion F: $\mathbb{R} \to [0,1]$ einer ZV X definiert durch:
F(x) = P(X ≤ x)
∘ $0 \leq F(x) \leq 1$
∘ $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$ $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
∘ monoton wachsend
∘ $P(X > x) = 1 - F(x)$
∘ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

3.2 Diskrete ZVs

Für eine diskrete ZV X mit $X(\Omega) = x_1, ..., x_n$ (n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch:

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), \text{falls } x_i \in X(\Omega) \\ 0, sonst \end{cases}$$

Es gilt:
∘ $F(x) = (P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
∘ F(x) ist eine rechtseitig stetige **Treppenfunktion** mit **Sprüngen** bei der Realisation von x_i.

3.3 Stetige ZVs

Stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte f $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definiert durch
$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$
Es gilt:
∘ $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ und $F'(x) = f(x)$
∘ F(x) ist stetig & $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$ wegen $P(X = a) = 0$

3.4 Verteilungsfunktion

$\int_{\textbf{Untergrenze}}^{x}$ Es wird normal mit - Integriert.

3.5 Zusammenfassung

3.6 Diskrete ZV

∘ Wahrscheinlichkeitsverteilung p(x): $\sum_i^n p(x_i) = 1$; x_i ist Realisation der ZV.
∘ Verteilungsfunktion F(x) ist rechtsseitig stetige **Treppenfunktion**. **Sprunghöhen:**$P(X = x_i) = F(x_i) - \lim_{x \to x_i-} F(x) \neq 0$
∘ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \neq P(a \leq X \leq b)$

3.7 Stetige ZV

∘ Dichtefunktion $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
∘ Verteilungsfunktion $F(x)$ ist stetig mit $F'(x) = f(x); P(X = x_i) = 0$
∘ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = F(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

3.8 Erwartungswert

Der Erwartungswert $E[X]=\mu$ einer ZV X ist der **Schwerpunkt** ihrer Verteilung or der durchschnittliche zu erwartende Wert der ZV.

∘ diskrete ZV: $E[X]=\sum_{i=1}^n x_i\cdot p(x_i)$

∘ stetige ZV: $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$

ZV ist konstant. E[X] verhält sich linear. Eigenschaften von $E[X]$:

∘ $E[b]=b$

∘ $E[aX+b]=aE[X]+b$

∘ $E[\underbrace{X_i+...+X_n}]=\sum_{i=1}^n E[X_i]$

∘ $\sum_{i=1}^n x_i$

3.9 Satz 3.1

Sei Y = g(X) eine Funktion der ZV X. Dann gilt:

∘ für diskrete ZV:$E[g(X)]=\sum_{i=1}^n g(x)\cdot p(x_i)$

∘ für stetige ZV: $E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f(x)dx$. Das vertauschen von E und g nur bei **linearen** Funktionen möglich. $\Rightarrow$ g(E[X])

3.10 Varianz

Die Varianz einer ZV X mit μ ist ein quadratisches Streungsmaß. $\sigma^2=Var[X]=\underbrace{E[(X-\mu)^2]}_{g(X)}\overset{\text{falls x stetig}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)$

Die Standardabweichung $\sigma=\sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche Dimension von die ZV X.

∘ $Var[b]=0$

∘ $Var[aX+b]=a^2Var[X]$

3.11 Satz 3.2

$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2$ **Beim Minuend wird beim Erwartungswert nur das einfach stehende x quadriert nicht f(x)!!!**

3.12 Z-Transformation, Standardisierung

Sei X eine ZV mit μ und σ. Dann ist $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{x}{\sigma}-\frac{\mu(konstant)}{\sigma}$

3.13 Kovarianz

Eigenschaften:

∘ $Cov[X,Y]=Cov[Y,X]$

∘ $Cov[X,X]=Var[X]$

∘ $Cov[aX,Y]=aCov[X,Y]$

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y) ist definiert durch $Cov[X,Y]=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$; Die Kovarianz beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X und Y. **Je** stärker diese Korrelieren, **desto** (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz. Falls $X,Y(stochastisch)\ unabhängig \Rightarrow Cov[X,Y]=0$

3.14 Satz 3.3

$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]\cdot E[Y]$

3.15 Varianz einer Summe von ZV

∘ $Var[X_i+...+X_n]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n Cov[X_i,X_j]$; $Var[X_1+X_2]=Var[X_1]+Var[X_2]+2Cov[X_1,X_2]$ ∘ Falls X_i,X_j paarweise unabhängig **!!!**: $Var[X_1+...+X_n]=\sum_{i=1}^n Var[X_i]$

3.16 Overview μ σ

3.17 E[X]

$E[aX+b]=aE[X]+b$; $E[X_1+...+E_n]=\sum_{i=1}^n E[X_i]$

Falls X_1,X_2 unabhängig:

$E[X_i]=\mu => E[\overline{X}]=E[\frac{1}{n}(X_1+...+X_n)]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \underbrace{E[x_i]}=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu$;

μ;

3.18 Varianz

$Var[aX+b]=a^2Var[X]$

Falls X_i,X_j paarweise unabhängig:

$Var[X_1+...+X_n]=\sum_{i=1}^n Var[X_i]$

$Var[X_i]=\sigma^2 => Var[\overline{X}]=Var[\frac{1}{n}(x_1+...+x_n)]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var[X_i]=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$

3.19 Quantile

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F(x) und 0 < p < 1. Dann ist das p-Quantil definiert als der Wert $x_p\in\mathbb{R}$ für den gilt:

$F(x_p)\geq p$. p-Quantil einer stetigen ZV mit **streng monoton wachsenden** F(x:)$x_p=F^{-1}(p)$d. h. umkehrbar. Zuerst p dann e^{xp}

4 Spezielle Verteilung

4.1 Diskrete Verteilung

4.2 Bernouillverteilung

Indikatorvariable mit den Werten 1 bei Erfolg und 0 bei Misserfolg; **Wahrscheinlichkeit:**$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$; **Verteilung:** $X\sim B_{1,p}$ p ist Erfolgswahrscheinlichkeit; $E[X]=p=\sum x_i\cdot p(x_i)=1\cdot p(1)$; $Var[X]=p(1-p)=E[X^2]-(E[X])^2=p-p^2=p(1-p)$;

4.3 Binominalverteilung

Anzahl der Erfolge beim n-maligen Ziehen **mit Zurücklegen**; **Wahrscheinlichkeit** $P(x=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}, k\in 0,1,...,n$; **Verteilung** $X\sim B_{n,p}$; $E[X]=np$; $Var[X]=np(1-p)$; **R:** dbinom(k,n,p)=P(X=k) ≙Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion; pbinom(k,n,p)=F(k) ≙Verteilungsfunktion; qbinom(q,n,p)≙q-Quantil; rbinom(k,n,p)≙kbinomialverteilte Zufallszahlen;

4.4 Hypergeometrische Verteilung

Anzahl der Erfolge beim **n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen** aus einer Menge mit M Elementen, die Erfolg bedeuten, und N Elementen, die Misserfolg bedeuten. $Gesamtumfang=M+N$; **Wahrscheinlichkeit** $P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, k\in\{0,1,...,min\{n,M\}\}$; **Verteilung** $X\sim H_{M,N,n}$; $E[X]=n\frac{M}{M+N}$; $\frac{M}{M+N}\hat{=}Trefferwahrscheinlichkeit$; $Var[X]=n\frac{M}{M+N}(1-\frac{M}{M+N})\frac{M+N-n}{M+N-1}$; $\rightarrow$ 1 falls n klein im Verhältnis zu M+N; **R:** $dhyper(k,M,N,n)=P(X=k)$; $phyper(k,M,N,n)=F(k)$; Falls $20n\leq M+N\&M+N$ groß, Unterschied zw. SZiehen ohne bzw. mit Zurücklegenünwesentlich, es kann die Binomialverteilung mit $p=\frac{M}{M+N}$ als Approximation für die hypergeom. Vert. verwendet werden.

4.5 Poisson-Verteilung

Verteilung der seltenen Ereignisse Häufigkeit punktförmiger Ereignisse in einem Kontinuum. Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl der Erfolge λ pro Maßeinheit (i. a. Zeiteinheit) sei bekannt. $k\in\mathbb{N}_0\rightarrow diskret$ **Wahrscheinlichkeit**$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ mit $\sum_{k=0}^\infty P(X=k)=1, da\sum_{k=0}^\infty\frac{\lambda^k}{k!}=e^\lambda$; **Verteilung** $X\sim P_\lambda$; $E[X]=\lambda, da\sum_{k=0}^\infty k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^\infty\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^\infty\frac{\lambda^i}{i!}=\lambda$; $Var[X]=\lambda$ **R:** $dpois(k,\lambda)=P(X=k)$; $ppois(k,\lambda)=F(k)$; $\lambda=$ np.

4.6 Gleichverteilung

Alle Werte $\{x_1,...,x_n\}$einer ZV X sind gleich wahrscheinlich; **Wahrscheinlichkeit** $P(X=x_k)=\frac{1}{n}$; **Verteilung** $X\sim U_{\{x_1,...,x_n\}}$; $E[X]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k=\overline{x}$; $Var[X]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2-\overline{x}^2$; **R:** $sample(1:N,n)\hat{=}$ n Zufallszahlen zwischen 1 und N

4.7 Stet.Vert.

4.8 Gleichverteilung/Rechteck

Zufallszahlen aus einem Intervall $[a,b]$; **Dichte:** $f(x)=\frac{1}{b-a}$ für $x\in[a,b]$; **Verteilung:** $X\sim U_{[a,b]}$; $E[X]=\frac{a+b}{2}$; $Var[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$ **R:** $dunif(x,a,b)=f(x)$; $punif(x,a,b)=F(x)$; $runif(n)\hat{=}$ n Zufallszahlen zwischen 0 und 1; $runif(n,a,b)\hat{=}$ n Zufallszahlen zwischen a und b;

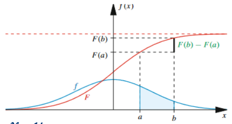
4.9 Normalverteilung

Beschreibt viele reale Situationen, ist insbesondere Grenzverteilung unabhängiger Summen; **Dichte:** $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)}$; **Verteilung:** $X\sim N_{\mu,\sigma^2}$; $E[X]=\mu$; $Var[X]=\sigma^2$; **R:** $dnorm(x,\mu,\sigma)=f(x)$; $pnorm(x,\mu,\sigma)=F(x)$; $qnorm(q,\mu,\sigma):q-Quantil$; **Maximalstelle** von $f(x)$ bei $x=\mu$; **Wendestelle** von $f(x)$ bei $x=\mu\pm\sigma$; $E[aX+b]=aE[X]+b$; $Var[aX+b]=a^2Var[X]$; $X\sim N_{\mu,\sigma^2}\Rightarrow aX+b\sim N_{a\mu+b,a^2\sigma^2}$ und Z-Trafo: $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N_{0,1}$; $X_1\sim N_{\mu_1,\sigma_1^2}$ und $X_2\sim N_{\mu_2,\sigma_2^2}\ \underbrace{\Rightarrow}\ X_1+X_2\sim N_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$;

X_1,X_2 stochastisch unabhängig

4.10 Standardnormalverteilung

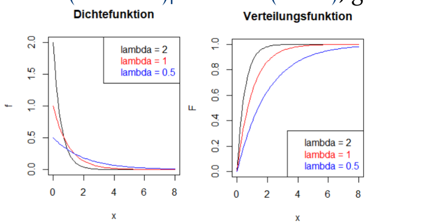
Dichte: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{1}{2}x^2)}$; **Verteilung** $\phi(x)=\int_{-\infty}^x\varphi(t)dt$; **Quantile:** $\phi(-x)=1-\phi(x)\Rightarrow -x_p=x_{1-p}$ z.B. $-x_{0.25}=x_{0.75}$;



Schätzwerte: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N_{0,1}$; $P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)=P(-1\leq Z\leq 1)\approx 68\%$; $P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)=P(-2\leq Z\leq 2)\approx 95\%$; $P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)=P(-3\leq Z\leq 3)\approx 99.7\%$

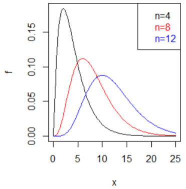
4.11 Exponentialverteilung

Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten Sei $Y_t\sim P_{\lambda t}$ im Intervall $[0,t]$ von t Zeiteinheiten, dann beschreibt die Exponentialverteilung die Wartezeit X bis zum Eintreten eines Ereignisses; **Dichte- und Verteilungsfunktion:** $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x\geq 0)$ und $F(x)=1-e^{-\lambda x}$; **Verteilung:** $X\sim Exp_\lambda$; $E[X]=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow$ Berechnung mit partieller Integration; $Var[X]=\frac{1}{\lambda^2}$; **R:** $dexp(x,\lambda)=f(x)$; $pexp(x,\lambda)=F(x)$; **Eigenschaft:** Eine exponentialverteile ZV X ist gedächtnislos, d.h. $P(X>s+t)|X>t=P(X>s)$; gl. Vert.



4.12 Chiquadrat-Verteilung

$Z_1,...,Z_n$ seien unabhängige, standardnormalverteilte ZV $\Rightarrow X=Z_1^2++Z_n^2$ hat Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Summen unabhängiger, standardnormalverteilter ZV; **Verteilung:** $X\sim\chi_n^2$; $E[X]=n$; $Var[X]=2n$; **R:** $dchisq(x,n)=f(x)$; $pchisq(x,n)=F(x)$; **Eigenschaft:** $X_1\sim\chi_{n1}^2$ und $X_2\sim\chi_2^2\Rightarrow X_1+X_2\sim\chi_{n_1+n_2}$



4.13 t-Verteilung

$Z\sim N_{0,1}$ und $X\sim\chi_n^2\Rightarrow Y=\frac{Z}{\frac{X}{\sqrt{n}}}$ ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden; **Anwendungsmodell:** Schätz- und Testverfahren bei unbekannter Varianz; **Verteilung:** $Y\sim t_n$; $E[Y]=0$ für $n>1$; $Var[Y]=\frac{n}{n-2}$ für $n>2$; **R:** $dt(y,n)\hat{=}f(x)$; $pt(y,n)\hat{=}F(x)$; $qt(y,n)\hat{=}F^{-1}(x)$; **Eigenschaften:** Für $n\rightarrow\infty: t_n\rightarrow N_{0,1}$; Achsensymmetrie der Dichtefunktion $\Rightarrow -y_p=x_{1-p}$

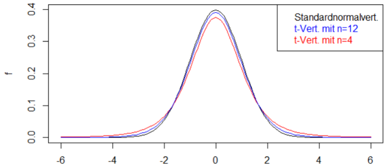


Abbildung Dichtefunktion

5 Zentraler Grenzwertsatz

$\mu\sigma^2$ bekannt aber nicht die Verteilung

5.1 ZGWS

Seien $X_i(i=1,...,n)$ unabhängige identische verteilte **(i.i.d)** ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt für hinreichend große n und $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n$ näherungsweise:

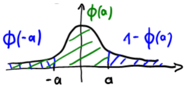
$\sum_{i=1}^n X_i\sim N_{n\mu,n\sigma^2}$ &

$\frac{\sum X_i-n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\sim N_{0,1}$

$\sum X_i$ bezieht sich auf Y; $\sum X_i-n\mu$ bezieht sich auf X_i; $\overline{X}\sim N_{\mu,\frac{\sigma^2}{n}}$ & $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N_{0,1}$;

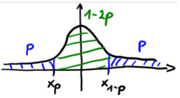
Der Satz gilt sogar allgemeiner, wenn die X_i abhängig und nicht identisch verteilt sind, vorausgesetzt kein X_i ist deutlich dominanter?! als die anderen.Für die Voraussetzung des ZGW ist, dass die X_i nicht normalverteilt sein müssen., damit $\sum_{i=1}^n X_i$ oder $\overline{X}$ bei **hinreichend großem n** normalverteilt sind. Faustregel: **Je** schiefer die Verteilung der X_i, **desto** größer muss n sein: **n>30**: falls die unbekannte Verteilung ohne markanten Ausreißer, aber schief ist (Exponentialverteilung); **n>15:** falls die unbekannte Verteilung annähernd symmetrisch ist(Binomialverteilung); $n \le 15$: falls die unbekannte Verteilung annähernd normalverteilt ist;

5.2 ϕ

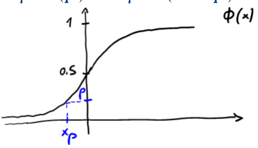


$\phi(-a) = 1-\phi(a)$; $\phi(a) = 1-\phi(-a)$; $P(-a<Z<a) = \phi(a)-\phi(-a) = \phi(a)-(1-\phi(a)) = 2\phi(a)-1$ or $1-\phi(-a)-\phi(-a) = 1-2\phi(-a)$

5.3 ϕ^{-1}



$-x_p = x_{1-p} \Leftrightarrow -qnorm(p) = qnorm(1-p) \Leftrightarrow -\phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(1-p)$ **Zusammenhang**



$\phi^{-1}(p) = x_p$;

Aufgabentypen: Seien X_i i.i.d. ZV mit μ und σ^2, aber unbekannter Verteilung. Dann sind $Z_1 = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ und $Z_2 = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$ näherungsweise standardnormalverteilt.

∘ Es lassen sich Wahrscheinlichkeiten für $\sum X_i, \overline{X}, Z_1$ oder Z_2 berechnen.

∘ Es lässt sich n bestimmen, so dass, zu vorgegebener Schranke k und Wahrscheinlichkeit p gilt: $P(Z_i > k) \ge p$ or $P(-k \le Z_i \le k) \ge p$

5.4 Stichprobenvert.normalvert. Grundgesamt.

5.5 Stichprobenmittel

Die Stichprobenfunktion $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für Erwartungswert μ, d. h.$E[\overline{X}] = \mu$

5.6 Stichprobenvarianz

Die Stichprobenfunktion $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2)$ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2, d. h. $E[S^2] = \sigma^2$; $E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n}E[\sum X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}n\mu = \mu$; $Var[\overline{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n^2}Var[\sum X_i] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$; Seien $X_i (i=1,...,n)$ unabhängige normalverteilte ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt:

bei bekannter Varianz: $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N_{0,1}$; $\frac{(n-1)S^2=\sum(x-\overline{x})^2}{\sigma^2 \Rightarrow \text{Standardisierung}} \sim \chi^2_{n-1}$; **Bei unbekannter Varianz:** $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$;

6 Konfidenzintervall

kl. Stichpr.umf. (n<30) ist die Grundgesamtheit näherungsweise normalverteilt or Stichpr.umf. ist hinreichend groß ($n \ge 30$), die Sum. or. der Mittelwert der X_i nach dem ZGWS näherungsweise norm.vert. ist

6.1 Begriffe

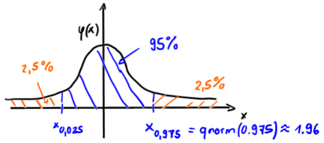
Irrtumswahrscheinlichkeit = α; Konfidenzniveau = $1-\alpha$; Konfidenzintervall = I

6.2 Punkschätzer

E[X]: Stichprobenmittel: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$; Varianz: Stichprobenvarianz: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$; Schätzwert für wahren Parameter, aber keine Aussage über Unsicherheit der Schätzung, Geringe Sicherheit für wahren Parameter;

6.3 Intervallschätzer

Intervall für wahren Parameter, mit vorgegebener Sicherheit; Vorgabe (95% or 99%); Dichtefunktion:



$P(-a \le \overline{x} \le a) > 0.95$; σist unbekannter Parameter

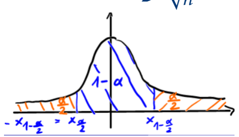
$P(\underbrace{x_{0.025}}_{} < \underbrace{\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}}_{} < \underbrace{x_{0.975}}_{}) \ge 0.95$

$-1.96; N_{0,1}; 1.96$;

6.4 μ unbekannt, σ^2 bekannt

$I =]\overline{X}-\underbrace{\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}_{qnorm(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\overline{X}+\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}[$;

$1-\alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
90%	5%	$\phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}645$
95%	2,5%	$\phi^{-1}(0{,}975) \approx 1{,}96$
99%	0,5%	$\phi^{-1}(0{,}995) \approx 2{,}576$



6.5 μ & σ^2, unbekannt

$I =]\overline{X}-t^{-1}_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t^{-1}_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}}[$

6.6 Zusammenfassung

Wie verändert sich das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall, n-größer ⇒ I kürzer; 1-α größer ⇒ I länger;

Für $\frac{L}{2} = 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} = 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$

6.7 Aufgabentypen

Geg: n, 1-α; **Ges:** I s.o. **Geg:** $\overline{X}, \sigma, 1-\alpha, L$; $L = 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; **Ges:** n; $\sqrt{n} > 2\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\frac{\sigma}{L}$ **Geg:** n, I, L; **Ges:** 1- α; $1-\frac{\alpha}{2} = \phi(\frac{L\sqrt{n}}{2\sigma})$

7 Hypothesentests

Basierend auf n unabhängig und identisch Verteilte (i.i.d) Zufallsvariablen $X_1,...,X_n$(Messungen) soll eine Entscheidung getroffen werden, ob eine Hypothese für einen unbekannten Erwartungswert μ gültig ist or nicht.

7.1 Def

α = Signifikanzniveau/ Fehlerwahrscheinlichkeit TG = Prüfgröße; TG* = standardisierte Prüfgröße; siginifikante Schlussfolgerung = H_0 verworfen → klassischer Parametertest; schwache Schlussfolgerung = H_0 wird nicht verworfen → klassischer Parametertest. p-Wert = beobachtetes Signifikanzniveau; H_0 = angezweifelten Aussage

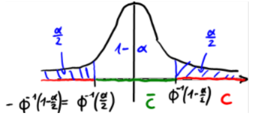
7.2 Null- und Gegenhypothese

Modell: Verteilung der Grundgesamtheit or Testgröße **TG** (häufig $\overline{x}$) ist bekannt bis auf einen Parameter, z.B. μ, für den eine Hypothese aufgestellt wird. $TG \sim N_{\mu,\sigma^2}$; **Nullhypothese:** H_0: Angezweifelte Aussage, der widersprochen werden kann, wenn die Stichprobe einen Gegenbeweis liefert. $H_0: \mu = \mu_0$; **Gegenhypothese** H_1: Gegenteil von H_0 z.B. $H_1 \neq \mu_0$;

7.3 Ablehnungsbereich, Fehler 1. & 2.

Treffen der Testentscheidung, basierend auf einer konkreten Stichprobe $\{x_1,...,x_n\}$; Berechnung der Realisation $tg = TG(x_1,..., _x n)$ der Prüfgröße TG; **Ablehnungsbereich / Kritischer Bereich C**: Werte der Testgröße, die für H1, sprechen & bei Gültigkeit von H_0 mit Wahrscheinlichkeit $\le \alpha$ (meist 0.1, 0.05, or 0.01) auftreten.**Fehler 1. Art:**α ist die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 verworfen wird, obwohl sie richtig ist. **Annahmebereich:** Komplement $\overline{C}$ des Ablehnungsbereichs. H_0 kann nicht abgeleitet werden, falls $tg \in \overline{C}(P(tg \in \overline{C}) \ge 1-\alpha)$.**Fehler 2. Art:** Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Realität	Testentscheidung: H_0 wird nicht abgelehnt (angenommen)	H_0 wird abgelehnt.
H_0 ist wahr.	richtig	falsch (Wsk: Fehler 1. Art) α wird vorgeg
H_0 ist falsch.	falsch (Wsk: Fehler 2. Art)	richtig



$H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$;

7.4 Klassischer Parametertest

H_0 wird abgelehnt, falls $tg = TG(x_1,...,x_n) \in C$; H_0 wird angenommen falls $tg = TG(x_1,...,x_n) \in \overline{C}$; Der kritische Bereich ergibt sich analog zu den Konfidenzintervallen durch die Vorgabe eines kleinen Signifikanzniveau α d.h. max. Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art, mit standardisierter Prüfgröße TG* gilt: $P(TG \in C) \le \alpha \Leftrightarrow TG^* \in]-\infty;\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})[\cup]\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2});\infty[$; $P(TG \in \overline{C}) \ge 1-\alpha \Leftrightarrow TG^* \in [\phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})]$; Wird dann H_0 verworfen, spricht man von einer signifikanten Schlussfolgerung. Kann H_0 nicht verworfen werden, dann lässt sich keine Aussage über den Fehler 2. Art treffen & man spricht von einer schwachen Schlussfolgerung.

7.5 Zweiseitiger Gauß Test

$H_0: \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \mu \neq \mu_0$; $\overline{X} \sim N_{\mu_0,\sigma_0^2/n} \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \sim N_{0,1}$; $P_{\mu 0}(\overline{X} \in C) \le \alpha \Leftrightarrow |TG| = \frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0}\sqrt{n} > \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$; **Testentscheidung:** H_0 wird abgelehnt, falls $|TG| > \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$; H_0 wird angenommen, falls $|TG| \le \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

7.6 Einseitiger Gauß Test

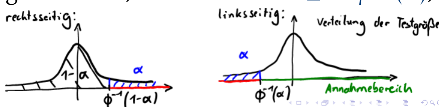
7.7 linksseitig

$H_0: \mu \ge \mu_0$ gegen $H_1: \mu < \mu_0$

7.8 rechtsseitig

$H_0: \mu \le \mu_0$ gegen $H_1: \mu > \mu_0$

Hier nur linksseitig!:$P_{\mu 0}(\overline{X} \in C) \le \alpha \Leftrightarrow TG = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} < \phi^{-1}(\alpha)$; **Testentscheidung:** H_0 wird abgelehnt falls, $TG < \phi^{-1}(\alpha)$; H_0 wird angenommen, falls $TG \ge \phi^{-1}(\alpha)$;



7.9 Varianten Gauß Test, σ^2 bekannt, μ unbekannt

Prüfgröße$tg = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$;

H_0	H_1	H_0 ablehnen, falls	p-Wert	
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert tg\rvert > \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$	$2(1-\Phi(\lvert tg\rvert))$	zweiseitiger Test
$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$tg > \Phi^{-1}(1-\alpha)$	$1-\Phi(tg)$	rechtsseitiger Test
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$tg < \Phi^{-1}(\alpha)$	$\Phi(tg)$	linksseitiger Test

7.10 t-Test, $\mu, \sigma^2 unbekannt$

Prüfgröße $tg = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$

H_0	H_1	H_0 ablehnen, falls	p-Wert
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert tg\rvert > t^{-1}_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$	$2(1-t_{n-1}(\lvert tg\rvert))$
$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$tg > t^{-1}_{n-1}(1-\alpha)$	$1-t_{n-1}(tg)$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$tg < t^{-1}_{n-1}(\alpha)$	$t_{n-1}(tg)$

7.11 p-Wert

Wahrscheinlichkeit, bei Zutreffen von H_0 den beobachteten Wert tg der Prüfgröße or einen noch stärker von μ_0 abweichenden Wert zu bekommen. Der p-Wert zu einer Hypothese H_0 ist der kleinste Wert von α, für den H_0 noch abgelehnt werden kann. **Je kleiner** der Wert, **desto kleiner** ist der Fehler 1. Art & umso signifikanter ist die Testentscheidung. **Nice to know** Anhand des p-Werts kann man für beliebige Werte von α eine Testentscheidung treffen; Falls $p-Wert < 1\%$: sehr hohe Signifikanz; Falls $1\% \le p-Wert < 5\%$: hohe Signifikanz; Falls $5\% \le p-Wert \le 10\%$: Signifikanz; Falls $p-Wert > 10\%$: keine Signifikanz

7.12 Zusammenhang I & Hypothesentests zweiseitig

zum Konfidenzniveau $1-\alpha$; H_0 wird abgelehnt, falls $\mu_0 \notin I$; H_0 wird angenommen, falls $\mu_0 \in I$; Das Konfidenzniveau ist der Annahmebereich von H_0 zum Signifikanzniveau α;

7.13 Zusammenfassung klass. Hypo.test

Signifikanzniveau α wird vorgegeben; α & Verteilung der Testgröße unter H_0 wir der Ablehnungsbereich ermittelt. **Je kleiner (größer)** α **, desto kleiner (größter)** ist der Ablehnungsbereich; **!:** α&C hängen **nicht von** der konkreten Stichprobe ab; H_0 wird abgelehnt, falls der ermittelte Wert der Testgröße (beobachteter Wert) in C liegt. **!:** Die tg hängt von der konkreten Stichprobe ab. Sie ist eine ZV.

7.14 Test mittels p-Wert

α wird vorgegeben.
Berechnung des p-Werts anhand der konkreten Stichprobe mit der Verteilung der Tg unter H_0;
!:Der p-Wert hängt von der konkreten Stichprobe ab, ist eine ZV.
H_0 wird abgelehnt, falls $p-Wert \le \alpha$.;

8 Fehleranalyse

8.1 Auslöschung

wenn ungefähr gleich große, bereits mit Fehlern behaftete Zahlen voneinander abgezogen werden & signifikante Mantissenstellen ausgelöscht werden.

8.2 Addition

große signifikante Stellen schlucken kleine signifikante Stellen.

8.3 Horner

Ohne: Runden bei jeder Rechenoperation. Mit: Vermeidung der Rundungsfehler nach jeder Rechenoperation.

8.4 Abc-Formel

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_{1,2} = \frac{2a}{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}$; b>0, dann (2), für x_1 &(1) für x_2 or b<0, (1) für x_1 & (2) für x_2; Falls 4ac klein im Vergleich zu b^2, dann evtl. Probleme der Auslöschung.

8.5 Stabilität

Verfahren, wenn es gegenüber kleinen Störungen unempfindlich ist. Rundungsfehler nicht zu stark auf die Berechnung auswirken. Man unterscheidet bei der numerischen Lösung mathematischer Probleme Kondition, Stabilität und Konsistenz. Stabilität ist dabei eine Eigenschaft des Algorithmus und die Kondition eine Eigenschaft des Problems. Die Beziehung zwischen diesen Größen lässt sich wie folgt beschreiben: $f(x)$ =mathematische Problem in Abhängigkeit von der Eingabe $x, \tilde{f}$ = numerische Algorithmus, $\tilde{x}$ = gestörten Eingabedaten: $\|f(\tilde{x})-f(x)\|$ Kondition: Schwankung des Problems bei Störung; $\|\tilde{f}(\tilde{x})-\tilde{f}(x)\|$ Stabilität: Schwankung des numerische Algorithmus bei Störung; $\|\tilde{f}(x)-f(x)\|$ Konsistenz: Wie gut löst der Algorithmus (mit exakter Eingabe) tatsächlich das Problem; $\|f(\tilde{x})-f(x)\|$Konvergenz: Wie gut löst der gestörte Algorithmus das Problem;

9 Interpolation

Zu gegebenen Punkten $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ eine Funktion G (dies ist nicht eindeutig! Abhängig von der Funktionsklasse), so dass $G(x_i) = y_i, i = 0, ..., n$ (Interpolationsbedingung). Interpolation ist **ungeeignet** für verrauschte Daten. Lösung: Approximation der kleinsten Quadrate.

9.1 Begriffe

Extrapolation ≙ Näherungwerte für x-Werte außerhalb der Stützstellen; Dividierende Differenzen ≙ Koeffizienten c_i lassen sich rekursiv durch wiederholte Bildung von "Differenzquotienten"berechnen

9.2 Lagrange, quer

2 **Formeln;** $p_n(x) = y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+...+y_nL_n(x)$; $L_k(x)\prod_{j=0;j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$; Jede Basisfunktion $L_k(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$; **Bemerkung:** Findet Anwendung bei Numerischer Integration; Wenn Stützstellen x_i gleich bleiben & nur y_i ändern ⇒ keine Neuberechnung; Rechenaufwand $\mathcal{O}((n+1)^2)$; Kommen neue Stützpunkte hinzu ⇒ Neuberechnung!; Die Interpolationspolynome liefern nur sinnvolle **Näherungswerte** für x-Werte, die zwischen den gegebenen Stützstellen liegen; Extrapolation (Näherungwerte für x-Werte außerhalb der Stützstellen) kann zu großen Abweichungen führen.

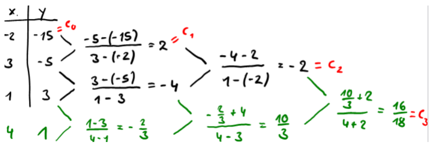
9.3 Newton

Darstellung des Interpolanten, die auf ein gestaffeltes LGS führt & einfache Hinzunahme weiterer Punkte erlaubt. $\underbrace{p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + ... + c_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}_{\text{Polynom vom Grad n}}$

Das Resultierende LGS für die Koeffizienten c_i hat gestaffelte Form. **Interpolationsbedingungen?**

Vorteile: Rechenaufwand $\mathcal{O}(n^2)$ Gleitpunktoperationen; Hinzufügen weiterer Stützstellen ohne großen Aufwand. Andere Koeffizienten bleiben unverändert.

9.4 Dividierende Differenzen



9.5 Quiz

Newton & Lagrage ermöglichen ohne großen Berechnungsaufwand die Änderung der Werte y_i für gleichbleibende Stützstellen x_i.; Newton ergmöglicht ohne großen zusätzlichen Berechnungsaufwand diei Hinzuname weiter Stützstellen, zur Verbesserung der Genauigkeit

9.6 Effizienz

9.7 klasisch

$p_n(x) = a_nx^n + ... + a_0$; **Aufwand:** 2n-1 Mult.

9.8 Horner Schema

$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1 + a_0 = ((a_3 + a_2)x + a_1)x + a_0$; Allg.: $p_n(x) = (...(a_nx + a_{n-1})x + ... + a_1)x + a_0$; **Aufwand:** n Mult.

9.9 Interpolationsfehler

Falls f hinreichend glatt ist & p_n das eindeutige Interpolationspolynom von Grad n, dann gilt fürn den Interpolationsfehler:

$$\underbrace{f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n)}$$

mit $\theta \in [x_0; x_n]$ Vergleichbar zum Restglied bei der Taylorreihenentwicklung; **Bemerkung:** θ unbekannt, daher nur Fehlerabschätzung; Fehler ist Abhängig von der Verteilung der Stützstellen; Der Fehler ist bei großen n an den Intervallrändern deutlich größer, als in der Intervallmitte

9.10 Wahl der Stützstellen

Mit äquidistante Stützstellen konvergiert das Interpolationspolynom nicht immer gegen die zugrundeliegende stetige Funktion, wenn die Anzahl der Stützstellen & damit der Grad des Polynoms wächst.**Lösung:** Nicht-aquidistante Verteilung der Stützstellen, dichter an den Intervallgrenzen.

9.11 Chebyshev-Punkte

haben die Eigenschaft; senkrechte Projektion von gleichverteilten Punkten auf dem Einheitskreis. $t_k = cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, ..., n, auf\,]-1, 1[$; Invtervall: $]a, b[: x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k$. ⇒ Fehler wird gleichmäßiger verteiltund Konvergenz erreicht.

9.12 Schwächen der Polynominterpolation

Hoher Rechenaufwand bei meist keiner hoher Differenzierbarkeitsgrad benötigt wird; RB kann Interpolationsfehler sehr groß sein; Bei wachsenden n ist es unmöglich eine Konvergenz gegen die zu interpolierenden Funktion sicherzustellen; **R:** approx ≙ lin Interpolation; Spline ≙ Spline interpolation; Bibliotheken für Polynominterpolation;

9.13 Spline

Jede Funktion S_i ist ein Polynom vom Grad $n \leq k$; $S(x)$ ist $(k-1)$ - mal stetig differenzierbar, d.h. für alle $x_i (i = 1, ..., n-1)$ gilt: $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$;

9.14 Kubisch

Ansatz: $S_i = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$; **Gleichungssystem:** 4n Parameter $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, ..., n-1)$; **2n Interpolationsbedingungen:** am Rand je nur eine. $S_ix_i = y_i$; $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ für $(i = 0, 1, ..., n-1)$ ⇒ Stetigkeit; **Stetigkeit der 1. Abl:** $S_i^{'}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{'}(x_{i+1})$; ⇔ $S_i^{'}(x_{i+1}) - S_{i+1}^{'}(x_{i+1}) = 0$; für $i = 0, 1, ..., n-2$; **Stetigkeit der 2. Abl.:** $S_i^{''}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{''}(x_{i+1})$; $S_i^{''}(x_{i+1}) - S_{i+1}^{''}(x_i+1) = 0$; für $i = 0, 1, ..., n-2$); **natürlicher Randbedingungen:** $S_0^{''}(x_0) = 0$; $S_{n-1}^{''}(x_n) = 0$; nach geschickter Umformung der Gleichungen hat das LGS Tridiagonalform. **Rechenaufwand** $\mathcal{O}(n)$ Gleitpunktoperationen.

10 NumInt

Verbesserung der Näherung: Aufteilung in kleine Teilintervalle & Summe von Rechtecksflächen bilden; Interpolation mit Polynom höheren Grades durch diskrete Punkte.

10.1 Ansatz[a,b]

$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{j=0}^{i} \alpha_j f(x_j)$

10.2 Def

p_k≙ Interpolationspolynom; I_n≙ Quadraturformel; K≙ Fehlerkonstante des Verfahrens.; Singularität ≙ isolierter Punkt, der ungewöhnliches Verhalten zeigt;

10.3 Newton-Cotes

Das Intergral des p_k dient als Appr. für das Int. von f(x); $\int_0^1 f(t)dt \approx \int_0^1 p_k(t)dt = \sum_{j=0}^k \alpha_j f(t_j)$ Das Interpolationspolynom muss nicht explizit aufgestellt werden, es dient vorab der Bestimmung der Gewichte α_j; $\int_0^1 p_k(t) = \int_0^1 \sum f(t_j)L_j(t)dt = \sum f(t_j)\int_0^1 L_j(t)dt$

10.4 Trapezregel

$T_1 : \int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{2}(f(0)+f(1))$; $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{1}\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$;

T_n : Für Teilintervalle mit gleicher Länge: $h = \frac{b-a}{n}$; $T_n = h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2})$;

10.5 SimpsonRegel

$S_1 : \int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(0.5) + f(1))$; $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$;

Für n = 1: $\frac{(b-a)}{2\cdot1}\frac{1}{3}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$;

Für n allg.: $\frac{(b-a)}{2n}\frac{1}{3}(f(a) + 4(a+h) + ... + 4f(b-h) + f(b))$ S_n : **Beachte gerade Anzahl an Teilinvervallen!**; Für 2n Teilintervalle, 2n+1 Knoten mit gleicher Länge $h = \frac{b-a}{2n}$; $S_2 = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$;

Newton-Cotes Regeln

Basierend auf äquidistanten Knoten $t_j = \frac{j}{k}$

k	α_i Grad des Interpolationspolynoms					Methode	Ordnung p
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapez	2
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			Simpson	4
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$-Rule	4
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	Milne	6

d.h. exakt für $\int_0^1 x^k dx$ $(k=0,1,...,5)$

Falls α_i positiv. Integrationsregeln stabil; $k \leq 7 \& k = 9 \Rightarrow$ positive Gewichte;

10.6 Ordnung Integrationsregel

Eine Integrationsregel hat Ordnung p, wenn sie für Polynome vom Grad ≤ p-1 exakte Werte liefert; T_1 Ordnung 2 ⇒ exakt für Polynome Grad ≤ 1; Ordnung Newton-Cotes Regeln: mind. Ordnung k+1 (k: GRad des Interpolationspolynoms); **Beweis der Ordnung:** $1 = \int_0^1 x^0dx \overset{!}{=}$; $\frac{1}{2} = \int_0^1 xdx \overset{!}{=}$; $\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \overset{!}{=}$; $\frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 \overset{!}{=}$;

10.7 Fehler Quadratur

Für (globalen) Fehler $e_{I_n} = \int_a^b f(x)dx - I_n$ einer Quadraturformel I_n der Ordnung p auf $[a, b]$ gilt: $|e_{I_n}| = (b-a)h^pK|f^{(p)}(\xi)|, \xi \in\,]a, b[, h = \frac{b-a}{n}$ & $|e_{I_n}| \leq (b-a)h^pK \cdot max_{a\leq x\leq b}|f^{(p)}(x)|$;

10.8 Grenzen NeCo

viele äquidistante Knoten → Gewichte negativ → Verfahren instabil; geschlossene NeCoRe → Funktionsauswertung an RB → Problem mit Singularitäten. größtmögliche Ordnung unerreichbar wegen äquidistanten Knoten; **Lösung:**

10.9 GauQua

Gauß-Quadraturformeln

k	α_j			t_j			Ordnung
0	1			$\frac{1}{2}$			2
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$		4
2	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{10}$	6

Nur positive Gewichte!

11 Allgemein

11.1 Symbole

Stichprobenstandardabweichung ≙ s; Standardabweichung ≙σ

11.2 Abl.

$x^n \hat{=} nx^{n-1}$

$sinx \hat{=} cosx$; $cosx \hat{=} -sinx$; $tanx \hat{=} \frac{1}{cos^2x} = 1 + tan^2x$; $cotx \hat{=} -\frac{1}{sin^2x} = -1 - cot^2x$; $e^x \hat{=} e^x$; $a^x \hat{=} (\ln a) \cdot a^x$; $\ln x \hat{=} \frac{1}{x}$; $\log_a x \hat{=} \frac{1}{(\ln a)\cdot x}$;

11.3 Abl.Regeln

Faktorregel $y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$; **Summenregel** $y = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$; **Produktregel** $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$; $y = u \cdot v \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot x'$; **Quotientenregel** $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'\cdot v - u \cdot v'}{v^2}$; **Kettenregel** $f'(x) = F'(u)u'(x) \hat{=} F'(u)$: $Ableitung\ der\ Äußeren\ Funktion; u'(x)$: $Ableitung\ der\ Inneren\ Funktion$

11.4 Integralregel, elementar

Faktorregel $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$; **Summenregel** $\int_a^b [f_1(x) + ... + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx$; **Vertauschungsregel** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für $(a \leq c \leq b)$;

11.5 Berechnung best. Integr.

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

11.6 Bin.Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1. Binom; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; 2. Binom; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 3. Binom;

11.7 Wurzel

$\sqrt{a^2} = |a|$; $b = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;
$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = (a^{\frac{1}{n}}) \cdot (b^{\frac{1}{n}}) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ für $b > 0$
$\Rightarrow m, n \in \mathbb{N}^*; a \geq 0, b \geq 0$

11.8 Potenzen

$x^{-n} = \frac{1}{n}$; $a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $a \neq 0$; $!(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$; $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ für $b \neq 0$;
$a > 0 : a^b = e^{b \ln a}$; $0^0 = 1$; $x_1^1 = x_1$;

11.9 Einigungen

∘ Beim Runden mind. eine Nachkommastelle.

11.10 Trigonometrischer Pythagoras

$\sin^2 x + cos^2 x = 1$

11.11 e

$y = a^x = e^{\lambda x} (\lambda = lna)$; Def.Ber.: $\infty < x < \infty$; Wert.ber.: $0 < y < \infty$; Mon.: $\lambda > 0$ d.h. a > 1: str. mon. wachs; $\lambda < 0$ d.h. 0 < a > 1): str. mon. fall.; Asymp.: y = 0 (x-Achse); $y(0) = 1$ (alle Kurven schneide die y-Achse bei y = 1); $y = a^{-1}$ entsteht durch Spiegelung von $y = a^x$ an der y-Achse.

11.12 Logarithm.

$y = \log_a x$ mit x>0 ist Umkehrfunktion von $y = a^x$; Def.Ber.: x >0; Wert.Ber.: $-\infty < y < \infty$; Nullst.: $x_1 = 1$; Monot.: 0 < a < 1: str.mon. fall; a > 1; str.mon.wachs.; Asymp.: x = 0(yAchse); $log_a 1 = 0, log_a a = 1$; $y = log_a x$ ist Spieg. von $y = a^x$ an Wink.halb. d. 1. Quadr.