Black-Litterman-Model

一、Black-Litterman 模型的目的

1、 改进马科维茨的均值-方差模型

2、 Markowitz 模型的缺点：

1） 需要提供组合中资产的预期收益率r和协方差矩阵$\sum$，普通投资者无法准确估计这两个参数，而且很多时候 Markowitz 模型用的是历史收益率和协方差矩阵作为r和$\sum$，显然是不准确的。

2） Markowitz 模型求出的配置权重对于预期收益率r非常敏感，r略微改变就会引起最优资产配置权重的巨大变化，给实际操作带来麻烦。

3、 Black-Litterman 模型的改进：该模型以市场均衡假设推出的资产收益率为出发点，结合投资者对不同投资品收益率的主动判断，最终确定投资品的收益率和最佳的投资组合配置。

二、贝叶斯模型框架

(一) 基本思路

1、 基本公式：

$$P(c|x)=\frac{P(x|c)P(c)}{P(x)}\begin{cases}P(c|x): Posterior\ Probability(\text{后验概率})\\ P(x|c): Likelihood\\ P(c): Class\ Prior\ Probability(\text{先验概率})\\ P(x): Predictor\ Prior\ Probability\end{cases}$$

$$P(c|X)=P(x_1|c)\times P(x_2|c)\times\cdots\times P(x_n|c)\times P(c)$$

2、 基本思路：贝叶斯公式的基本思路就是我们对事物有一个事先的认知，称为先验概率$P(c)$；之后出现了新的证据或事实$P(x|c)$，我们再用这部分事实调整我们对事物的事前认知，最终得到一个更符合事实的后验概率$P(c|x)$。用这个后验概率来作为该变量的描述，就更为准确。

3、 具体步骤：

1）第一步：确定先验概率分布。我们假设资产的收益率服从正态分布，而未来的预期收益率理所当然的应该用这个正态分布的均值μ来估计。但贝叶斯学派认为这个未知的均值依然不是一个定值，而是一个随机变量，因此再用另一个正态分布来描述μ，这个正态分布就是预期收益率的先验分布。

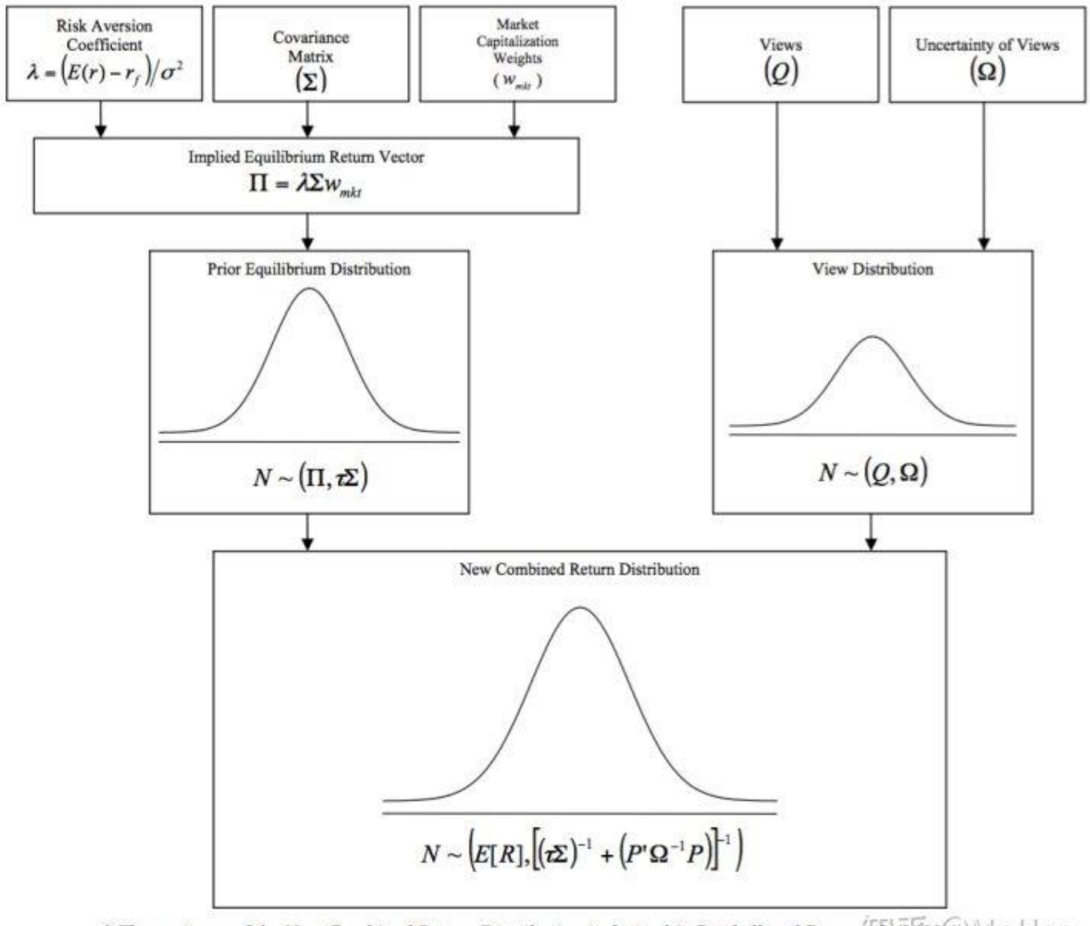
2）第二步：处理新的事实。新的事实也叫做条件概率$P(x|c)$，或者似然函数（Likelihood）。Black-Litterman 将投资者对组合中资产收益情况的观点当做这个似然函数，而这个似然函数也假定服从正态分布。

3）第三步：对分母的理解。只需要知道分母是一个常数就可以了，因为完全不影响结果（是常数的原因是分母是一个根据全概率公式而来的积分或者加和，在定义域上积完就是常数了）。

(二) 共轭分布（Conjugate）

大体可以理解为后验和先验是同一种分布。共轭分布几乎是整个 Black-Litterman 模型在形式上的核心。原因在于一个正态分布乘以另一个正态分布结果还依然是正态分布。这就是为什么模型不仅要假设μ服从正态分布，连投资者的观点也要假设为正态分布的原因。这两个正态分布都在分子上，相乘后结果仍为正态分布，而分母上的积分为常数，并不影响新的正态分布的均值

和方差。也就是说先验和后验同属于正态分布，两者共轭，因此后验分布的均值方差都可以根据公式快速得到。这也就方便我们得到后验分布的均值，也就是我们想要的期望收益率。



(三) 逆向最优化（Reverse Optimization）

这个逆向最优化解决的是资产收益率的均值（也就是r的均值μ）的先验分布的均值究竟是怎么得到的问题。简单来说就是我们对市场上已有资产的收益率的先验认知到底应该是什么。在该模型之前，无论是用历史收益率还是用投资者个人认为正确的某些形式的收益率作为先验，其本质都是从自己的观念出发，自己认为什么正确什么就是正确的。但这样其实会对结果造成非常大的误差。尽管这也是贝叶斯学派被诟病的最多的地方，但逆向最优化的方法确实还是给出了一种更好的解决方法，那就是不从主观出发来得到先验分布，而是从市场出发。

从市场出发的含义是：我们认为市场当前的状态是一种均衡状态，而均衡状态之所以能达到就是因为市场上所有投资者追求效用最大化的结果。因此，Black 和 Litterman 认为，**将现有市场上资产按照市值来加权的权重反向带入最优化公式**，得到的收益率恰恰就是均衡状态下的资产收益率，而这就是资产收益率的先验。（最优化公式是根据效用函数求一阶导得到的，带入收益率可以到得最优配置权重。BL 把这个方法倒转过来，带入市场上的权重，倒算出的收益率则为先验）。

(四) 信息集的量化

这里所谓的信息集就是投资者的观点，也就是贝叶斯公式中的似然函数$P(x|c)$，它是基于先验收益率的一个条件概率。这个部分允许投资人加入自己对市场的观点，也因此各不相同。不同

的观点最终得到的后验结果不同，谁的观点更准确，最终谁的配置就更能赚钱。

但是在 BL 之前，对观点的定量估计是一件非常困难的事情，也因此 Black 和 Litterman 所做的工作就非常有意义。需要承认的是，把信息集也假定成正态分布最后通过共轭来快速得到结果的这种思路，确实还是对解决实际问题提供了不少帮助。

三、Black-Litterman 计算公式

(一) 期望收益（Expected Return）

1、 假设资产的收益率r服从正态分布：

$$r \sim N(\mu, \Sigma)$$

收益率的期望 μ 根据贝叶斯学派观点不是一个常数，因此假设它服从另外一个正态分布：

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

这里的 τ 是一个乘子，它表示 μ 的协方差矩阵 Π 和r的协方差矩阵 Σ 只差一个常数，通常 τ 不会大于 1。

2、 通过上面两个公式也可以知道资产收益率r服从下面这个分布：

$$r \sim N(\Pi, (1+\tau)\Sigma)$$

τ 越小代表投资者对 μ 越有信心，为 0 时就代表期望收益 μ 代表一个常数。而 Π 则是这个期望收益 μ 的分布的期望，即就是我们用来当做预期收益率的值。

(二) 逆向最优化（Reverse Optimization）

1、 风险厌恶因子δ：在$\Pi = \delta\Sigma w$两边同时乘以权重w'

$$\delta = \frac{w'_{mkt}\Pi}{w'_{mkt}\Sigma w_{mkt}} = \frac{r - r_f}{\sigma^2}$$

此处的Π可以使用股票历史收益率的均值代替，所以这个风险厌恶因子其实就是 Sharpe-Ratio 再除以标准差，可以用此方法来估计。

【提示】此处的历史收益率可以指定一个时间窗口 T（例如 200 天）来进行计算，同理协方差矩阵Σ也根据此 T 窗口进行更新，而权重w取此 T 窗口的最后一期的市场权重w_{mkt}，需要注意的是r_f需要与此处的数据时间度量一致，假设年化无风险利率为3.24%，如果数据是按天计算的收益率，则$r_f = \ln(1+3.24\%)/365$；如果数据是按周计算的收益率，则$r_f = \ln(1+3.24\%)/(365 \div 7)$

2、 期望收益的先验：

首先选定经典的效用函数：

$$U = w'\Pi - (\delta/2)w'\Sigma w$$

对权重求一阶导得到最优化公式并求解：

$$\frac{dU}{dw'} = \Pi - \delta\Sigma w = 0$$

得到期望公式：

$$\Pi = \delta\Sigma w$$

代入市场权重w_{mkt}可以得到先验期望Π_{pr}：

$$\Pi_{pr} = \delta\Sigma w_{mkt}$$

而最后得到的后验期望Π_{post}后再带回可以得到最终权重w^*：

$$w^* = (\delta\Sigma)^{-1}\Pi_{post}$$

(三) 信息集的量化

1、 观点矩阵P、期望收益向量Q：

由于信息集也被假定为服从正态分布，因此它可以用一个线性公式表达：

$$P\mu = Q + \varepsilon$$

其中P表示一个观点矩阵，维度为$K * N$，其中K代表有K个观点，N为可投资金融产品的数量。P的每一行为一个观点，它无需对每一个组合中的资产表达观点，而被选中表达观点的资产可以有两种：

1) 第一种为绝对观点，如某一个资产的未来的收益率；
2) 第二种是相对的观点，如某几个资产未来的收益率会超过另外几个资产多少个百分点等等。

μ为资产收益率的期望，与P相乘代表着某个观点作用在所有资产上得到一个Q的期望收益，而这些收益不是确定的服从正态分布，它们拥有ε的方差。这种方式有一个重要的好处就是该条件概率的条件 μ 也就是先验分布会因为和P相乘而变成Q，从而消去的后验概率表达式中的 μ ，转而用Q来表示，变得易于操作。

2、 举例说明：

	苹果	微软	亚马逊	摩根	VISA	强生	沃尔玛
w_{mkt}	61.5%	12.4%	11.6%	5.5%	5.2%	2.2%	1.6%
Π_{pr}	7.56%	6.77%	4.30%	9.03%	8.36%	6.92%	3.94%

1） Market value as view：投资者无观点，即采用当前市值权重作为最终权重，此种情况下，无需做 BL 模型，直接采用w_{mkt}作为最终的w^*

2） Near period return as view：根据最近一段时期的平均回报率作为观点，也属于将历史收益率作为预期收益率的一种观点

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N\times N} \quad \mu = \begin{bmatrix} E(A) \\ E(B) \\ \vdots \\ E(N) \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad Q = \begin{bmatrix} \overline{r(A)} \\ \overline{r(B)} \\ \vdots \\ \overline{r(N)} \end{bmatrix}_{N\times 1}$$

其中$\overline{r(\iota)}$代表第i种金融产品在过去一段时间内的平均历史收益率（例如过去 10 期）

3） Reasonable views：投资者自己的合理观点（例如：各券商一致性预期）

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{bmatrix}, \ \Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 \\ 0 & \omega_{22} \end{bmatrix}$$

这里表示投资者有 2 个观点，第一个观点是：苹果公司股票会比亚马逊公司预期收益率高 2%，且这个收益率有ω_{11}的方差；第二个观点是：微软公司股票会比亚马逊和摩根等权重股票组合预期收益率高 4%，且这个收益率有ω_{22}的方差。

3、 方差矩阵Ω：

它是一个对角矩阵，表示观点之间是没有相关性的，这一点也是为了计算方便。而考虑其实际含义时会发现，它的本质其实是以P为权重的资产组合收益率 μ 的方差，所以：

$$\Omega = drag(\tau P\Sigma P') = \begin{bmatrix} \tau P_1\Sigma {P_1}' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau P_2\Sigma {P_2}' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tau P_K\Sigma {P_K}' \end{bmatrix}_{K\times K}$$

这里P_i代表观点矩阵P中的第i行。

(四) 后验概率分布

1、 后验概率分布的推导：

假设一组观测样本 $x_1 \dots x_n$ 服从独立同分布于正态分布，即 $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则似然为：

$$L(x_1 \dots x_n|\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right)$$

同时，假设参数μ的先验为 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ ，则

$$f(\mu|\mu_0, \sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0}(\mu - \mu_0)^2\right)$$

从而相乘可以得到后验概率正比于：

$$exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\right)\left(\mu - \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}\right)^2\right)$$

也就是后验概率均值为：

$$\left(\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}\right)$$

方差为：

$$\left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}\right)^{-1}$$

2、 BL 模型期望收益的后验分布均值为：

$$\Pi_{post} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q)$$

(五) 后验概率分布

最终的最优配置权重只需要把求出的后验分布的均值和方差带入公式：

$$w^* = (\delta\Sigma)^{-1}\Pi_{post}$$